数字信号处理

周治国

2022.8

第二章

离散时间信号与系统分析基础

§2-7 Z变换

一、Z 变换的定义

$$\begin{cases} X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \\ z = r \cdot e^{j\omega} \end{cases}$$

z是一个复变量

$$\Rightarrow X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\left(r \cdot e^{j\omega}\right)^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) r^{-n} \cdot e^{-j\omega n} = F\left\{x(n) r^{-n}\right\}$$

L变换是$CT\ SAS$的复频域变换，是F变换的推广，把不绝对可积的信号变为指数函数的积分形式；

Z变换是DTF变换的推广，把不绝对可和的信号变为指数函数的求和形式；

§2-7 Z变换

二、收敛域(ROC Region of Convergence)

定义：使某一序列$x(n)$的Z 变换$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$ 级数收敛的Z 平面上所有z 值的集合。

收敛条件：$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| x(n) z^{-n} \right| < \infty$

P36 收敛域与零极点关系

一般幂级数收敛域为z 平面上某个环形区域：

$R_{x-} < |z| < R_{x+}$

§2-7　Z变换

三、序列特性与收敛域

1. 有限长序列
2. 右边序列
3. 左边序列
4. 双边序列

（1）有限序列

例：求单位取样序列$\delta(n)$ 的z变换。

解：单位取样序列是有限长序列的特例，

所以其ZT为：

$$Z\left[\delta(n)\right]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta\left(n\right)z^{-n}=1\times z^{-n}\Big|_{n=0}=1$$

$$N_1=N_2=0$$

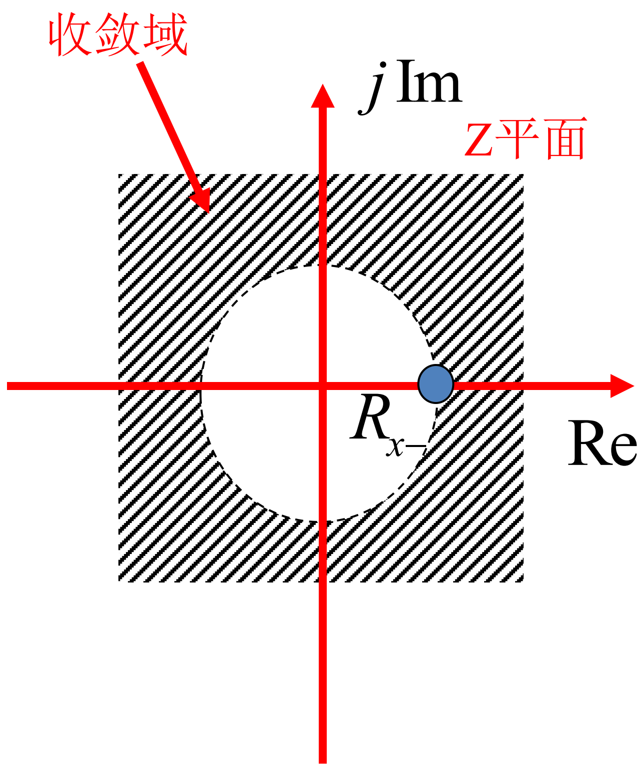
收敛域为：$0\le|z|\le\infty$ 即是整个Z平面。

（2）右边序列

$$x(n)=\begin{cases}x(n), & n\ge N_1\\ 0, & n\text{为其他值}\end{cases}$$

其ZT为

$$X(z)=\sum_{n=N_1}^{\infty}x(n)z^{-n}$$



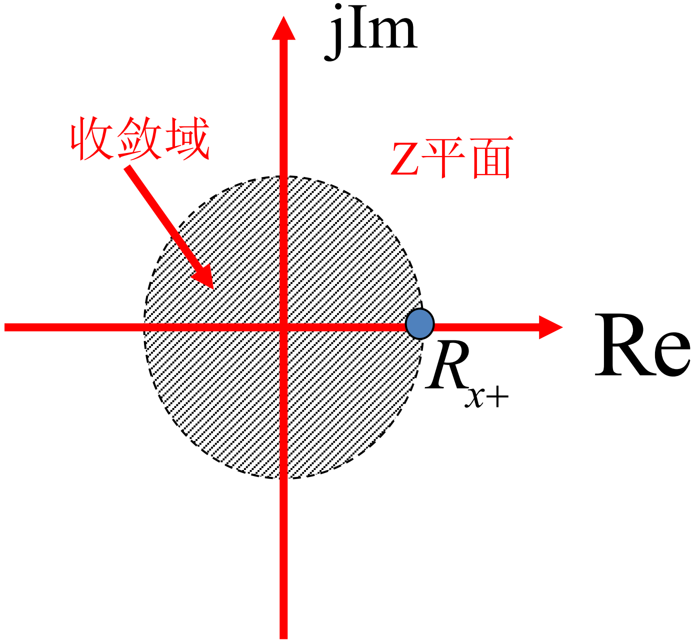
收敛域为：$|z|>R_{x-}$ 如右图所示

特例：如果右边序列的 $N_1\ge 0$，则称该序列为因果序列。其ZT的收敛域 $R_{x-}<|z|\le\infty$

（3）左边序列 $x(n)=\begin{cases} x(n), & n \le N_2 \\ 0, & n\text{为其他值} \end{cases}$

其ZT为：$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{N_2} x(n) z^{-n}$

收敛域为：$|z| < R_{z+}$



特例：如果左边序列的 $N_2 \le 0$，则称该序列为逆因果序列，其收敛域为：$0 \le |z| < R_{z+}$

可见，收敛域可以包括0

（4）双边序列

双边序列是 n 从 $-\infty$ 一直延伸到 $+\infty$ 的序列，它可被看做是一个右边序列和一个左边序列的和。因此它的ZT 为

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}x(n)z^{-n}+\sum_{n=0}^{+\infty}x(n)z^{-n}$$

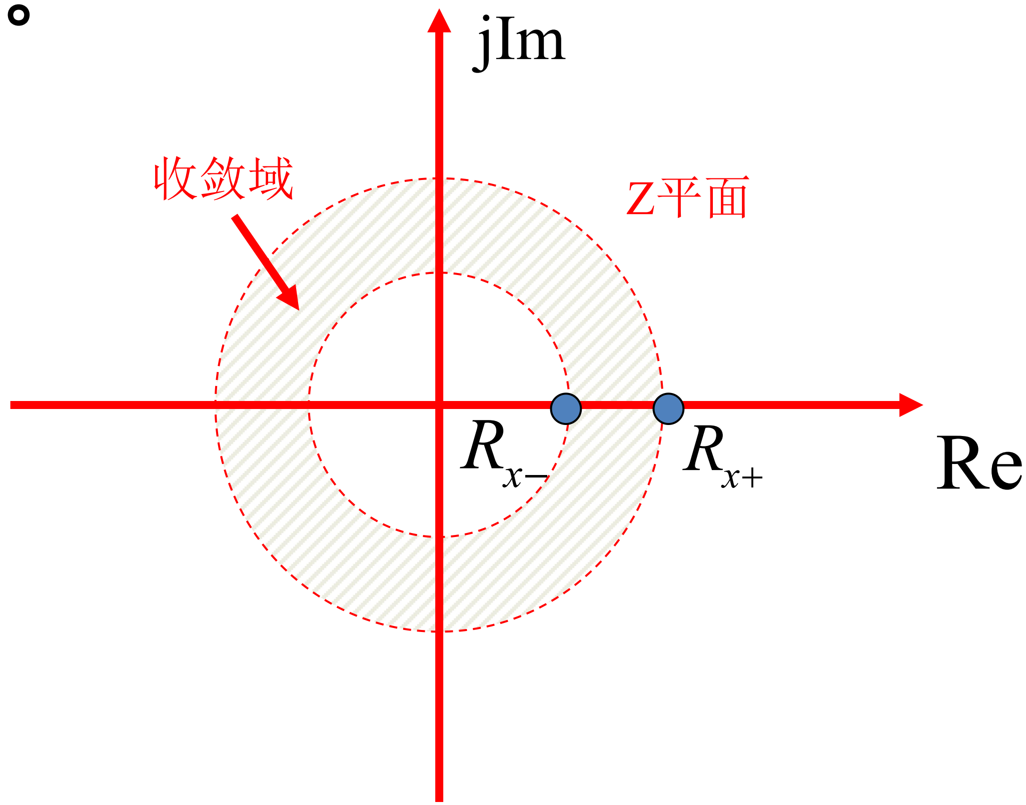
$$=X_1(z)+X_2(z)$$

$X_1(z)$和 $X_2(z)$分别左边序列和右边序列的ZT

双边序列ZT 的收敛域是这两个序列ZT 的收敛域的公共部分，即为一个环域：

$$R_{z-} < |z| < R_{z+}$$

如果$R_{z-} \geq R_{z+}$ ，则 $X(z)$ 无收敛域，所以该序列的ZT 不存在。



§2-8　L变换、F变换与Z变换关系

一、序列Z变换与L变换关系

理想取样信号：$\hat{x}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a(nT)\delta(t-nT)$

$$\hat{X}(s)=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{x}(t)e^{-st}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a(nT)\delta(t-nT)e^{-st}dt$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a(nT)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)e^{-st}dt$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a(nT)e^{-snT}$$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a(nT)z^{-n}$$

当$z=e^{sT}$时，Z变换就是L变换

§2-8　L变换、F变换与Z变换关系

一、序列Z变换与L变换关系

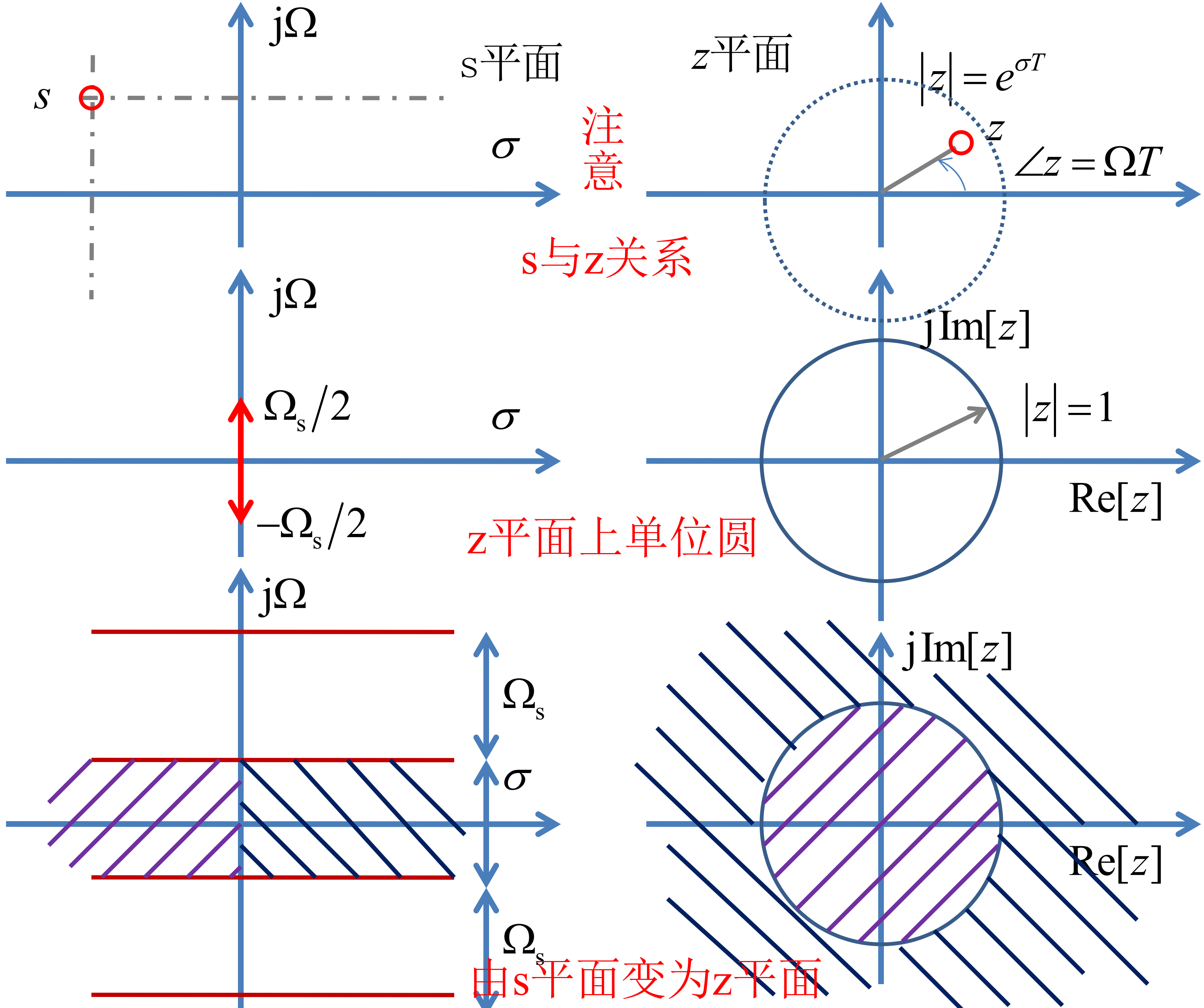
映射关系：$z = e^{sT}$

$$\begin{cases} s = \sigma + j\Omega \\ z = re^{j\omega} \end{cases}$$

$$\Rightarrow z = re^{j\omega} = e^{sT} = e^{\sigma T} \bullet e^{j\Omega T}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |z| = r = e^{\sigma T} \\ \angle z = \omega = \Omega T \end{cases}$$

见图$2-32$


jΩ
s平面
s
σ
注意
z平面
|z| = e^{σT}
z
∠z = ΩT
s与z关系
jΩ
Ω_s/2
σ
−Ω_s/2
j Im[z]
|z| = 1
Re[z]
z平面上单位圆
jΩ
Ω_s
σ
Ω_s
j Im[z]
Re[z]
由s平面变为z平面

§2-8 L变换、F变换与Z变换关系

二、序列Z变换与F变换关系

$$X(z)\big|_{z=re^{j\omega}} = X\left(re^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\left(r\cdot e^{j\omega}\right)^{-n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) r^{-n}\cdot e^{-j\omega n} = F\left\{x(n) r^{-n}\right\}$$

单位圆上的Z变换即序列的F变换，$r=1$

$$X(z)\big|_{z=e^{j\omega}} = X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

§2-9　逆Z变换

1、留数围线积分法

2、幂级数展开法

3、部分分式展开法

§2-10　Z变换的定理与性质

1、线性

2、序列的移位

3、乘指数序列

4、X(z)的微分

5、复数序列的共轭

6、初值定理

7、终值定理

8、序列的卷积

9、序列乘积的Z变换-复卷积定理

10、帕斯维尔定理

§2-12 系统函数

一、系统函数的定义

$$y(n)=x(n)*h(n)$$

$$Y(z)=X(z)H(z)$$

$$\Rightarrow H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$\Rightarrow h(n)=Z^{-1}\left[H(z)\right]$$

系统函数$H(z)$是单位取样响应$h(n)$ 的Z 变换；

如果$H(z)$收敛域包含单位圆$|z|=1$ 则单位圆上的

系统函数就是系统的频率响应$H\left(e^{j\omega}\right)$

§2-12 系统函数

二、系统函数和差分方程

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

$$Z\text{变换} \Rightarrow \sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r} X(z)$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

$$\Rightarrow H(z) = A\frac{\prod_{r=1}^{M}\left(1-c_r z^{-1}\right)}{\prod_{k=1}^{N}\left(1-d_k z^{-1}\right)}$$

除比例常数A以外，整个系统函数可由其全部极、零点确定。

§2-12 系统函数

三、系统函数的收敛域

- 稳定系统 $s=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|<\infty$
- 因果系统
- 稳定因果系统 $h(n)=0 \quad n<0$

稳定系统：系统函数$H(z)$在单位圆$|z|=1$上收敛，系统的频率响应$H(e^{j\omega})$存在。

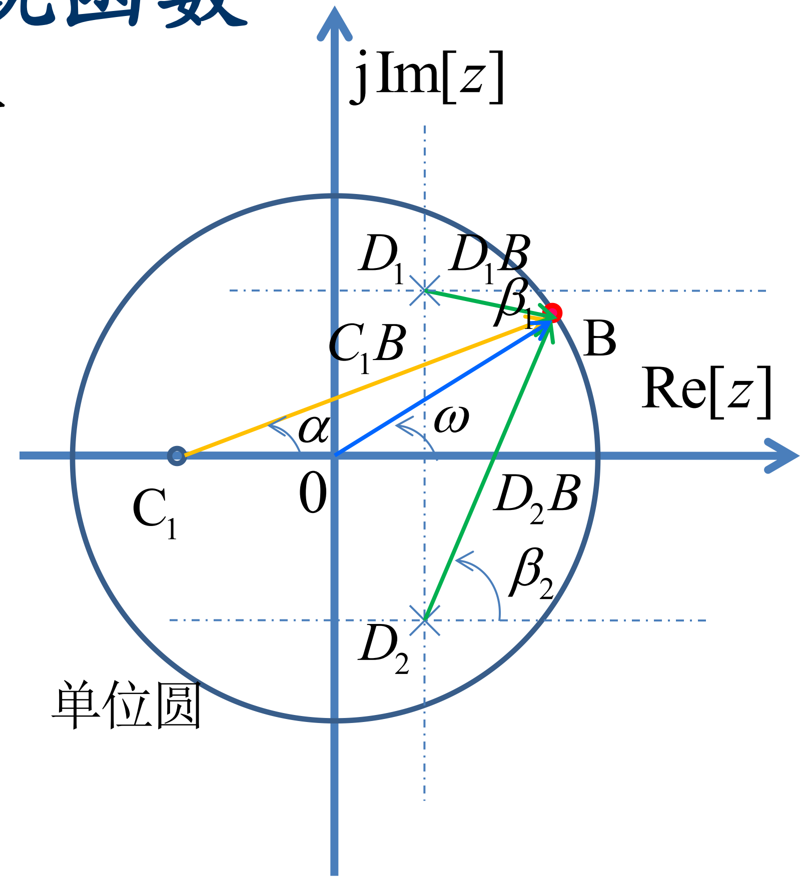
因果系统：收敛域为通过离原点最远的$H(z)$的极点的圆的外部。

因果稳定系统：系统函数$H(z)$必须在从单位圆到∞的整个区域收敛，即系统函数的全部极点必须在单位圆以内，且收敛域包含单位圆。

§2-12 系统函数

四、系统频率响应的几何确定法

$$H(z)=A\frac{\prod_{r=1}^{M}\left(1-c_r z^{-1}\right)}{\prod_{k=1}^{N}\left(1-d_k z^{-1}\right)}=Az^{-(M-N)}\frac{\prod_{r=1}^{M}\left(z-c_r\right)}{\prod_{k=1}^{N}\left(z-d_k\right)}$$



设收敛域包括单位圆，系统频率响应为：

$$H\left(e^{j\omega}\right)=Ae^{-j\omega(M-N)}\frac{\prod_{r=1}^{M}\left(e^{j\omega}-c_r\right)}{\prod_{k=1}^{N}\left(e^{j\omega}-d_k\right)}$$

z平面上零点c_r标志为“o”极点d_k标志为“×”，单位圆上$z=e^{j\omega}$的位置用B表示

$c_r=\overrightarrow{OC_r}$；$d_k=\overrightarrow{OD_k}$；$z=e^{j\omega}=\overrightarrow{OB}$

$$H\left(e^{j\omega}\right)=Ae^{-j\omega(M-N)}\frac{\prod_{r=1}^{M}\overrightarrow{C_rB}}{\prod_{k=1}^{N}\overrightarrow{D_kB}}$$

四、系统频率响应的几何确定法

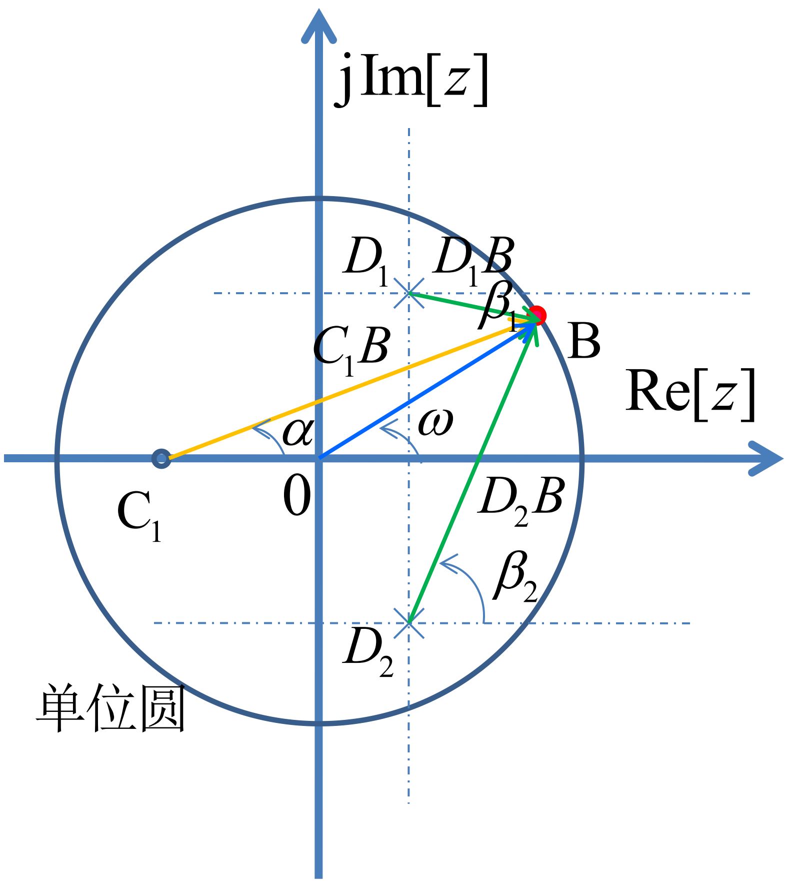
$$H\left(e^{j\omega}\right)=Ae^{-j\omega(M-N)}\frac{\prod_{r=1}^{M}\overrightarrow{C_rB}}{\prod_{k=1}^{N}\overrightarrow{D_kB}}$$

以极坐标表示：

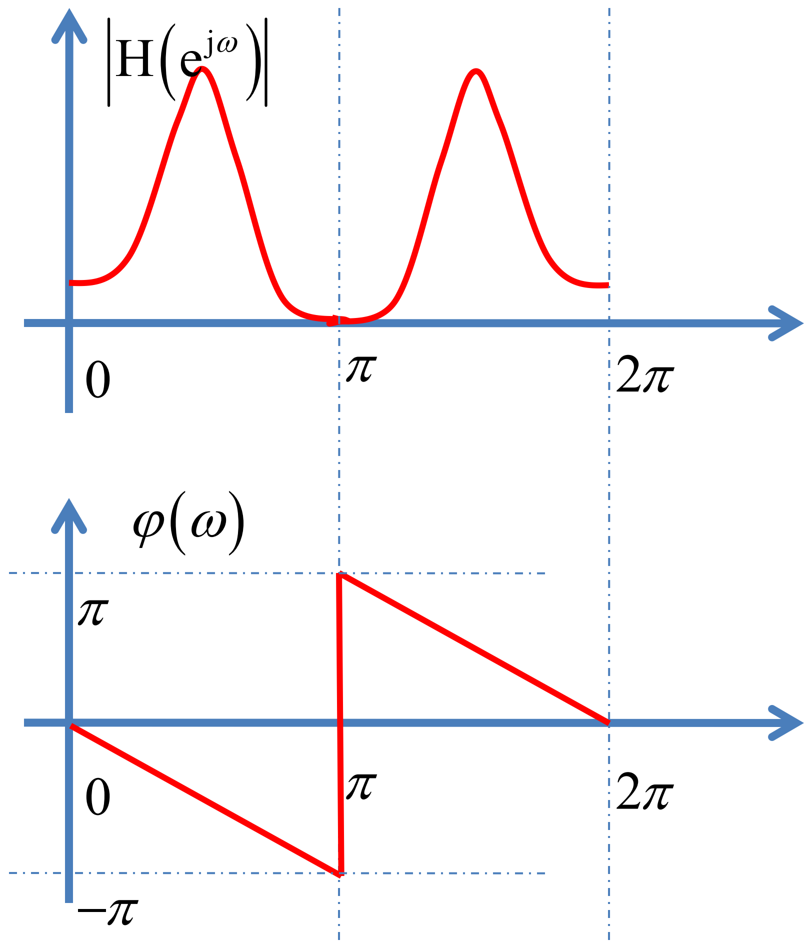
$$\begin{cases}\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|=|A|\dfrac{\prod_{r=1}^{M}\left|C_rB\right|}{\prod_{k=1}^{N}\left|D_kB\right|}=\dfrac{\text{各零矢量模的连乘积}}{\text{各极矢量模的连乘积}} \\ \varphi(\omega)=\sum_{r=1}^{M}\alpha_r-\sum_{k=1}^{N}\beta_k-(M-N)\omega \\ =\text{零矢量幅角之和}-\text{积矢量复角之和}-(M-N)\omega\end{cases}$$

§ 2-12　系统函数

四、系统频率响应的几何确定法(图2-35)



系统函数的零极点矢量图



系统的振幅特性和相位特性

可见，知道系统的零极点分布后，就能很容易确定零极点位置对系统特性的影响：

（1）当B点转到极点附近时，极点矢量长度最短，因而幅度特性可能出现峰值，且极点愈靠近单位圆，极点矢量长度就愈短，峰值就愈高愈尖锐。如果极点在单位圆上，则幅度特性为∞，系统不稳定。

（2）当B点转到零点附近时，零点矢量长度变短，幅度特性将出现谷值，零点愈靠近单位圆，谷值就愈接近零。当零点处在单位圆上时，谷值为零。

结论：极点位置主要影响频响的峰值及尖锐程度，零点位置主要影响频响的谷值位置及形状。