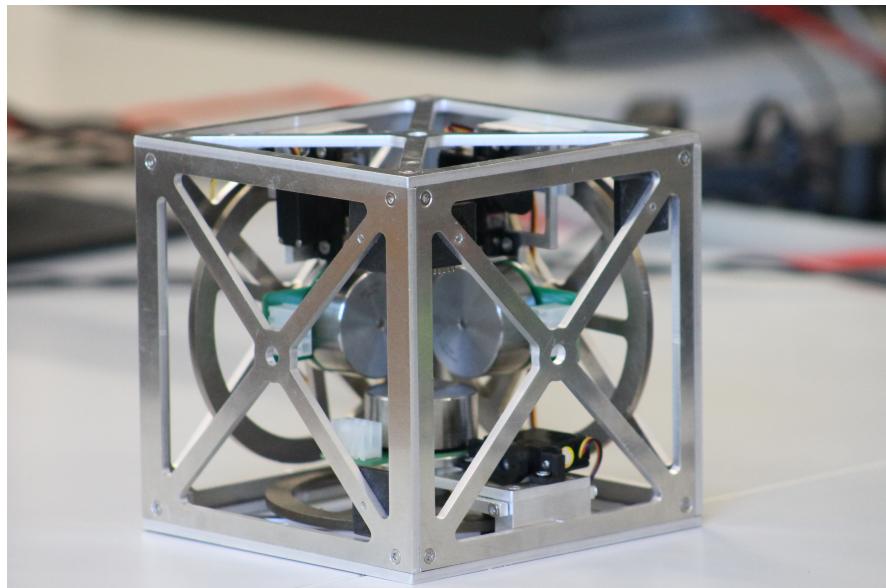


Entwicklungsprojekt

CuBa - Cube Balancing



Der selbstbalancierende Würfel

*Michael Meindl 45171
Florian Roth 40323
Alexander Sarici 44179
Alexander Schleicher 46546*

30.09.2016

Betreuer:
Prof. Dr-Ing. Joachim Wietzke

Vorwort

In der folgenden Dokumentation wird das **CuBa!** (**CuBa!**)-Projekt vorgestellt, welches im Rahmen eines Entwicklungsprojektes an der Hochschule Karlsruhe durchgeführt wurde. Die Idee für dieses Projekt stammt von dem s.g. Cubli der ETH Zürich. Hierbei handelt es sich um einen Würfel, welcher in der Lage ist selbstständig auf seine Ecken und Kanten zu springen und dort zu balancieren. Die Hauptaufgaben dieser Arbeiten bestehen darin einen solchen solchen Würfel zu konstruieren, passende Sensorik bzw. Aktorik auszuwählen, und auf der Basis einer Systemanalyse einen Regelkreis zu entwerfen.

Für den Studiengang Mechatronik bildet dieses Projekt einen hervorragenden Rahmen, um die Bereiche der Mechanik, Elektrotechnik und Informatik zu vereinen. Unsere persönliche Erwartung ist eine interessante und technisch anspruchsvolle Problemstellung zu bearbeiten, welche uns die Möglichkeit bietet unsere fachlichen Kenntnisse und Fähigkeiten zu erweitern.

An dieser Stelle möchten wir uns ganz herzlich bei unseren Betreuern Herr Prof. Dr. Wietzke und Herr Dipl.-Inf. Münzer bedanken, die uns während des Projektes stets mit Rat und Tat zur Seite standen. Unser weiterer Dank gilt Herr Christian Steiger, der uns die Linux-Distribution und SW-Treiber zur Verfügung gestellt hat.

Inhaltsverzeichnis

1	Cube-Balance (CuBa) - Der selbstbalancierende Würfel	1
2	1D-Prototyp	2
2.1	Aktorik und Sensorik	3
2.2	Konstruktion 1D	4
2.2.1	Bauteile	4
2.3	Modellierung der Systemdynamik	8
2.4	Sensorik	11
2.4.1	Winkelschätzung	11
2.4.2	Kalibrierung und Justierung	12
2.4.2.1	Umrechnung der Beschleunigungswerte	12
2.4.2.2	Umrechnung der Winkelgeschwindigkeiten	13
2.4.3	Auswertung der Radgeschwindigkeit $\dot{\psi}$	13
2.5	Filterung der Zustandsgrößen	14
2.5.1	Ansätze zur Filterung von φ	14
2.5.1.1	Komplementär-Filter für φ	14
2.5.1.2	Kalman-Filter für φ	15
2.5.1.3	Vergleich der Filter	17
2.5.2	Ansätze zur Filterung von $\dot{\varphi}$	18
2.5.3	Ansätze zur Filterung von $\dot{\psi}$	19
2.6	Modellbildung und Bestimmung der Systemgrößen	20
2.6.1	Identifikation der Parameter	20
2.6.1.1	Ermittlung des Reibwertes C_φ	20
2.6.1.2	Ermittlung des Reibwertes C_ψ	21
2.6.1.3	Resultate der Systemidentifikation	22
2.6.2	Entwurf des Simulink-Modelles	23
2.6.2.1	Simulation des Motors	23
2.6.2.2	Simulation der Würfelseite	23
2.6.2.3	Simulation der Schwungmasse	24
2.7	Reglerentwurf	25
2.7.1	Analytische Bestimmung der Reglerparameter	25
2.7.2	Verifizierung des Reglers an dem 1D-Prototyp	26
2.8	Aufspringen	27
2.9	Software	28
2.10	Allgemeiner Softwareentwurf	28
2.10.1	Kommunikation zwischen den Komponenten	29
2.10.2	Aufbau der Regelungskomponente	30
2.10.3	Aufbau der Kommunikationskomponente	30
2.11	Ausblick	32
3	3D-Modell	33
3.1	Aktorik und Sensorik	34
3.2	Modellierung der Systemdynamik	35
3.2.1	Potential des Systems	36
3.2.2	Kinetische Energie des Systems	36
3.2.3	Generalisierte Kraftkomponenten	37
4	Anhang	41

1 Cube-Balance (CuBa) - Der selbstbalancierende Würfel

In der folgenden Dokumentation werden die Ergebnisse des CuBa-Projektes erläutert. In diesem Projekt bestand die Aufgabe darin einen Würfel zu entwickeln, welcher in der Lage ist selbstständig auf seine Ecke und Kante zu springen und dort zu balancieren. Hierfür werden Motoren in dem Würfel fixiert, an welchen Schwungräder befestigt sind. Die Motormomente dienen einerseits als Stellgröße um den Würfel zu balancieren. Andererseits können die Schwungmassen über Bremsen abrupt zum Stillstand gebracht werden. Dadurch wird der Drehimpuls der Räder auf den Würfel übertragen. So mit ist es möglich den Würfel aus einer beliebigen Ruhelage aufzurichten.

Das Projekt ist in zwei Abschnitte unterteilt. Zuerst wird eine einzelne Würfelseite konzipiert, an welcher ein Motor mit einer Schwungmasse angebracht ist. Über eine Achse wird die Würfelseite gelagert und ist somit auf einen einzelnen rotatorischen Freiheitsgrad beschränkt. Dieser Prototyp dient als erstes Versuchsobjekt (1D-Modell) um die Systemeigenschaften zu untersuchen und Rückschlüsse auf den Entwurf des kompletten Würfel (3D-Modell) zu ziehen. Im zweiten Teil wird der letztendliche Würfel entwickelt, welcher über drei Motoren und Schwungmassen verfügt.

Der Aufbau der Dokumentation ist an den Projektverlauf angelehnt, so wird zu Beginn der Aufbau des 1D-Modell näher erläutert. Hierbei werden zuerst der mechanische Aufbau und die elektrischen Komponenten diskutiert. Im Anschluss werden mit Hilfe des Lagrange-Formalismus die Bewegungsgleichungen hergeleitet. Damit kann eine Zustandsraumdarstellung des Systems gewonnen werden, welche wiederum zu dem Entwurf eines zeitdiskreten Zustandsreglers verwendet wird. Außerdem wird auf die Auswertung der Sensoren eingegangen um mit Hilfe von Filtern und Datenfusionen möglichst genaue Schätzwerte des aktuellen Zustandsvektors zu erhalten. Zuletzt wird das Aufspringen der Würfelseite näher untersucht. Hierbei wird ein Lernalgorithmus vorgestellt, welcher die optimale Radgeschwindigkeit zum Aufspringen unter realen Bedingungen findet.

Der zweite Abschnitt beschäftigt sich mit der Entwicklung des 3D-Modells, wobei vor allem auf die Unterschiede zu dem 1D-Modell eingegangen wird. Durch die zusätzlichen Freiheitsgrade ergibt sich eine deutlich komplexere Systemdynamik. Da die verschiedenen Rotationen nicht voneinander entkoppelt werden können, führt dies auch zu einem umfangreicheren Regelsystem.

Der letzte Teil des Berichtes stellt eine Bewertung und Fazit des Projektes dar. Wobei die verschiedenen Ansätze kritisch beurteilt werden und mögliche Verbesserungen aufgezeigt werden. Zusätzlich werden mögliche Erweiterungen und Optimierungen vorgestellt.

2 1D-Prototyp

In diesem Teil wird der erste Prototyp vorgestellt. Hierbei handelt es sich um eine einzelne Würfelseite, welche mit Hilfe einer Achse gelagert ist. Dadurch wird die Bewegung des Systems auf zwei rotatorische Freiheitsgrade beschränkt, nämlich die Rotation um die Achse und die Bewegung der Schwungmasse relativ zu der Würfelseite. Mit Hilfe dieses Entwurfes kann die Dynamik und Anforderungen an die Komponenten an einem vereinfachten Modell untersucht werden. Aus diesen Ergebnisse können dann Rückschlüsse auf den Entwurf des endgültigen Würfels gezogen werden.

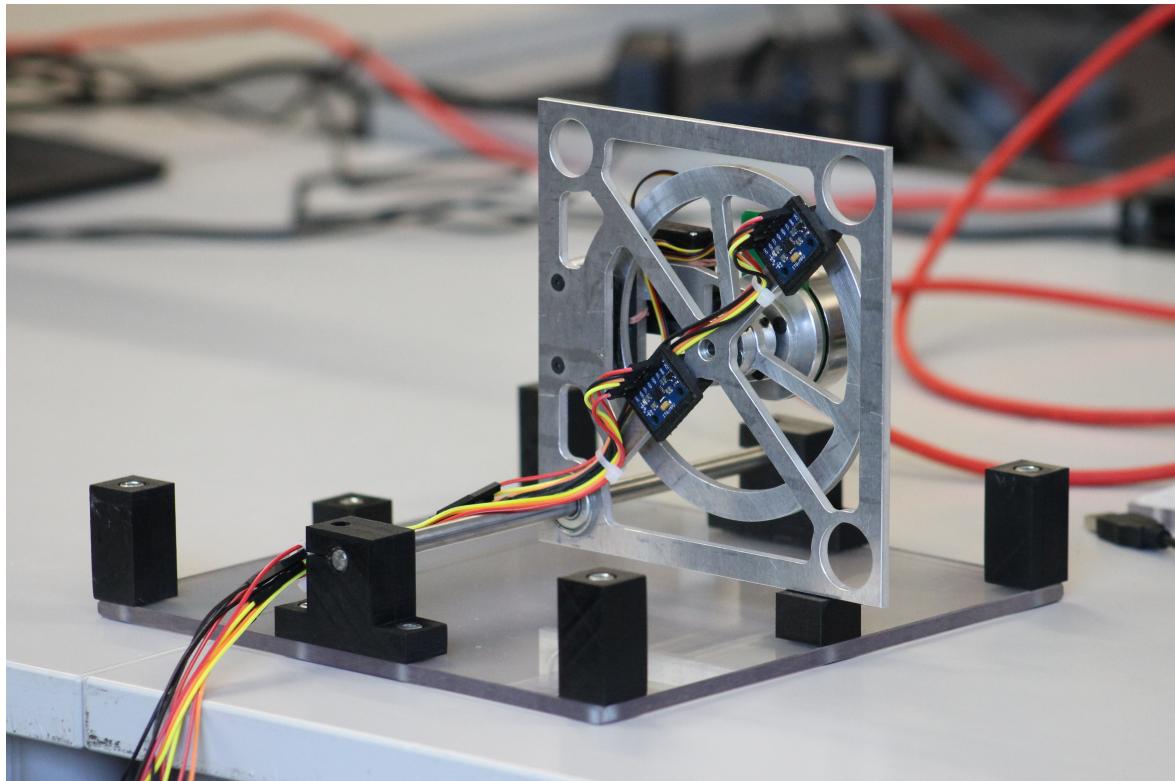


Abbildung 1: 1D-Modell, Quelle: eigene Darstellung

2.1 Aktorik und Sensorik

Der folgenden Abschnitt beschreibt die verwendeten elektrischen Bauteile, um einerseits die benötigten physikalischen Größen zu messen, und andererseits die verwendete Aktorik, um das Aufspringen und Balancieren der Würfelseite zu ermöglichen.

Die Aufgabe der Sensorik besteht darin die Zustandsgrößen des Systemes zu bestimmen. Hierfür werden zwei *GYR-521*-Platinen verwendet, die mit einem *MPU6050-IC* der Firma *InvenSense* bestückt sind. Diese bieten jeweils einen dreiachsigem Beschleunigungssensor und Gyroskop. Mit Hilfe dieser Messwerte können die Zustandsgrößen φ und $\dot{\varphi}$ berechnet werden. Die Sensoren bieten die zusätzliche Möglichkeit einen variablen Tiefpassfilter zu verwenden um eine erste Glättung der Messwerte durchzuführen. Dieses Tiefpassfilter wird auf eine Grenzfrequenz von 44Hz eingestellt. Dieser Wert hat sich empirisch als optimaler Kompromiss zwischen Filterung der Rauschsignale und Verzögerung des eigentlichen Signals ergeben. Die Konfiguration und Auswertung der Sensoren erfolgt über eine I^2C -Schnittstelle. Die Justierung und Auswertung der Sensoren wird näher in Abschnitt ?? beschrieben.

Abschnitt 2.3 zeigt den Einfluss eines Motormomentes auf die Position und Geschwindigkeit der Würfelseite. Um diese Moment zu erzeugen wird ein bürstenloser DC-Motor der Firma *MaxonMotor* verwendet (EC 45 flat, 50 Watt). Die Kriterien zur Auswahl des Motors sind einerseits die maximale Drehzahl und Drehmoment, andererseits die mechanische Zeitkonstante. Für das Aufspringen des Würfels ist die maximale Drehzahl des Motors von Bedeutung, die 10000 Umdrehung pro Minute des gewählten Motor reichen hierbei aus um eine ausreichend hohe kinetische Energie der Schwungmasse zu ermöglichen. Die Robustheit der Regelung wird durch das maximale Drehmoment limitiert, welches in diesem Fall bei 83.4 mNm liegt. Von besondere Bedeutung für die Regelung ist die mechanische Zeitkonstante des Motors, da diese eine Verzögerung der Stellgröße bewirkt und somit den geschlossenen Regelkreis negativ beeinflussen kann. Die mechanische Zeitkonstante des gewählten Motors ist mit $13.3ms$ im Vergleich zu anderen Kandidaten sehr niedrig. Die Ansteuerung des Motors erfolgt über den Treiberbaustein *ESCON 36/3 EC*, welcher ebenfalls von der Firma *MaxonMotor* vertrieben wird. Dieser ermöglicht die Steuerung des Drehmoments über ein PWM-Signal und die Auswertung der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ über ein analoges Signal.

Mit Hilfe einer mechanischen Bremse kann die Schwungmasse stoßartig zum Stillstand gebracht werden. Dadurch wird die kinetische Energie der Schwungmasse teilweise auf das Gesamtsystem übertragen und ermöglicht somit das Aufspringen. Die Bremsbacken werden über einen Servomotor betätigt, welcher mit Hilfe eines PWM-Signales kontrolliert wird.

Zur Ansteuerung der Aktorik und Sensorik wird ein BeagleBone Black verwendet, auf welchem eine Linux-Distribution ausgeführt wird. Die Programmierung erfolgt über eine, auf Eclipse basierende, Toolkette. Um die Auswertung der Sensordaten und den Entwurf der Regelung zu erleichtern, werden Sensoren- und Regelungsdaten an MATLAB übertragen, wo weitere Auswertungen stattfinden.

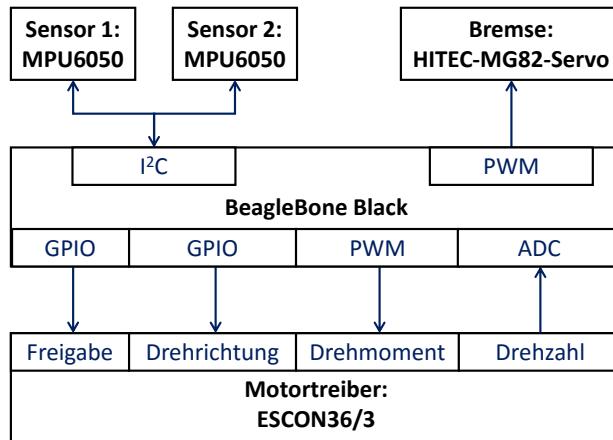


Abbildung 2: Übersicht Elektrik, Quelle: eigene Darstellung

2.2 Konstruktion 1D

Im Fokus der Konstruktionsansätze stand es, einen möglichst einfachen Aufbau zu entwickeln, der mit konventionellen Maschinen unter geringstem Einsatz fertigbar ist. Dies wurde durch die Verwendung von Standardmaterialien mit Standardmaßen erreicht, welche weit verbreitet sind. Weiter können alle Teile aus Blechen bzw. Stangenmaterial gefertigt werden, somit ist kein Einsatz von CNC Maschinen mit fünf oder mehr Achsen notwendig. In diesem Fall wurden 80 Prozent der Teile mittels einer Wasserstrahlschneidmaschine gefertigt. Der Einsatz von Passungen wurde auf das nötige Minimum reduziert. Aufgrund der Weiterverwendung dieses Projektes für eine Vorlesung, musste bei der Entwicklung darauf geachtet werden, das System möglichst wartungsfreundlich zu gestalten. Das gesamte Modell lässt sich in drei Baugruppen zerlegen, somit können alle Verschleifteile, wie z.B. Bremsbeläge und Lager schnell gewechselt werden. Aus Gewichtsgründen wurden alle Bauteile sehr schlank dimensioniert.

2.2.1 Bauteile

Beim Bremsen drückt der Bremshebel auf die Schwungscheibe und presst diese gegen den unteren Bremsbelag. Dabei wird der Motorschaft radial belastet. Um diese Belastung zu verringern wird die Schwungmasse zusätzlich gelagert. Dies wird durch den Flansch mit Achse realisiert. In der Würfelseite ist ein Lager eingelassen, in dem die Achse des Flanschs geführt wird.

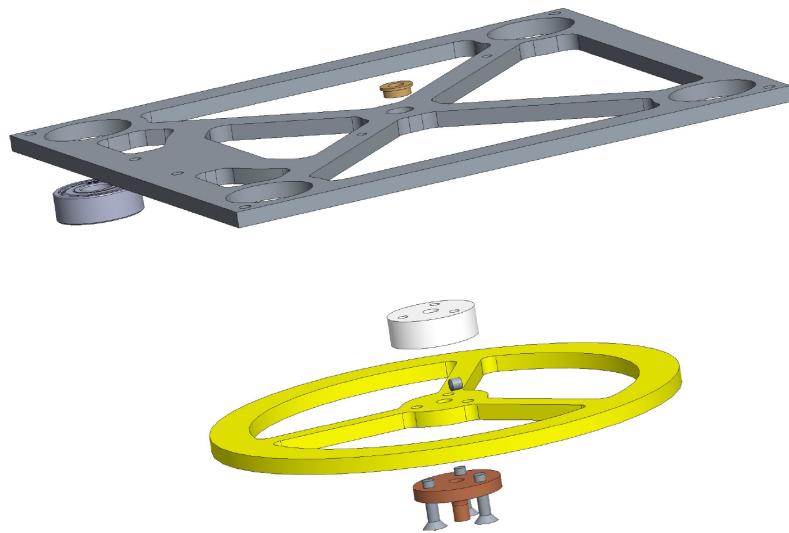


Abbildung 3: Flansch Motorseite, Quelle: eigene Darstellung

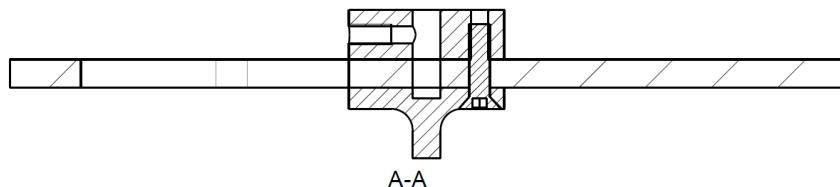


Abbildung 4: Schnitt durch Schwungmasse mit beiden Flanschen, Quelle: eigene Darstellung

Der Motor selbst wird auf dem Motorhalter befestigt, welcher wiederum über die Halteplatte mit der Würfelseite verbunden ist. Am Motorhalter ist zusätzlich der Servo-Motor befestigt, der für die Aktivierung der Bremse notwendig ist. Im Hinblick auf die Konstruktion des gesamten Würfels, muss der Motorhalter zusätzlich angepasst werden, so dass die Befestigung des Motors in zwei Richtungen er-

folgen kann. Im Würfel würden drei gleiche Motorhalter dazu führen, dass die Bauteile sich gegenseitig im Weg stehen.

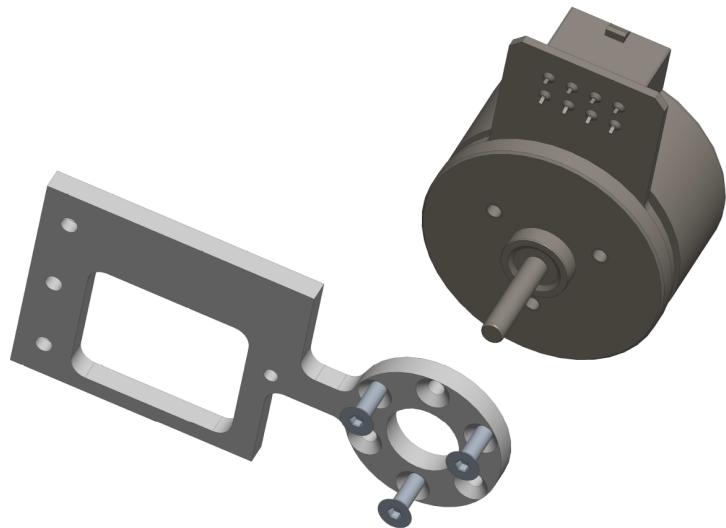


Abbildung 5: Motorhalter, Quelle: eigene Darstellung

Die Bremse wird durch den Servo-Motor über das Servohorn nach dem Hebelprinzip bewegt.

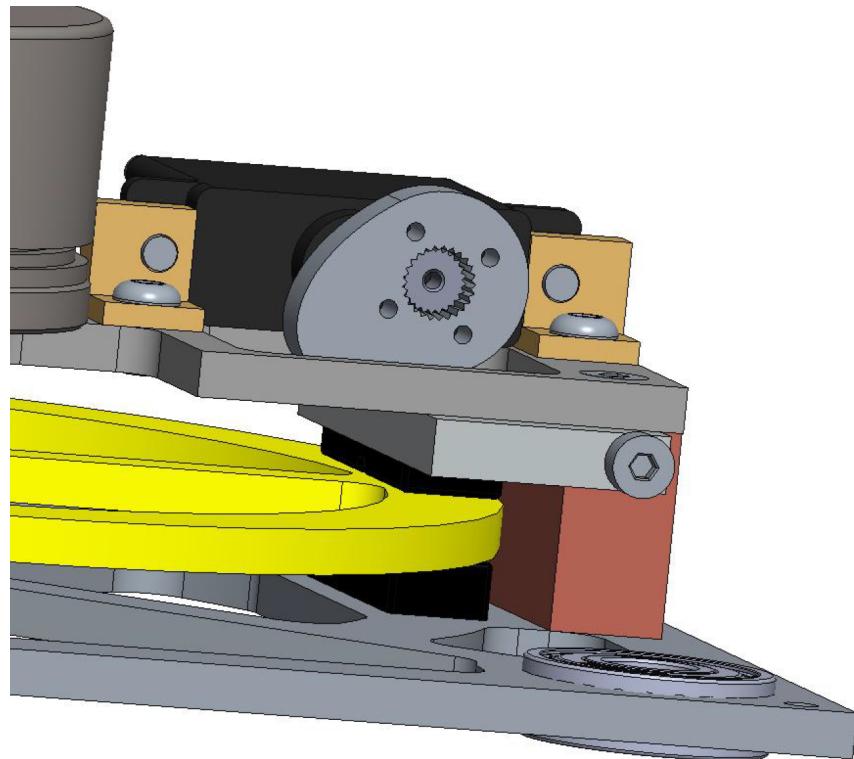


Abbildung 6: Bremsmechanismus, Quelle: eigene Darstellung

Um die Komplexität des Systems vorerst zu vereinfachen, wurde diese Würfelseite zusammengebaut und in einer der Ecken gelagert um Freiheitsgrade zu eliminieren. Die Bewegung kann somit nur noch in einer Ebene erfolgen. Von konstruktiver Seite wurden Aussparungen für ein 608ZZ-Lager vorgesehen. Über eine Achse, die fest gelagert wird, ergibt sich folgender Aufbau.

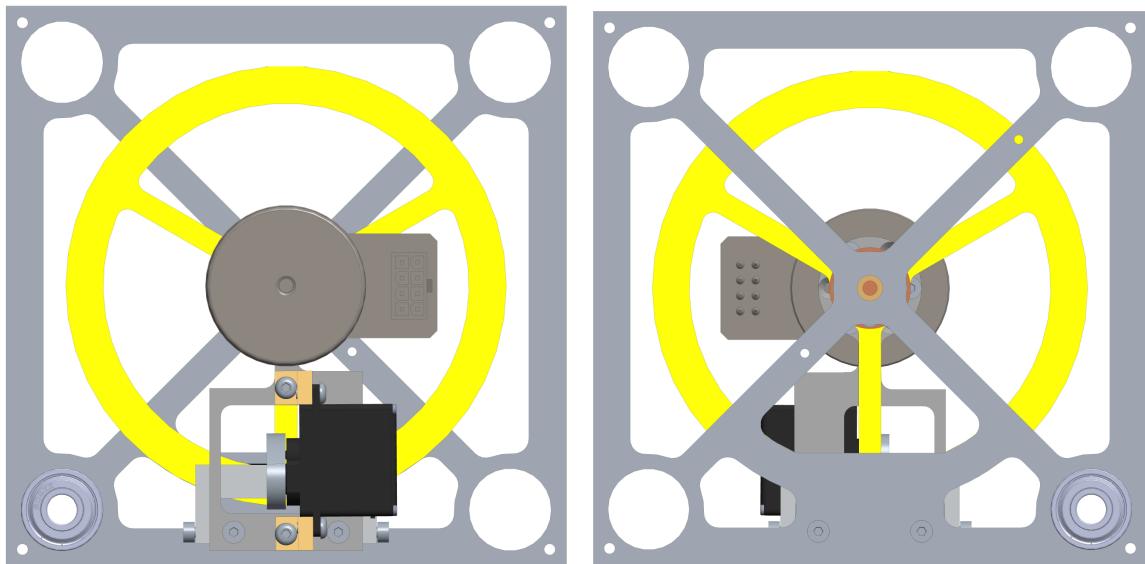


Abbildung 7: Komplette Baugruppe, Quelle: eigene Darstellung

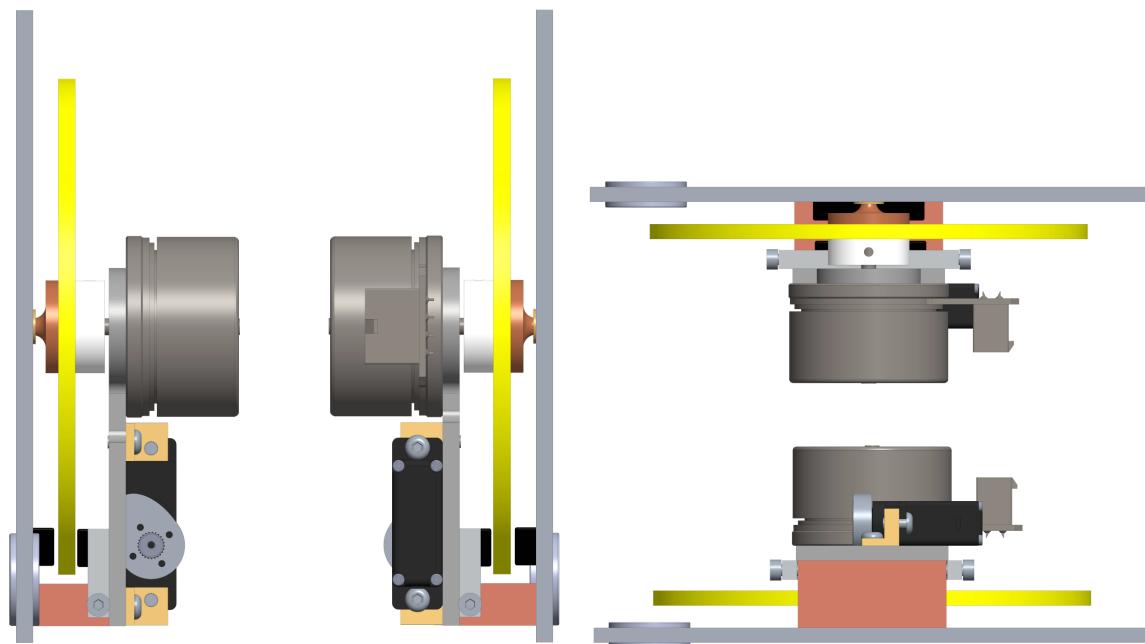


Abbildung 8: Komplette Baugruppe, Quelle: eigene Darstellung

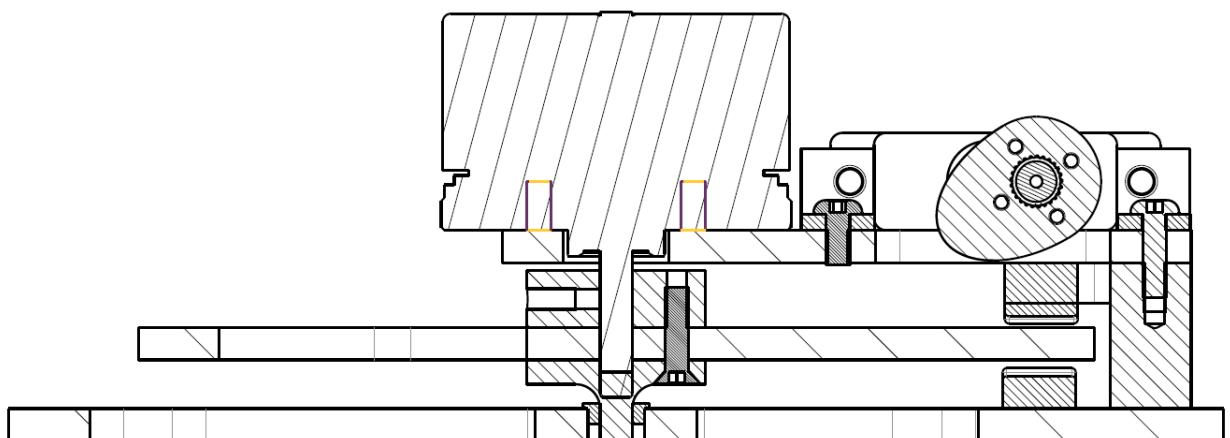


Abbildung 9: Schnitt durch komplette Baugruppe, Quelle: eigene Darstellung

2.3 Modellierung der Systemdynamik

In dem folgenden Abschnitt werden die Bewegungsgleichungen mit Hilfe des Lagrange Formalismus hergeleitet. Aus diesen Gleichung kann im Anschluss eine Zustandsraumdarstellung aufgestellt werden, welche als Grundlage für den Reglerentwurf dient.

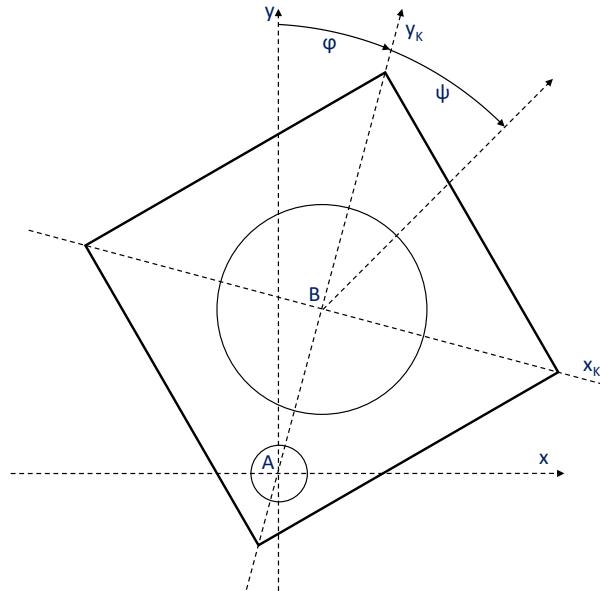


Abbildung 10: Mechanischer Aufbau, Quelle: eigene Darstellung

Der Prototyp besteht aus einem starren Körper der in A auf einer Achse gelagert ist. In B ist eine Schwungmasse über einen Motor mit dem Körper verbunden. Somit verfügt das Gesamtsystem über zwei Freiheitsgrade, welche durch die generalisierten Koordinaten

$$q_1 = \varphi \quad q_2 = \psi \quad (1)$$

beschrieben werden. Der Winkel φ wird von den Achsen y und y_K eingeschlossen. Der Winkel ψ beschreibt die rotatorische Verschiebung der Schwungmasse zu dem Körper. Die folgenden Größen beschreiben die weiteren physikalischen Gegebenheiten des Systems.

Variable	Erklärung
$q_1 = \varphi$	Ausfallwinkel des Körpers
$q_2 = \psi$	Winkel zwischen Schwungmasse und Körper
A	Drehpunkt des Körpers
B	Drehpunkt des Schwungrades
l_{AB}	Abstand zwischen A und B
l_{AC}	Abstand zwischen A und dem Schwerpunkt des Körpers
m_K	Masse des Körpers
m_R	Masse des Schwungrades
θ_K^A	Massenträgheitsmoment des Körpers um A
θ_R^B	Massenträgheitsmoment der Schwungmasse um B
C_φ	Dynamischer Reibkoeffizient des Körpers in A
C_ψ	Dynamischer Reibkoeffizient des Schwungrades in B
T_M	Drehmoment des Motor

Um die Bewegungsgleichungen des Systems zu ermitteln wird der Lagrange Formalismus verwendet. Dieser basiert auf der Lagrange-Funktion L , welche die Differenz der kinetischen Energie T und der potenziellen Energie V des Systems beschreibt.

$$T = \frac{1}{2}[(\theta_K^A + m_R \cdot l_{AB}^2)\dot{\varphi}^2 + \theta_R^B(\dot{\varphi} + \dot{\psi})^2] \quad (2)$$

$$V = g(m_R \cdot l_{AB} + m_K \cdot l_{AC})\cos(\varphi) \quad (3)$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}[(\theta_K^A + m_R \cdot l_{AB}^2)\dot{\varphi}^2 + \theta_R^B(\dot{\varphi} + \dot{\psi})^2] - g(m_R \cdot l_{AB} + m_K \cdot l_{AC})\cos(\varphi) \quad (4)$$

In dem System wirken unterschiedliche Kräfte und Momente, welche nach dem Lagrange-Formalismus als generalisierte Kraftkomponenten Q_i dargestellt werden können. Das Ziel hiervon ist es, die Summe der Kräfte, bzw. deren verrichtete Arbeit, in Komponenten zu zerteilen, welche in Richtung der generalisierten Koordinaten wirken. Die generalisierten Kraftkomponenten können nach der folgenden Formel berechnet werden, wobei F_j die verschiedenen Kräfte bzw. Momente und r_j eine Verrückung in ihrer Wirkungsrichtung darstellt.

$$Q_i = \sum F_j \cdot \frac{\partial r_j}{\partial q_i} \quad (5)$$

Durch die Gravitation wirkt eine konstante Kraft entgegen der raumfesten y-Koordinate auf den Körper.

$$F_1 \cdot r_1 = -g \cdot (m_K \cdot y_K + m_R \cdot y_R) = -g \cdot (m_K \cdot l_{AC} + m_R \cdot l_{AB}) \cdot \cos(\varphi) \quad (6)$$

Durch den Motor und die Reibung in den beiden Lagern entstehen die Drehmomente T_M , M_{R_ω} und M_{R_ψ} , welche entlang der generalisierten Koordinaten wirken und somit nicht umgeformt werden müssen. Die Reibmomente werden als linear proportional zu der momentanen Winkelgeschwindigkeit modelliert.

$$F_2 \cdot r_2 = T_M \cdot \psi \quad (7)$$

$$F_3 \cdot r_3 = M_{R_\varphi} \cdot \varphi = (-C_\varphi \cdot \dot{\varphi}) \cdot \varphi \quad (8)$$

$$F_4 \cdot r_4 = M_{R_\psi} \cdot \psi = (-C_\psi \cdot \dot{\psi}) \cdot \psi \quad (9)$$

Somit können nun die Summe der Kräfte und Momente gebildet werden und daraufhin die generalisierten Kraftkomponenten bestimmt werden.

$$\begin{aligned} Q_\varphi &= g \cdot (m_K \cdot l_{AC} + m_R \cdot l_{AB}) \cdot \frac{\partial \cos(\varphi)}{\partial \varphi} + T_M \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} - C_\varphi \cdot \dot{\varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} - C_\psi \cdot \dot{\psi} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \\ &= g \cdot (m_K \cdot l_{AC} + m_R \cdot l_{AB}) \cdot \sin(\varphi) - C_\varphi \cdot \dot{\varphi} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} Q_\psi &= g \cdot (m_K \cdot l_{AC} + m_R \cdot l_{AB}) \cdot \frac{\partial \cos(\varphi)}{\partial \psi} + T_M \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \psi} - C_\varphi \cdot \dot{\varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} - C_\psi \cdot \dot{\psi} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \psi} \\ &= T_M - C_\psi \cdot \dot{\psi} \end{aligned} \quad (11)$$

Bei dem Prototyp handelt es sich um ein nicht konservatives System, da durch die Reibung mechanische Energie verloren geht und der Motor dem System mechanische Energie zuführt. Da die beiden generalisierten Koordinaten φ und ψ voneinander unabhängig sind können aus dem d'Alembert'schen Prinzip zwei Bewegungsgleichungen abgeleitet werden.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (12)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi \quad (13)$$

$$(\theta_K^A + \theta_R^B + m_R \cdot l_{AB}^2)\ddot{\varphi} + \theta_R^B \cdot \ddot{\psi} - g(m_R \cdot l_{AB} + m_K \cdot l_{AC})\sin(\varphi) + C_\varphi \cdot \dot{\varphi} = 0 \quad (14)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} - \frac{\partial T}{\partial \psi} = Q_\psi \quad (15)$$

$$\theta_R^B \cdot \ddot{\psi} = T_M - C_\psi \cdot \dot{\psi} - \theta_R^B \cdot \ddot{\varphi} \quad (16)$$

Durch Einsetzen von (16) in (14) ergibt sich die folgende Bewegungsgleichung für die Würfelseite.

$$\ddot{\varphi} = \frac{g(m_R \cdot l_{AB} + m_K \cdot l_{AC}) \sin(\varphi) - C_\varphi \cdot \dot{\varphi} + C_\psi \cdot \dot{\psi} - T_M}{\theta_K^A + m_R \cdot l_{AB}^2} \quad (17)$$

Die Bewegungsgleichung für die Schwungmasse ergibt sich durch Einsetzen von (17) in (16).

$$\ddot{\psi} = \frac{(\theta_K^A + m_R \cdot l_{AB}^2 + \theta_R^B)(T_M - C_\psi \cdot \dot{\psi})}{(\theta_K^A + m_R \cdot l_{AB}^2)\theta_R^B} + \frac{C_\varphi \cdot \dot{\varphi} - g(m_R \cdot l_{AB} + m_K \cdot l_{AC}) \sin(\varphi)}{\theta_K^A + m_R \cdot l_{AB}^2} \quad (18)$$

2.4 Sensorik

Die Aufgabe der verwendeten Sensorik liegt darin die Werte für φ , und $\dot{\varphi}$ zu bestimmen. Hierfür wurden zwei MPU6050 ICs verwendet. Diese verfügen jeweils über einen Beschleunigungssensor und Gyroskop, welche Werte für drei Achsen ausgeben. Der Tiefpass der Sensoren wird auf eine Grenzfrequenz von 44Hz eingestellt, da hier einerseits eine erste Glättung der Daten erfolgt, andererseits aber keine zu große Verzögerung entsteht, welche sich wiederum negativ auf die Regelung auswirken könnte. Die Position und Ausrichtung der Sensoren ist in Abbildung 11 dargestellt.

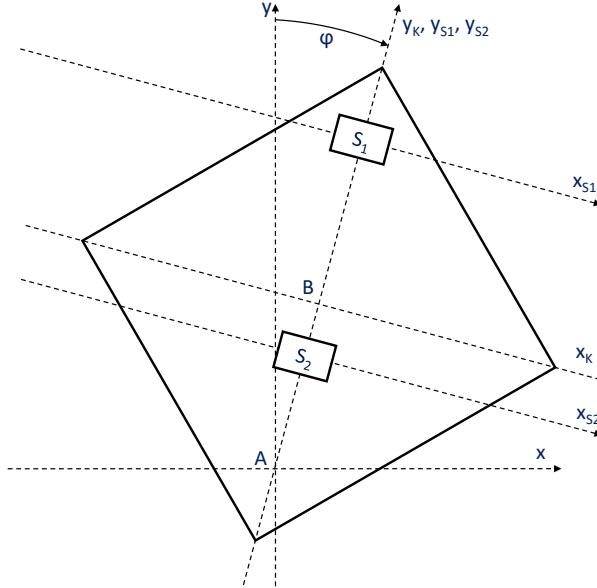


Abbildung 11: Position der Sensoren, Quelle: eigene Darstellung

2.4.1 Winkelschätzung

Die Sensoren sind nicht in der Lage Wege bzw. Winkel zu messen. Somit muss der Winkel φ berechnet werden. Die gemessenen Beschleunigungen setzen sich aus einem statischen Anteil, welcher von φ abhängt, und einem dynamischen Anteil, welcher von $\dot{\varphi}$ bzw. $\ddot{\varphi}$ abhängt, zusammen.

$$\ddot{S}_i = \begin{pmatrix} \ddot{x}_i \\ \ddot{y}_i \\ \ddot{z}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{Si} \cdot \ddot{\varphi} + \sin(\varphi) \cdot g \\ -r_{Si} \cdot \dot{\varphi}^2 - \cos(\varphi) \cdot g \\ 0 \end{pmatrix} \quad i \in [1; 2] \quad (19)$$

Da die dynamischen Anteile zusätzlich von dem Abstand r_{Si} abhängen, kann die geometrische Anordnung der beiden Sensoren genutzt werden um das Verhältnis der beiden Anteile zu berechnen. Somit kann der aktuelle Wert von φ nach [1] wie folgt berechnen.

$$\alpha = \frac{r_{S1}}{r_{S2}} \quad (20)$$

$$\ddot{x}_1 - \alpha \cdot \ddot{x}_2 = g(1 - \alpha)\sin(\varphi) \quad (21)$$

$$\ddot{y}_1 - \alpha \cdot \ddot{y}_2 = -g(1 - \alpha)\cos(\varphi) \quad (22)$$

$$\frac{\ddot{x}_1 - \alpha \cdot \ddot{x}_2}{\ddot{y}_1 - \alpha \cdot \ddot{y}_2} = -\tan(\varphi) \quad (23)$$

Nach dem selben Prinzip kann auch die Winkelbeschleunigung $\ddot{\varphi}$ berechnet werden.

$$\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 = [r_{S1} \cdot \ddot{\varphi} + \sin(\varphi) \cdot g] - [r_{S2} \cdot \ddot{\varphi} + \sin(\varphi) \cdot g] = (r_{S1} - r_{S2}) \cdot \ddot{\varphi} \quad (24)$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2}{r_{S1} - r_{S2}} \quad (25)$$

2.4.2 Kalibrierung und Justierung

Die Sensoren geben die Beschleunigungs- und Geschwindigkeitswerte als 16 Bit Werte im Zweierkomplement aus. Diese Rohwerte müssen mit Hilfe eines Ausgleichspolynoms in die jeweilige SI-Einheit umgerechnet werden.

2.4.2.1 Umrechnung der Beschleunigungswerte

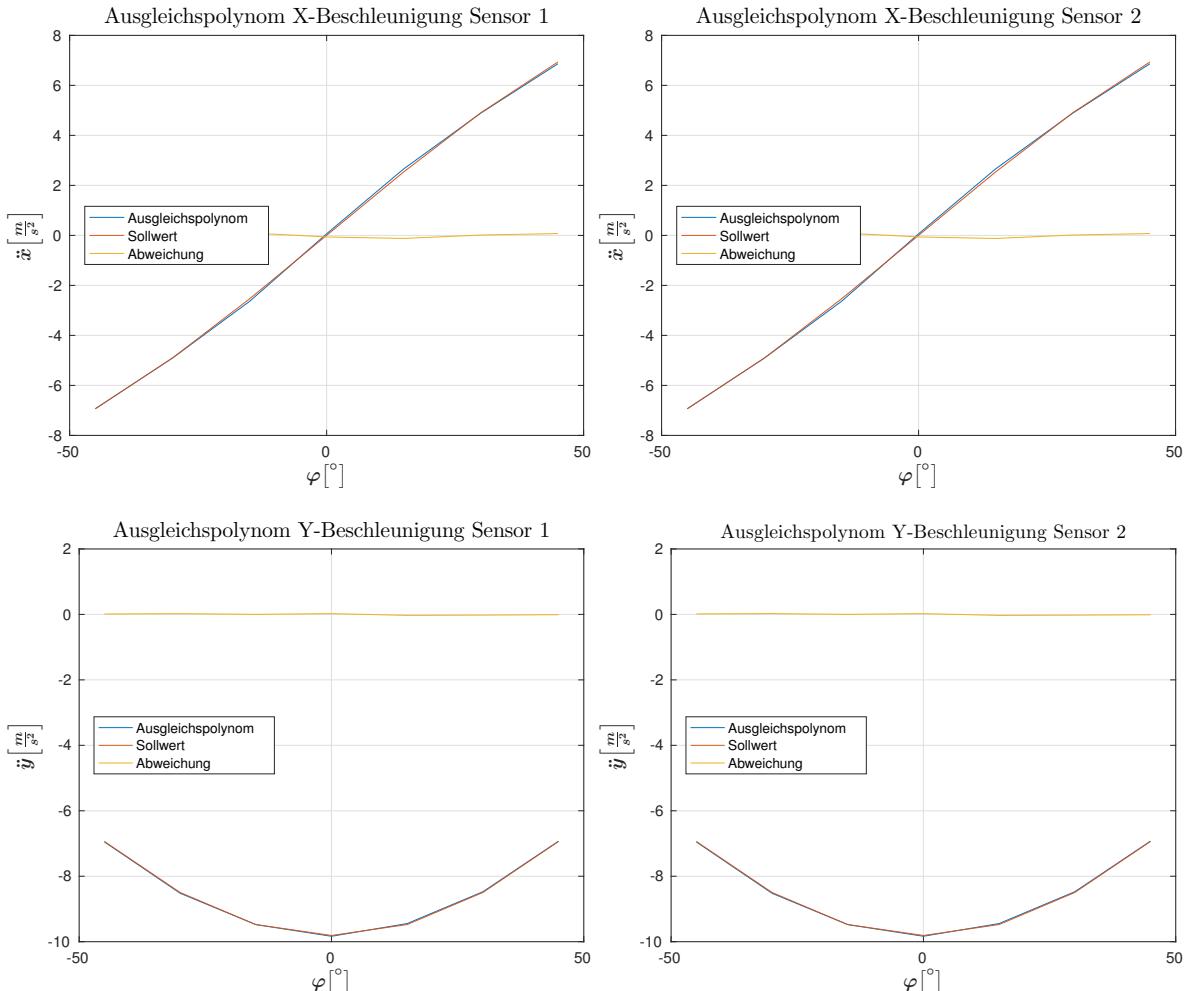
Um das Polynom zur Umrechnung der Beschleunigungswerte zu ermitteln werden sieben Messungen in den fixen Ausfallpositionen $\phi \in [-45, -30, -15, 0, 15, 30, 45]$ durchgeführt. Pro Position werden $m = 10000$ Messwerte aufgenommen. Da in der Ruhelage die Beschleunigung lediglich von dem aktuellen Ausfallwinkel abhängt ist der Sollwert für jede Position bekannt. Somit kann ein Polynom erster Ordnung approximiert werden um Mittelwerte der sieben Positionen in die entsprechenden Beschleunigungswerte umzurechnen.

$$\begin{aligned} \ddot{x}_n &\equiv \text{X-Beschleunigung Sensor n} & \ddot{x}_n^R &\equiv \text{X-Rohwert Sensor n} \\ \ddot{y}_n &\equiv \text{Y-Beschleunigung Sensor n} & \ddot{y}_n^R &\equiv \text{Y-Rohwert Sensor n} \end{aligned}$$

$$\ddot{x}_n = p_{x_n}^1 \cdot \ddot{x}_n^R + p_{x_n}^2 \quad | \quad n \in \{1, 2\} \quad (26)$$

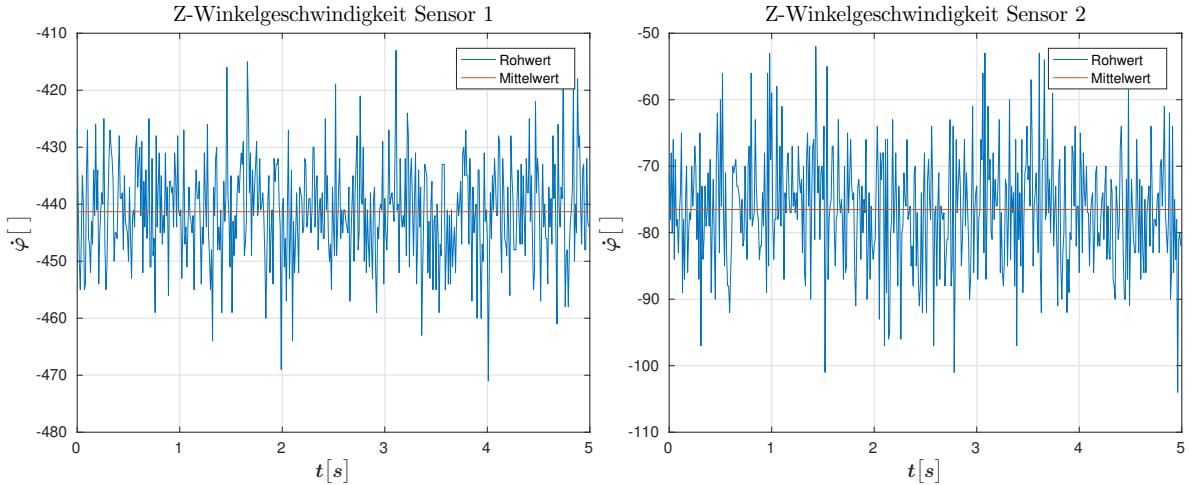
$$\ddot{y}_n = p_{y_n}^1 \cdot \ddot{y}_n^R + p_{y_n}^2 \quad | \quad n \in \{1, 2\} \quad (27)$$

$$\begin{array}{lll} p_{x_1}^1 &= -5.992 \cdot 10^{-4} & p_{x_1}^2 &= 0.3328 \\ p_{x_2}^1 &= -6.003 \cdot 10^{-4} & p_{x_2}^2 &= 0.4138 \\ p_{y_1}^1 &= -6.127 \cdot 10^{-4} & p_{y_1}^2 &= 0.1186 \\ p_{y_2}^1 &= -6.81 \cdot 10^{-4} & p_{y_2}^2 &= 0.1143 \end{array}$$



2.4.2.2 Umrechnung der Winkelgeschwindigkeiten

Um die Rohwerte der Gyroskope in Winkelgeschwindigkeiten umzurechnen wird die Würfelseite fixiert und die Winkelgeschwindigkeitswerte der beiden Sensoren aufgenommen. Hierbei werden jeweils $m = 1000$ Werte aufgenommen. Da der Sollwert $\dot{\varphi} = 0 \frac{m}{s}$ bekannt ist kann die systematische Messabweichung der Sensoren über den Mittelwert bestimmt werden. Der proportionale Umrechnungsfaktor von Rohdaten zu Winkelgeschwindigkeiten wird dem Datenblatt des Herstellers entnommen.



$$\dot{\varphi}_n \equiv \varphi\text{-Geschwindigkeit Sensor n} \quad \dot{\varphi}_n^R \equiv \dot{\varphi}\text{-Rohwert Sensor n}$$

$$\dot{\varphi}_n = p_{\dot{\varphi}_n^R}^1 \cdot (\dot{\varphi}_n + p_{\dot{\varphi}_n}^2) \quad (28)$$

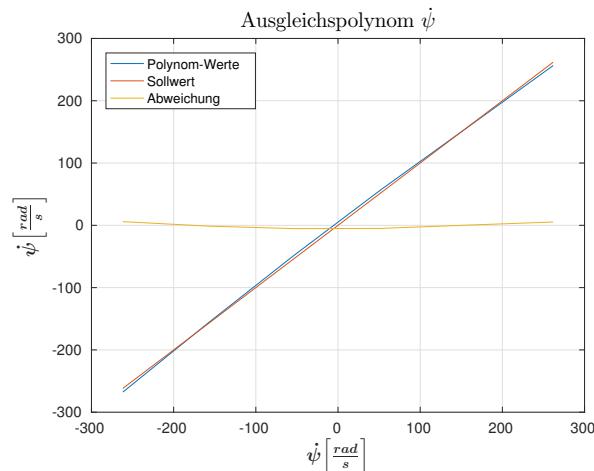
$$\begin{aligned} p_{\dot{\varphi}_1}^1 &= -1.3265 \cdot 10^{-4} & p_{\dot{\varphi}_1}^2 &= 441.3160 \\ p_{\dot{\varphi}_2}^1 &= -1.3265 \cdot 10^{-4} & p_{\dot{\varphi}_2}^2 &= 76.5140 \end{aligned}$$

2.4.3 Auswertung der Radgeschwindigkeit $\dot{\psi}$

Der Motortreiber liefert ein analoges Spannungssignal, welches die aktuelle Motorgeschwindigkeit wiedergibt. Um die ADC-Werte in SI-Einheiten umzurechnen wird ein Polynom erster Ordnung benötigt. Hierfür werden mit Hilfe der ESCON-Studio-Anwendung konstante Motorgeschwindigkeiten ($\psi \in \{-3000, -2000, -1000, 0, 1000, 2000, 3000\} [\text{rpm}]$) gefahren und pro Durchlauf $m = 500$ ADC-Werte aufgenommen. Über die Mittelwerte der Messungen und die vorgegebenen Radgeschwindigkeiten wird anschließend ein Polynom erster Ordnung approximiert.

$$\dot{\psi} \equiv \text{Geschwindigkeit der Schwungmasse} \quad \dot{\psi}_{ADC} \equiv \text{ADC-Wert}$$

$$\dot{\psi} = -0.5092 \cdot \dot{\psi}_{ADC} + 1050 \quad (29)$$



2.5 Filterung der Zustandsgrößen

In der Regel werden Sensoren von Störungen unterschiedlichster Art beeinflusst. Deshalb werden in diesem Abschnitt verschiedene Ansätze vorgestellt um die Zustandsgrößen φ , $\dot{\varphi}$ und ψ zu filtern.

2.5.1 Ansätze zur Filterung von φ

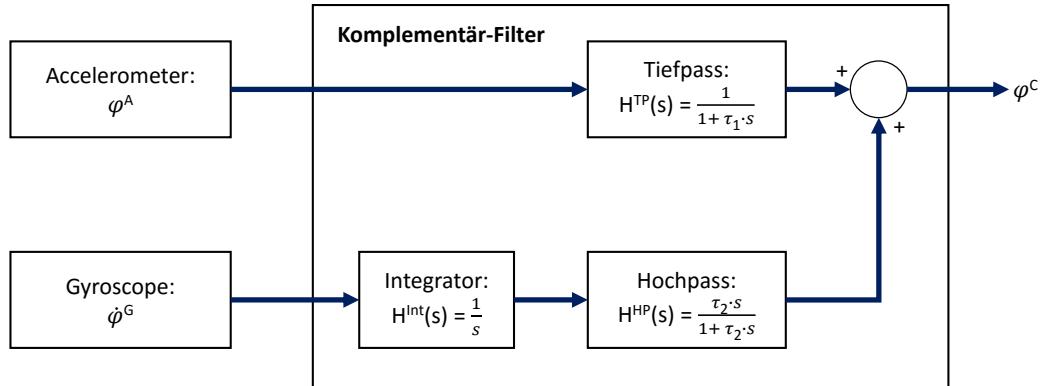
Der Ausfallwinkel φ kann wie bereits vorgestellt aus den Beschleunigungswerten geschätzt werden. Alternativ kann die aktuelle Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$, welche mit Hilfe der Gyroscopes gemessen wird, integriert werden. Beide Ansätze werden von unterschiedlichen Rauschsignalen beeinflusst. Die Beschleunigungssensoren reagieren empfindlich auf hochfrequente Signale und verstärken diese. Dadurch sind die Winkelschätzungen, welche auf diesen Messwerten beruhen, von hochfrequenten Rauschsignalen betroffen. Die Gyroscope-Werte sind trotz der Justierung mit einem Offset behaftet. Durch die Integration dieses konstanten Signales entsteht ein tieffrequentes Rauschsignal, welches oftmals als Drift bezeichnet wird. Deshalb werden im Anschluss das Komplementär- und Kalman-Filter vorgestellt, wobei es sich um Methoden der Datenfusion handelt.

2.5.1.1 Komplementär-Filter für φ

Wie bereits erläutert liefert die Winkelschätzung aus den Beschleunigungswerten das verrauschte Signal φ^A und die Integration der Gyroscopewerte φ^G .

$$\begin{aligned}\varphi^A(s) &= \varphi(s) + x^A(s) \\ \varphi^G(s) &= \frac{1}{s} \cdot (\dot{\varphi}(s) + \dot{x}^G(s))\end{aligned}\tag{30}$$

Angenommen, dass φ^A mit Hilfe eines Tiefpass und φ^G mit Hilfe eines Hochpass gefiltert werden, so ergibt sich das folgende Blockschaltbild.



Nach dem Blockschaltbild ergibt sich im Bildbereich der folgende Zusammenhang.

$$\begin{aligned}\varphi^C(s) &= \frac{1}{1 + \tau_1 \cdot s} \cdot \varphi^A(s) + \frac{\tau_2 \cdot s}{1 + \tau_2 \cdot s} \cdot \frac{1}{s} \cdot \dot{\varphi}^G(s) \\ &= \frac{1}{1 + \tau_1 \cdot s} \cdot [\varphi(s) + x^A(s)] + \frac{\tau_2 \cdot s}{1 + \tau_2 \cdot s} \cdot [\varphi(s) + x^G(s)]\end{aligned}\tag{31}$$

Als erste Entwurfsbedingung müssen die beiden Zeikonstanten τ_1 und τ_2 so gewählt werden, dass die Rauschanteile x^A und x^G verschwinden. Falls dies gegeben ist, lässt sich (31) vereinfachen.

$$\begin{aligned}\varphi^C(s) &= \frac{1}{1 + \tau_1 \cdot s} \cdot \varphi(s) + \frac{\tau_2 \cdot s}{1 + \tau_2 \cdot s} \cdot \varphi(s) \\ &= \varphi(s) \cdot \left(\frac{1}{1 + \tau_1 \cdot s} + \frac{\tau_2 \cdot s}{1 + \tau_2 \cdot s} \right)\end{aligned}\tag{32}$$

Falls die beiden Zeitkonstanten, unter Einhaltung der ersten Bedingung, gleichgesetzt werden können, ergibt sich die folgende Übertragungsfunktion für das Komplementär-Filter.

$$\tau = \tau_1 = \tau_2\tag{33}$$

$$\varphi^C(s) = \varphi(s) \cdot \left(\frac{1}{1 + \tau \cdot s} + \frac{\tau \cdot s}{1 + \tau \cdot s} \right) = \varphi(s) \quad (34)$$

Um die gennanten Bedinungen zu erfüllen muss eine Spektralanalyse der Rauschsignale durchgeführt werden. Welche verwendet wird um die Grenzfrequenzen des Hoch- und Tiefpassfilters festzulegen. Anschließend wird geprüft ob diese gleichgesetzt werden können.

Die Berechnung des Komplementär-Filters findet auf einem Digitalrechner statt. Somit muss (31) in eine diskrete Berechnungsvorschrift transformiert werden. Hierfür können das Hochpassfilter und der Integrator zu einem Tiefpass zusammengeführt werden.

$$\varphi^C(s) = \frac{1}{1 + \tau \cdot s} \cdot \varphi^A(s) + \frac{\tau}{1 + \tau \cdot s} \cdot \dot{\varphi}^G(s) \quad (35)$$

Mit Hilfe der Backward-Euler-Tranformation kann (35) als Z-Transformierte dargestellt werden.

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{T} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \varphi^C(z) &= \frac{1}{1 + \tau \cdot \frac{1-z^{-1}}{T}} \cdot \varphi^A(z) + \frac{\tau}{1 + \tau \cdot \frac{1-z^{-1}}{T}} = \\ &= \frac{T}{T + \tau - \tau \cdot z^{-1}} \cdot \varphi^A(z) + \frac{\tau \cdot T}{T + \tau - \tau \cdot z^{-1}} \cdot \dot{\varphi}^G(z) \end{aligned} \quad (37)$$

$$(T + \tau - \tau \cdot z^{-1}) \cdot \varphi^C(z) = T \cdot \varphi^A(z) + \tau \cdot T \cdot \dot{\varphi}^G(z) \quad (38)$$

$$(T + \tau) \cdot \varphi^C(z) = \tau \cdot [\varphi^C(z) \cdot z^{-1} + T \cdot \dot{\varphi}^G(z)] + T \cdot \varphi^A(z) \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \varphi^C(z) &= \frac{\tau}{\tau + T} [\varphi^C(z) \cdot z^{-1} + T \cdot \dot{\varphi}^G(z)] + \frac{T}{T + \tau} \varphi^A(z) \\ &= \frac{\tau}{\tau + T} [\varphi^C(z) \cdot z^{-1} + T \cdot \dot{\varphi}^G(z)] + (1 - \frac{\tau}{T + \tau}) \varphi^A(z) \end{aligned} \quad (40)$$

Durch die Substitution $\alpha = \frac{\tau}{\tau+T}$ kann weiter vereinfacht werden.

$$\varphi^C(z) = \alpha [\varphi^C(z) \cdot z^{-1} + T \cdot \dot{\varphi}^G(z)] + (1 - \alpha) \varphi^A(z) \quad (41)$$

$$\varphi_n^C = \alpha (\varphi_{n-1}^C + T \cdot \dot{\varphi}_n^G) + (1 - \alpha) \varphi_n^A \quad (42)$$

2.5.1.2 Kalman-Filter für φ

Das Kalman-Filter beruht auf dem Prinzip der Zustandsschätzung. Diese Schätzung erfolgt mittels der Messwerte aus Gyroskopen, Beschleunigungssensoren und der darauf folgenden Winkelschätzung. Hierbei greift der Algorithmus auf Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung zurück. Ist die Varianz eines Messfehlers gegeben, so kann eine Schätzung des tatsächlichen Zustandes vorgenommen werden. In diesem Fall wird mit den linearisierten Bewegungsgleichungen gearbeitet. Dadurch kann das gewöhnliche Kalman-Filter verwendet werden. Für nichtlineare Systeme müssen unterschiedliche Filteralgorithmen, wie beispielsweise das Extended-Kalman-Filter, verwendet werden.

Die Berechnung des Kalman-Filters verläuft in zwei Schritten, welche in insgesamt fünf Teile gegliedert ist. Zuerst wird der Prädikationssschritt durchgeführt, hierbei wird der Prädikationsschätzwert \hat{x}_{n+1}^* berechnet, welcher den Systemzustand im folgenden Zeitschritt darstellt. Zusätzlich wird die Prädikationskovarianzmatrix P_{n+1}^* berechnet, welche angibt wie sicher die Vorhersage im Verhältnis zu dem wahren Systemzustand ist. Im zweiten Abschnitt, der s.g. Korrektur- bzw. Filterschritt, wird die Vorhersage mit Hilfe der neuen Messwerte korrigiert. Hierfür wird zuerst die Verstärkungsmatrix K_{n+1} berechnet, welche den Rückkopplungsfaktor der Messwerte wiedergibt. Im Anschluss wird der Endschätzwert des Systemzustandes mit Hilfe des ersten Prädikationswertes x_{n+1}^* und der Verstärkungsmatrix K_{n+1} bestimmt. Zuletzt wird die Varianz des geschätzten Systemzustandes \hat{P}_{n+1} berechnet.

Bezeichnung	Erklärung
\mathbf{x}_n^*	Systemzustände
$\hat{\mathbf{x}}_n$	Geschätzte Systemzustände
\mathbf{u}_n	Messbare Eingangsgrößen
\mathbf{v}_n	Störgrößen
\mathbf{A}_d	Systemmatrix, welche den Systemzustand $\hat{\mathbf{x}}_n$ auf den folgenden Zeitschritt abbildet.
\mathbf{B}_d	Eingangsmatrix
\mathbf{C}_d	Ausgangsmatrix
\mathbf{P}_n^*	Kovarianzmatrix von \mathbf{x}_n^* . Legt die Sicherheit der Schätzung fest.
$\hat{\mathbf{P}}_n$	Filterkovarianzmatrix von $\hat{\mathbf{x}}_n$. Gibt die Gewichtung der Messwerte an.
\mathbf{Q}_n	Kovarianzmatrix des Systemrauschens
\mathbf{R}_n	Kovarianzmatrix des Messrauschens

1. Prädikationsschätzwert

Der Systemzustand zum Zeitpunkt n ist beschreibbar durch die zeitdiskrete, lineare, stochastische Differenzengleichung

$$\mathbf{x}_{n+1}^* = \mathbf{A}_d \cdot \hat{\mathbf{x}}_n + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_n + \mathbf{v}_n \quad (43)$$

Die Systemmatrix \mathbf{A} bildet den Systemzustand $\hat{\mathbf{x}}$ von Zeitschritt n auf den folgenden Zeitschritt $n+1$ ab. Die Eingangsgrößen \mathbf{u}_n werden durch die Matrix \mathbf{B} auf den Systemzustand \mathbf{x}_{n+1}^* abgebildet. Das Rasuchen bzw. die äußereren Störeinflüsse werden durch den additiven Term \mathbf{v}_n repräsentiert.

2. Prädikationskovarianzmatrix

Die Kovarianzmatrix \mathbf{P}_{n+1}^* gibt an, wie sicher die Prädikation im Verhältnis zu dem wahren Systemzustand ist.

$$\mathbf{P}_{n+1}^* = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{P}}_n \cdot \mathbf{A}^T + \mathbf{Q}_n \quad (44)$$

3. Verstärkungsmatrix

Die Verstärkungsmatrix \mathbf{K}_{n+1} wird für die Korrektur der Vorhersage verwendet. Sie bestimmt, mit welcher Verstärkung der Messvektor rückgekoppelt wird.

$$\mathbf{K}_{n+1} = (\mathbf{P}_{n+1}^* \cdot \mathbf{C}^T) (\mathbf{C} \cdot \mathbf{P}_{n+1}^* \cdot \mathbf{C}^T + \mathbf{R}_{n+1})^{-1} \quad (45)$$

4. Filterschätzwert

Mit Hilfe der Verstärkungsmatrix \mathbf{K}_{n+1} und des Prädikationswertes \mathbf{x}_{n+1}^* wird der finale Schätzwert des Systemzustandes zu dem Zeitpunkt $n+1$ bestimmt.

$$\hat{\mathbf{x}}_{n+1} = \mathbf{x}_{n+1}^* + \mathbf{K}_{n+1} (\mathbf{y}_{n+1} - \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}_{n+1}^*) \quad (46)$$

5. Filterkovarianzmatrix

Im letzten Schritt wird die Varianz des geschätzten Systemzustandes berechnet, welche die Gewichtung der Messwerte im weiteren Verlauf der Berechnung beschreibt.

$$\hat{\mathbf{P}}_{n+1} = \mathbf{P}_{n+1}^* - \mathbf{K}_{n+1} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{P}_{n+1}^* \quad (47)$$

Anwendung des Kalman-Filters

Um die zuvor angesprochenen Nachteile der einzelnen Sensoren auszugleichen, wird nun die Umsetzung eines Kalman-Filters zur Sensorfusion vorgestellt.

Das Kalman-Filter fusioniert den Ausfallwinkel φ_{Acc} aus der Winkelschätzung mit der Winkeländerung $\Delta\varphi_{Gyr}$, welche durch Integration der Gyroskopwerte gewonnen wurde. Daraus ergibt sich der gefilterte Winkel $\hat{\varphi}_n$. Dieser gefilterte Zustandswert wird für die Berechnung des Regelkreises verwendet.

Als absolute Eingangsgrößen stehen hier zum einen die Winkelschätzung φ_{Acc} und die Winkeländerung $\Delta\varphi_{Gyr}$ zur Verfügung. Somit kann das fehlerbehaftete Teilsystem durch folgende Gleichungen beschrieben werden, wobei $v_{Gyr,n}$ $w_{Acc,n}$ die störbehafteten Additionsterme darstellen.

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \Delta\varphi_{Gyr,n} + v_{Gyr,n} \quad (48)$$

$$\varphi_{Acc,n} = \varphi_n + w_{Acc,n} \quad (49)$$

Die bereits vorgestellten Berechnungsschritte können nun auf den spezifischen Anwendungsfall angepasst werden. Da lediglich eine einzelne Zustandsgröße berechnet wird, werden anstelle von Vektoren und Matrizen skalare Größen verwendet.

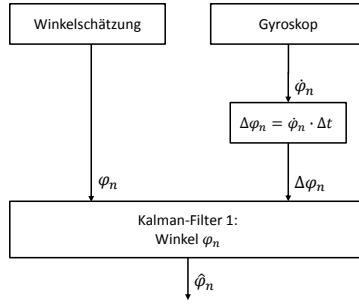


Abbildung 12: Übersicht Kalman-Filter, Quelle: eigene Darstellung

1. Prädikationsschätzwert

$$\varphi_{n+1}^* = \hat{\varphi}_n + \Delta\varphi_{Gyr,n} \quad (50)$$

2. Prädikationsvarianz

$$P_{n+1}^* = \hat{P}_{n+1} + \sigma^2(\Delta\varphi_{Gyr,n}) \quad (51)$$

3. Verstärkungsfaktor

$$K_{n+1} = \frac{P_{n+1}^*}{P_{*n+1} + \sigma^2(\varphi_{Acc,n})} \quad (52)$$

4. Filterschätzwert

$$\hat{\varphi}_{n+1} = \varphi_{n+1}^* + K_{n+1} \cdot (\varphi_{Acc,n} - \varphi_{n+1}^*) \quad (53)$$

5. Filtervarianz

$$\hat{P}_{n+1} = (1 - K_{n+1}) \cdot P_{n+1}^* \quad (54)$$

2.5.1.3 Vergleich der Filter

Um einen ersten Eindruck über die Qualität der Filter zu erhalten wird die Würfelseite als gewöhnliches Pendel aufgebaut und in Schwingung versetzt. Anschließend werden die Sensorwerte ausgewertet und die beiden Filter berechnet.

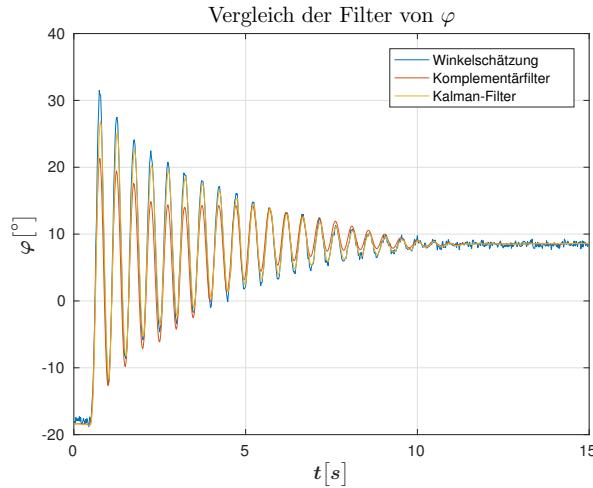
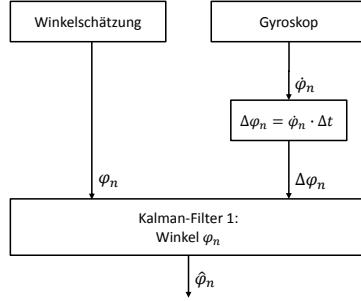


Abbildung 13: Vergleich der Filter für φ, Quelle: eigene Darstellung

Aus dem Verlauf der Signale lässt sich erkennen, dass die beiden Filter zu einer Glättung führen. Dennoch unterscheiden sich die Amplituden der drei Signale stark voneinander. Allerdings lassen sich diese Verläufe ohne ein Referenzsignal nicht weiter beurteilen. Somit kann eine endgültige Bewertung der Filter erst an Hand der Güte des geschlossenen Regelkreises getroffen werden.

2.5.2 Ansätze zur Filterung von $\dot{\varphi}$

Um die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ zu ermitteln wird ebenfalls ein Kalman-Filter eingesetzt.



In diesem Fall werden als Eingangssignale der Messwert des Gyroscopes $\dot{\varphi}_{Gyr}$ und integrierte Winkelbeschleunigung $\dot{\varphi}_{Acc}$ verwendet. Somit kann das fehlerbehaftete Teilsystem in seiner Dynamik durch folgende Gleichungen beschrieben werden, wobei die Störanteile der Beschleunigungssensoren und Gyroscope durch $v_{Acc,n}$ bzw. $w_{Gyr,n}$ dargestellt werden.

$$\dot{\varphi}_{n+1} = \dot{\varphi}_n + \Delta\dot{\varphi}_{Acc,n} + v_{Acc,n} \quad (55)$$

$$\dot{\varphi}_{Gyr,n} = \dot{\varphi}_n + w_{Gyr,n} \quad (56)$$

Die Zustandsschätzung verläuft analog zu dem bereits vorgestellten Verfahren.

1. Prädikationsschätzwert

$$\dot{\varphi}_{n+1}^* = \hat{\dot{\varphi}}_n + \Delta\dot{\varphi}_{Acc,n} \quad (57)$$

2. Prädikationsvarianz

$$P_{n+1}^* = \hat{P}_{n+1} + \sigma^2(\Delta\dot{\varphi}_{Acc,n}) \quad (58)$$

3. Verstärkungsfaktor

$$K_{n+1} = \frac{P_{n+1}^*}{P_{n+1}^* + \sigma^2(\dot{\varphi}_{Gyr,n})} \quad (59)$$

4. Filterschätzwert

$$\hat{\dot{\varphi}}_{n+1} = \dot{\varphi}_{n+1}^* + K_{n+1} \cdot (\dot{\varphi}_{Gyr,n} - \dot{\varphi}_{n+1}^*) \quad (60)$$

5. Filtervarianz

$$\hat{P}_{n+1} = (1 - K_{n+1}) \cdot P_{n+1}^* \quad (61)$$

Die nächste Abbildung zeigt den Verlauf der Gyroscopewerte und des Kalman-Filters bei dem Versuch aus dem vorherigen Abschnitt. Hier sind nur marginale Unterschiede zwischen den Amplituden zu

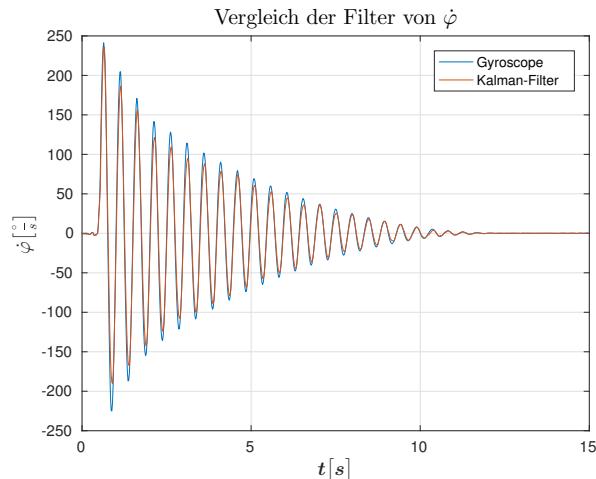


Abbildung 14: Verlauf des Filters für $\dot{\varphi}$, Quelle: eigene Darstellung

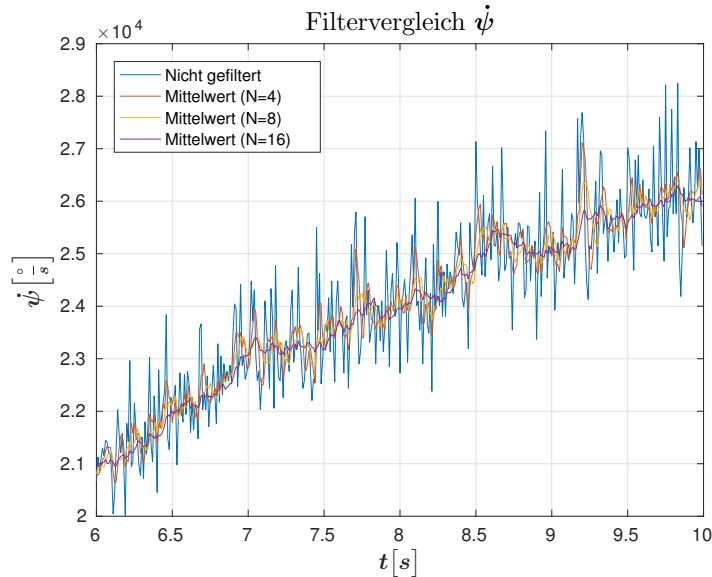
erkennen. Ebenso wie die Filter für φ muss die letztendliche Filtergüte am geschlossenen Regelkreis näher untersucht werden.

2.5.3 Ansätze zur Filterung von $\dot{\psi}$

Die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\psi}$ des Motors wird als analoges Signal von einem 12-Bit AD-Wandler ausgewertet. Diese Messwerte sind ebenfalls von hochfrequenten Störeinflüssen betroffen und müssen somit geglättet werden. Hierfür werden digitale Tiefpassfilter verwendet, welche in Form eines gleitenden Mittelwertes implementiert. Dieser Mittelwert wird über die letzten N Messwerte gebildet.

$$y_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_{n-k} \quad (62)$$

Die Glättung des Filters nimmt mit der Anzahl der verwendeten Werte N zu, allerdings wird das Filter damit auch träger. Somit muss ein Kompromiss zwischen Verzögerung und Glättung gefunden werden. Die folgende Abbildung zeigt den Vergleich der nicht gefilterten Werte aus dem Versuch zur Bestimmung des Reibwertes C_ψ und verschiedenen Mittelwert-Filtern.



Der Verlauf zeigt deutlich die Glättung des Signales. Außerdem ist keine signifikante Verzögerung durch die verschiedenen Filter ersichtlich. Allerdings ist zu erwarten, dass der Motor ein Eingangssignal mit höheren Frequenzanteilen erzeugt, sobald der Regelkreis geschlossen wird. Die hochfrequenten Signalanteile werden durch die Tiefpassfilter entfernt, wodurch ggf. eine Verfälschung des Eingangssignales entsteht. Deshalb kann die optimale Konfiguration des Mittelwert-Filters erst an der realen Regelstrecke ermittelt werden.

2.6 Modellbildung und Bestimmung der Systemgrößen

Mit Hilfe der Bewegungsgleichungen aus Abschnitt 2.3 kann nun eine Zustandsraumdarstellung aufgestellt werden. Hierfür werden die nichtlinearen Terme entsprechend linearisiert. Mit Hilfe der Bewegungsgleichungen bzw. Zustandsraumdarstellung kann ein Simulink-Modell implementiert werden um das Systemverhalten zu simulieren. Mit Hilfe der Zustandsraumdarstellung wird ein Zustandsregler entworfen, welcher an dem Modell erprobt werden kann. Zusätzlich wird über die Simulation der Einfluss der einzelnen Parameter, des Sensorrauschen und zusätzlicher Störungen untersucht.

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \dot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} \end{pmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \dot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} \end{pmatrix} \quad u = T_M \quad (63)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot u \quad (64)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{D} \cdot u \quad (65)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{g(m_K \cdot l_{AC} + m_R \cdot l_{AB})}{\theta_K^A + m_R \cdot l_{AB}^2} & \frac{-C_\varphi}{\theta_K^A + m_R \cdot l_{AB}^2} & \frac{C_\psi}{\theta_K^A + m_R \cdot l_{AB}^2} \\ \frac{-g(m_K \cdot l_{AC} + m_R \cdot l_{AB})}{\theta_K^A + m_R \cdot l_{AB}^2} & \frac{C_\varphi}{\theta_K^A + m_R \cdot l_{AB}^2} & \frac{-C_\psi(\theta_K^A + \theta_R^B + m_R \cdot l_{AB}^2)}{\theta_R^B(\theta_K^A + m_R \cdot l_{AB}^2)} \end{pmatrix} \quad (66)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-1}{\theta_K^A + m_R \cdot l_{AB}^2} \\ \frac{\theta_K^A + \theta_R^B + m_R \cdot l_{AB}^2}{\theta_R^B(\theta_K^A + m_R \cdot l_{AB}^2)} \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

2.6.1 Identifikation der Parameter

Der Reglerentwurf und die Simulation erfordern eine möglichst präzise Bestimmung der Systemparameter, wie z.B. Längen, Massen, Massenträgheitsmomente und Reibwerte. Die Bestimmung der Längen l_{AB} und l_{AC} , der Massen m_K , m_R und m_G , der Massenträgheitsmomente θ_K^A und θ_R^B erfolgt über das CAD-Modell. Hierfür werden Bauteile mit einer nicht homogenen Massenverteilung, wie z.B. die Motoren, in separate Baugruppen mit homogener Massenverteilung unterteilt.

2.6.1.1 Ermittlung des Reibwertes C_φ

In dem die Schwungmasse fest mit der Würfelseite verbunden wird ergibt sich die folgende Bewegungsgleichung für das Gesamtsystem.

$$(\theta_K^A + \theta_R^B + m_R \cdot l_{AB}^2) \ddot{\varphi} = g(m_K \cdot l_{AC} + m_R \cdot l_{AB}) \sin(\varphi) - C_\varphi \cdot \dot{\varphi} \quad (67)$$

In dem Versuchsaufbau wird das Gesamtsystem nun von einem Startwinkel φ_0 losgelassen, woraufhin eine gedämpfte Schwingung entsteht. Mit Hilfe der Sensoren können die Größen φ , $\dot{\varphi}$ und $\ddot{\varphi}$ gemessen werden.

Über die n Messpunkte ergeben sich die folgenden Vektoren.

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix} \quad \dot{\varphi} = \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \vdots \\ \dot{\varphi}_n \end{pmatrix} \quad \ddot{\varphi} = \begin{pmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \\ \vdots \\ \ddot{\varphi}_n \end{pmatrix} \quad (68)$$

Damit ergibt sich durch Umstellen von 67 die folgende Gleichung.

$$C_\varphi \cdot \dot{\varphi} = g(m_K \cdot l_{AC} + m_R \cdot l_{AB}) \sin(\varphi) - (\theta_K^A + \theta_R^B + m_R \cdot l_{AB}^2) \ddot{\varphi} \quad (69)$$

Mit Hilfe der Methode der kleinsten Fehlerquadrate kann nun der Reibwert C_φ bestimmt werden.

$$C_\varphi = 5.4 \cdot 10^{-3} \cdot kg \cdot m^2 \cdot s^{-1} \quad (70)$$

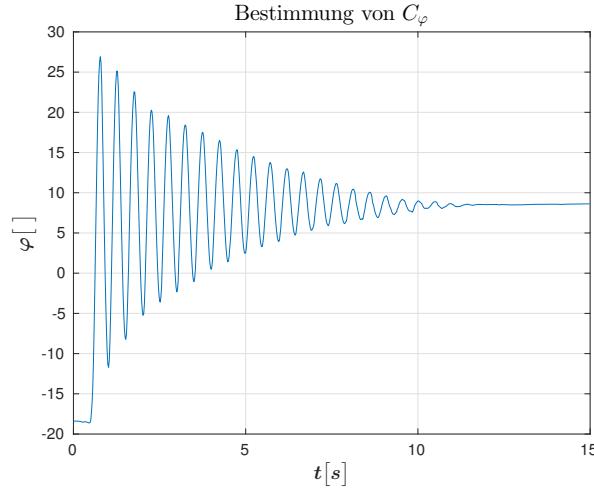


Abbildung 15: Ausfallwinkel der Würfelseite bei Versuch 4, Quelle: eigene Darstellung

2.6.1.2 Ermittlung des Reibwertes C_ψ

Im nächsten Versuchsaufbau wird die Würfelseite fixiert ($\dot{\varphi} = 0$). Hierbei beschleunigt der Motor die Schwungmasse mit einem konstanten Drehmoment $T_M = 10mNm$. T_M ist so zu wählen, dass sich die Radgeschwindigkeit ψ in einem Bereich bewegt, welcher dem Arbeitsbereich des geschlossenen Regelkreises entspricht.

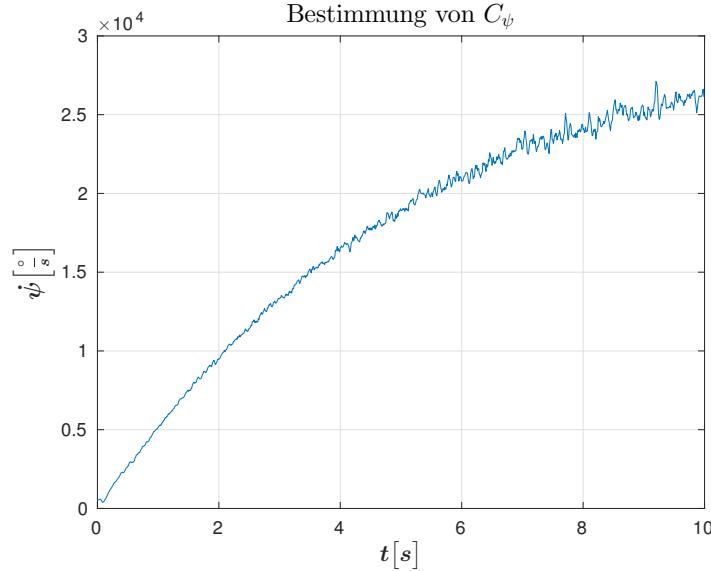


Abbildung 16: Versuch 5: Verlauf der Radgeschwindigkeit, Quelle: eigene Darstellung

Da die Bewegung auf einen Freiheitsgrad beschränkt wurde vereinfacht sich das Modell des Systems auf die folgende Bewegungsgleichung:

$$\theta_R^B \cdot \ddot{\psi} = T_M - C_\psi \cdot \dot{\psi} \quad (71)$$

Im Versuchsverlauf werden bei n Stützstellen die Werte von ψ , $\dot{\psi}$ und $\ddot{\psi}$ gemessen. Daraus ergeben sich die folgenden Vektoren.

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} \quad \dot{\psi} = \begin{pmatrix} \dot{\psi}_1 \\ \dot{\psi}_2 \\ \vdots \\ \dot{\psi}_n \end{pmatrix} \quad \ddot{\psi} = \begin{pmatrix} \ddot{\psi}_1 \\ \ddot{\psi}_2 \\ \vdots \\ \ddot{\psi}_n \end{pmatrix} \quad (72)$$

Durch Einsetzen von 72 in 71 kann über die Methode der kleinsten Fehlerquadrate wiederum der Reibwert C_ψ bestimmt werden.

$$C_\psi = 4.8301 \cdot 10^{-6} \cdot kg \cdot m^2 \cdot s^{-1} \quad (73)$$

2.6.1.3 Resultate der Systemidentifikation

An Hand der beschriebenen Versuche und Methoden wurden die folgenden Werte für die Parameter des Gesamtsystems ermittelt.

Parameter	Wert
l_{AB}	$0.084m$
l_{AC}	$0.087m$
m_K	$0.221kg$
m_R	$0.09kg$
θ_K^A	$2.8 \cdot 10^{-3} kg \cdot m^2$
θ_R^B	$1.1683 \cdot 10^{-4} \cdot kg \cdot m^2$
C_φ	$6.2 \cdot 10^{-3} \cdot kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}$
C_ψ	$3.1176 \cdot 10^{-5} \cdot kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}$
r_{S1}	$0.14m$
r_{S2}	$0.061m$

2.6.2 Entwurf des Simulink-Modelles

Dieser Abschnitt erklärt den Aufbau des Simulink-Modells zur Simulation des Systems. Die obere Modellschicht besteht aus drei Subsystemen zur Simulation des Motor, der Würfelseite und der Schwungmasse.

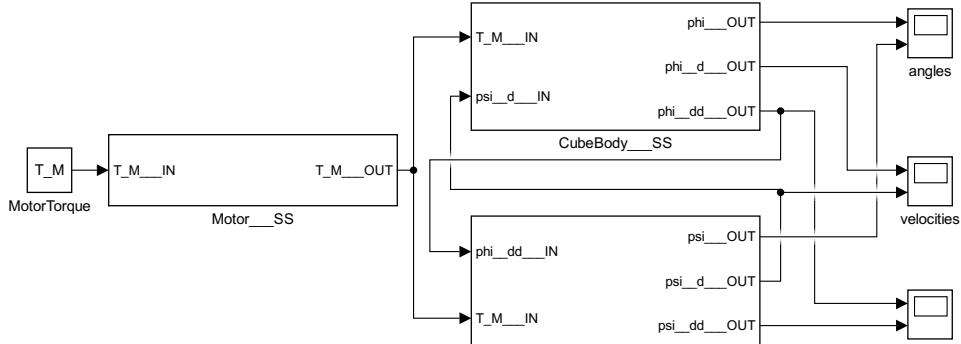


Abbildung 17: Simulink-Modell Übersicht, Quelle: eigene Darstellung

2.6.2.1 Simulation des Motors

Der Motor wird als zwei in Reihe geschaltete PT1-Glieder simuliert. Da der Regler als Stellgröße ein Motormoment berechnet, beträgt die Verstärkung des Motor K_M in der Simulation den Wert eins. Die Zeitkonstanten der PT1-Glieder sind einerseits die elektrische Zeitkonstante T_e und die mechanische Zeitkonstante T_m , deren Werte dem Datenblatt des Herstellers entnommen werden.

$$K_M = 1 \quad T_e = 0.55ms \quad T_m = 12.4ms \quad (74)$$

2.6.2.2 Simulation der Würfelseite

Die Dynamik der Würfelseite wird von 17 beschrieben.

$$\ddot{\varphi} = \frac{g(m_R \cdot l_{AB} + m_K \cdot l_{AC}) \sin(\varphi) - C_\varphi \cdot \dot{\varphi} + C_\psi \cdot \dot{\psi} - T_M}{\theta_K^A + m_R \cdot l_{AB}^2} \quad (17)$$

Somit ist die Winkelbeschleunigung gleich der Summe der Drehmomente geteilt durch die betroffenen Massenträgheitsmomente. Durch Integration und Rückführung können die einzelnen Drehmomente berechnet werden. Das folgende Modell zeigt die Umsetzung dieser Berechnungsvorschrift in Simulink.

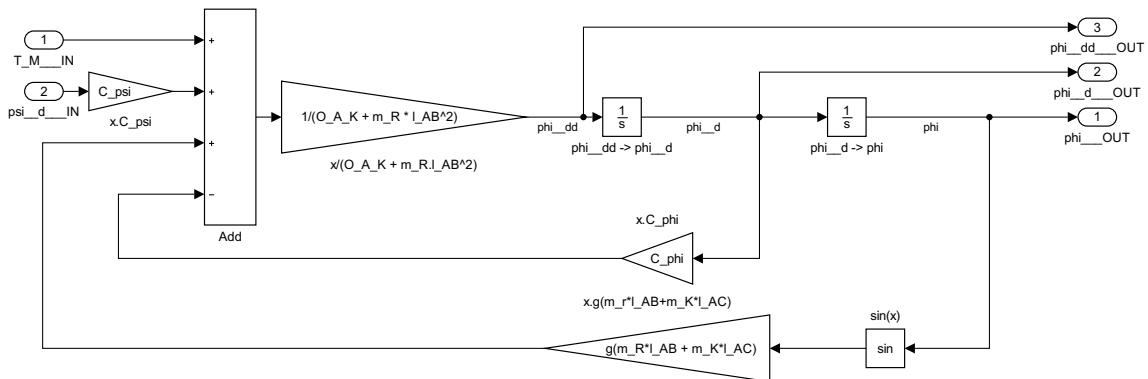


Abbildung 18: Subsystem Würfelseite, Quelle: eigene Darstellung

2.6.2.3 Simulation der Schwungmasse

Die Dynamik der Schwungmasse wird von 18 beschrieben, allerdings wird das Modell vereinfacht indem $\ddot{\varphi}$ nicht substituiert wird.

$$\theta_R^B \cdot \ddot{\psi} = T_M - C_\psi \cdot \dot{\psi} - \theta_R^B \cdot \ddot{\varphi} \quad (18)$$

Das Simulink-Modell folgt dem selben Schema wie das Subsystem zur Simulation der Bewegung des Würfelkörpers.

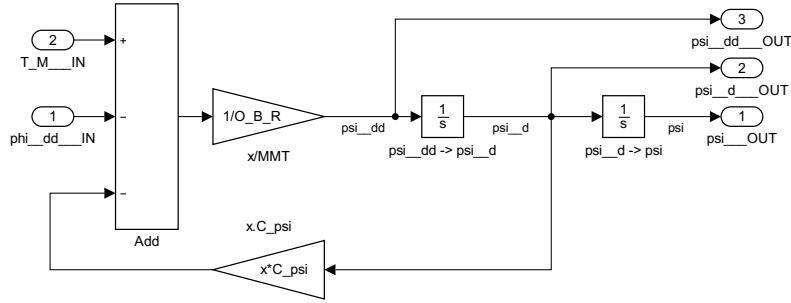


Abbildung 19: Subsystem Schwungmasse, Quelle: eigene Darstellung

2.7 Reglerentwurf

In dem folgenden Abschnitt wird der Entwurf eines Reglers vorgestellt, welcher auf der Rückführung des Zustandsvektors basiert. Im ersten Teil wird die analytische Bestimmung der Parameter erläutert, daraufhin wird der Regler im zweiten Teil an dem Prototyp erprobt und validiert.

2.7.1 Analytische Bestimmung der Reglerparameter

Mit Hilfe der Zustandsraumdarstellung kann über die Rückführung des Zustandvektors eine Regelung entworfen werden. Das folgende Blockschaltbild zeigt den Zusammenhang der Systemmatrizen und der Reglermatrix \mathbf{F} , welche zur Berechnung der Stellgröße $u = T_M$ dient.

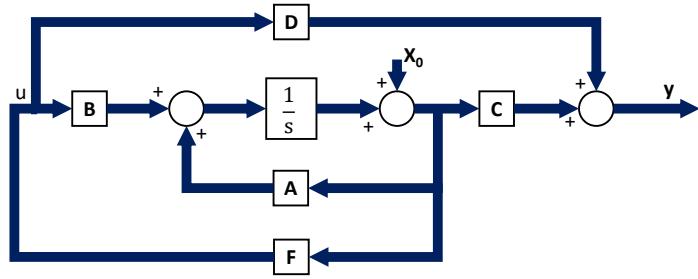


Abbildung 20: Blockschaltbild Regelkreis, Quelle: eigene Darstellung, Inhalt aus [13]

Die Stellgröße u wird von einem Mikrokontroller mit einer Abtastperiode $T_a = 20ms$ berechnet. Folglich handelt es sich um eine digitale Regelung. Um das Verhalten des diskreten Systems zu beschreiben müssen die diskreten Systemmatrizen \mathbf{A}_d , \mathbf{B}_d , \mathbf{C}_d und \mathbf{D}_d berechnet werden. Hierfür gilt nach [13]:

$$\mathbf{S} = T_a \sum_{v=0}^{\infty} \mathbf{A}^v \frac{T^v}{(v+1)!} \quad (75)$$

$$\mathbf{A}_d = \mathbf{I} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{A} \quad (76)$$

$$\mathbf{B}_d = \mathbf{S} \cdot \mathbf{B} \quad (77)$$

$$\mathbf{C}_d = \mathbf{C} \quad (78)$$

$$\mathbf{D}_d = \mathbf{D} \quad (79)$$

Die Reglermatrix \mathbf{F} wird als optimaler Zustandsregler nach dem quadratischen Gütekriterium entworfen. Die diskrete Gütfunktion für dieses System lautet:

$$I = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{x}^T(k) \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}(k) + R \cdot u(k)^2 \quad (80)$$

Die Matrizen \mathbf{Q} und \mathbf{R} stellen Gewichtungen der Zustands- und Stellgrößen dar. Die Ausgangswerte dieser Matrizen werden mit der Faustformel nach ([14]) berechnet. Ggf. können die Werte anschließend angepasst werden um die Reglergüte weiter zu verbessern.

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(\varphi_{max})^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(\dot{\varphi}_{max})^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(\psi_{max})^2} \end{pmatrix} \quad (81)$$

$$R = \left(\frac{1}{(T_{M,max})^2} \right) \quad (82)$$

Die Reglermatrix \mathbf{F} muss die Eigenschaft besitzen die Gütfunktion (80) zu minimieren. Dieses Problem wird mit Hilfe von der Matlab-Funktion *lqr* numerisch gelöst.

2.7.2 Verifizierung des Reglers an dem 1D-Prototyp

Mit Hilfe von Matlab wurden die Werte der Reglermatrix \mathbf{F} berechnet.

$$\mathbf{F} = (0.8821 \quad 0.1386 \quad 0.0002) \quad (83)$$

Somit lässt sich das Motormoment $T_{M,n}$ durch die Rückführung des Zustandvektors \mathbf{x}_n über die Reglermatrix \mathbf{F} berechnen.

$$T_{M,n} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{x}_n \quad (84)$$

Der Regler wird zuerst mit Hilfe eines Simulink-Modelles in der Simulation überprüft. Anschließend wird der geschlossene Regelkreis auf den Prototyp übertragen. Hierbei ist zu beachten, dass bei der Modellierung des Systemverhaltens die Annahme getroffen wurde, dass der Schwerpunkt des Systems auf dessen Y-Achse liegt. Durch den unsymmetrischen Aufbau ist dies allerdings nicht der Fall, somit ergibt sich das folgende Gravitationsmoment M_G , wobei der Winkel φ_{cog} den Winkel zwischen Y-Achse und Schwerpunkt der Würfelseite bezeichnet.

$$M_G = g(m_K \cdot l_{AC} + m_R \cdot l_{AB}) \cdot \sin(\varphi + \varphi_{cog}) \quad (85)$$

Somit muss ein konstantes Motormoment erzeugt werden, um die Würfelseite bei dem Sollwinkel $\varphi = 0$ zu halten. Dadurch wird die Schwungmasse konstant beschleunigt, weshalb die Schwungmasse nicht vollständig zum Stillstand kommen kann. Deshalb muss für die Berechnung des Drehmomentes der Winkel φ_{cog} zu der Zustandsgröße φ addiert werden.

$$T_{M,n} = \mathbf{F} \cdot \begin{pmatrix} \varphi + \varphi_{cog} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (86)$$

Da die Winkelgeschwindigkeit der Schwungmasse $\dot{\psi}$ nur dann verschwindet wenn das Motormoment gleich null ist, kann der Wert von φ_{cog} empirisch ermittelt werden.

2.8 Aufspringen

Das Aufspringen der Würfelseite wird durch das abrupte bremsen der Schwungmasse ermöglicht. Hierbei wird der Drehimpuls der Schwungmasse auf das Gesamtsystem übertragen. Dieser Vorgang kann als nicht elastischer Stoß modelliert werden. Somit ergibt sich aus dem Drehimpulserhaltungssatz folgende Gleichung, wobei $\dot{\varphi}_B$ die Winkelgeschwindigkeit der Würfelseite nach dem Bremsen und $\dot{\psi}_B$ die Winkelgeschwindigkeit der Schwungmasse vor dem Bremsen darstellt.

$$(\theta_K^A + \theta_R^B + m_R \cdot l_{AB}) \cdot \dot{\varphi}_B = \theta_R^B \cdot \dot{\psi}_B \quad (87)$$

Um die Würfelseite von der Ruhelage ($\varphi_R = \pm \frac{\pi}{4}$) zu dem Gleichgewichtspunkt ($\varphi_G = 0$) zu bewegen muss Arbeit verrichtet werden. Diese Arbeit W ist gleich der Änderung der potentiellen Energie von der Ruhelage hin zu dem Gleichgewichtspunkt.

$$W = V(\varphi_G) - V(\varphi_R) = g(m_K + m_R)l_{AC} \cdot (\cos(\varphi_G) - \cos(\varphi_R)) \quad (88)$$

Auf Grund des Energieerhaltungssatzes muss die kinetische Energie des Gesamtsystems nach dem Bremsvorgang gleich der zu leistenden Arbeit sein um die Würfelseite aufzurichten. Somit kann der Zusammenhang von $\dot{\varphi}_B$ und der Arbeit W wie folgt beschrieben werden.

$$\frac{1}{2}(\theta_K^A + \theta_R^B + m_R \cdot l_{AB})\dot{\varphi}_B^2 = g(m_K + m_R)l_{AC} \cdot (1 - \frac{1}{\sqrt{2}}) \quad (89)$$

Mit Hilfe der Gleichungen (89) und (87) kann nun die notwendige Bremsgeschwindigkeit $\dot{\psi}_B$ berechnet werden.

$$\dot{\psi}_B = \sqrt{(2 - \sqrt{2}(m_R + m_K) \cdot l_{AC} \cdot g \cdot \frac{\theta_K^A + \theta_R^B + m_R \cdot l_{AB}}{\theta_R^B})} \quad (90)$$

Das obige Modell geht von der Annahme aus, dass es sich um einen perfekt nicht elastischen Stoß handelt und bei der Bewegung der Würfelseite keine Energie verloren geht. Somit besteht eine Abweichung des Modells von den realen Bedingungen. Um diese Abweichungen zu minimieren wird ein, an den Gradientenabstieg angelehnter, Lernalgorithmus implementiert. Nach dem Abbremsen der Schwungmasse werden die Größen φ und $\dot{\varphi}$ beobachtet. Tritt ein Nulldurchgang von φ auf bedeutet dies, dass die Anfangsgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_B$ und somit die Radgeschwindigkeit $\dot{\psi}_B$ zu hoch waren. Tritt jedoch ein Nulldurchgang von $\dot{\varphi}$ auf, folgt, dass $\dot{\varphi}_B$ und $\dot{\psi}_B$ zu niedrig waren. In beiden Fällen kann die Änderung der Energie ΔE , welche nötig ist um den Zielpunkt zu erreichen, berechnet werden.

$$\Delta E = \begin{cases} (1 - \cos(\varphi_0))(m_K + m_r)l_{AC} \cdot g & | \dot{\varphi} = 0 \\ -\frac{1}{2}(\theta_K^A + \theta_R^B + m_R \cdot l_{AB}) \cdot \dot{\varphi}_0^2 & | \varphi = 0 \end{cases} \quad (91)$$

Mit Hilfe der Drehimpuls- (87) und Energieerhaltung (89) wird nun aus der Energieänderung ΔE die nötige Änderung der Radgeschwindigkeit $\Delta \dot{\psi}_B$ berechnet.

$$\pm \Delta \dot{\psi}_B = \sqrt{2 \cdot \frac{\theta_K^A + \theta_R^B + m_R \cdot l_{AB}}{\theta_R^B} \cdot \Delta E} \quad (92)$$

Die Konvergenz des Lernalgorithmus gegen den Zielwert wird empirisch bewiesen, hierfür ist allerdings das hinzufügen einer Lernrate μ erforderlich. Daraus ergibt sich letztendlich folgende Vorschrift um den aktuellen Wert der Bremsgeschwindigkeit $\dot{\psi}_B$ zu bestimmen.

$$\dot{\psi}_B := \dot{\psi}_B + \mu \cdot \Delta \dot{\psi}_B \quad | \quad 0 < \mu \leq 1 \quad (93)$$

2.9 Software

Für die verschiedenen Versuche und die Umsetzung des Regelkreises müssen Software-Applikationen entwickelt werden. Die Hauptaufgabe besteht in der Berechnung des Regelkreises. Hierfür muss eine HW-Schnittstelle implementiert werden, welche es ermöglicht die Sensorik auszuwerten und die Aktoren anzusteuern. Anschließend müssen die Teilsysteme des Regelkreises berechnet werden. Hierunter fallen die Evaluierung der Sensordaten, die verschiedenen Filter und der letztendliche Regler. Hierbei müssen Echtzeitanforderungen eingehalten werden, welche empirisch im Entwicklungsprozess bestimmt werden.

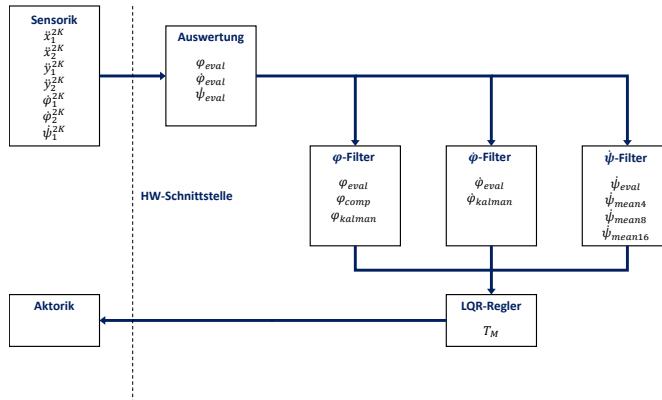


Abbildung 21: Signalfluss Regelkreis, Quelle: eigene Darstellung

Abbildung 21 zeigt den Signalfluss des Regelkreises. Für die Durchführung der Versuche müssen die dargestellten Signale an eine MATLAB-Applikation übertragen werden, welche auf dem Host-PC ausgeführt wird. Hierunter fallen die folgenden Daten-Pakete.

- Sensordaten: Rohwerte der Sensoren in 2K-Darstellung
- φ -Daten: Werte der Sensorevaluierung, des Komplementär- und Kalman-Filters
- $\dot{\varphi}$ -Daten: Werte der Sensorevaluierung und des Kalman-Filters
- $\dot{\psi}$ -Daten: Werte der Sensorevaluierung und der Mittelwert-Filter

Andererseits muss die Anwendung in der Lage sein, Steuerbefehle der MATLAB-Applikation zu empfangen und umzusetzen. Hierunter fallen die folgenden Anweisungen.

- Start- bzw. Stopp-Befehl
- Auswahl des φ -Filter
- Auswahl des $\dot{\varphi}$ -Filter
- Auswahl des $\dot{\psi}$ -Filter
- Setzen des φ -Offset für die Berechnung des Reglers
- Setzen des $\dot{\varphi}$ -Offset für die Berechnung des Reglers
- Setzen des $\dot{\psi}$ -Offset für die Berechnung des Reglers
- Setzen eines fixen Motormoment

Folglich muss ein Kommunikationsprotokoll implementiert werden um die Verbindung zwischen dem BBB und dem Host-PC herzustellen. Hierbei fällt die Entscheidung auf eine TCP/IP-Verbindung wobei die BBB-Anwendung als Server agiert. Die Gründe für das gewählte Protokoll sind einerseits die komfortable Implementierung auf beiden Seiten, andererseits die Sicherung der fehlerfreien Datenübertragung.

2.10 Allgemeiner Softwareentwurf

Die oben genannten Aufgaben werden auf zwei logische Komponenten verteilt, welche als separate Tasks ausgeführt werden. Hierbei übernimmt die Regelungskomponente die Berechnung des Regelkreises und die Bereitstellungen der Daten. Die Kommunikationskomponente betreibt den TCP/IP-Server um Daten an MATLAB zu senden bzw. zu empfangen.

2.10.1 Kommunikation zwischen den Komponenten

Der Datenaustausch zwischen den Komponenten wird mit Hilfe von Nachrichten realisiert, welche sich aus einem Ereignis bzw. Event und einem Datenpaket zusammensetzen. Der Grund Nachrichten als Kommunikationsmittel zu verwenden, besteht einerseits darin, dass nur kleine Datenmengen übertragen werden müssen, andererseits kann das Format für die TCP/IP-Übertragung wiederverwendet werden. Die Erzeugung und Zustellung der Nachrichten übernimmt ein zentraler Proxy, welcher nach dem Singleton-Muster implementiert wird. Da die Zuordnung der verschiedenen Ereignisse und Empfängern vor der Laufzeit bekannt ist, findet keine dynamische Registrierung der Komponenten beim Proxy statt.

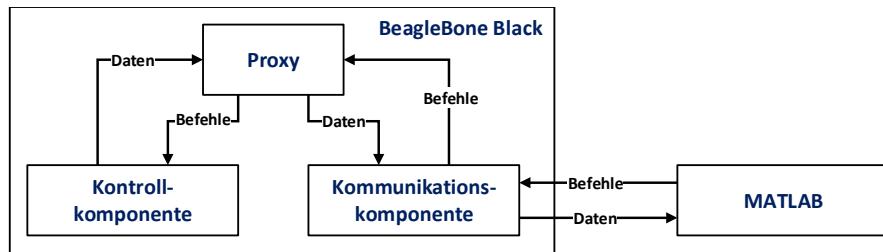


Abbildung 22: SW-Kommunikation, Quelle: eigene Darstellung

Der Proxy stellt Methoden bereit um die Nachrichten mit den verschiedenen Ereignissen bzw. Befehlen zu erzeugen. Dadurch werden die auszuführenden Aktionen abstrahiert und die Kommunikation gekapselt.

```

1 class CProxy:
2 {
3     public:
4         static CProxy& getInstance();
5         bool timerTick(bool waitForever);
6         bool routeMATLABMessage(CMessage& msg, bool waitForever);
7         bool transmitSensorData(CSensorData& data, bool waitForever);
8         bool transmitPhiData(CPhi& data, bool waitForever);
9         bool transmitPhi__dData(CPhi__d& data, bool waitForever);
10        bool transmitPsi__dData(CPsi__d& data, bool waitForever);
11        bool clientConnect(bool waitForever);
12        bool clientDisconnect(bool waitForever);
13     private:
14         CProxy();
15     private:
16         static CProxy* sInstance;
17 }
  
```

Um Nachrichten zu empfangen besitzen die Komponenten Eingangspuffer, welche als Queues implementiert werden. Das Grundgerüst der Komponenten wird in einer abstrakten Basisklasse festgelegt, welche rein virtuelle Methoden zur Initialisierung und Ausführung deklariert. Die *dispatch*-Methode ist für die Verarbeitung von Nachrichten zuständig.

```

1 class AComponentBase
2 {
3     public:
4         virtual void init() = 0;
5         virtual void run() = 0;
6     protected:
7         virtual bool dispatch(CMessage& msg) = 0;
8     protected:
9         TQueue<QUEUE_SIZE> mQueue;
10 }
  
```

2.10.2 Aufbau der Regelungskomponente

Die Aufgaben der Regelungskomponente bestehen einerseits in der Interaktion mit der HW und der Berechnung des Regelkreises.

Für die verschiedenen Versuche ist eine zusätzliche Kontrolllogik erforderlich, welche in Form eines Zustandsautomaten implementiert wird. Die FSM verarbeitet die empfangenen Nachrichten und passt den aktuellen Zustand und somit das Verhalten entsprechend an. Auf der obersten Schicht verfügt das Statechart über den Zustand *STANDBY* und Zustände um die verschiedenen Versuche durchzuführen. Dadurch kann dieselbe Applikation flexibel eingesetzt und während des Entwicklungsprozesses erweitert werden. Die letztendlichen Aufgaben der Komponente werden in der Klasse *CControlAction* gekapselt um eine klare Trennung von Kontroll- und Signalfluss zu gewährleisten. Hierunter fallen die Interaktion mit der HW, die Evaluierung der Sensordaten, die Auswertung der Filter und die Berechnung des Reglers.

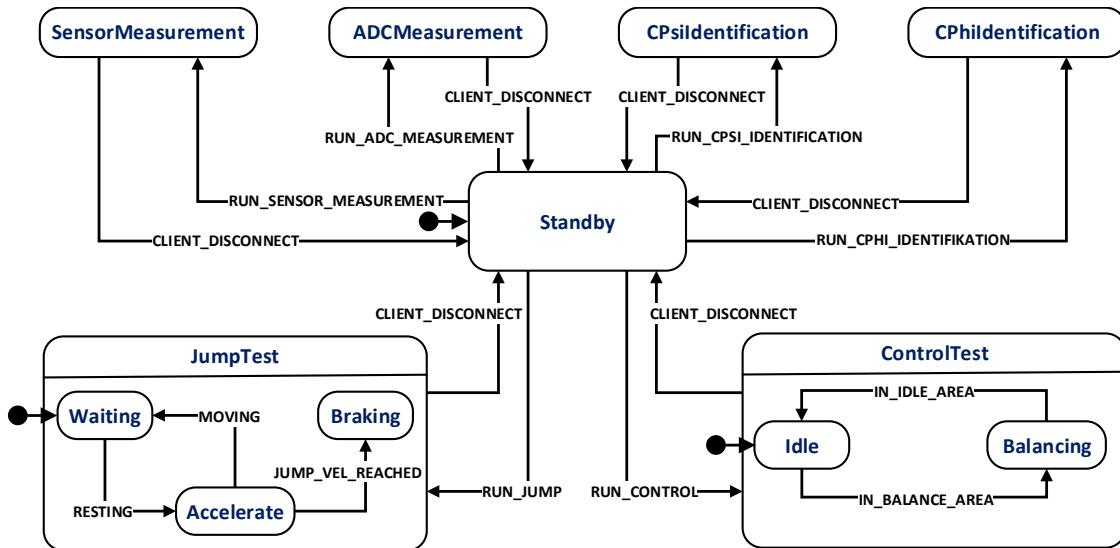


Abbildung 23: Kontroll-FSM, Quelle: eigene Darstellung

Diese Teilsysteme werden als Klassen implementiert, welche Methoden bereitstellen um die Sensorwerte auszulesen, die Motoren zu steuern und die Filterwerte bzw. den Regler zu berechnen. Zusätzlich verfügt die Komponente über einen Timer-Task, welcher als eigenständiger Thread ausgeführt wird und für die Zeitgebung zuständig ist.

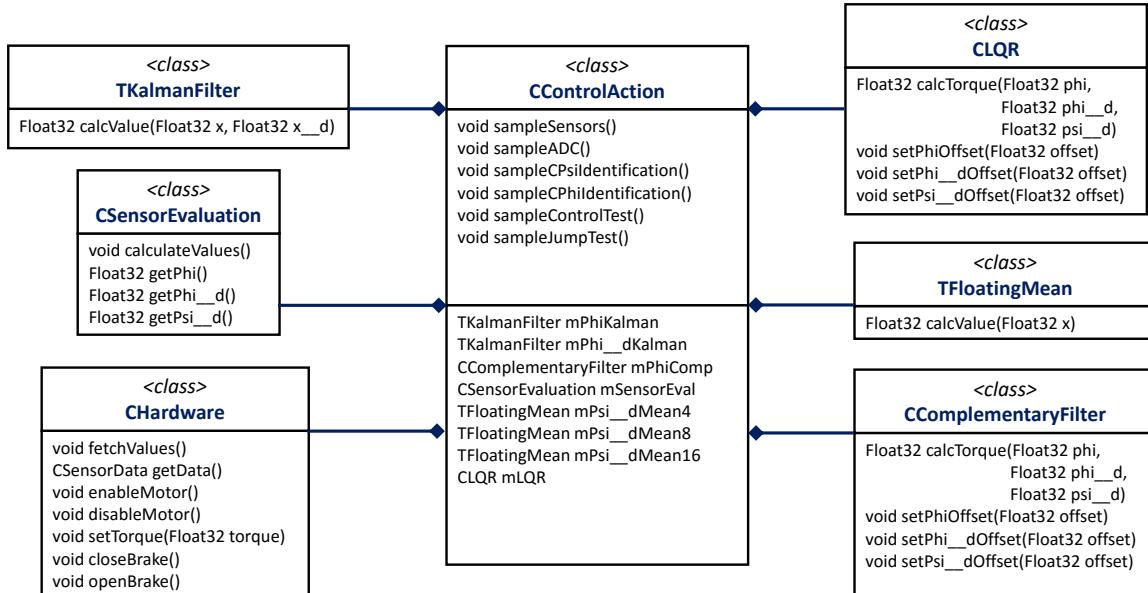


Abbildung 24: Klassendiagramm Regelkreis, Quelle: eigene Darstellung

Bei Betreten der Versuch-Zustände wird der Softtimer gestartet, welcher zyklisch Timer-Events an die Regelungskomponente sendet. Bei Erhalten einer solchen Nachricht führt die FSM die, dem aktuellen Zustand entsprechende, Logik aus. Die ersten drei Versuche sind aus Sicht des Kontrollflusses identisch, aus Gründen der Einheitlichkeit werden dennoch drei explizite Zustände implementiert. In diesen Zuständen werden bei Eintreffen eines Timer-Events die aktuellen Sensorwerte abgefragt und an die MATLAB-Applikation gesendet. Für die Versuche 4 und 5 müssen die Sensorauswertung und die Filter implementiert werden. Deren Ausgangswerte werden wiederum zyklisch berechnet und mit Hilfe des Proxys an MATLAB übertragen. Versuch 6 besteht in der Umsetzung des Reglers. Der entsprechende Zustand muss einerseits den vollständigen Regelkreis berechnen, als auch die Filter- und Reglerwerte an MATLAB übertragen. Zusätzlich muss der Zustand die Befehle zur Auswahl der Filter und zum Setzen der Offsets annehmen und umsetzen.

2.10.3 Aufbau der Kommunikationskomponente

Die Hauptaufgabe der Kommunikationseinheit besteht in dem Betrieb des TCP/IP-Server und der Weiterleitung von Nachrichten. Der Server wird in Form einer Klasse implementiert, welche Methode zum Empfangen und Versenden von Nachrichten bereitstellt.

```
1 class CServer
2 {
3     public:
4     void init();
5     void waitForConnection();
6     bool transmitMessage(CMessage& msg, bool waitForever);
7     bool receiveMessage(CMessage& msg, bool waitForever);
8     ...
9     private:
10    Int32 mSocketFD;
11    Int32 mConnectionFD;
12 }
```

Hierfür wird ein zweiter Thread gestartet, welcher auf Nachrichten der MATLAB-Anwendung wartet und diese an den Proxy weiterleitet. Die Kontrolllogik der Komponente wird ebenfalls in Form einer Zustandsmaschine implementiert. Hierbei wird lediglich zwischen den Zuständen *STANDBY* und *RUNNING* unterschieden. Im Ausgangszustand wartet die Komponente auf die Verbindungsanfrage eines Client, welcher die MATLAB-Anwendung ist. Der Haupt-Thread der Komponente wartet auf eingehende Ereignisse und verarbeitet diese. Der zweite Thread wartet zuerst auf die Verbindungsanfrage des Client, diese signalisiert er mittels einer Nachricht. Daraufhin wechselt die Komponente in den *RUNNING*-Zustand, in welchem empfangene Nachrichten mit Regelungsdaten an MATLAB weitergeleitet werden. Der zweite Thread wartet nun auf eingehende TCP/IP-Daten von MATLAB. Sowohl beim senden als auch empfangen von Daten kann ein Verbindungsabbruch des Clients erkannt werden. In diesem Fall wechselt die Komponente in den *STANDBY*-Zustand und der zweite Thread wartet auf eine neue Verbindungsanfrage.

2.11 Ausblick

Auf Grund des straffen Zeitplanes dieses Entwicklungsprojektes mussten einzelne Untersuchungen bzw. Erweiterungen vernachlässigt werden. Deshalb soll dieser Abschnitt einen Ausblick über mögliche Optimierungen schaffen, welche im Rahmen weiterer Projekte untersucht werden können. Eine der größten Herausforderungen hierbei waren die hohen Eigenfrequenzen des Systems die zu einem sehr dynamischen Verhalten führen. Dadurch sind simple Tiefpassfilter ungeeignet um Rauschsignale zu entfernen, da sie zu große Verzögerungen mit sich bringen. Auch der verwendete Regler muss in der Lage sein in kurzer Zeit auf Störungen zu reagieren.

Die verschiedenen Filter wurden in dieser Arbeit zum Teil nur oberflächlich untersucht, besonders der direkte Vergleich der Ansätze beruht lediglich auf dem Vergleich der letztendlichen Reglergüte. In diesem Bereich können weitere Verbesserungen erreicht werden in dem einerseits ein absolutes Referenzsignal gemessen wird um eine Bewertung der Filtersignale durchzuführen. Beispielsweise kann der Winkel φ mit einem Drehgeber gemessen werden. Dadurch steht ein weiteres Signal zur Verfügung, das präziser als die Winkelschätzung bzw. die Filter ist und somit als Sollwert betrachtet werden kann. Weiterhin können die Rauschanteile der Sensorsignale näher untersucht werden um eine weitere Verbesserung der Filteralgorithmen zu erreichen. Besonders das verwendete Komplementär-Filter verspricht hier großes Verbesserungspotential.

Außerdem wurde im Rahmen dieses Projektes lediglich ein Zustandsregler verwendet. Das Gebiet der Regelungstechnik bietet hier eine Vielzahl verschiedener Ansätze, welche eine zu weiteren Verbesserungen im Systemverhalten führen können. In dieser Hinsicht eignet sich das Projekt auch hervorragend als Testmittel um verschiedene Regler- und Filteralgorithmen miteinander zu vergleichen.

3 3D-Modell

Der zweite Teil des Projektes beschäftigt sich mit der Entwicklung des vollständigen Würfels (3D-Modell). Hierbei können die Ansätze des 1D-Modell übernommen werden, wobei deren Komplexität jedoch zunimmt. Beispielsweise werden aus den zwei Freiheitsgraden der Würfelseite sechs Freiheitsgrade für das 3D-Modell. Folglich steigt der Umfang der Systemanalyse und des Regelkreises. Eine besondere Schwierigkeit besteht darin, dass die drei Eingangsgrößen alle Systemzustände beeinflussen und somit nicht getrennt betrachtet werden können. Auch die Schätzung der Zustände mit Hilfe der Sensorwerte nimmt zu da sich die Anzahl der Sensorsignale verdreifacht und komplexere Beziehungen zwischen den Sensorwerten und den Systemzuständen bestehen.

Die Vorgehensweise ist dennoch identisch zu dem 1D-Modell, allerdings wird gezielt auf die Unterschiede zwischen den beiden Modellen eingegangen und Ergebnisse aus vorhergehenden Analyse als bekannt angenommen.

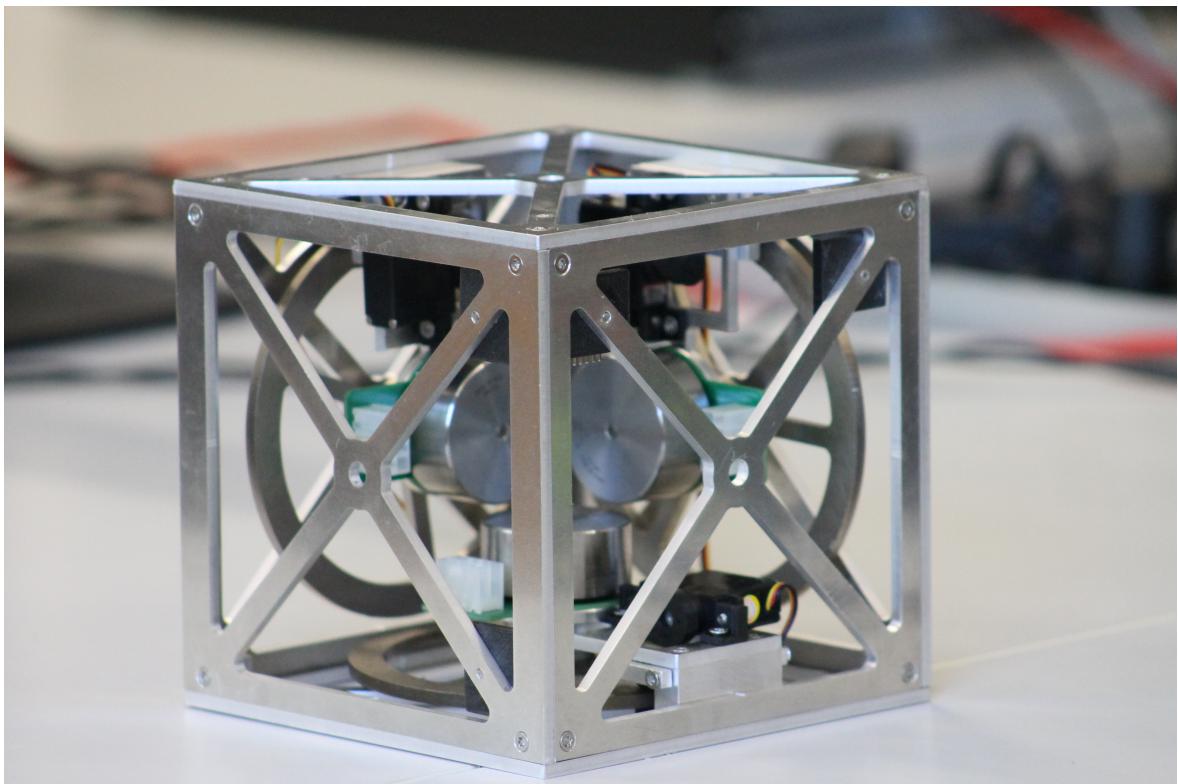


Abbildung 25: 3D-Modell, Quelle: eigene Darstellung

3.1 Aktorik und Sensorik

Die Aktorik des Würfels setzt sich aus den Bauteilen zusammen, welche bereits im 1D-Modell verwendet wurden. Allerdings sind drei Schwungmassen verbaut, womit auch drei Motoren bzw. Bremsen erforderlich sind.

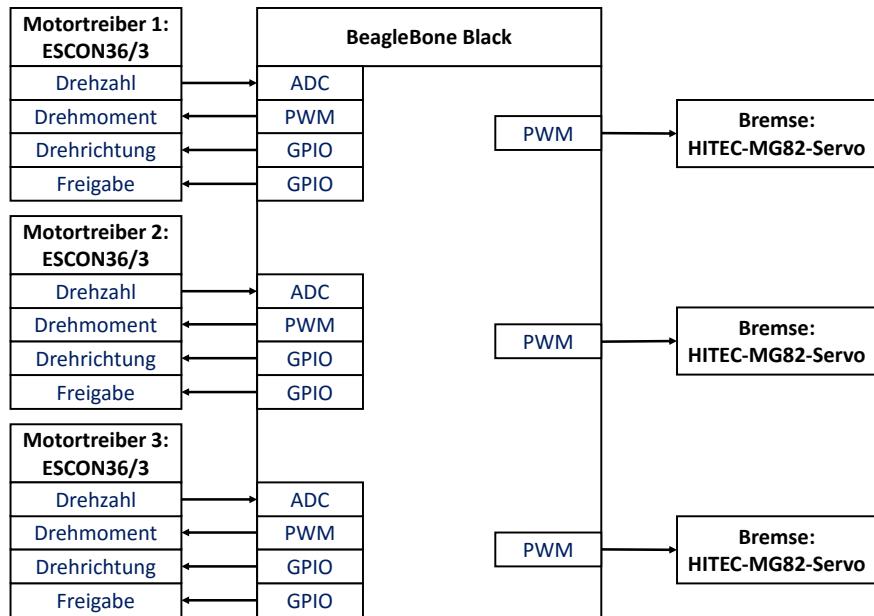


Abbildung 26: Übersicht Aktorik, Quelle: eigene Darstellung

Um die Position und Orientierung des Würfels im Raum zu bestimmen sind insgesamt sechs Sensoren nötigt. Die hier verwendeten GYR-521-Platinen können lediglich auf zwei verschiedene Adressen konfiguriert werden. Deshalb sind mehrere I²C-Bussysteme erforderlich. Da das BeagleBone Black lediglich zwei solcher Bussysteme zur Verfügung stellt wird ein analoger Switch verwendet um die Bussysteme der Sensoren sequenziell anzusteuern. Die Auswahl des Zielbusses wird mit Hilfe von digitalen Ausgängen festgelegt.

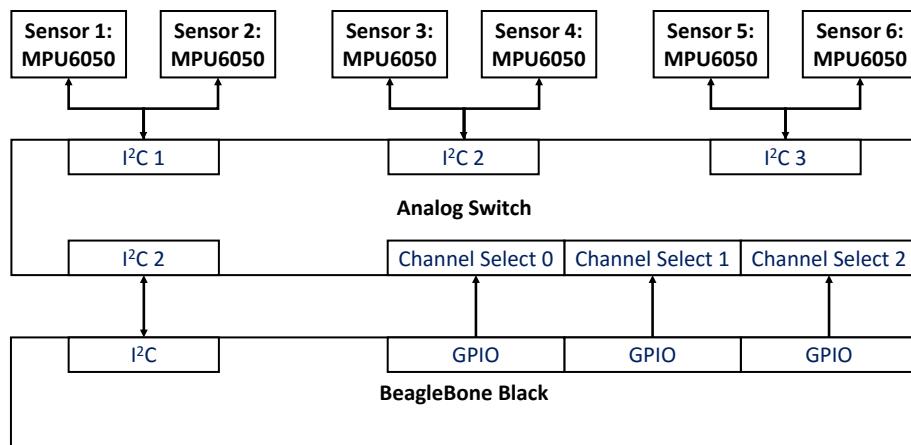


Abbildung 27: Übersicht Sensorik, Quelle: eigene Darstellung

3.2 Modellierung der Systemdynamik

In diesem Abschnitt werden die Bewegungsgleichungen des 3D-Modells mit Hilfe des Lagrange-Formalismus hergeleitet. Der Würfelkörper besitzt drei rotatorische Freiheitsgrade, die drei Schwungmassen verfügen über jeweils einen Freiheitsgrad. Somit ergeben sich insgesamt sechs Freiheitsgrade für das Gesamtsystem. Dadurch steigt die Komplexität der Systemdynamik stark an, allerdings bestehen nach wie vor Parallelen zu der Dynamik des 1D-Modells.

Um die Position des Würfels zu beschreiben wird ein raumfestes Bezugssystem $\{I\}$ eingeführt, welches von den drei Einheitsvektoren ${}^I e_x$, ${}^I e_y$ und ${}^I e_z$ beschrieben wird. Das zweite Bezugssystem $\{W\}$ ist körperfest und rotiert somit mit dem Würfel. Es wird von den Einheitsvektoren ${}^w e_x$, ${}^w e_y$ und ${}^w e_z$ beschrieben.

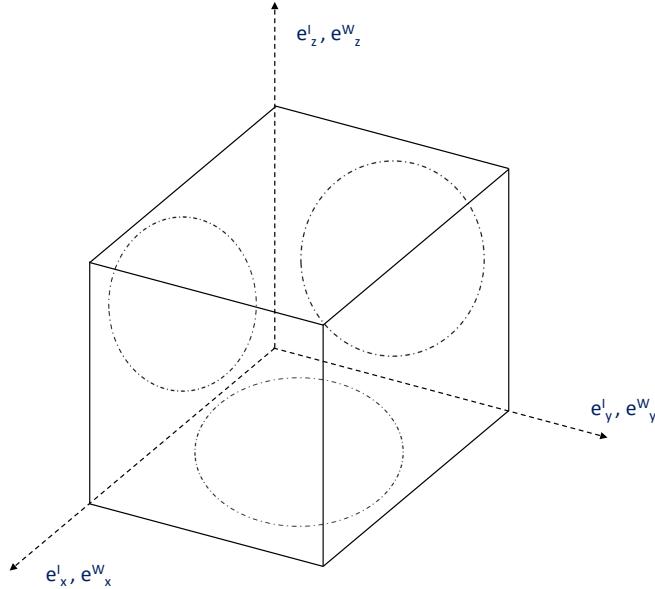


Abbildung 28: Mechanischer Aufbau, Quelle: eigene Darstellung

Die aktuelle Position des Würfels kann somit eindeutig durch die Verschiebung des körperfesten Bezugssystems $\{W\}$ zu dem raumfesten Bezugssystem $\{I\}$ bestimmt werden. Um diese Rotation zu beschreiben werden die drei Euler-Winkel φ_1 , φ_2 und φ_3 eingeführt. Die Drehreihenfolge und Drehachsen werden im folgenden beschrieben.

Winkel	Beschreibung
φ_1	Drehung um ${}^I e_z$
φ_2	Drehung um ${}^w e_y$
φ_3	Drehung um ${}^w e_x$

Die erste Ableitung gewöhnliche Ableitung der Euler-Winkel entspricht den Winkelgeschwindigkeiten des Würfels um die oben genannten Achsen.

Mit Hilfe der Euler-Winkel können Drehmatrizen definiert werden um Koordinaten in dem raumfesten Bezugssystem $\{I\}$ in das körperfeste Bezugssystem $\{W\}$ zu projizieren. Hier zeigt sich wieder die Bedeutung der Reihenfolge der einzelnen Drehungen, da auch die Matrizenmultiplikation im Allgemeinen nicht kommutativ ist.

$${}^w \mathbf{r} = {}^w \mathbf{D}_{\varphi_3} \cdot ({}^w \mathbf{D}_{\varphi_2} \cdot ({}^w \mathbf{D}_{\varphi_1} \cdot {}^I \mathbf{r})) = {}^w \mathbf{D} \cdot {}^I \mathbf{r} \quad (94)$$

$${}^w \mathbf{D}_{\varphi_1} = \begin{pmatrix} c_{\varphi_1} & s_{\varphi_1} & 0 \\ -s_{\varphi_1} & c_{\varphi_1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad {}^w \mathbf{D}_{\varphi_2} = \begin{pmatrix} c_{\varphi_2} & 0 & -s_{\varphi_2} \\ 0 & 1 & 0 \\ s_{\varphi_2} & 0 & c_{\varphi_2} \end{pmatrix} \quad {}^w \mathbf{D}_{\varphi_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{\varphi_3} & s_{\varphi_3} \\ 0 & -s_{\varphi_3} & c_{\varphi_3} \end{pmatrix} \quad (95)$$

$${}^w \mathbf{D} = \begin{pmatrix} c_{\varphi_1} c_{\varphi_2} & s_{\varphi_1} c_{\varphi_2} & -s_{\varphi_2} \\ c_{\varphi_1} s_{\varphi_2} s_{\varphi_3} - s_{\varphi_1} c_{\varphi_3} & c_{\varphi_1} c_{\varphi_3} + s_{\varphi_1} s_{\varphi_2} s_{\varphi_3} & c_{\varphi_2} s_{\varphi_3} \\ s_{\varphi_1} s_{\varphi_2} + c_{\varphi_1} s_{\varphi_2} c_{\varphi_3} & s_{\varphi_1} s_{\varphi_2} c_{\varphi_3} - c_{\varphi_1} s_{\varphi_3} & c_{\varphi_2} c_{\varphi_3} \end{pmatrix} \quad (96)$$

Die Projizierung einer Koordinate aus dem körperfesten in das raumfeste Bezugssystem erfolgt durch die transponierte der Matrix ${}^w \mathbf{D}$.

$${}^I \mathbf{r} = {}^I \mathbf{D} \cdot {}^w \mathbf{r} = {}^w \mathbf{D}^T \cdot {}^w \mathbf{r} \quad (97)$$

Die Bewegung der Schwungmassen relativ zu dem Würfelkörper wird von den drei Winkeln ψ_1 , ψ_2 und ψ_3 beschrieben. Deren zeitliche Ableitungen stellen die Winkelgeschwindigkeiten der Schwungräder dar.

$$\boldsymbol{\psi} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} \quad \dot{\boldsymbol{\psi}} = \begin{pmatrix} \dot{\psi}_1 \\ \dot{\psi}_2 \\ \dot{\psi}_3 \end{pmatrix} \quad (98)$$

Die Euler-Winkel $\boldsymbol{\varphi}$ und die Ausfallwinkel der Schwungmassen $\boldsymbol{\psi}$ werden als generalisierte Koordinaten verwendet.

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} \quad (99)$$

3.2.1 Potential des Systems

Um die Lagrange-Funktion L des Systems zu bestimmen muss einerseits die kinetische Energie T und die potentielle Energie V ermittelt werden. Das Potential des Würfels wird durch die aktuelle Lage seines Schwerpunktes \mathbf{r} bestimmt, hierbei ist lediglich die z-Komponente des raumfesten Bezugssystem von Bedeutung.

$$V = m_G \cdot g \cdot {}^I z_{cog} \quad (100)$$

Die Position des Schwerpunktes im körperfesten Bezugssystem ist fix. Durch die Projektion dieses Vektors ${}^w \mathbf{r}_{cog}$ in das raumfeste Bezugssystem $\{I\}$ wird die Abhängigkeit von der aktuellen Verschiebung berücksichtigt.

$${}^I \mathbf{r}_C = {}^I \mathbf{D} \cdot {}^w \mathbf{r}_C = {}^I \mathbf{D} \cdot \begin{pmatrix} {}^w x_C \\ {}^w y_C \\ {}^w z_C \end{pmatrix} \quad (101)$$

Folglich ergibt sich der folgende Zusammenhang für das Potential V und die aktuelle Ausrichtung des Würfels.

$$V = m_G \cdot g \cdot {}^I z_{cog} = m_G \cdot g \cdot (s_{\varphi_2} s_{\varphi_3} \cdot {}^w x_C + s_{\varphi_2} c_{\varphi_3} \cdot {}^w y_C + c_{\varphi_2} \cdot {}^w z_C) \quad (102)$$

3.2.2 Kinetische Energie des Systems

Die kinetische Energie setzt sich aus der Winkelgeschwindigkeit des Würfels $\boldsymbol{\omega}_K$ und der Geschwindigkeiten der drei Schwungmassen $\boldsymbol{\omega}_R$ zusammen. Hierbei ist zu beachten, dass die Winkelgeschwindigkeiten in verschiedenen Bezugssystemen darstellbar sind und die kinetische Energie von der Darstellungsform unabhängig ist. Um dies zu gewährleisten müssen allerdings auch die Trägheitstensoren in das jeweilige Bezugssystem projiziert werden.

$${}^w \boldsymbol{\omega}_K = \begin{pmatrix} {}^w \omega_x \\ {}^w \omega_y \\ {}^w \omega_z \end{pmatrix} \quad {}^w \boldsymbol{\omega}_R = \dot{\boldsymbol{\psi}} \quad (103)$$

$$T = \frac{1}{2} {}^w \boldsymbol{\omega}_K^T \cdot ({}^w \Theta_G - {}^w \Theta_R) \cdot {}^w \boldsymbol{\omega}_K + \frac{1}{2} ({}^w \boldsymbol{\omega}_K + {}^w \boldsymbol{\omega}_R)^T \cdot {}^w \Theta_R \cdot ({}^w \boldsymbol{\omega}_K + {}^w \boldsymbol{\omega}_R) \quad (104)$$

Um das die kinetische Energie T mit Hilfe der generalisierten Koordinaten darzustellen muss die Winkelgeschwindigkeit ${}^w\omega_W$ als die erste Ableitung der Euler-Winkel φ darstellen. Um die Projektion der Euler-Geschwindigkeiten $\dot{\varphi}$ zu veranschaulichen kann die Rotationsgeschwindigkeit des Würfels ${}^w\omega_W$ als Summe der Euler-Komponenten dargestellt werden.

$${}^w\omega_W = {}^w\dot{\varphi}_1 + {}^w\dot{\varphi}_2 + {}^w\dot{\varphi}_3 \quad (105)$$

Um die Euler-Geschwindigkeit in dem körperfesten Bezugssystem darzustellen werden Rotationsachsen um die entsprechenden Euler-Winkel rotiert. Die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_3$ ist gleich der Rotation um die körperfeste ${}^w e_z$ und muss somit nicht über eine Drehmatrix projiziert werden.

$${}^w\dot{\varphi}_3 = \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (106)$$

Die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_2$ entspricht der Rotation um die körperfeste Achse ${}^w e_x$ vor der Rotation um den Winkel φ_3 . Somit muss mit Hilfe der Matrix ${}^w D_{\varphi_3}$ der Geschwindigkeitsvektor in das endgültige körperfeste Bezugssystem projiziert werden.

$${}^w\dot{\varphi}_2 = {}^w D_{\varphi_3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\varphi}_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\varphi}_2 \cdot c_{\varphi_3} \\ \dot{\varphi}_2 \cdot s_{\varphi_3} \end{pmatrix} \quad (107)$$

Die dritte Komponente ist die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_1$, welche der Rotation um die raumfeste Achse ${}^I e_z$ entspricht. Folglich muss zu einer Projektion in das körperfeste Bezugssystem der Geschwindigkeitsvektor mit den Matrizen ${}^w D_{\varphi_3}$ und ${}^w D_{\varphi_2}$ multipliziert werden.

$${}^w\dot{\varphi}_1 = {}^w D_{\varphi_3} \cdot {}^w D_{\varphi_2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{\varphi}_1 \cdot s_{\varphi_2} \\ \dot{\varphi}_1 \cdot c_{\varphi_2} s_{\varphi_3} \\ \dot{\varphi}_1 \cdot c_{\varphi_2} c_{\varphi_3} \end{pmatrix} \quad (108)$$

Die gesamte Winkelgeschwindigkeit des Würfels ${}^w\omega_K$ ergibt sich wie bereits beschrieben aus der Summe der einzelnen Komponenten.

$${}^w\omega_W = {}^w\dot{\varphi}_1 + {}^w\dot{\varphi}_2 + {}^w\dot{\varphi}_3 = \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_1 \cdot s_{\varphi_2} \\ \dot{\varphi}_2 \cdot c_{\varphi_3} + \dot{\varphi}_1 \cdot c_{\varphi_2} s_{\varphi_3} \\ \dot{\varphi}_1 \cdot c_{\varphi_2} c_{\varphi_3} - \dot{\varphi}_2 \cdot \varphi_3 \end{pmatrix} \quad (109)$$

3.2.3 Generalisierte Kraftkomponenten

In der Untersuchung des 1D-Modells wurde bereits gezeigt, dass der Würfel ein nicht konservatives System ist, da einerseits über die Motoren mechanische Energie zugeführt wird und andererseits durch Reibung mechanische Energie verloren geht. Deshalb müssen die generalisierten Kraftkomponenten bestimmt werden um mit Hilfe des d'Alembert'schen Prinzip die Bewegungsgleichungen zu ermitteln.

Wie bereits angesprochen erzeugen die Motoren Momente, welche die Schwungmassen antreiben. Gleichzeitig entsteht in den Lagern der Räder ein Reibmoment welches als linear abhängig von der Winkelgeschwindigkeit modelliert wird. Somit ergibt sich das folgende Moment.

$${}^w M_M = {}^w T_M - C_\psi \cdot {}^w \dot{\psi} \quad C_\psi = \begin{pmatrix} C_{\psi_1} & 0 & 0 \\ 0 & C_{\psi_2} & 0 \\ 0 & 0 & C_{\psi_3} \end{pmatrix} \quad (110)$$

Die Komponenten dieses Momentvektors sind gleichermaßen die generalisierten Kraftkomponenten der Koordinaten ψ_1 , ψ_2 und ψ_3 .

$$Q_{\psi_1} = Q_4 = T_{M1} - C_{\psi_1} \cdot \dot{\psi}_1 \quad (111)$$

$$Q_{\psi_2} = Q_5 = T_{M2} - C_{\psi_2} \cdot \dot{\psi}_2 \quad (112)$$

$$Q_{\psi_3} = Q_6 = T_{M3} - C_{\psi_3} \cdot \dot{\psi}_3 \quad (113)$$

Die Kraftkomponenten, welche den generalisierten Koordinaten φ_1 , φ_2 und φ_3 zugeordnet sind lassen sich aus dem Potential V herleiten.

$$Q_{\varphi_1} = \frac{\partial V}{\partial \varphi_1} = 0 \quad (114)$$

$$Q_{\varphi_2} = \frac{\partial V}{\partial \varphi_2} = m_G \cdot g \cdot (c_{\varphi_2} s_{\varphi_3} \cdot {}^w y_C + c_{\varphi_2} c_{\varphi_3} \cdot {}^w y_C - s_{\varphi_2} \cdot {}^w z_C) \quad (115)$$

$$Q_{\varphi_3} = \frac{\partial V}{\partial \varphi_3} = m_G \cdot g \cdot (s_{\varphi_2} c_{\varphi_3} \cdot {}^w x_C - s_{\varphi_2} c_{\varphi_3} \cdot {}^w y_C) \quad (116)$$

Theoretisch können nun mit Hilfe des d'Alembert'schen Prinzips die Bewegungsgleichungen ermittelt werden. Allerdings führt dieser Ansatz zu einer kaum darstellbar geschweige denn nachvollziehbaren Darstellung des Differentialgleichungssystems. Deshalb werden zunächst die verallgemeinerten Impulse p_{q_j} berechnet, welche später als Zustände des Regelkreises verwendet werden.

$$p_{q_j} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial V}{\partial q_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \quad (117)$$

Folglich lassen sich die generalisierten Impulse, welche die Bewegung der Schwungmassen beschreiben, wie folgt darstellen.

$$p_{\psi_1} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}_1} = \Theta_{R1} \cdot (\dot{\psi}_1 - \dot{\varphi}_1 \cdot s_{\varphi_2} + \dot{\varphi}_3) \quad (118)$$

$$p_{\psi_2} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}_2} = \Theta_{R2} \cdot (\dot{\psi}_2 + \dot{\varphi}_2 \cdot c_{\varphi_3} + \dot{\varphi}_1 \cdot c_{\varphi_2} s_{\varphi_3}) \quad (119)$$

$$p_{\psi_3} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}_3} = \Theta_{R3} \cdot (\dot{\psi}_3 + \dot{\varphi}_1 \cdot c_{\varphi_2} c_{\varphi_3} - \dot{\varphi}_2 \cdot s_{\varphi_3}) \quad (120)$$

Bei der Darstellung der generalisierten Impulse für die Bewegung des Würfels wird zur Berechnung der partiellen Ableitungen auf die Produktregel zurückgegriffen um eine nachvollziehbar Darstellung zu erreichen.

$$\Theta_1 \equiv \Theta_G - \Theta_R \quad \omega_{\hat{R}} \equiv \omega_K + \omega_R \quad (121)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \omega_K^T}{\partial \dot{q}_j} \cdot \Theta_1 \cdot \omega_K + \omega_K^T \cdot \Theta_1 \cdot \frac{\partial \omega_K}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial \omega_{\hat{R}}^T}{\partial \dot{q}_j} \cdot \Theta_R \cdot \omega_{\hat{R}} + \omega_{\hat{R}}^T \cdot \Theta_R \cdot \frac{\partial \omega_{\hat{R}}}{\partial \dot{q}_j} \right] \quad (122)$$

$$p_{\varphi_1} = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} -s_{\varphi_2} \\ c_{\varphi_2} s_{\varphi_3} \\ c_{\varphi_2} c_{\varphi_3} \end{pmatrix}^T \Theta_1 \omega_K + \omega_K^T \Theta_1 \begin{pmatrix} -s_{\varphi_2} \\ c_{\varphi_2} s_{\varphi_3} \\ c_{\varphi_2} c_{\varphi_3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -s_{\varphi_2} \\ c_{\varphi_2} s_{\varphi_3} \\ c_{\varphi_2} c_{\varphi_3} \end{pmatrix} \Theta_R \omega_{\hat{R}} + \omega_{\hat{R}}^T \Theta_R \begin{pmatrix} -s_{\varphi_2} \\ c_{\varphi_2} s_{\varphi_3} \\ c_{\varphi_2} c_{\varphi_3} \end{pmatrix} \right] \quad (123)$$

$$p_{\varphi_2} = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ c_{\varphi_3} \\ -s_{\varphi_3} \end{pmatrix}^T \Theta_1 \omega_K + \omega_K^T \Theta_1 \begin{pmatrix} 0 \\ c_{\varphi_3} \\ -s_{\varphi_3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c_{\varphi_3} \\ -s_{\varphi_3} \end{pmatrix}^T \Theta_R \omega_{\hat{R}} + \omega_{\hat{R}}^T \Theta_R \begin{pmatrix} 0 \\ c_{\varphi_3} \\ -s_{\varphi_3} \end{pmatrix} \right] \quad (124)$$

$$p_{\varphi_3} = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T \Theta_1 \omega_K + \omega_K^T \Theta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T \Theta_R \omega_{\hat{R}} + \omega_{\hat{R}}^T \Theta_R \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \quad (125)$$

Mit Hilfe des d'Alembert'schen Prinzip können die im nächsten Schritt die gewöhnlichen Ableitungen der verallgemeinerten Impulse bestimmt werden.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} &= Q_j \\ \dot{p}_j &= \frac{\partial T}{\partial q_j} + Q_j \end{aligned} \quad (126)$$

¹In diesem System beeinflusst das Potential V keinen der generalisierten Impulse, deshalb kann die Definition des verallgemeinerten Impulses auf die partielle Ableitung von T reduziert werden. Grundsätzlich ist die, aus der Literatur bekannte, Definition von $p_q = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ diskussionswürdig, da das Potential V in der Regel nicht von Geschwindigkeiten abhängt und auch der gewöhnliche Impuls der klassischen Mechanik nicht über ein Potential definiert ist.

Auf Grund des symmetrischen Aufbaus der Schwungmassen beeinflussen die Winkel ψ das Verhalten des Systems nicht, es handelt sich somit um sogenannte zyklische Koordinaten. Folglich verschwindet der Ausdruck $\frac{\partial T}{\partial \psi_i}$.

$$\dot{p}_{\psi_1} = T_{M1} - C_{\psi_1} \cdot \dot{\psi}_1 \quad (127)$$

$$\dot{p}_{\psi_2} = T_{M2} - C_{\psi_2} \cdot \dot{\psi}_2 \quad (128)$$

$$\dot{p}_{\psi_3} = T_{M3} - C_{\psi_3} \cdot \dot{\psi}_3 \quad (129)$$

Die generalisierte Koordinate φ_1 ist ebenfalls zyklisch, da die Rotation um die raumfeste Achse I_z^e die Systemdynamik nicht beeinflusst. Lediglich die Winkel φ_2 und φ_3 wirken sich auf das Systemverhalten aus.

$$\dot{p}_{\varphi_1} = 0 \quad (130)$$

$$\dot{p}_{\varphi_2} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \omega_K^T}{\partial \varphi_2} \Theta_1 \omega_K + \omega_K^T \Theta_1 \frac{\partial \omega_K}{\partial \varphi_2} + \frac{\partial \omega_{\hat{R}}^T}{\partial \varphi_2} \Theta_R \omega_{\hat{R}} + \omega_{\hat{R}}^T \Theta_R \frac{\partial \omega_{\hat{R}}}{\partial \varphi_2} \right] + Q_{\varphi_2} \quad (131)$$

$$\dot{p}_{\varphi_3} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \omega_K^T}{\partial \varphi_3} \Theta_1 \omega_K + \omega_K^T \Theta_1 \frac{\partial \omega_K}{\partial \varphi_3} + \frac{\partial \omega_{\hat{R}}^T}{\partial \varphi_3} \Theta_R \omega_{\hat{R}} + \omega_{\hat{R}}^T \Theta_R \frac{\partial \omega_{\hat{R}}}{\partial \varphi_3} \right] + Q_{\varphi_3} \quad (132)$$

$$\frac{\partial \omega_K}{\partial \varphi_2} = \frac{\partial \omega_{\hat{R}}}{\partial \varphi_2} = \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 c_{\varphi_2} \\ \dot{\varphi}_1 s_{\varphi_2} s_{\varphi_3} \\ \dot{\varphi}_1 s_{\varphi_2} c_{\varphi_3} \end{pmatrix} \quad \frac{\partial \omega_K}{\partial \varphi_3} = \frac{\partial \omega_{\hat{R}}}{\partial \varphi_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\varphi}_1 c_{\varphi_2} c_{\varphi_3} - \dot{\varphi}_2 s_{\varphi_3} \\ -\dot{\varphi}_2 c_{\varphi_3} - \dot{\varphi}_1 c_{\varphi_2} s_{\varphi_3} \end{pmatrix} \quad (133)$$

Literatur

- [1] Mohanarajah Gajamohan, Michael merz, Igor Thommen, Raffaello D'Andrea: The Cubli: A Cube that can Jump Up and Balance
- [2] Mohanarajah Gajamohan, Michael Muehlbach, Tobias Widmer, Raffaello D'Andrea: The Cubli: A Reaction Wheel Based 3D Inverted Pendulum
- [3] Michael Muehlbach, Gajamohan Mohanarajah, Raffaello D'Andrea: Nonlinear Analysis and Control of a Reaction Wheel-based 3D Inverted Pendulum
- [4] Wolfgang Nolting: Grundkurs Theoretische Physik 1 - Klassische Mechanik
- [5] Wolfgang Nolting: Grundkurs Theoretische Physik 2 - Analytische Mechanik
- [6] Thomas R. Kane: Dynamics - Theory and Applications
- [7] Fernando Puente León, Sebastian Bauer: Praxis der digitalen Signalverarbeitung
- [8] Josef Hoffmann, Franz Quint : Simulation technischer linearer und nichtlinearer Systeme mit MATLAB/Simulink
- [9] Herbert Schlitt: Systemtheorie für stochastische Prozesse
- [10] Marin Meyer: Signalverarbeitung - Analoge und digitale Signale, Systeme und Filter
- [11] Ottmar Beucher: Signale und Systeme - Theorie, Simulation und Anwendung
- [12] Heinz Unbehauen: Regelungstechnik 1 - Klassische Verfahren zur Analyse und Synthese linearer kontinuierlicher Regelsysteme
- [13] Heinz Unbehauen: Regelungstechnik 2 - Zustandsregelungen, digitale und nichtlineare Regelsysteme
- [14] Joao P. Hespanha: Lecture notes on LQR/LQG controller design
- [15] Tom M. Mitchell: Machine Learning
- [16] Christopher Bishop: Pattern Recognition and Machine Learning
- [17] Joachim Wietzke, Manh Tien Tran: Automotive Embedded Systeme: Effizientes Framework - Vom Design zur Implementierung
- [18] Joachim Wietzke: Embedded Technologies: Vom Treiber bis zur Grafik-Anbindung
- [19] Derek Molloy: Exploring BeagleBone: Tools and Techniques for Building with Embedded Linux

4 Anhang

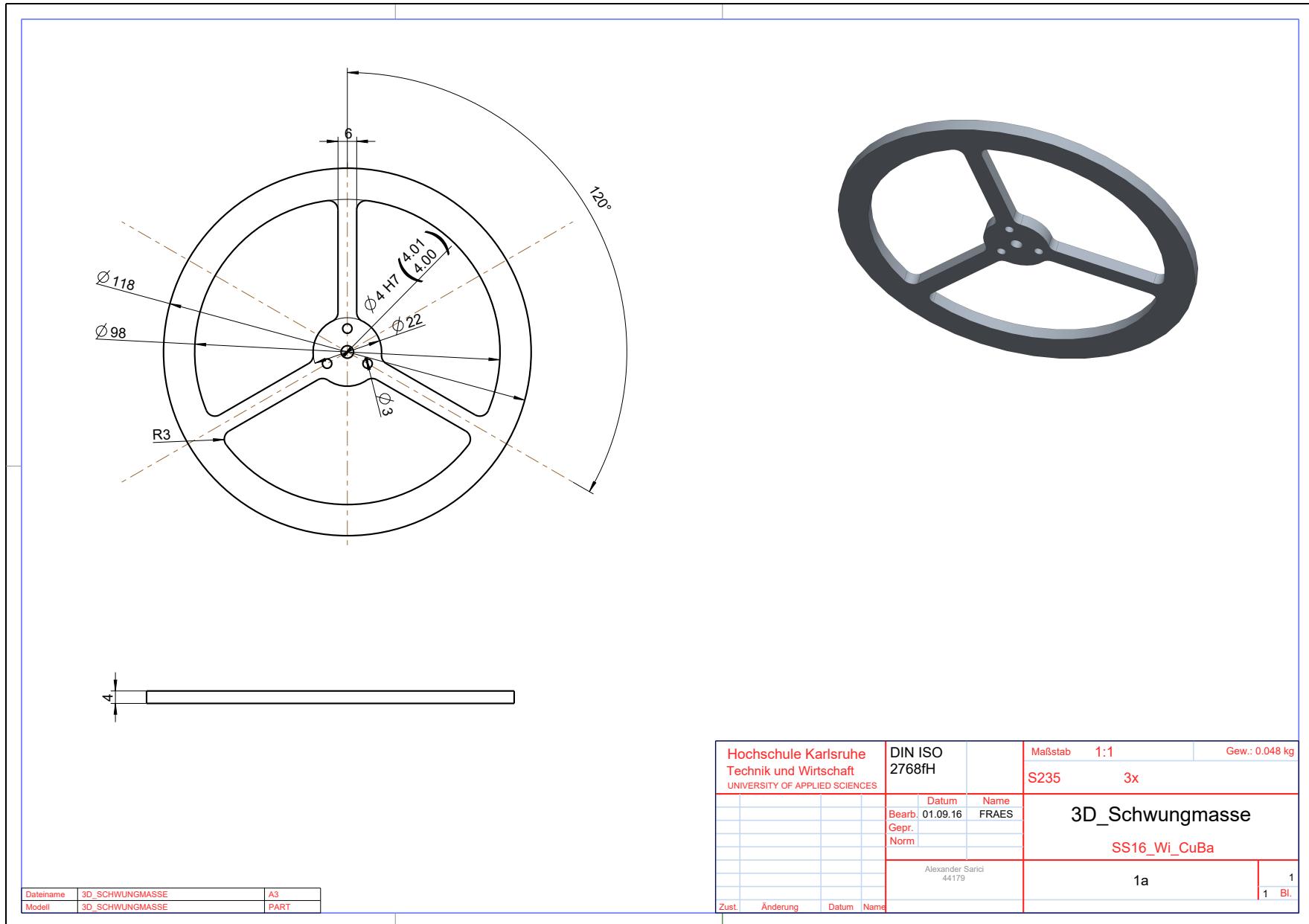


Abbildung 29: Technische Zeichnung Schwungmasse, Quelle: eigene Darstellung

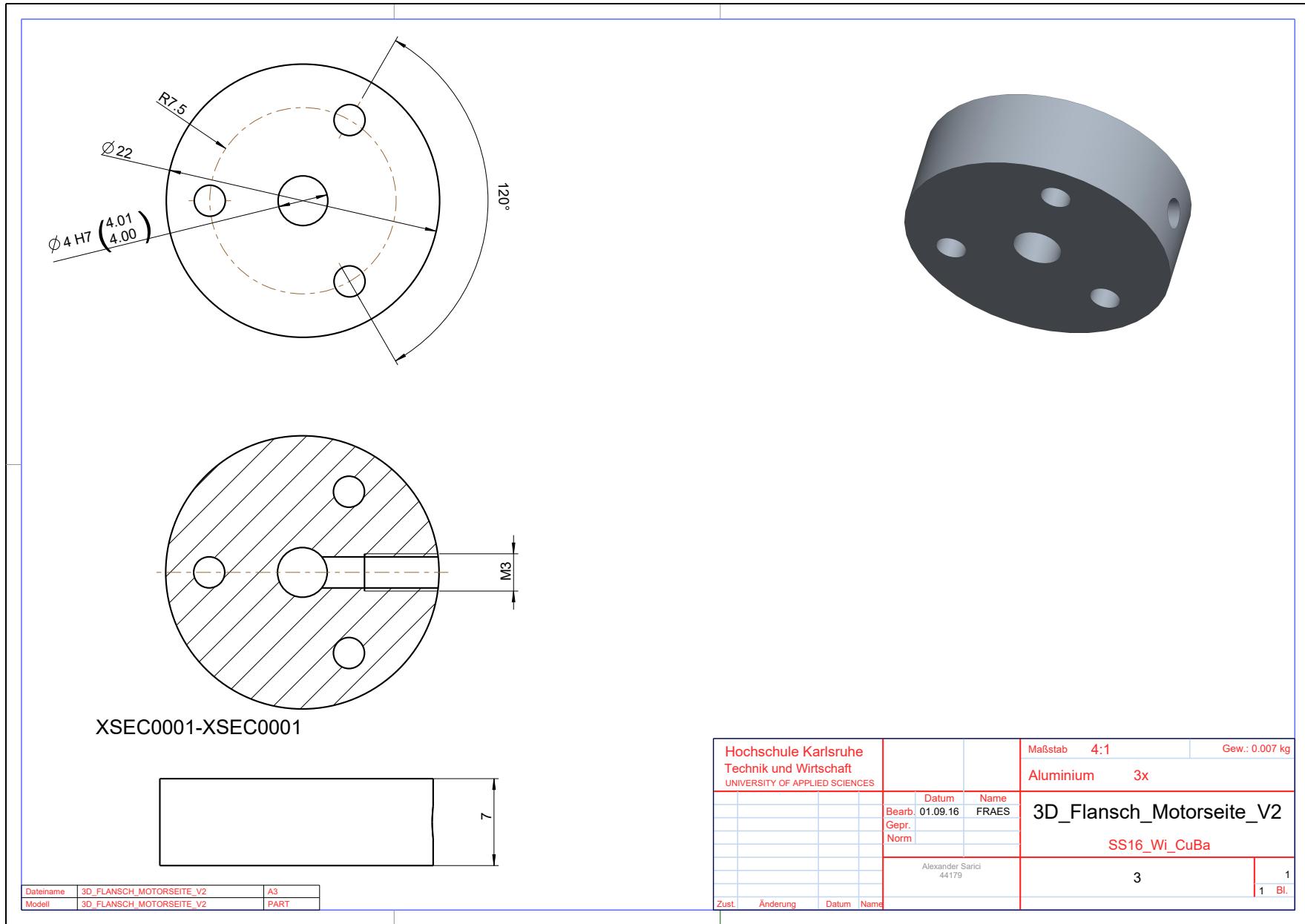


Abbildung 30: Technische Zeichnung Flansch Motorseite, Quelle: eigene Darstellung

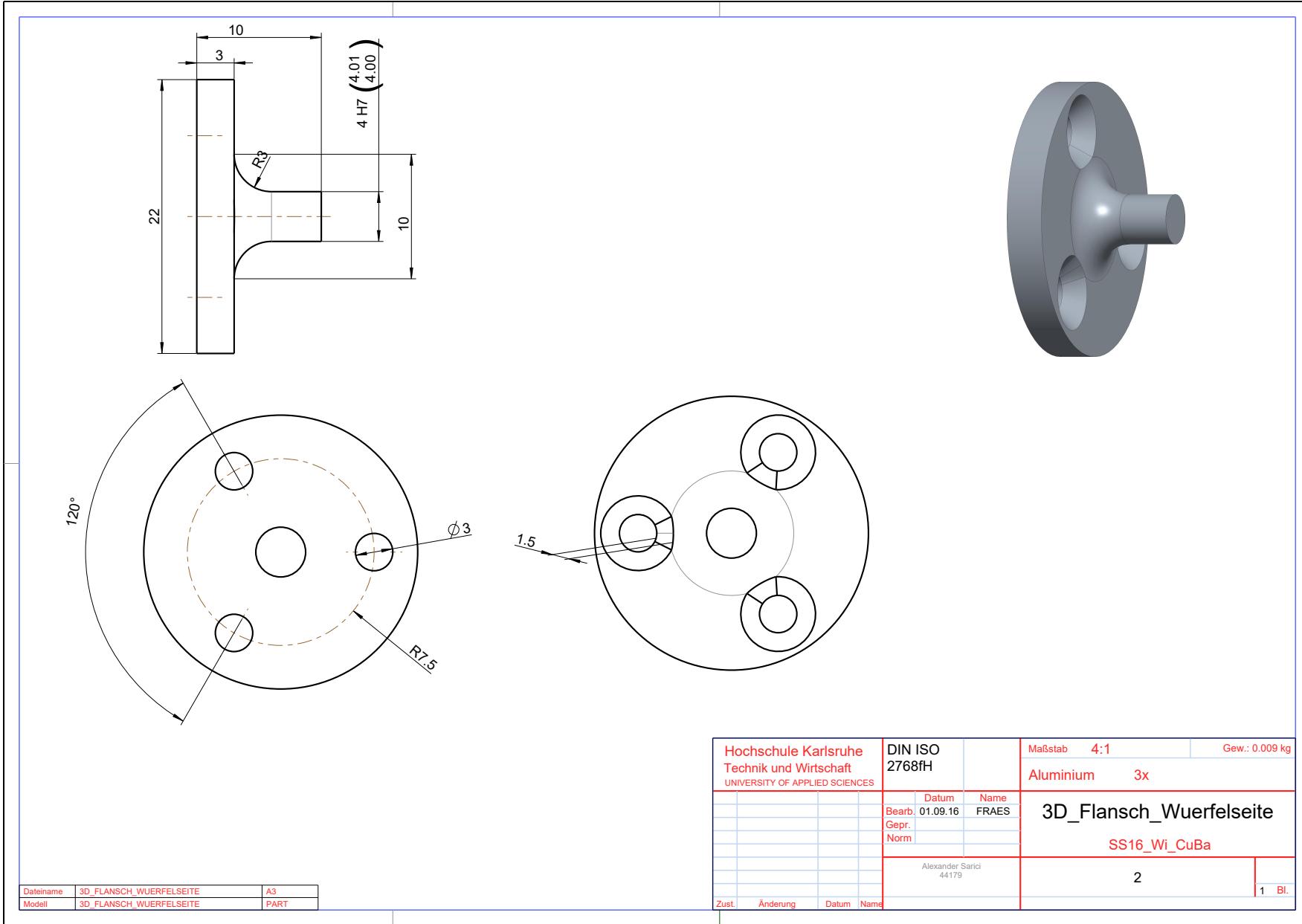


Abbildung 31: Technische Zeichnung Flansch Würfelseite, Quelle: eigene Darstellung

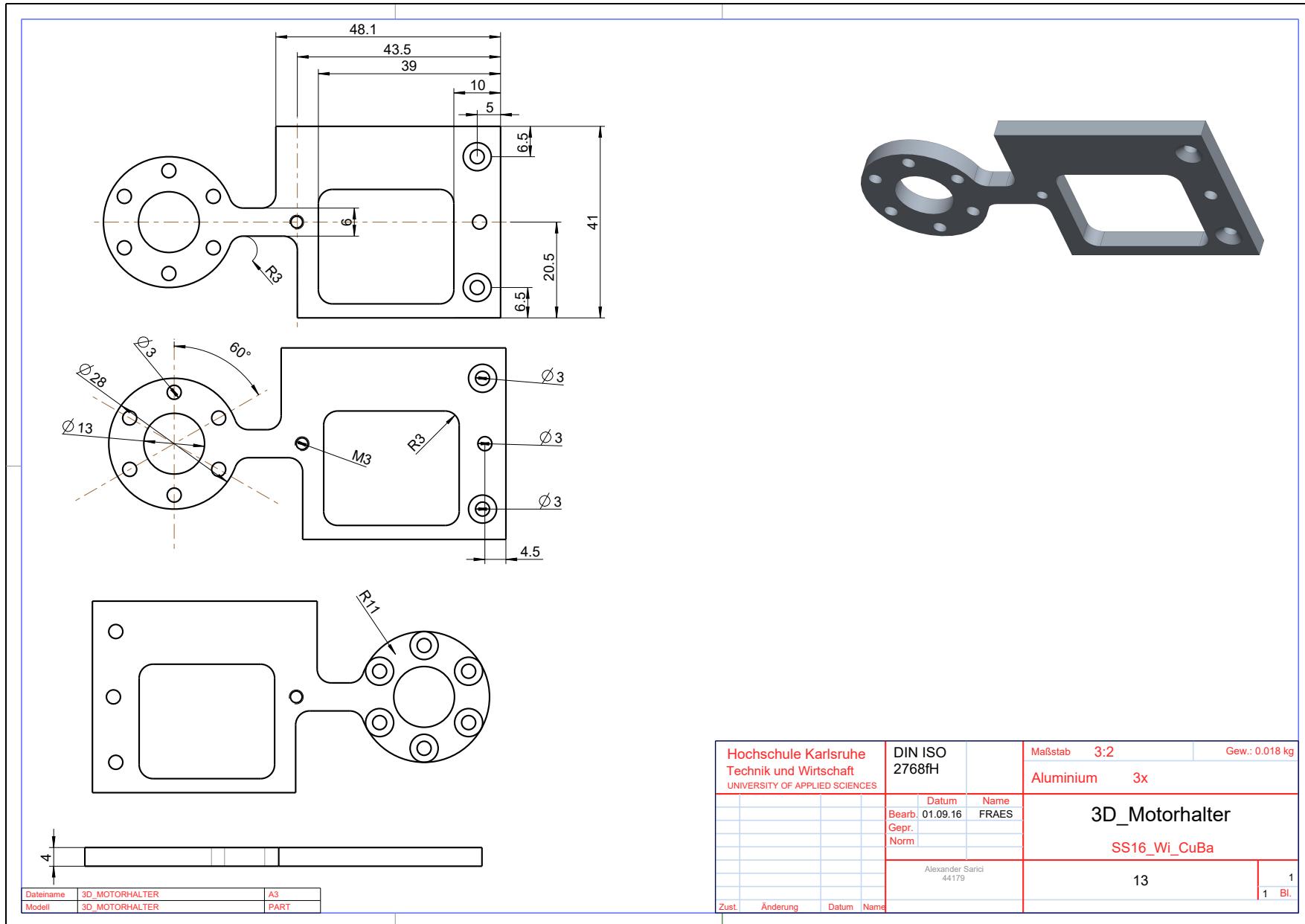


Abbildung 32: Technische Zeichnung Motorhalter, Quelle: eigene Darstellung

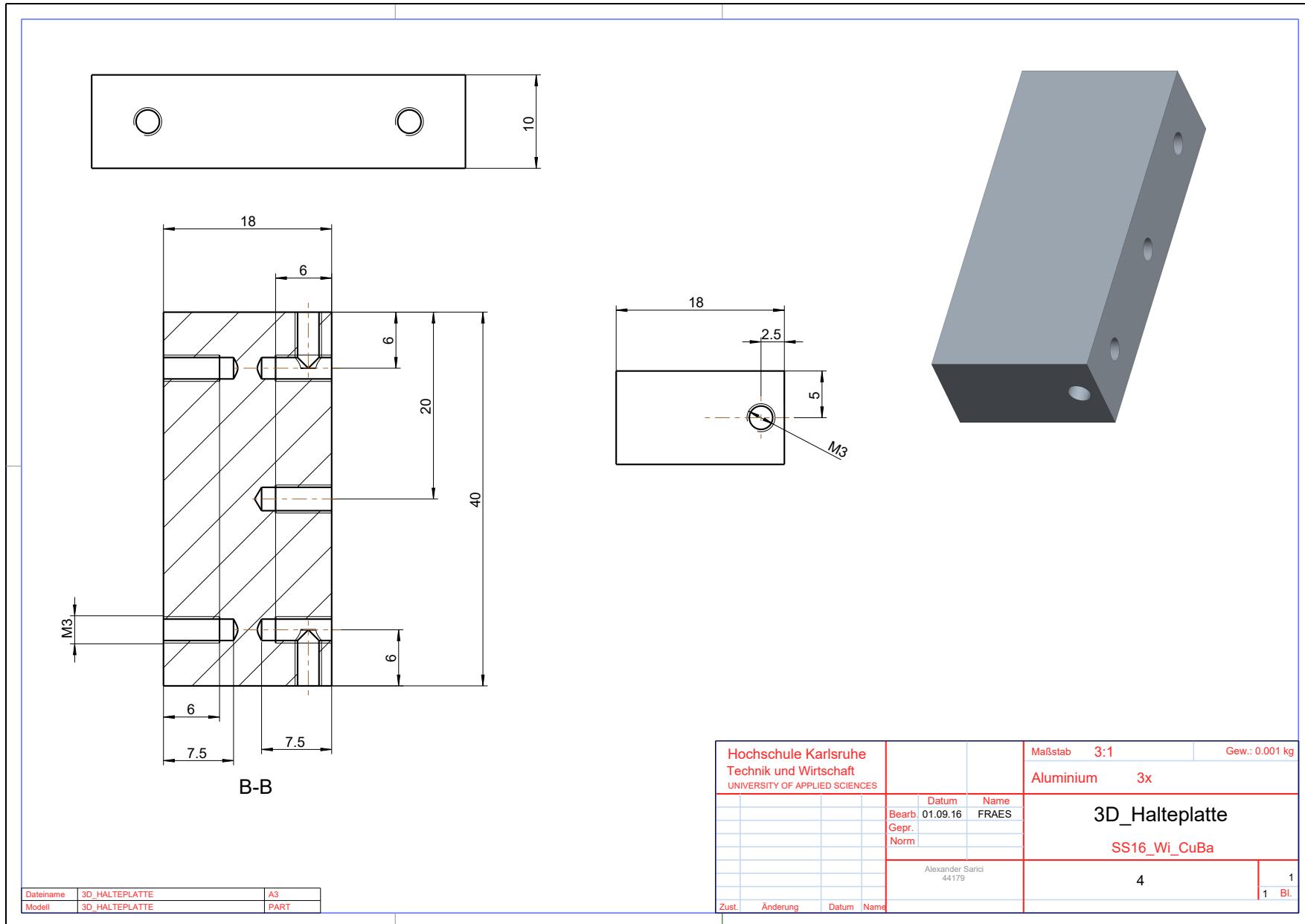


Abbildung 33: Technische Zeichnung Halteplatte, Quelle: eigene Darstellung

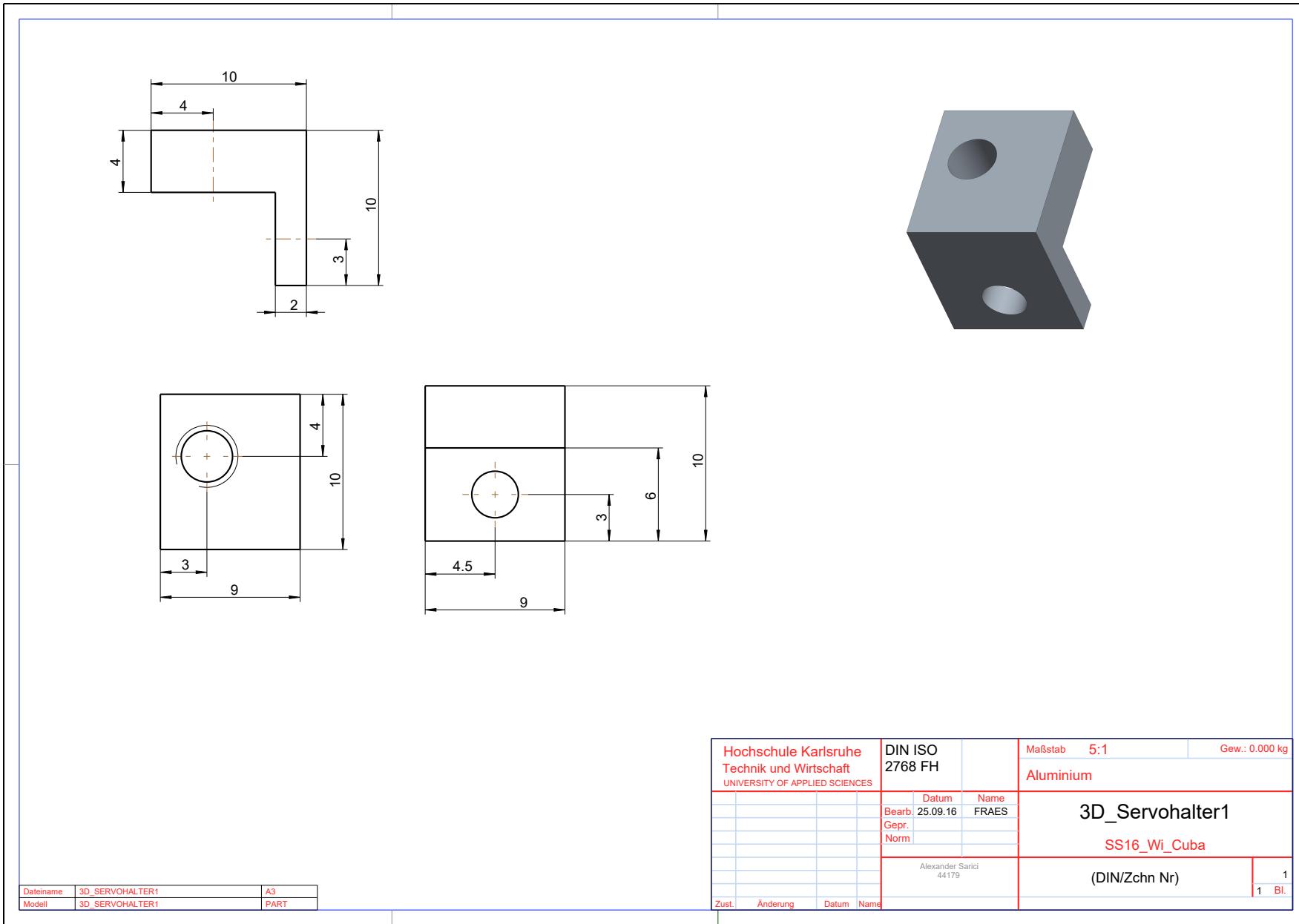


Abbildung 34: Technische Zeichnung Servohalter links, Quelle: eigene Darstellung

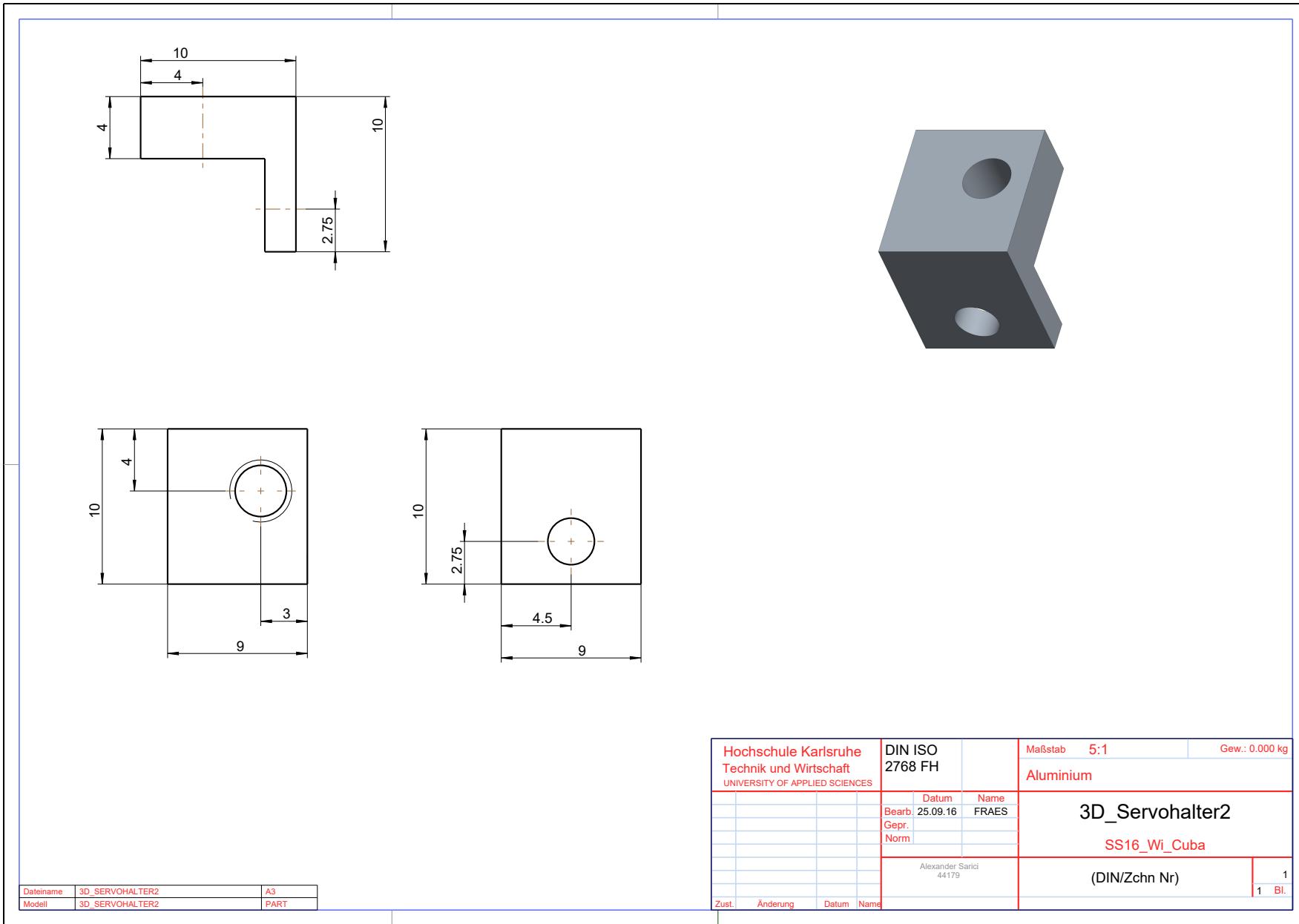


Abbildung 35: Technische Zeichnung Servohalter rechts, Quelle: eigene Darstellung

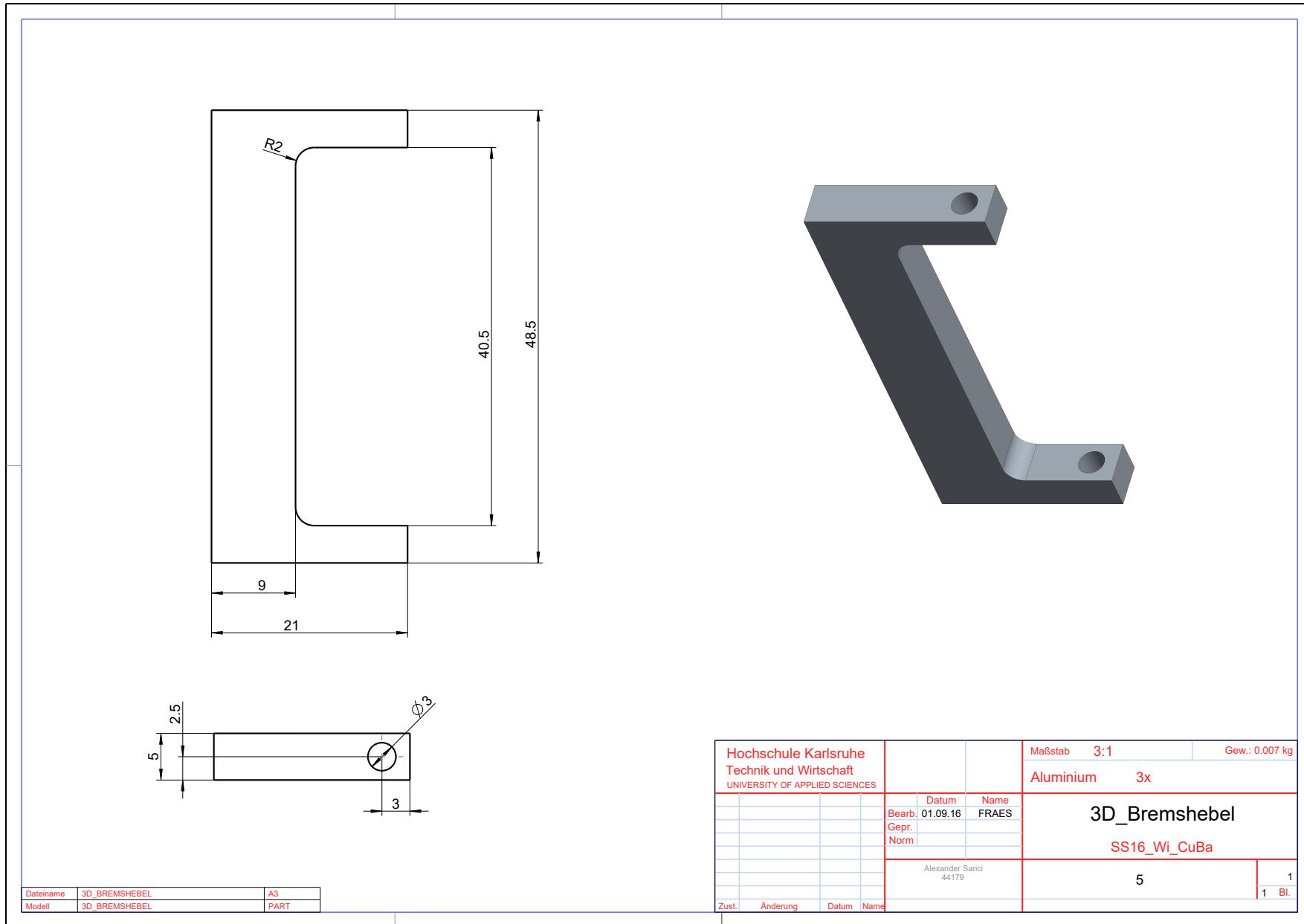


Abbildung 36: Technische Zeichnung Bremshebel, Quelle: eigene Darstellung

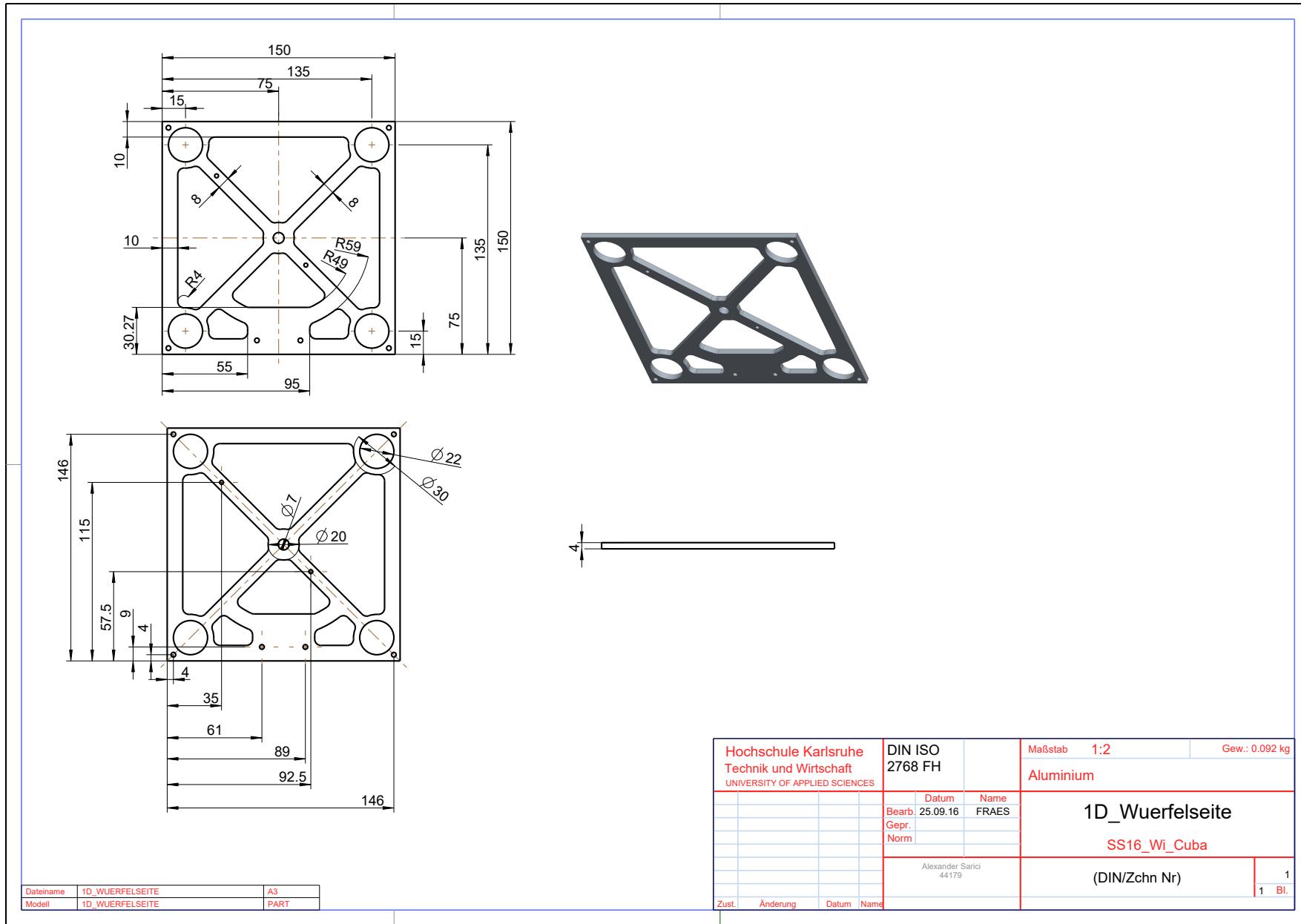


Abbildung 37: Technische Zeichnung Würfelseite, Quelle: eigene Darstellung