

数字信号处理

周治国

2022.8

第二章

离散时间信号与系统分析基础

§ 2-6 DTFT的对称性质

一、几个术语

1.对任意实序列:

1. $x(n)$ 为实序列, 若 $x(n) = x(-n)$, 则称偶对称
记为: $x_e(n) = x_e(-n)$ even

2. $x(n)$ 为实序列, 若 $x(n) = -x(-n)$, 则称奇对称
记为: $x_o(n) = -x_o(-n)$ odd

§ 2-6 DTFT的对称性质

一、几个术语

1.对任意实序列:

3. $x(n)$ 为实序列, $\frac{1}{2}[x(n) + x(-n)]$ 是偶序列

即: $x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x(-n)]$

4. $x(n)$ 为实序列, $\frac{1}{2}[x(n) - x(-n)]$ 是奇序列

即: $x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x(-n)]$

$$\Rightarrow x(n) = x_e(n) + x_o(n)$$

结论: 任一实序列可由偶序列和奇序列之和构成。

§ 2-6 DTFT的对称性质

一、几个术语

2.对任意复序列:

1. $x(n)$ 为复序列, 若 $x(n) = x^*(-n)$, 则称共轭对称
记为: $x_e(n) = x_e^*(-n)$

2. $x(n)$ 为复序列, 若 $x(n) = -x^*(-n)$, 则称共轭反对称
记为: $x_o(n) = -x_o^*(-n)$

§ 2-6 DTFT的对称性质

一、几个术语

2.对任意复序列:

3. $x(n)$ 为复序列, $\frac{1}{2}[x(n) + x^*(-n)]$ 是共轭对称序列

$$\text{即: } x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(-n)]$$

4. $x(n)$ 为复序列, $\frac{1}{2}[x(n) - x^*(-n)]$ 是共轭反对称序列

$$\text{即: } x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(-n)]$$

$$\Rightarrow x(n) = x_e(n) + x_o(n)$$

结论: 任一复序列可由共轭对称序列和共轭反对称序列之和构成。

§ 2-6 DTFT的对称性质

3.DTFT的共轭对称与共轭反对称:

DTFT离散时间傅里叶变换

$$\begin{cases} X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\omega n} \\ x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \end{cases}$$

$$X(e^{j\omega}) = X_e(e^{j\omega}) + X_o(e^{j\omega})$$

$$X_e(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} [X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})] \text{ 是共轭对称函数}$$

$$\text{即: } X_e(e^{j\omega}) = X_e^*(e^{-j\omega})$$

$$X_o(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} [X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega})] \text{ 是共轭反对称函数}$$

$$\text{即: } X_o(e^{j\omega}) = -X_o^*(e^{-j\omega})$$

§ 2-6 DTFT的对称性质

二、DTFT的对称性质：

DTFT离散时间傅里叶变换

$$\begin{cases} X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\omega n} \\ x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \end{cases}$$



即：

$$DTFT[x(n)] = X(e^{j\omega})$$

$$DTFT[x^*(n)] = X^*(e^{-j\omega})$$

$$DTFT[x^*(-n)] = X^*(e^{j\omega})$$

$$x(n) \leftrightarrow X(e^{j\omega})$$

$$x^*(n) \leftrightarrow X^*(e^{-j\omega})$$

$$x^*(-n) \leftrightarrow X^*(e^{j\omega})$$

证明：

$$1. DTFT[x^*(n)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^*(n)e^{-j\omega n} = \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{j\omega n} \right]^* = [X(e^{-j\omega})]^* = X^*(e^{-j\omega})$$

$$2. DTFT[x^*(-n)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^*(-n)e^{-j\omega n} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x^*(m)e^{j\omega m} = \left[\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)e^{-j\omega m} \right]^*$$

$$= \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\omega n} \right]^* = [X(e^{j\omega})]^* = X^*(e^{j\omega})$$

§ 2-6 DTFT的对称性质

DTFT离散时间傅里叶变换

$$\begin{cases} X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\omega n} \\ x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \end{cases}$$

$$x(n) \leftrightarrow X(e^{j\omega})$$

$$x^*(n) \leftrightarrow X^*(e^{-j\omega})$$

$$x^*(-n) \leftrightarrow X^*(e^{j\omega})$$

$$\operatorname{Re}\{x(n)\} = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(n)] \leftrightarrow \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})] = X_e(e^{j\omega})$$

$$j \operatorname{Im}\{x(n)\} = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(n)] \leftrightarrow \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega})] = X_o(e^{j\omega})$$

$$x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(-n)] \leftrightarrow \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) + X^*(e^{j\omega})] = \operatorname{Re}\{X(e^{j\omega})\}$$

$$x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(-n)] \leftrightarrow \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) - X^*(e^{j\omega})] = j \operatorname{Im}\{X(e^{j\omega})\}$$

§ 2-6 DTFT的对称性质

实序列: $x(n) \leftrightarrow X(e^{j\omega})$

$$1. x(n) = x^*(n) \Rightarrow X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$$

$$2. \begin{cases} X(e^{j\omega}) = \operatorname{Re}\{X(e^{j\omega})\} + j \operatorname{Im}\{X(e^{j\omega})\} \\ X^*(e^{-j\omega}) = \operatorname{Re}\{X(e^{-j\omega})\} - j \operatorname{Im}\{X(e^{-j\omega})\} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}\{X(e^{j\omega})\} = \operatorname{Re}\{X(e^{-j\omega})\} \\ \operatorname{Im}\{X(e^{j\omega})\} = -\operatorname{Im}\{X(e^{-j\omega})\} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{实部相等} \\ \text{虚部相等} \end{array}$$

$X(e^{j\omega})$ 实部是偶函数, 虚部是奇函数

$$3. \text{极坐标形式: } X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| e^{j \arg[X(e^{j\omega})]}$$

幅度是 ω 的偶函数 $|X(e^{j\omega})| = |X(e^{-j\omega})|$

相位是 ω 的奇函数 $\arg[X(e^{j\omega})] = -\arg[X(e^{-j\omega})]$

$$x(n) \leftrightarrow X(e^{j\omega})$$

$$x^*(n) \leftrightarrow X^*(e^{-j\omega})$$

$$x^*(-n) \leftrightarrow X^*(e^{j\omega})$$