

Nhập môn phân tích độ phức tạp thuật toán-21TN

TRẦN MINH HOÀNG-21120075

BÀI TẬP ĐIỂM CỘNG LẦN 2

Đề bài

Cho đoạn mã bên dưới:

```
1 int process(int n){
2     int i = n, m = 1, res = 0;
3     while (i > 0){
4         int j = 1;
5         while (j < m){
6             res = i * j;
7             j = j + ?;
8         }
9         m = m + 1;
10        i = i - @;
11    }
12    return res;
13 }
```

Hãy thay mỗi ký tự ?, @ ở dòng code 7, 10 lần lượt bởi các cách sau: $(1, 1)$, (j, j) , $(1, j)$, $(j, 1)$. Với mỗi cách, thực hiện đếm số phép gán và ước lượng độ phức tạp tương ứng.

Phân tích chi tiết

Trường hợp 1: $(1, 1)$

```
1 int process(int n){
2     int i = n, m = 1, res = 0;
3     while (i > 0){
4         int j = 1;
5         while (j < m){
6             res = i * j;
7             j = j + 1;
8         }
9         m = m + 1;
10        i = i - 1;
11    }
12    return res;
13 }
```

Gọi $T(n)$ là số phép gán:

$$T(n) = 3 + \sum_{i=1}^n (3 + \sum_{j=1}^{j < m} 2)$$

Phân tích số phép gán và độ phức tạp:

$$\begin{aligned}
T(n) &= 3 + \sum_{i=1}^n (3 + \sum_{j=1}^{j < m} 2) \\
&= 3 + \sum_{i=1}^n (3 + 2m)
\end{aligned}$$

- Qua mỗi vòng lặp i giảm 1 đơn vị, m tăng 1 đơn vị $\Rightarrow m = n + 1 - i$

$$\begin{aligned}
T(n) &= 3 + \sum_{i=1}^n (3 + 2n - 2i) \\
&= 3 + 5n + 2n^2 - 2 \sum_{i=1}^n i \\
&= 3 + 5n + 2n^2 - n(n+1) \\
&= n^2 + 4n + 3 \in \theta(n^2)
\end{aligned}$$

Trường hợp 2: (j, j)

```

1 int process(int n){
2     int i = n, m = 1, res = 0;
3     while (i > 0){
4         int j = 1;
5         while (j < m){
6             res = i * j;
7             j = j + j;
8         }
9         m = m + 1;
10        i = i - j;
11    }
12    return res;
13 }

```

Phân tích số phép gán và độ phức tạp:

- j được tăng lớn hơn hoặc bằng m
- i giảm một khoảng là m hay nói cách khác $i = i - m$

$$\begin{aligned}
T(n) &= 3 + \sum_{i=1}^n (3 + \sum_{j=1, j \neq 2}^{j < m} 2) \\
&= 3 + \sum_{i=n, i-m} i > 0 (3 + 2 \log_2(m))
\end{aligned}$$

- Gọi $a = m_{max}$ thỏa $a(a+1) = 2n \Rightarrow a \approx \sqrt{2n}$

$$\begin{aligned}
T(n) &= 3 + 3a + 2(\log_2(1) + \log_2(2) + \dots + \log_2(a)) \\
&\in \theta(a \log a) = \theta(\sqrt{2n} \log \sqrt{2n}) = \theta(\sqrt{n} \log n)
\end{aligned}$$

Trường hợp 3: (1, j)

```
1 int process(int n){
2     int i = n, m = 1, res = 0;
3     while (i > 0){
4         int j = 1;
5         while (j < m){
6             res = i * j;
7             j = j + 1;
8         }
9         m = m + 1;
10        i = i - j;
11    }
12    return res;
13 }
```

$$\begin{aligned} T(n) &= 3 + \sum_{i=n, i-=m} i > 0 (3 + 2 \log_2(m)) \\ &= 3 + \sum_{i=n, i-=m} i > 0 (3 + 2m) \\ &= 3 + 3a + a(a+1) \\ &= 3 + 3\sqrt{2n} + 2n \in \theta(n). \end{aligned}$$

Trường hợp 4: (j, 1)

```
1 int process(int n){
2     int i = n, m = 1, res = 0;
3     while (i > 0){
4         int j = 1;
5         while (j < m){
6             res = i * j;
7             j = j + j;
8         }
9         m = m + 1;
10        i = i - 1;
11    }
12    return res;
13 }
```

$$\begin{aligned} T(n) &= 3 + \sum_{i=1} n (3 + \sum_{j=1, j*=2} m^2) \\ &= 3 + \sum_{i=1} n (3 + 2 \log_2 m) \\ &= 3 + 3n + 2(\log_2(1) + \log_2(2) + \dots + \log_2(n)) \\ &\in \theta(n \log n) \end{aligned}$$

Tóm tắt

- Trường hợp (1, 1): $O(n^2)$
- Trường hợp (j, j): $O(\sqrt{n} \log n)$
- Trường hợp (1, j): $O(n)$
- Trường hợp (j, 1): $O(n \log n)$