1 Einführung

2 Modellierung der Systemdynamik

In dem folgenden Abschnitt werden die Bewegungsgleichungen mit Hilfe des Lagrange Formalismus hergeleitet. Aus diesen Gleichung kann im Anschluss eine Zustandsraumdarstellung aufgestellt werden, welche als Grundlage für den Reglerentwurf dient.

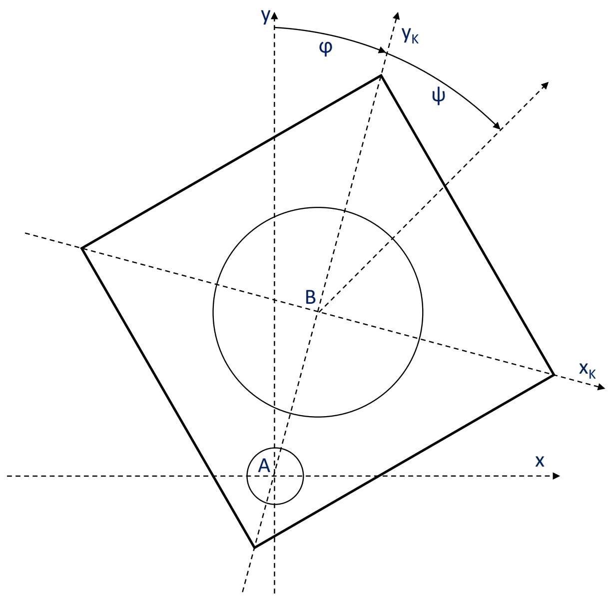

Abbildung 1: Mechanischer Aufbau, Quelle: eigene Darstellung

Der Prototyp besteht aus einem starren Körper der in A auf einer Achse gelagert ist. In B ist eine Schwungmasse über einen Motor mit dem Körper verbunden. Somit verfügt das Gesamtsystem über zwei Freiheitsgrade, welche durch die generalisierten Koordinaten

$$q_1 = \varphi \qquad q_2 = \psi \tag{1}$$

beschrieben werden. Der Winkel φ wird von den Achsen y und y_K eingeschlossen. Der Winkel beschreibt die rotatorische Verschiebung der Schwungmasse zu dem Körper. Die folgenden Größen beschreiben die weiteren physikalischen Gegebenheiten des Systems.

$q_1 = \varphi$	Ausfallwinkel des Körpers
$q_2 = \psi$	Winkel zwischen Schwungmasse und Körper
A	Drehpunkt des Körpers
B	Drehpunkt des Schwungrades
l_{AB}	Abstand zwischen A und B
l_{AC}	Abstand zwischen A und dem Schwerpunkt des Körpers
m_K	Masse des Körpers
m_R	Masse des Schwungrades
J_K^A	Massenträgheitsmoment des Körper um A
J_R^B	Massenträgheitsmoment der Schwungmasse um B
C_φ	Dynamischer Reibkoeffizient des Körpers in A
C_ψ	Dynamischer Reibkoeffizient des Schwungrades in B
T_M	Drehmoment des Motor

Um die Bewegungsgleichungen des Systems zu ermitteln wird der Lagrange Formalismus verwendet. Dieser basiert auf der Lagrange-Funktion L, welche die Differenz der kinetischen Energie T und der potenziellen Energie V des Systems beschreibt.

$$T = \frac{1}{2}[(J_K^A + m_R \cdot {l_{AB}}^2)\dot{\varphi}^2 + J_B^R(\dot{\varphi} + \dot{\psi})^2] \tag{2}$$

$$V = g(m_R \cdot l_{AB} + m_K \cdot l_{AC})cos(\varphi) \tag{3}$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}[(J_K^A + m_R \cdot {l_{AB}}^2)\dot{\varphi}^2 + J_B^R(\dot{\varphi} + \dot{\psi})^2] - g(m_R \cdot l_{AB} + m_K \cdot l_{AC})cos(\varphi) \tag{4}$$

Das von dem Motor verursachte Drehmoment T_M verrichtet die virtuelle Arbeite δW_M. Aus diesem können die generalisierten Kraftkomponenten Q_φ und Q_ψ abgeleitet werden.

$$\delta W_M = T_M \cdot \delta\psi \tag{5}$$

$$Q_\varphi = T_M \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = 0 \tag{6}$$

$$Q_\psi = T_M \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\psi} = T_M \tag{7}$$

Durch die Reibung in den Lagerungen bei A und B geht Energie in dem System verloren. Diese Verlustleistung kann mit den Rayleigh'schen Dissipationsfunktionen D_φ und D_ψ beschrieben werden.

$$D_\varphi = \frac{1}{2}C_\varphi \cdot \dot{\varphi}^2 \tag{8}$$

$$D_\psi = \frac{1}{2}C_\psi \cdot \dot{\psi}^2 \tag{9}$$

$$D = D_\varphi + D_\psi = \frac{1}{2}C_\varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}C_\psi \cdot \dot{\psi}^2 \tag{10}$$

Bei dem Prototyp handelt es sich um ein nicht konservatives System, da einerseits durch die Reibung mechanische Energie verloren geht. Andererseits erhöht das Motormoment die mechanische Gesamtenergie des Systems. Da die beiden generalisierten Koordinaten φ und ψ voneinander unabhängig sind können aus dem d'Alembert'schen Prinzip zwei Bewegungsgleichungen abgeleitet werden.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \tag{11}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\varphi}} = Q_\varphi \tag{12}$$

$$(J_K^A + J_B^R + m_R \cdot l_{AB})\ddot{\varphi} + J_B^R \cdot \ddot{\psi} - g(m_R \cdot l_{AB} + m_K \cdot l_{AC})sin(\varphi) + C_\psi \cdot \dot{\psi} = 0 \tag{13}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} - \frac{\partial L}{\partial \psi} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\psi}} = Q_\psi \tag{14}$$

$$J_B^R \cdot \ddot{\psi} = T_M - C_\psi \cdot \dot{\psi} - J_B^R \cdot \ddot{\varphi} \tag{15}$$

Durch Einsetzen von (15) in (13) ergibt sich die folgende Bewegungsgleichung für die Würfelseite.

$$\ddot{\varphi} = \frac{g(m_R \cdot l_{AB} + m_K \cdot l_{AC})sin(\varphi) - C_\varphi \cdot \dot{\varphi} + C_\psi \cdot \dot{\psi} - T_M}{J_K^A + m_R \cdot l_{AB}} \tag{16}$$

Die Bewegungsgleichung für die Schwungmasse ergibt sich durch Einsetzen von (16) in (15).

$$\ddot{\psi} = \frac{(J_K^A + m_R \cdot l_{AB} + J_B^R)(T_M - C_\psi \cdot \dot{\psi})}{(J_K^A + m_R \cdot {l_{AB}}^2)J_B^R} + \frac{C_\varphi \cdot \dot{\varphi} - g(m_R \cdot l_{AB} + m_K \cdot l_{AC})sin(\varphi)}{J_K^A + m_R \cdot {l_{AB}}^2} \tag{17}$$

3 Sensorik

Die Aufgabe der verwendeten Sensorik liegt darin die Werte für φ, und $\dot{\varphi}$ zu bestimmen. Hierfür wurden zwei MPU6050 IC's verwendet. Diese verfügen jeweils über einen Beschleunigungssensor und Gyroskop, welche Werte für drei Achsen ausgeben. Um die Konfiguration und Auswertung der Sensoren vorzunehmen, bieten diese eine I^2C Schnittstelle an. Die Position und Ausrichtung der Sensoren ist in **??** dargestellt.

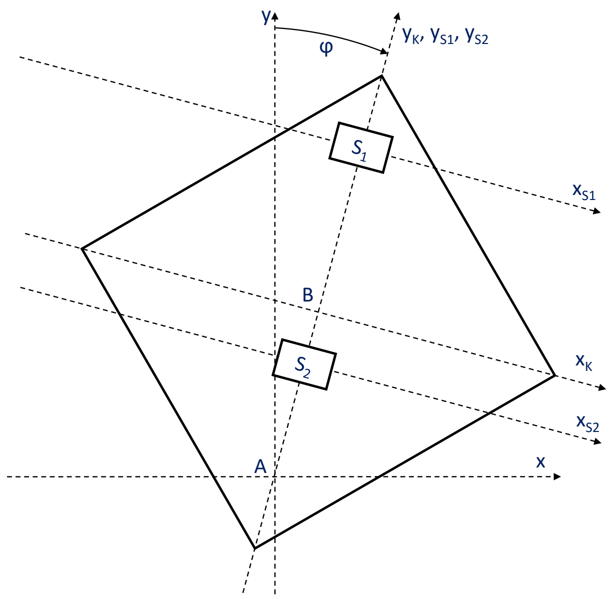

Abbildung 2: Position der Sensoren, Quelle: eigene Darstellung

3.1 Berechnung der Winkelwerte

Die Sensoren keine Wege bzw. Winkel. Somit muss der Winkel φ berechnet werden. Die gemessenen Sensorwerte hängen von r_{S1} bzw. r_{S2} ab, welche den Abstand zwischen den Sensoren und dem Drehpunkt A beschreiben. Zusätzlich beeinflussen neben dem Winkel φ auch dessen beiden Ableitungen $\dot{\varphi}$ und $\ddot{\varphi}$ die Sensorausgabe. Allerdings lassen sich aus den Beschleunigungswerten der beiden Sensoren wie folgt der aktuelle Wert von φ berechnen.

$$\ddot{S}_i = \begin{pmatrix} \ddot{x}_i \\ \ddot{y}_i \\ \ddot{z}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{Si} \cdot \ddot{\varphi} + sin(\varphi) \cdot g \\ -r_{Si} \cdot \dot{\varphi}^2 - cos(\varphi) \cdot g \\ 0 \end{pmatrix} \qquad i \in [1;2] \tag{18}$$

$$\alpha = \frac{r_{S1}}{r_{S2}} \tag{19}$$

$$\ddot{x}_1 - \alpha \cdot \ddot{x}_2 = g(1-\alpha)sin(\varphi) \tag{20}$$

$$\ddot{y}_1 - \alpha \cdot \ddot{y}_2 = -g(1-\alpha)cos(\varphi) \tag{21}$$

$$\frac{\ddot{x}_1 - \alpha \cdot \ddot{x}_2}{\ddot{y}_1 - \alpha \cdot \ddot{y}_2} = -tan(\varphi) \tag{22}$$

Literatur

[1] Wolfgang Nolting: Grundkurs Theoretische Physik 2 - Analytische Mechanik