

1 Einführung

2 Modellierung der Systemdynamik

In dem folgenden Abschnitt werden die Bewegungsgleichungen mit Hilfe des Lagrange Formalismus hergeleitet. Aus diesen Gleichung kann im Anschluss eine Zustandsraumdarstellung aufgestellt werden, welche als Grundlage für den Reglerentwurf dient.

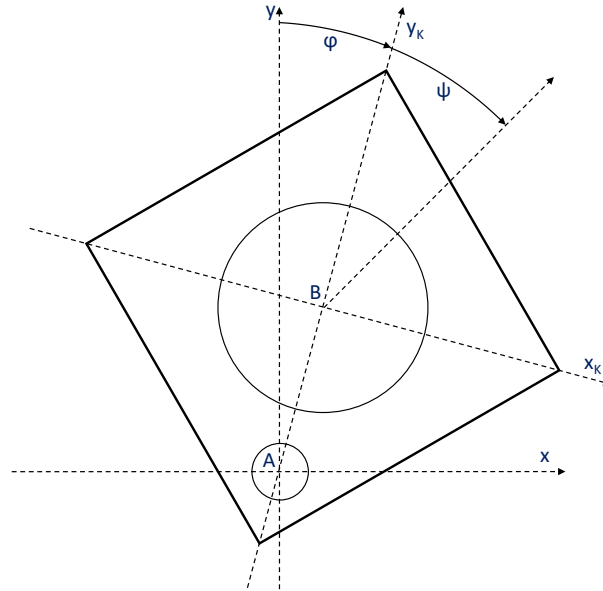


Abbildung 1: Mechanischer Aufbau, Quelle: eigene Darstellung

Der Prototyp besteht aus einem starren Körper der in A auf einer Achse gelagert ist. In B ist eine Schwungmasse über einen Motor mit dem Körper verbunden. Somit verfügt das Gesamtsystem über zwei Freiheitsgrade, welche durch die generalisierten Koordinaten

$$q_1 = \varphi \quad q_2 = \psi \quad (1)$$

beschrieben werden. Der Winkel φ wird von den Achsen y und y_K eingeschlossen. Der Winkel beschreibt die rotatorische Verschiebung der Schwungmasse zu dem Körper. Die folgenden Größen beschreiben die weiteren physikalischen Gegebenheiten des Systems.

$q_1 = \varphi$	Ausfallwinkel des Körpers
$q_2 = \psi$	Winkel zwischen Schwungradmasse und Körper
A	Drehpunkt des Körpers
B	Drehpunkt des Schwungrades
l_{AB}	Abstand zwischen A und B
l_{AC}	Abstand zwischen A und dem Schwerpunkt des Körpers
m_K	Masse des Körpers
m_R	Masse des Schwungrades
J_K^A	Massenträgheitsmoment des Körper um A
J_R^B	Massenträgheitsmoment der Schwungradmasse um B
C_φ	Dynamischer Reibkoeffizient des Körpers in A
C_ψ	Dynamischer Reibkoeffizient des Schwungrades in B
T_M	Drehmoment des Motor

Um die Bewegungsgleichungen des Systems zu ermitteln wird der Lagrange Formalismus verwendet. Dieser basiert auf der Lagrange-Funktion L , welche die Differenz der kinetischen Energie T und der potenziellen Energie V des Systems beschreibt.

$$T = \frac{1}{2}[(J_K^A + m_R \cdot l_{AB}^2)\dot{\varphi}^2 + J_B^R(\dot{\varphi} + \dot{\psi})^2] \quad (2)$$

$$V = g(m_R \cdot l_{AB} + m_K \cdot l_{AC})\cos(\varphi) \quad (3)$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}[(J_K^A + m_R \cdot l_{AB}^2)\dot{\varphi}^2 + J_B^R(\dot{\varphi} + \dot{\psi})^2] - g(m_R \cdot l_{AB} + m_K \cdot l_{AC})\cos(\varphi) \quad (4)$$

In dem System wirken unterschiedliche Kräfte. Einerseits erzeugt der Motor ein Drehmoment, welches die virtuelle Arbeit δW_M verursacht. Andererseits verrichtet die Gravitation die virtuelle Arbeit δW_G . Zusätzlich muss die, durch die Reibung entstandene, Verlustleistung berücksichtigt werden. In diesem Fall wird die Reibleistung mit den Rayleigh'schen Dissipationsfunktionen D_φ und D_ψ beschrieben und verrichten die virtuelle Arbeit δW_D .

$$-\delta W_M = T_M \cdot \delta\psi \quad (5)$$

$$-\delta W_G = g(m_K \cdot l_{AC} + m_R \cdot l_{AB})\sin(\varphi) \cdot \delta\varphi \quad (6)$$

$$D_\varphi = \frac{1}{2}C_\varphi \cdot \dot{\varphi}^2 \quad (7)$$

$$D_\psi = \frac{1}{2}C_\psi \cdot \dot{\psi}^2 \quad (8)$$

$$D = D_\varphi + D_\psi = \frac{1}{2}C_\varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}C_\psi \cdot \dot{\psi}^2 \quad (9)$$

$$-\delta W_D = -C_\varphi \cdot \dot{\varphi} \cdot \delta\varphi - C_\psi \cdot \dot{\psi} \cdot \delta\psi \quad (10)$$

Die Summe der virtuellen Arbeiten, welche von den verschiedenen Kräften verrichtet wird, ergibt die virtuelle Arbeit des Gesamtsystems δW . In dem die verrichtete Arbeit partiell nach den beiden generalisierten Koordinaten φ und ψ differenziert wird, können die beiden generalisierten Kraftkomponenten Q_φ und Q_ψ berechnet werden.

$$Q_\varphi = g(m_K \cdot l_{AC} + m_R \cdot l_{AB})\sin(\varphi) - C_\varphi \cdot \dot{\varphi} \quad (11)$$

$$Q_\psi = T_M - C_\psi \cdot \dot{\psi} \quad (12)$$

Bei dem Prototyp handelt es sich um ein nicht konservatives System, da durch die Reibung mechanische Energie verloren geht und der Motor dem System mechanische Energie zuführt. Da die beiden generalisierten Koordinaten φ und ψ voneinander unabhängig sind können aus dem d'Alembert'schen Prinzip zwei Bewegungsgleichungen abgeleitet werden.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (13)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi \quad (14)$$

$$(J_K^A + J_R^B + m_R \cdot l_{AB}^2)\ddot{\varphi} + J_R^B \cdot \ddot{\psi} - g(m_R \cdot l_{AB} + m_K \cdot l_{AC})\sin(\varphi) + C_\psi \cdot \dot{\psi} = 0 \quad (15)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} - \frac{\partial T}{\partial \psi} + \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = Q_\psi \quad (16)$$

$$J_B^R \cdot \ddot{\psi} = T_M - C_\psi \cdot \dot{\psi} - J_R^B \cdot \ddot{\varphi} \quad (17)$$

Durch Einsetzen von (17) in (15) ergibt sich die folgende Bewegungsgleichung für die Würfelseite.

$$\ddot{\varphi} = \frac{g(m_R \cdot l_{AB}^2 + m_K \cdot l_{AC})\sin(\varphi) - C_\varphi \cdot \dot{\varphi} + C_\psi \cdot \dot{\psi} - T_M}{J_K^A + m_R \cdot l_{AB}^2} \quad (18)$$

Die Bewegungsgleichung für die Schwungmasse ergibt sich durch Einsetzen von (18) in (17).

$$\ddot{\psi} = \frac{(J_K^A + m_R \cdot l_{AB}^2 + J_R^B)(T_M - C_\psi \cdot \dot{\psi})}{(J_K^A + m_R \cdot l_{AB}^2)J_R^B} + \frac{C_\varphi \cdot \dot{\varphi} - g(m_R \cdot l_{AB} + m_K \cdot l_{AC})\sin(\varphi)}{J_K^A + m_R \cdot l_{AB}^2} \quad (19)$$

Mit Hilfe der Bewegungsgleichungen kann nun eine Zustandsraumdarstellung aufgestellt werden. Hierfür werden die nichtlinearen Terme entsprechend linearisiert.

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \dot{\varphi} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \dot{\varphi} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad u = T_M \quad (20)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot u \quad (21)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{D} \cdot u \quad (22)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{g(m_K \cdot l_{AC} + m_R \cdot l_{AB})}{J_K^A + m_R \cdot l_{AB}^2} & \frac{-C_\varphi}{J_K^A + m_R \cdot l_{AB}^2} & \frac{C_\psi}{J_K^A + m_R \cdot l_{AB}^2} \\ \frac{-g(m_K \cdot l_{AC} + m_R \cdot l_{AB})}{J_K^A + m_R \cdot l_{AB}^2} & \frac{C_\varphi}{J_K^A + m_R \cdot l_{AB}^2} & \frac{-C_\psi (J_K^A + J_R^B + m_R \cdot l_{AB}^2)}{J_R^B (J_K^A + m_R \cdot l_{AB}^2)} \end{pmatrix} \quad (23)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-1}{J_K^A + m_R \cdot l_{AB}^2} \\ \frac{J_K^A + J_R^B + m_R \cdot l_{AB}^2}{J_R^B (J_K^A + m_R \cdot l_{AB}^2)} \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

3 Sensorik

Die Aufgabe der verwendeten Sensorik liegt darin die Werte für φ , und $\dot{\varphi}$ zu bestimmen. Hierfür wurden zwei MPU6050 IC's verwendet. Diese verfügen jeweils über einen Beschleunigungssensor und Gyroskop, welche Werte für drei Achsen ausgeben. Um die Konfiguration und Auswertung der Sensoren vorzunehmen, bieten diese eine I^2C Schnittstelle an. Die Position und Ausrichtung der Sensoren ist in ?? dargestellt.

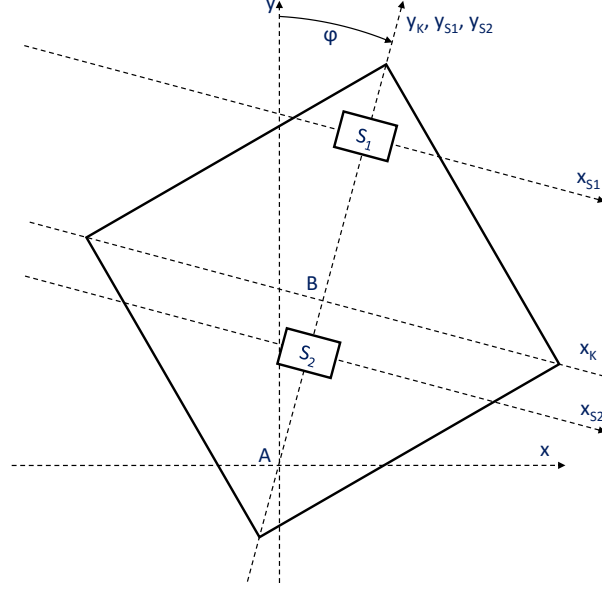


Abbildung 2: Position der Sensoren, Quelle: eigene Darstellung

3.1 Berechnung der Winkelwerte

Die Sensoren keine Wege bzw. Winkel. Somit muss der Winkel φ berechnet werden. Die gemessenen Sensorwerte hängen von r_{S1} bzw. r_{S2} ab, welche den Abstand zwischen den Sensoren und dem Drehpunkt A beschreiben. Zusätzlich beeinflussen neben dem Winkel φ auch dessen beiden Ableitungen $\dot{\varphi}$ und $\ddot{\varphi}$ die Sensorausgabe. Allerdings lassen sich aus den Beschleunigungswerten der beiden Sensoren wie folgt der aktuelle Wert von φ berechnen.

$$\ddot{S}_i = \begin{pmatrix} \ddot{x}_i \\ \ddot{y}_i \\ \ddot{z}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{Si} \cdot \ddot{\varphi} + \sin(\varphi) \cdot g \\ -r_{Si} \cdot \dot{\varphi}^2 - \cos(\varphi) \cdot g \\ 0 \end{pmatrix} \quad i \in [1; 2] \quad (24)$$

$$\alpha = \frac{r_{S1}}{r_{S2}} \quad (25)$$

$$\ddot{x}_1 - \alpha \cdot \ddot{x}_2 = g(1 - \alpha)\sin(\varphi) \quad (26)$$

$$\ddot{y}_1 - \alpha \cdot \ddot{y}_2 = -g(1 - \alpha)\cos(\varphi) \quad (27)$$

$$\frac{\ddot{x}_1 - \alpha \cdot \ddot{x}_2}{\ddot{y}_1 - \alpha \cdot \ddot{y}_2} = -\tan(\varphi) \quad (28)$$

3.2 Kalibrierung und Justierung

Die Sensoren geben die Beschleunigungs- und Geschwindigkeitswerte als 16 Bit Werte im Zweierkomplement aus. Diese Rohwerte müssen in die mit Hilfe eines Ausgleichspolynoms in die jeweilige SI-Einheit umgerechnet werden.

3.2.1 Umrechnung der Winkelgeschwindigkeiten

In der Ruhelage werden 10000 Geschwindigkeitswerte der Sensoren aufgenommen. Über die Abweichung des Mittelwerts zu dem Sollwert ($\dot{\phi} = 0$) wird die konstante Messabweichung ermittelt. Zusätzlich stellt der Hersteller einen Faktor zur Umrechnung der Roh- in SI-Werte. Daraus ergibt sich das folgende Polynom erster Ordnung zur Umrechnung der Gyroskopwerte in Winkelgeschwindigkeiten.

3.2.2 Umrechnung der Beschleunigungswerte

Um das Polynom zur Umrechnung der Beschleunigungswerte zu ermitteln werden sieben Messungen in den fixen Ausfallpositionen $\phi \in [-45, -30, -15, 0, 15, 30, 45]$ durchgeführt. Pro Position werden $m = 10000$ Messwerte aufgenommen. Da in der Ruhelage die Beschleunigung lediglich von dem aktuellen Ausfallwinkel abhängen ist der Sollwert für jede Position bekannt. Somit kann Polynom erster Ordnung approximiert werden um Mittelwerte der sieben Positionen in die entsprechenden Beschleunigungswerte umzurechnen.

Literatur

- [1] Wolfgang Nolting: Grundkurs Theoretische Physik 2 - Analytische Mechanik
- [2] Thomas R. Kane: Dynamics - Theory and Applications