

Inhaltsverzeichnis

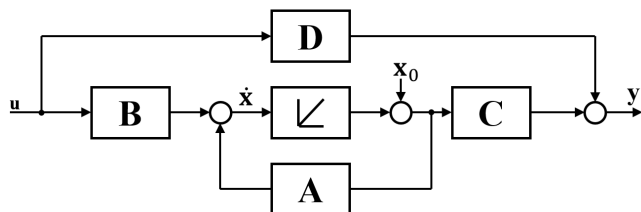
1 Zustandsraumdarstellung	3
1.1 Basics	3
1.1.1 Stabilität	3
1.1.2 MIMO-Systeme	3
1.2 ZRD zu Übertragungsfunktion (im Bildbereich)	3
1.3 Übertragungsfunktion zu ZRD	3
1.3.1 Steuerbare kanonische Normalform	3
1.3.2 Beobachtbare kanonische Normalform	3
1.3.3 Ähnlichkeitstransformation	4
1.4 Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit	4
1.4.1 Steuerbarkeit	4
1.4.2 Beobachtbarkeit	4
1.4.3 Minimalphasiges System	4
1.4.4 Weiteres zu Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit	4
2 Zustandsregler	5
2.1 Basics	5
2.2 Polplatzierung	5
2.3 Optimale Regelung	5
2.3.1 LQR (linear quadratischer Regler)	5
2.3.2 Robustheit des LQR	6
2.4 Zustandsregler mit integrierendem Anteil	6
3 Zustandsregler mit Beobachter	7
3.1 Basics	7
3.2 Fehler im System	7
3.3 Polplatzierung	7
3.4 Zustandsregler mit Beobachter	7
3.4.1 Alternative Darstellung des Zustandsreglers mit Beobachter	7
3.5 LQG	8
3.6 LTR (Loop transfer recovery)	8
3.6.1 Anwendung von LTR mit LQR und LQG	8
4 Systemidentifikation	9
4.1 Basics	9
4.2 Nicht Parametrische Identifikation	9
4.2.1 Bode \Leftrightarrow Übertragungsfunktion	9
4.2.2 Leakage-Effekt	9
4.2.3 Schrittantwort	9
4.3 Parametrische Identifikation	10
4.4 LS-Verfahren	10
4.4.1 LS-Verfahren für Zeitdiskrete Systeme	10
4.4.2 LS-Verfahren bei Problemen mit Bode-Diagrammen	11
4.4.3 Gewichtetes LS-Verfahren	11
4.4.4 Markov-Annahme unter Verwendung der Co-varianz-Matrix	11
4.5 LS-Verfahren für dynamische Systeme	11
5 Diskretisierung und Implementierung	13
5.1 Basics	13
5.2 Diskretisierung von Reglern	13
5.2.1 Diskretisierungsmethoden	13
5.2.2 Wahl der Sampling Time	13
5.3 Windup und weitere Gefahren	13

6	H_∞-Regler	14
6.1	Basics	14
6.2	Stabilitätsanalyse → Small-Gain-Theorem	14
6.2.1	Additive Modellunsicherheit	14
6.2.2	Multiplikative Modellunsicherheit	14
6.3	Regelgüte	15
6.3.1	Sensitivitätsfunktion	15
6.3.2	Gemischter Sensitivitätsanspruch	16
6.4	Linear Fractional Transformation (LFT)	16
7	Nicht Lineare Systeme	17
7.1	Basics	17
7.2	Bestimmung der Stabilität	17
7.2.1	Layapunov 1. Methode	17
7.2.2	Layapunov 2. Methode	17
7.2.3	Layapunov in Linearen Systemen	17
7.3	Popov-Kreiskriterium	17
7.4	Beschreibungsfunktionsmethode	17
7.4.1	Grenzyklus	18
8	Verschiedene Transformationen	19
8.1	Berechnung	19
8.2	Pol/Nullstellentransfo	19
9	Eigenschaften von Fourier- und Z-Transformation	19
10	Matrizenrechnung	20
10.1	Determinante	20
10.1.1	Unterdeterminante	20
10.2	Gaussverfahren	20
10.3	Inverse Matrix (Existiert nur wenn Matrix regulär: $\det A \neq 0$)	20
10.4	Diagonalisierung	20
11	Anhang: Beschreibungsfunktionen	21

1 Zustandsraumdarstellung Revision : 1352

1.1 Basics

Darstellung einer Differentialgleichung n . Ordnung durch ein Differentialgleichungssystem von n Gleichungen 1. Ordnung.



$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Pole des Systems: Eigenwerte von A

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

Abbildung 1: Zustandsraumdarstellung

Matrix	Dimension	Einfluss	Weiteres
A	$n \times n$	Beschreibt Dynamik des Systems	Spalten entsprechen Ausgängen der Integratoren Zeilen deren Eingänge
B	$n \times M$	Einfluss der Eingangsvariablen auf Zustandsvariablen	Steuer- oder Eingangsmatrix
C	$P \times n$	Einfluss der Zustandsvariablen auf Ausgangsgrößen	Beobachtungs- oder Ausgangsmatrix
D	$P \times M$	Direkter Einfluss der Eingangsvariablen auf Ausgangsvariablen	Übergangs- oder Durchgangsmatrix

Dabei gilt: n = Anzahl Zustandsvariablen; M = Anzahl Eingangsvariablen; P = Anzahl Ausgangsvariablen

1.1.1 Stabilität

Ein LTI-System ist asymptotisch stabil wenn der Realanteil aller Eigenwerte von A kleiner als Null ist. Die Impulsantwort klingt dann gegen Null ab.

1.1.2 MIMO-Systeme

- Bei einem MIMO-System ist $G(s)$ eine $P \times M$ -Matrix
 - Dabei beschreibt jede der Übertragungsfunktionen den Einfluss eines Eingangs auf den Ausgang
 - Somit gilt:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \text{Einfluss Eingang 1 auf Ausgang 1} & \text{Einfluss Eingang 2 auf Ausgang 1} & \cdots & \text{Einfluss Eingang M auf Ausgang 1} \\ \text{Einfluss Eingang 1 auf Ausgang 2} & \text{Einfluss Eingang 2 auf Ausgang 2} & \cdots & \text{Einfluss Eingang M auf Ausgang 2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Einfluss Eingang 1 auf Ausgang P} & \text{Einfluss Eingang 2 auf Ausgang P} & \cdots & \text{Einfluss Eingang M auf Ausgang P} \end{bmatrix}$$

1.2 ZRD zu Übertragungsfunktion (im Bildbereich)

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0} \quad (1)$$

- Dabei ist I die Einheitsmatrix mit der Dimension von A
- Wenn $D \neq 0$, dann ist $b_m \neq 0$ und die Sprungantwort des Systems hat eine Sprungkomponente im Ausgang.
- Vorteilhaft in TR: Aus multiplizieren mit Variablen, nicht mit eingesetzten Werten um frühzeitiges Kürzen zu verhindern.

1.3 Übertragungsfunktion zu ZRD

- Matlab: `ss2tf`
- Es sind verschiedene Umformungen möglich, sie können die Steuerbarkeit (1.4.1) oder die Beobachtbarkeit (1.4.2) garantieren. Für beide oft verwendeten Umformungen muss $G(s)$ in folgende Form gebracht werden:

$$G(s) = \frac{b_{n-1} \cdot s^{n-1} + \cdots + b_1 \cdot s + b_0}{s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot s + a_0} + d$$

1.3.1 Steuerbare kanonische Normalform

Mit dieser Methode umgeformte Systeme sind immer steuerbar

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C_c = [b_0 \quad b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_{n-1}] \quad D_c = d$$

1.3.2 Beobachtbare kanonische Normalform

Mit dieser Methode umgeformte Systeme sind immer beobachtbar

$$A_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad B_o = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-2} \\ b_{n-1} \end{bmatrix} \quad C_o = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1] \quad D_o = d$$

1.3.3 Ähnlichkeitstransformation

- Jedes System ist auf verschiedene Möglichkeiten darstellbar (z.B. sowohl in Beobachtbarer sowie auch in Steuerbarer kanonischer Normalform)
 - Die Darstellung ist abhängig von der Wahl (und der Reihenfolge) der Zustandsvariablen
 - Mit einer regulärer (\Rightarrow invertierbaren) Matrix \mathbf{T} kann Darstellung beliebig transformiert werden
- $$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1} \quad \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{T}\mathbf{B} \quad \tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{T}^{-1} \quad \tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{D} \quad \tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{T}\mathbf{x}(t)$$
- r und y müssen nicht Transformiert werden! Ein- und Ausgänge werden nicht beeinflusst wenn System in einer anderen Weise dargestellt wird.

1.4 Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit

1.4.1 Steuerbarkeit

- Ein Paar $(\mathbf{A} \ \mathbf{B})$ ist steuerbar, wenn es von jedem anfänglichen Zustand in jeden beliebigen Zustand gebracht werden kann, innerhalb einer endlichen Zeit
- Ein Paar $(\mathbf{A} \ \mathbf{B})$ ist steuerbar, wenn die Eigenwerte von $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$ beliebig platziert werden können.
- Wird auch als Regelungsnormalform bezeichnet
- Wenn es Zustände in $\underline{x}(t)$ gibt die nicht von $\underline{u}(t)$ beeinflusst werden, ist das System nicht steuerbar
- Matlab: *ctrb*
- Die Steuerbarkeit ist gegeben, wenn \mathbf{P}_c den vollen Rang hat.
 - Bei SISO-Systemen ist es ausreichend wenn $\det(\mathbf{P}_c) \neq 0$
- $\text{rank}(\mathbf{P}_c) = \text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}$

1.4.2 Beobachtbarkeit

- Ein Paar $(\mathbf{A} \ \mathbf{C})$ ist beobachtbar, wenn innerhalb einer endlichen Zeit der anfängliche Zustand $\underline{x}(0)$ aus $\underline{y}(t)$ und $\underline{u}(t)$ bestimmt werden kann.
- Ein Paar $(\mathbf{A} \ \mathbf{C})$ ist beobachtbar, wenn die Eigenwerte von $\mathbf{A} - \mathbf{H}\mathbf{C}$ beliebig platziert werden können.
- Wenn es Zustände in $\underline{x}(t)$ gibt, welche den Ausgang $\underline{y}(t)$ nicht beeinflussen, ist das System nicht beobachtbar
- Matlab: *obsv*
- Die Steuerbarkeit ist gegeben, wenn \mathbf{P}_o den vollen Rang hat.
 - Bei SISO-Systemen ist es ausreichend wenn $\det(\mathbf{P}_o) \neq 0$

$$\text{rank}(\mathbf{P}_o) = \text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix}$$

1.4.3 Minimalphasiges System

- Sind alle Übertragungsfunktionen $G(s)$ vollständig gekürzt, hat der Zustandsvektor gleichviele Einträge wie der Grad des Nennerpolynoms ist.
- Bei MIMO-Systemen ist die Anzahl der Zustände die Summe der Grade aller Nennerpolynome
- Ein Minimalphasiges System ist sowohl steuerbar, als auch beobachtbar

1.4.4 Weiteres zu Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit

- Ist ein System steuerbar und beobachtbar können die Eigenwerte beliebig platziert werden
- In Abbildung

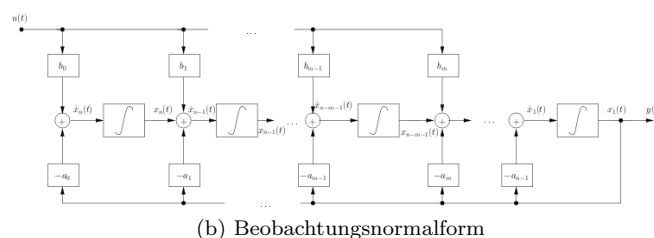
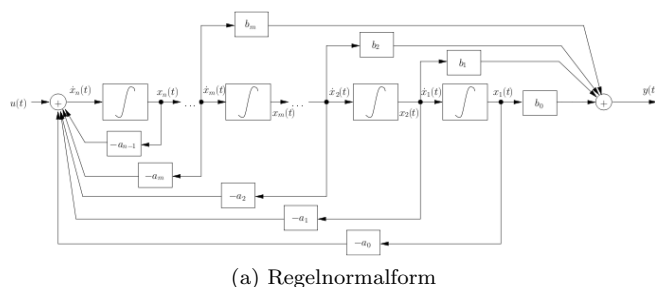
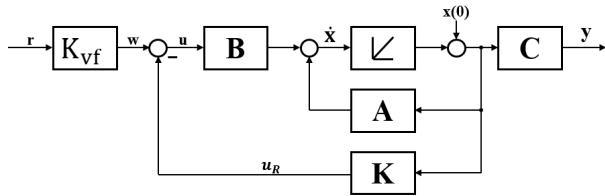


Abbildung 2: Darstellung der zwei Normalformen als Signalfuss-Diagramm

2 Zustandsregler

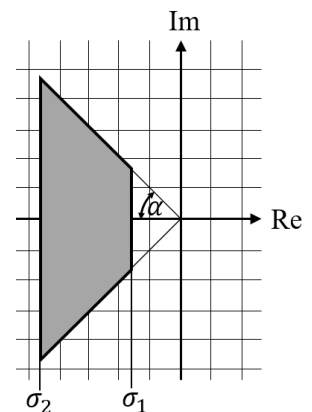
2.1 Basics



- System muss steuerbar sein, damit der Zustandsregler verwendet werden kann.
- Wird für die Ermittlung der fehlenden Zustände ein Beobachter gebraucht, muss das System beobachtbar sein
- Der Regler besteht aus zwei Komponenten
 - Feedback-Glied: \mathbf{K} : Dieses legt die Dynamik des Reglers fest
 - Vorwärts-Glied: K_{vf} : garantiert gewünschte statische Verstärkung
- Der aus Eindimensionalen Reglern bekannte Fehler e gibt es nicht bei Zustandsreglern
- Der Zustandsregler kann auch in die in Abbildung 1 gezeigte Zustandsraumdarstellung integriert werden
 - Die Matrizen erhalten anschliessend Index g
 $\mathbf{A}_g = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$ $\mathbf{B}_g = \mathbf{B}K_{vf}$ $\mathbf{C}_g = \mathbf{C}$
 - In Gleichung 1 eingesetzt, kann so auch der Übergang von Übertragungsfunktion direkt zu geregeltem System gemacht werden.
 $G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \mathbf{C}_g (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_g)^{-1} \mathbf{B}_g = \mathbf{C} (s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K})^{-1} \mathbf{B}K_{vf}$

2.2 Polplatzierung

- Wie im Kapitel 1 erwähnt, können Pole in eines steuerbaren Systems beliebig platziert werden
 - Wenn es nicht steuerbar ist, kommt es darauf an, ob die Pole der Strecke in der positiven oder negativen Halbebene liegen. Liegen diese in der positiven Halbebene muss die Strecke modifiziert werden. Liegen diese in der negativen Halbebene muss entschieden werden ob diese so akzeptierbar sind.
- Mit dem Regler \mathbf{K} (gleiche Dimension wie \mathbf{C}) wird das erreicht
 $\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$
- Damit DC-Verstärkung gleich bleibt kommt der Vorfaktor K_{vf} hinzu
 $K_{vf} = (\mathbf{C}(-\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K})^{-1}\mathbf{B})^{-1}$
 \Rightarrow Koeffizientenvergleich
- Dabei soll bei der Polplatzierung folgendes beachtet werden
 - Dämpfung $\xi > \frac{\sqrt{2}}{2}$ und $\alpha = \cos^{-1}(\xi) \Rightarrow \alpha < \frac{\pi}{4}$
 - Einschwingen schneller als $C \cdot e^{-\sigma_1}$
 - Je schneller ein System einschwingt, desto mehr Energie benötigt es, das ist das Limit bei σ_2
 - Der grau markierte Bereich ist anzustreben.



2.3 Optimale Regelung

- Die Kostenfunktion $J(k)$ wird als Funktion vom Regler K definiert $\rightarrow J = f(K)$
- Durch Minimieren von $J(K)$ wird die Regelung optimiert
- Definition $f(K) = \int_0^{t_f} g(x, u) dt$
 - Da x und u von K abhängig sind, ist das eine Funktion in Abhängigkeit von K
 - t_f bezeichnet „Final Time“, meist wird die als ∞ gewählt, da nicht der spezifische Punkt, sondern der „Weg“ dorthin interessiert.
- Für den Teil des Zustandsvektors kann anstelle von x auch $|x|^2$ minimiert werden
 - $|x|^2 = x^T x$
- Weiter könne einzelne Komponenten des Vektors unterschiedlich gewichtet werden, dafür wird die Matrix \mathbf{Q} verwendet
- $J = \int_0^\infty x^T \mathbf{Q} x dt$
 - Dabei gilt, dass \mathbf{Q} positiv semidefinit sein muss (alle Eigenwerte ≥ 0)
 - Die Regelung wird zusätzlich begrenzt durch die zu Verfügung stehende Regelenergie. Siehe dazu den nächsten Abschnitt

2.3.1 LQR (linear quadratischer Regler)

Mit dem Hinzunehmen der möglichen Regelenergie der einzelnen Stellgrößen ergibt sich

$$J = \int_0^\infty (\underline{x}^T \mathbf{Q} \underline{x} + \underline{u}^T \mathbf{R} \underline{u}) dt$$

Nach dem Auflösen wird dafür folgendes Erhalten:

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}$$

- \mathbf{P} aus der Gleichung 2, und im Spezialfall als Skalar aus der Gleichung 3
- Hierbei stammen \mathbf{A} und \mathbf{B} vom System und \mathbf{Q} und \mathbf{R} sind die Gewichtungsmatrizen
- Für \mathbf{P} gibt es mehrere Lösungen, es wird die positiv definite Lösung verwendet

- Oftmals wird $\mathbf{Q} = \mathbf{R} = \mathbf{I}$ genommen

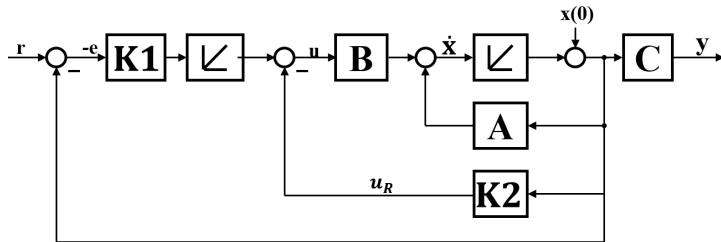
$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} = -\mathbf{Q} \quad (2)$$

$$2ap - \frac{1}{r} b^2 p^2 + q = 0 \quad (3)$$

2.3.2 Robustheit des LQR

- Für ein Singleinput-System ist eine Phasenreserve von $\pm 60^\circ$ garantiert und eine Amplitudenreserve von $[0.5 \dots \infty]$
- Für die Herleitung (Kalman Ungleichung) und MIMO-Systeme siehe Skript „State Regulator“, Seite 8.

2.4 Zustandsregler mit integrierendem Anteil



Zwei Möglichkeiten diesen Regler zu berechnen

1. Als Kaskadierten Regler
 - a) $\mathbf{K2}$ mit Polplatzierung berechnen (innerer Loop)
 - b) $\mathbf{K1}$ mit der klassischen Methode auslegen
 - Der Nachteil ist, dass auch eine Gute Pollage bei $\mathbf{K2}$ nichts nützt, wenn $\mathbf{K1}$ nicht gut erstellt werden kann.
2. Ersatzschema für den Regler, für weitere Details siehe Skript „State Regulator“, Seite 9.
 - $u(t) = -K_1 \int_0^t e(\tau) d\tau - K_2 x(t)$

3.5 LQG

1. $\mathbf{AP} + \mathbf{PA}^T - \mathbf{PC}^T \mathbf{CP} = -\rho \mathbf{BB}^T = -\mathbf{Q}$
 - Positiv definite Lösung von \mathbf{P} wählen
2. $\mathbf{H} = \mathbf{PC}^T$
 - Grosse Werte für $\rho \Rightarrow$ Grosses Prozessrauschen führt zu grosser Verstärkung durch den Beobachter. Daher ist dieser anfälliger für verrauschte Signale.

3.6 LTR (Loop transfer recovery)

- LTR befasst sich mit der Platzierung der Pole von Regler und Beobachter, mit dem Ziel eine ausreichende Phasen- und Amplitudenreserve zu erreichen
- Die Phasen Reserve der einzelnen Teilsysteme ist $\min \pm 60^\circ$ und die Amplitudenreserve $\in [0.5 \dots \infty [$
- Das zusammengesetzte System hat jedoch keine garantiert Reserve (weder Amplituden- noch Phasenreserve)
- Wird ein LQR (Regler) mit den Gewichtungsmatrizen ausgerechnet, erhalten wir die K-Matrix
- Wird ein LQG (Beobachter) mit den Gewichtungsmatrizen ausgerechnet, erhalten wir die H-Matrix
- Die H-Matrix wird entsprechend der K-Matrix berechnet, wobei die Gewichtungen
 - $\mathbf{Q} = \rho \mathbf{BB}^T$ wobei \mathbf{Q} das Prozessrauschen darstellt
 - $\mathbf{R} = \mathbf{I}$ wobei \mathbf{R} das Sensorrauschen darstellt
 - Wenn R klein wird, wird Q gross und umgekehrt
- Bei einem minimalphasigen System gilt

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} (G_o(s)) = \mathbf{K} (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}$$

3.6.1 Anwendung von LTR mit LQR und LQG

- Möglichkeit zum Erreichen der Reserve, wenn entweder der Regler oder der Beobachter beliebig gewichtet werden soll

LQR beliebig

Wert für LQR beliebig
 Wert für LQG $\mathbf{Q} = \rho \mathbf{BB}^T$
 $\mathbf{R} = \mathbf{I}$
 $\rho \geq 0$

LQG beliebig

Wert für LQR $\mathbf{Q} = \rho \mathbf{C}^T \mathbf{C}$
 $\mathbf{R} = \mathbf{I}$
 $\rho \geq 0$
 Wert für LQG beliebig

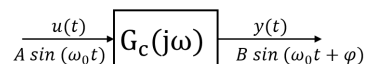
4 Systemidentifikation

4.1 Basics

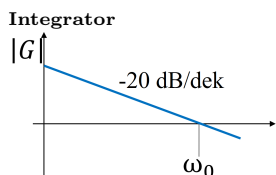
- Gewinnen von Informationen über ein nur teilweises oder ganz unbekanntes System
- **Achtung:** Bei Bode-Diagramm ist X-Achse in ω und nicht in der Frequenz
 - Reminder: $x [db] = 20 \log_{10}(x)$
- Erstellen von mathematischen Modellen basierend auf den Messergebnissen
-

4.2 Nicht Parametrische Identifikation

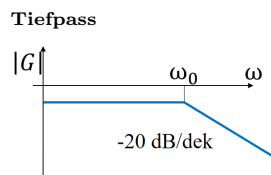
- Anregung eines Systems mit dem Sinus einer einzelnen Frequenz und beobachten des Ausganges
- Beobachten der Antwort und entsprechende Erstellung des Bode-Diagramms
- Für eine Totzeit (e^{-st_t}) geht der Phasengang mit zunehmender Frequenz zu $-\infty$, der Amplitudengang wird nicht beeinflusst.



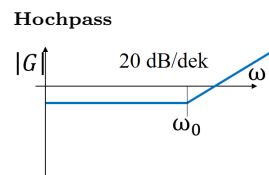
4.2.1 Bode \Leftrightarrow Übertragungsfunktion



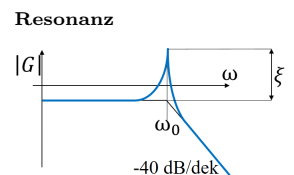
$$G(s) = \frac{\omega_0}{s}$$



$$G(s) = \frac{1}{\frac{1}{\omega_0}s + 1} = \frac{\omega_0}{s + \omega_0}$$



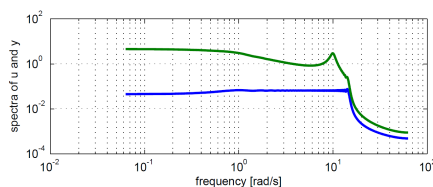
$$G(s) = \frac{1}{\omega_0} + 1$$



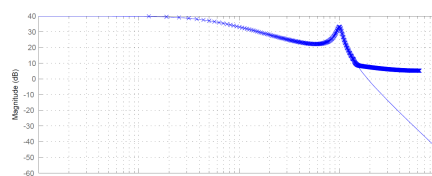
$$G(s) = \frac{1}{s^2 T_0^2 + 2\xi T_0 s + 1} \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

4.2.2 Leakage-Effekt

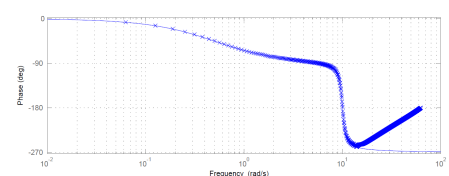
- Zu erkennen wenn:
 - Verstärkung zwischen $u(s)$ und $y(s)$ auf einmal fast konstant bei 0 dB bleibt
 - Das bekannte und gleichzeitig gemessene Eingangssignal $u(s)$ scheint bei zunehmender Frequenz gedämpft zu sein.
 - Ein untypischer Knick, der in dem Bode-Diagramm auftritt. Hierbei muss sichergestellt werden, dass dieser nicht aufgrund der Regelstrecke ist
- In untenstehenden Grafiken sind Beispiele von Leakage-Effekten gezeigt. Die feine Linie ist dabei das wahre Verhalten des Systems, die dicke Linie das gemessene Verhalten des Systems.



(a) Gemessene Amplitude von $u(s)$ und $y(s)$



(b) Amplitudengang der Regelstrecke



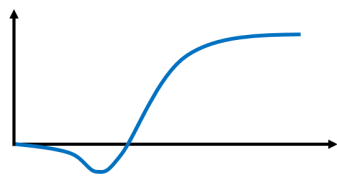
(c) Phasengang der Regelstrecke

Quelle: Kottmann, Markus (2012): *Advanced Control. Introduction to System Identification. Version 1.3. 13*

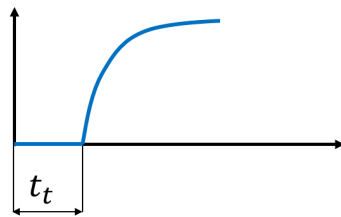
4.2.3 Schrittantwort

- Gibt meist kein ausreichend genaues Modell für die Regelung
- Einige Dinge können dennoch mit der Schrittantwort charakterisiert werden, nämlich:
 - Statische Verstärkung (DC-Gain)
 - Dominante Zeitkonstante
 - Totzeit
 - Ob das System Resonanzen hat
 - Minimalphasigkeit des Systems
- Schwingt die Schrittantwort zuerst in das Negative, hat das System eine Nullstelle in der rechten Halbebene
 - System ist nicht minimalphasig

Nicht minimalphasig



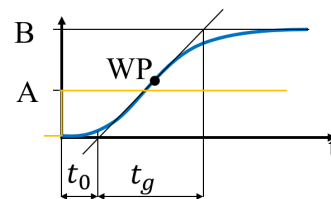
Totzeit



$$G(s)_{\text{Totzeit}} = e^{-s t_t}$$

$$G(z)_{\text{Totzeit}} = z^{-1}$$

PT2



$$G(s) = \frac{B}{A} \cdot e^{\frac{-s}{T_0}} \cdot \frac{1}{s T_g + 1}$$

4.3 Parametrische Identifikation

- Identifizieren von Systemen deren Strukturen bekannt sind
 - Wenn keine Spezielle Form der Systembeschreibung gewählt wird, sind $(n+1)^2$ Parameter zu ermitteln (Matrizen A,B,C,D)
 - Wenn eine spezifische Form gewählt wird (z.B. Regelnormalform) sind es nur noch $2n+1$ Parameter
1. Die Matrizen des Systems herleiten (mit den Variablen des Systems, so z.B. Federkonstanten, Dämpfungen, etc.).
 2. $G(s)$ aus den Matrizen bestimmen
 3. Messungen vornehmen und mit den Messergebnissen z.B. Überkoeffizientenvergleich mit $G(s)$ Werte der Parameter bestimmen

4.4 LS-Verfahren

- Fitten von Daten
- Es gilt: N : Die Anzahl der Datensätze, n : Die Anzahl der Variablen
- LS zielt darauf ab den Fehler zu minimieren
- Verfahren funktioniert besonders gut, wenn gesuchte Funktion Linear in Parameter (im Beispiel θ) ist.

$$y_j = f(u_j) = u_j \theta_1 + u_j^2 \theta_2 + \dots + u_j^n \theta_n$$
 - y_j : Gemessenes Signal, u_j : Eingangssignal, θ_j : Parameter
- Beispiel (Quelle: Kottmann, Markus (2012): *Advanced Control. Introduction to System Identification. Version 1.3. 21*):
 - Wenn System überbestimmt ist, braucht es den Fehlerterm ε
 - Ziel ist es die Kostenfunktion $J = |\varepsilon|^2$ klein zu halten (somit also auch ε klein zu halten)
 - Mit der gezeigten Formel für θ , wird das ε bereits minimiert!

$$1. = 0.8\theta_1 + 0.8^2\theta_2 = 0.8\theta_1 + 0.64\theta_2$$

$$2.5 = 2\theta_1 + 2^2\theta_2 = 2\theta_1 + 4\theta_2$$

$$2 = 3\theta_1 + 3^2\theta_2 = 3\theta_1 + 9\theta_2$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2.5 \\ 2 \end{bmatrix}}_y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.8 & 0.64 \\ 2 & 4 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}}_{\Phi} \underbrace{\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}}_{\theta}$$

$$y = \Phi\theta + \varepsilon$$

$$\theta = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T y$$

4.4.1 LS-Verfahren für Zeitdiskrete Systeme

- Vorgehen:
 - $G(z)$ umformen, sodass Nenner ein Summand ohne z hat
 - $G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \Leftrightarrow Y(z) = G(z)U(z)$
 - Parameter (z.B. a und b) sind in $G(z)$ enthalten \Rightarrow das ist der Vektor θ
 - $az^{-i} \cdot u(z) \Leftrightarrow au(k-i)$
 - Umstellen, dass $y(k)$ als Funktion von $y(k-i)$ und $x(k-i)$
 - $u(k-i)$ und $y(k-i)$ sind die Messwerte am Eingang resp. Ausgang, Versetzt um i Zeitschritte
 - Daraus erstellen der Matrix Φ und des Vektors y
 - Jeweils eine Zeile je möglicher Gleichung
- Siehe auch Kapitel 4.5, dort ist die Formel für mehrere Gleichungen angewendet
- Minimalbeispiel

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a}{z \cdot (z+b)}$$

$$G(z) = \frac{az^{-2}}{1+bz^{-1}}$$

$$Y(z) \cdot (1+bz^{-1}) = X(z) \cdot (az^{-2})$$

$$Y(z) = az^{-2}X(z) - bz^{-1}Y(z)$$

$$y(k) = ax(k-2) - by(k-1)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} x(k-2) & -y(k-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

4.4.2 LS-Verfahren bei Problemen mit Bode-Diagrammen

- Im Komplexen Raum betrachten
 - von Amplitudengang und Phasenwinkel zu Polarform
 - $|G(j\omega)| = A \text{ [dB]}$ und $\angle G(j\omega) = \varphi [^\circ] \Rightarrow 10^{A/20} \cdot e^{j\varphi/180}$
- Minimalbeispiel mit Resonanz und DC-Verstärkung (Gl. = Kommentar zu Gleichung im nachfolgenden Beispiel)
 - Gl.4: Normieren, dass Nennerpolynom mit s^i beginnt
 - Gl.5: Auflösen nach $G(s)s^i$
 - Gl.6: In Frequenzraum wechseln $s \Leftrightarrow (j\omega)$
 - Gl.7: In Matrizen Form bringen (eine Zeile je erhaltenen Messpunkt)
 - Nun Werte Einsetzen, dabei wie oben beschrieben Informationen von Bode-Diagramm in Polarform bringen und einsetzen für $G(j\omega)$
 - $(j\omega)$ ist j Multipliziert mit der Frequenz an welcher der Messpunkt aufgenommen wurde
 - Gl.8: $\tilde{\Phi}$ und \tilde{y} aus dem Real- und Imaginäranteil bilden (Zeilenzahl verdoppelt sich)
 - Gl.10: LS-verfahren so, dass alle Werte am besten gefittet werden.

$$G(s) = \frac{k\omega^2}{s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2} \quad (4)$$

$$G(s)s^2 = k\omega^2 - 2G(s)\xi\omega s - G(s)\omega^2 \quad (5)$$

$$G(j\omega)(j\omega)^2 = k\omega^2 - 2G(j\omega)\xi\omega(j\omega) - G(j\omega)\omega^2 \quad (6)$$

$$\underbrace{[G(j\omega)(j\omega)^2]}_y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2G(j\omega)\xi\omega & -G(j\omega) \end{bmatrix}}_{\tilde{\Phi}} \underbrace{\begin{bmatrix} k\omega^2 \\ \xi\omega \\ \omega^2 \end{bmatrix}}_{\tilde{\theta}} \quad (7)$$

$$\tilde{y} = \begin{bmatrix} \text{Re}(y) \\ \text{Im}(y) \end{bmatrix} \quad \tilde{\Phi} = \begin{bmatrix} \text{Re}(\tilde{\Phi}) \\ \text{Im}(\tilde{\Phi}) \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\tilde{y} = \tilde{\Phi}\theta + \varepsilon \quad (9)$$

$$\theta = \left(\tilde{\Phi}^T \tilde{\Phi} \right)^{-1} \tilde{\Phi}^T \tilde{y} \quad (10)$$

4.4.3 Gewichtetes LS-Verfahren

- Gleichungen haben unterschiedliche Gewichtung (z.B. Arbeitspunkt höher gewichten)
 - Gewichtung mit Faktor λ
 - Da Gewichtungsmatrix immer als $L^T L$ erscheint, muss für Faktor λ stattdessen $\sqrt{\lambda}$ genommen werden
- Angewendet auf obige Gleichung ergibt die Auflösung nach θ :

$$L = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix}$$

$$\theta = \left(\Phi^T L^T L \Phi \right)^{-1} \Phi^T L^T L y$$

4.4.4 Markov-Annahme unter Verwendung der Co-varianz-Matrix

- ε ist in Gaussverteilung und der Erwartungswert liegt bei 0
- Dann ist die Co-Varianzmatrix: $V = \varepsilon \varepsilon^T$
- ε ist Abweichung zwischen mit dem LS-Verfahren erhaltenem Modell und dem effektiven Messwert
- Dann kann für die Gewichtungsfunktion $L^T L = V^{-1}$ genommen werden.

4.5 LS-Verfahren für dynamische Systeme

- Ziel: Ein System welches in Bewegung ist durch zwei Polynome abzubilden
- ε soll möglichst 0 werden
- Zwei verschiedene Darstellungsmöglichkeiten für die Modelle (Ausgangsfehlermodell: 3a, ARX-Modell: 3b)

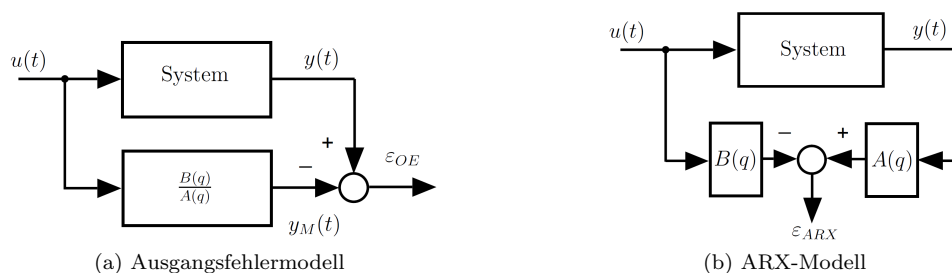


Abbildung 3: Zwei Darstellungsmöglichkeiten für Modelle welche ein LS-Verfahren für dynamische Systeme ermöglichen
 Quelle: Kottmann, Markus (2012): Advanced Control. Introduction to System Identification. Version 1.3. 26

- Mit der ARX-Struktur kann $y(t)$ angesehen werden als:
 - $y(t)$ ist hierbei eine Messung zum Zeitpunkt k und setzt sich aus den vorherigen diskreten Messungen und Eingangssignalen zusammen

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - \dots - a_n y(k-n) + b_1 u(k-1) + \dots + b_m u(k-m) + \varepsilon(k)$$

$$= \begin{pmatrix} -y(k-1) & \dots & -y(k-n) & u(k-1) & \dots & u(k-m) \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{\theta} + \varepsilon(k)$$

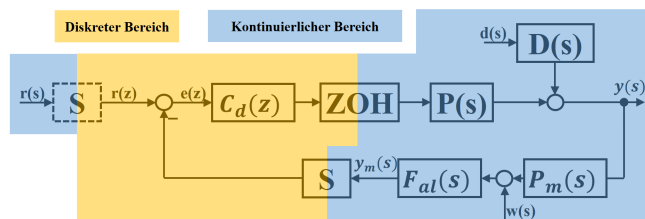
- Wenn nun N Messungen gemacht werden (somit sind es $0 \dots N$ Messungen)
- Φ sind dabei die am Eingang ($u(k)$) und am Ausgang ($y(k)$) gemessenen Signale
- Es muss solange gemessen werden, bis $\text{rank}(\Phi) \leq n + m$ (n = Anz. Ausgangssignale, m = Anz. Eingangssignale)
- Rekursives LS-Verfahren, siehe Skript s.29

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y(0) \\ \vdots \\ y(N) \end{pmatrix}}_y = \underbrace{\begin{pmatrix} -y(-1) & \dots & -y(-n) & u(-1) & \dots & u(-m) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -y(N-1) & \dots & -y(N-n) & u(N-1) & \dots & u(N-m) \end{pmatrix}}_{\Phi = \text{Messwerte von Ein- und Ausgng}} \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{\theta} + \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon(0) \\ \vdots \\ \varepsilon(N) \end{pmatrix}}_{\varepsilon}$$

$$\theta = \left(\Phi^T \Phi \right)^{-1} \Phi^T y$$

5 Diskretisierung und Implementierung

5.1 Basics



S	= Samplingmodul (ADC)
ZOH	= Zero Order Hold (DAC)
P(s)	= Regelstrecke
C _d	= diskreter Regler
F _{al}	= anti aliasing Filter
P _m	= Sensorübertragungsfunktion
w	= Noise Signal zum Sensor
P _m + w	= Sensor Modell
d	= Noise von der Regelstrecke
D	= Shaping Filter

- Hier ist nicht mehr linke Halbebene ausschlaggebend über Stabilität, sondern ob alle Pol- und Nullstellen innerhalb des Einheitskreises liegen

5.2 Diskretisierung von Reglern

- In Zeitdomain $\dot{y}(t)$ wird in Laplace-Raum zu $sy(s)$ in diskretisierten Raum entspricht dies $y(t) \sim \frac{y(kt) - y(kt+T)}{T}$
- Die Bildung der Differenzengleichung erfolgt mit $C(z) = \frac{y(z)}{e(z)}$

5.2.1 Diskretisierungsmethoden

- Entsprechend in der Übertragungsfunktion alle s mit dem entsprechenden Term der Transformation ersetzen. Dabei ist T die Abtastzeit
- Die Bilineare Transformation bildet die linke Halbebene in den Einheitskreis ab. (siehe Abbildung 4)
 - Somit ist garantiert, dass stabile Regler auch im diskreten stabil bleiben.
- Pole-Zero-Matching: Wenn der Regler unendlich Nullstellen hat, können diskrete Pole bei -1 angenommen werden

Vorwärtseuler	$s = \frac{z-1}{T}$
Rückwärtseuler	$s = \frac{z-1}{Tz}$
Tustin / Bilinear	$s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$
Zero-Order-Hold	$G(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} \right\}$
Pole and zero Matching	$z = e^{s \cdot T}$

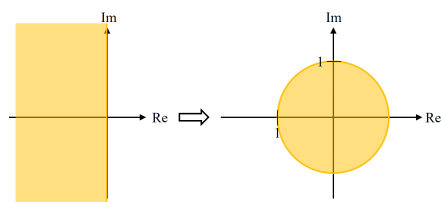


Abbildung 4: Tustin-Verfahren führt linke Halbebene in Einheitskreis über

5.2.2 Wahl der Sampling Time

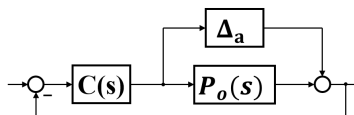
- Gründe für Maximierung der sampling Time
 - Pole entfernen sich von 1, somit wird controllaw numerisch stabiler. (weniger anfällig für Quantisierungsfehler)
 - Hardware muss weniger leistungsfähig sein \Rightarrow günstiger
 - Differenzierende Regler funktionieren besser (Glättung des Signals, da Ableitung über längere Zeitperiode)
- Gründe für Minimierung der sampling Time
 - Wenn A/D und D/A wandler synchronisiert sind, führt dies zu einer kleineren Totzeit
 - Bei Verwendung eines Anti-Aliasing-Filters (für verrauschte Signale) ist der Phasenverlust kleiner
 - Je kleiner die Sampling Time, desto weniger Phasenverlust durch das ZOH-Glied
- Maximale Frequenz: Signal darf keine Frequenzen enthalten die grösser sind als halbe Abtastfrequenz
 - $f_{\max} \leq \frac{1}{2} \cdot f_{\text{Abtast}}$
 - Kann hergeleitet werden mit Shannon-Nyquist
- Das Shannon-Sampling Theorem besagt: Sampling Frequenz (in rad) soll grösser sein als $20\omega_d$ des offenen Regelkreises (ω_d = Durchtrittsfrequenz)

5.3 Windup und weitere Gefahren

- Regler summiert Fehler zu schnell auf (da Regelstrecke langsam und Abtastzeit hoch ist)
- Wenn zwei Pole bei einem digitalen Regler zu nahe zusammen liegen, muss mit Quantisierungsproblemen gerechnet werden.

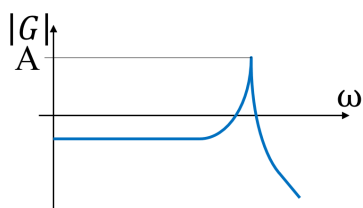
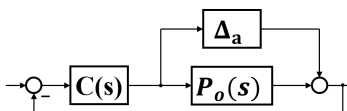
6 H_∞-Regler

- Wenn die Regelstrecke nicht exakt bekannt ist, oder sich mit der Zeit verändern kann
- Kompensieren einer Abweichung zum theoretisch entworfenem Regler
 - Dabei stellt Δ die Abweichung zur theoretisch ermittelten Strecke dar.
 - Eine andere Bezeichnung für Δ ist Modellunsicherheit
- P_0 bezeichnet die nominale Regelstrecke

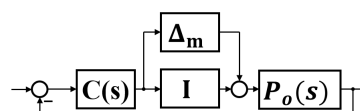


6.1 Basics

- Die H_∞-Norm ist der höchste Punkt im Bode-Diagramm der zu untersuchenden Funktion
- H_∞-Norm = $\|P(s)\|_{\infty}$
 - In untenstehender Abbildung ist ein Beispiel gezeigt. Die H_∞-Norm ist für diese Funktion A
- Die Robuste Regelung funktioniert bei den klassischen Stabilitätsbeobachtung (Phasen- und Amplitudenreserve)
 - Es gibt keine analytische Optimierungsmethode
 - Auch bei scheinbarer Stabilität (durch übliche Kriterien) ist diese keine Garantie für Stabilität des Regelkreise.

(a) $A = \|H\|_{\infty}$ von $G(s)$ 

(b) Additive Modellunsicherheit



(c) Multiplikative Modellunsicherheit

6.2 Stabilitätsanalyse → Small-Gain-Theorem

6.2.1 Additive Modellunsicherheit

- Modell kann umgezeichnet werden wie in unterstehender Abbildung 5a gezeigt
- In Gleichung 11 ist die Formel für die additive Unsicherheit gezeigt
- In Gleichung 12 ist das Kriterium für die Stabilität bei additiver Modellunsicherheit gezeigt
- Additive Unsicherheiten können im Nyquist-Diagramm visualisiert werden (siehe Abbildung 9, Skript s.16)

$$\Delta_a(s) = P(s) - P_0(s) \quad (11)$$

$$\|\Delta_a\|_{\infty} < \frac{1}{\left\| \frac{C}{1+P_0C} \right\|_{\infty}} \quad \Delta_a(s) = P(s) - P_0(s) \quad (12)$$

6.2.2 Multiplikative Modellunsicherheit

- Modell kann umgezeichnet werden wie in unterstehender Abbildung 5b gezeigt
- In Gleichung 13 ist die Formel für die Multiplikative Unsicherheit gezeigt
- In Gleichung 14 ist das Kriterium für die Stabilität bei multiplikativer Modellunsicherheit gezeigt
- Multiplikative Unsicherheiten können gut in einem Bode-Diagramm dargestellt werden (siehe Abbildung 9, Skript s.16)

$$\Delta_m(s) = \frac{P(s)}{P_0(s)} - 1 \quad (13)$$

$$\|\Delta_m\|_{\infty} < \frac{1}{\left\| \frac{P_0C}{1+P_0C} \right\|_{\infty}} \quad (14)$$

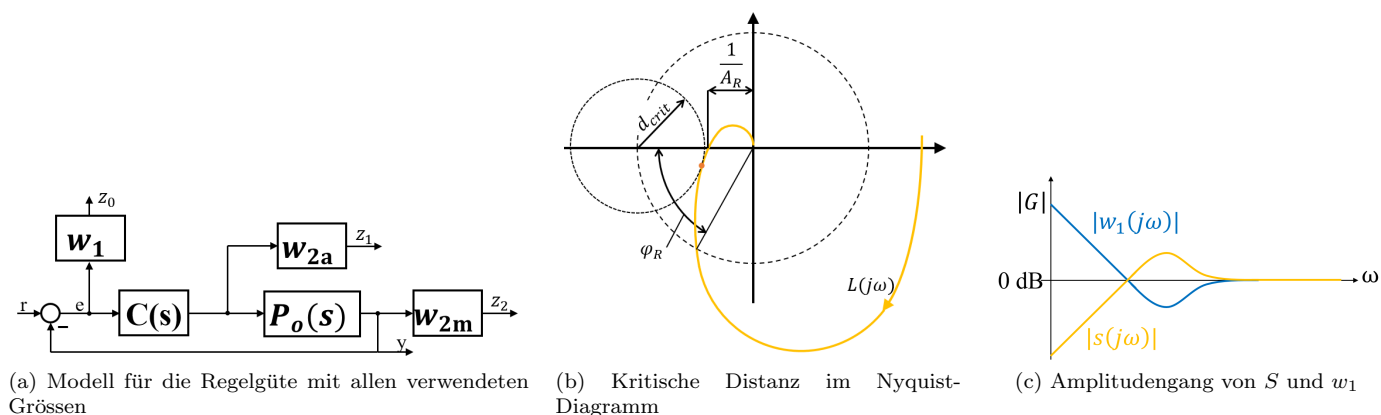
Abbildung 5: H_∞-Regelkreise in anderer Darstellung

Abbildung 6: Verschiedene Bilder zu Regelgüte und Sensitivitätsfunktion

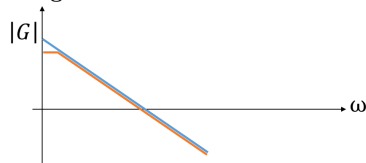
6.3 Regelgüte

- Die Funktionen w_1 , w_{2a} und w_{2m} dürfen nicht mit einem Integrator oder Differentiator beginnen!
- Damit dies verhindert wird, werden die Terme $\frac{1}{s}$ resp. s ersetzt durch einen Sehr schnellen Tief-, resp. Hochpass, siehe nachfolgendes Beispiel.
- Damit werden Probleme in Berechnung bei $s = 0$ verhindert und korrigierte Funktion befriedigt Kriterien für Stabilität
- Für die Regelgüte müssen die Gleichungen 15 und 16 erfüllt sein

$$\left\| w_{2a} \frac{C}{1 + PC} \right\|_{\infty} < 1 \quad (15)$$

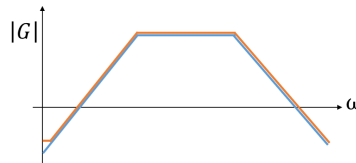
$$\left\| w_{2m} \frac{PC}{1 + PC} \right\|_{\infty} < 1 \quad (16)$$

Integrator bei $\omega = 0$



$$w_1(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow w_1(s) = \frac{1}{s + 10^{-5}}$$

Differentiator bei $\omega = 0$



$$w_{2a} = \frac{7.5s}{(s+1)(s+15)} \Rightarrow w_{2a} = \frac{0.0075s(s+1000)}{(s+1)(s+15)}$$

6.3.1 Sensitivitätsfunktion

- S = Sensitivität entspricht dem Übergang von r auf e oder von d auf y
- Die kritische Distanz maximieren geht einher mit dem Minimieren der $\|S\|_{\infty}$
- Erinnerung: $L(s) = P(s) \cdot C(s)$ und wird im open-Loop eingetragen
- Robuste Regler zielen darauf ab die kritische Distanz zu maximieren (also $\|S\|_{\infty}$ zu minimieren)
- Die Funktion w_1 ist eine Gewichtungsfunktion (siehe Abbildung 6a).
 - Bei einer Resonanz von S bei w_1 eine Zusätzliche Polstelle bei der ca. doppelten Resonanzfrequenz einführen
- Die Bode Integralrelation besagt, dass für die Sensitivitätsfunktion die Fläche unterhalb der 0 dB-Linie gleich sein muss wie die Fläche oberhalb der 0 dB-Linie.

Achtung: Das Flächenverhältnis muss identisch sein, wenn ω nicht logarithmisch dargestellt wird!

- Gezeigt in Abbildung 7
- Je höher (und dadurch kürzer) die orange Fläche ist, desto schneller wird der Regler. Diese Geschwindigkeit geht auf Kosten der Stabilität.

$$d_{\text{crit}} = \frac{1}{\|S\|_{\infty}} \quad \text{und} \quad S(j\omega) = \frac{1}{1 + L(j\omega)} = \frac{1}{1 + P(j\omega) \cdot C(j\omega)}$$

$$T(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

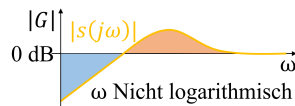


Abbildung 7: Trade-Off zwischen Stabilität und Geschwindigkeit

6.3.2 Gemischter Sensitivitätsanspruch

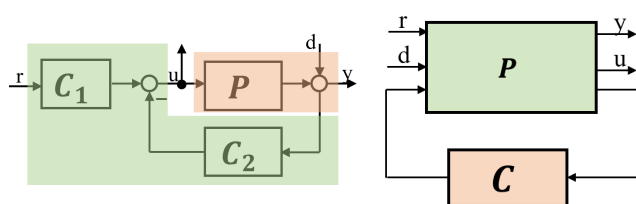
- Funktion soll sowohl Sensitivität des Fehlers, wie auch die additive, oder multiplikative Unsicherheit berücksichtigen
- Die Matrix entspricht der Übertragung von r nach z
- Für Additive Modellunsicherheit Formel 17
- Für Multiplikative Modellunsicherheit Formel 18

$$\left\| \begin{bmatrix} w_1 \frac{1}{1+PC} \\ w_{2a} \frac{1}{1+PC} \end{bmatrix} \right\|_{\infty} < 1 \quad \text{Übertragungsfunktion von } r \text{ nach } \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\left\| \begin{bmatrix} w_1 \frac{1}{1+PC} \\ w_{2m} \frac{1}{1+PC} \end{bmatrix} \right\|_{\infty} < 1 \quad \text{Übertragungsfunktion von } r \text{ nach } \begin{bmatrix} z_0 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (18)$$

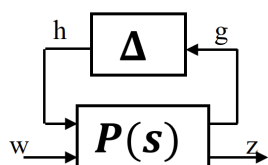
6.4 Linear Fractional Transformation (LFT)

- Die LFT von P und Δ wird geschrieben als $\mathcal{F}(P, \Delta)$
- Für ein SISO-System ist es eine bilineare Transformation
- Eingänge von Ausserhalb nur in P einführen, falls nötig hindurch passieren mit einer Einheitsmatrix
- Entgegen der Abbildung können auch mehrere Eingänge hinein kommen
- Beim Umschreiben eines Systems zum LFT alle P_i und alle C_i zusammenfassen
- Vorgehen zum erstellen der Matrix P
 - Achtung: Dieses Vorgehen ist nur sinngemäss beschrieben, aus Zeitgründen und fehlendem Verständnis, wird diese Zusammenfassung hier gewisse Fehler aufweisen.
 - 1. In System in klassischer Schreibweise: Boxen um die zusammenzufassenden Blöcke zeichnen (Systemgrenzen bestimmen)
 - 2. Ein- und Ausgänge definieren
 - 3. Alles was in das System von Aussen kommt muss über Block P eingespiessen werden
 - 4. $\hat{x} = Px$ wobei \hat{x} dem nächsten Schritt entspricht (analog dem Aufbau der Matrix A)
- Beispiel siehe Beispiel unten (entsprechend der Aufgabe 1 von „Robust Control“)



$$C : u = \begin{bmatrix} C_1 & -C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I & P \\ 0 & 0 & I \\ I & 0 & 0 \\ 0 & I & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ d \\ u \end{bmatrix}$$



Additive Modellunsicherheit

$$P = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & P_0 \end{bmatrix}$$

Multiplikative Modellunsicherheit

$$P = \begin{bmatrix} 0 & P_0 \\ I & P_0 \end{bmatrix}$$

7 Nicht Lineare Systeme

7.1 Basics

- Superpositionsprinzip gilt nicht
- Stabilität ist lokale Eigenschaft
- Finite Escape time (Wert in endlicher Zeit bei ∞)
- Viele Beharrungszustände
- Chaotische Systeme existieren

7.2 Bestimmung der Stabilität

7.2.1 Layapunov 1. Methode

- System um Beharrungszustand linearisieren
 - Stabilität im linearisierten System \Rightarrow Stabilität um Beharrungszustand
- Sind die Realanteile der Eigenwerte < 0 ist das System an dem Punkt stabil um den Beharrungszustand
- Sind die Realanteile der Eigenwerte > 0 ist das System an dem Punkt instabil um den Beharrungszustand
- Siehe für Beispiel Gleichung 19 (ist Aufgabe 1 aus „Nicht lineare Systeme I“)
- Linearisieren an einem Punkt, entspricht der Jacobi-Matrix mit den Werten dieses Punktes Eingesetzt \rightarrow Matrix A

$$\dot{\underline{x}} = f(\underline{x}) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{r}{m}x_2 - \frac{g}{l}x \sin(x_1) \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (20)$$

7.2.2 Layapunov 2. Methode

- Layapunov-Funktion $V(x)$, damit diese zulässig ist, müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:
 - $V(\underline{0}) = 0$
 - $V(\underline{x}) > 0$
- Reminder: \underline{x} sind Funktionen \rightarrow Ableitung von $V(x)$ mit Kettenregel
 - z.B. $V(\underline{x}) = x_1^2 + x_2^2 \Rightarrow \dot{V}(x) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2$
- Ein System ist um einen Bereich (um \underline{x}) lokal stabil, wenn $\dot{V}(\underline{x}) < 0$ erfüllt ist

7.2.3 Layapunov in Linearen Systemen

- In Linearen System können folgende Abgewandelte Bedingungen angewendet werden, wenn folgendes erfüllt ist:
 - $P > 0 \rightarrow$ Positiv definite Matrix (alle Eigenwerte von $P > 0$)
- Gleichung 23 ist die Layapunov-Gleichung

$$V(x) = x^T P x \quad (21)$$

$$\dot{V}(x) = x^T A^T P x + x^T P A x < 0 \quad (22)$$

$$A^T + P A = -Q \quad (23)$$

$$Q = B^T B \quad \text{Mass für Beobachtbarkeit} \quad (24)$$

$$Q = C C^T \quad \text{Mass für Steuerbarkeit} \quad (25)$$

7.3 Popov-Kreiskriterium

- Miteinkalkulieren einer gewissen Nichtlinearität der Regelstrecke
 - Begrenzt durch zwei Lineare Funktionen
- Nichtlinearität darf keine Sprünge enthalten
- Nichtlinearität innerhalb eines Bereiches eingrenzen
 - Dieser Bereich wird mit zwei Steigungen beschrieben, a und b
- Das Popovkriterium ist eine Erweiterung des Nyquist-Kriterium
 - In diesem Fall ist es ein Kreis, definiert durch die Steigungen der begrenzenden Funktionen
 - Siehe für den Zusammenhang Abbildung ?? und ??
 - Pro instabilem Pol muss die Frequenzlinie den Kreis einmal im Gegenuhrzeigersinn umkreisen, ohne die Fläche zu berühren.
- Die wichtigsten Sonderfälle sind in Abbildung ?? gezeigt.

7.4 Beschreibungsfunktionsmethode

- Beschreibungsfunktion wird mit $N(A)$ bezeichnet, siehe Anhang 11
- Ziel: Die Beschreibungsfunktion beschreibt die Nichtlinearität des Systems
 - Siehe Anhang für die wichtigsten Beschreibungsfunktionen
- Totband:
 - Erst wenn ein gewisser Fehler (e) überschritten ist, passiert dieser das Totbandglied
 - Der Ausgang nach dem Totband ist jeweils um $1/2$ des Fehlers versetzt
 - Gezeigt in Abbildung ??
- Relais
 - Schaltet jeweils bei 0-Durchgang des Eingangs
 - Amplitude am Ausgang springt bei Nulldurchgang, auf die jeweilige Seite

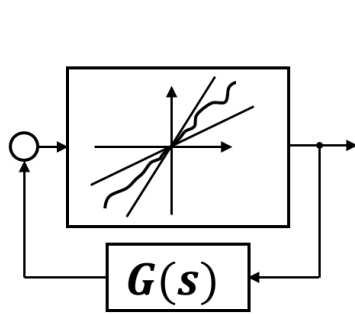


Abbildung 8: Ersatzschaltbild von Popov

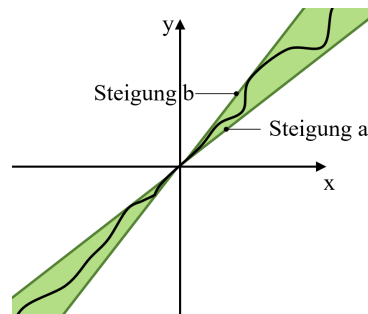


Abbildung 9: Begrenzende Funktionen umgeben die Nichtlinearität

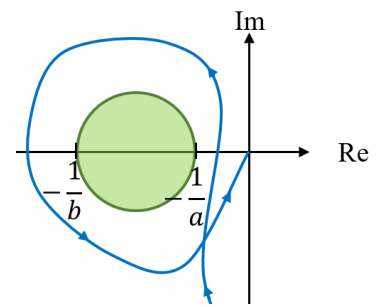


Abbildung 10: Zusammenhang zwischen begrenzenden Funktionen und Nyquist diagramm

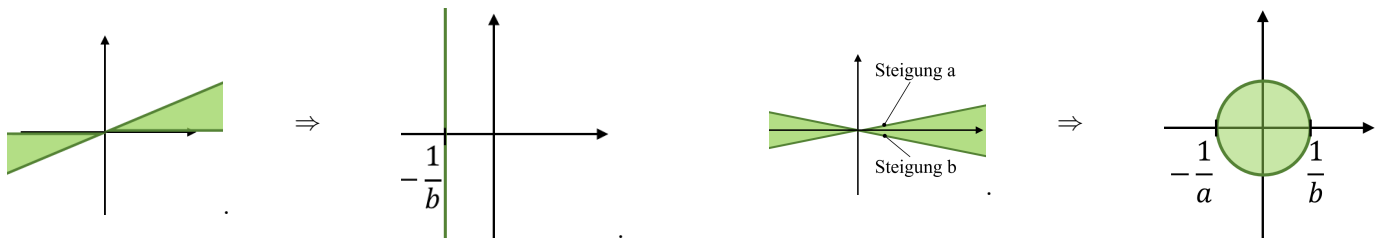


Abbildung 11: Sonderfälle bei der Anwendung des Popov-Stabilitätskriterium

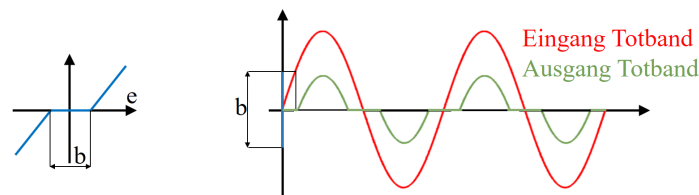
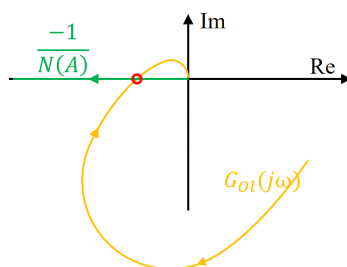


Abbildung 12: Symbol des Totbandes und dessen Ein- und Ausgangssignal

7.4.1 Grenzyklus

- Regelkreis mit Maximaler Verstärkung
- Phase ist -180°
- Der Grenzyklus ist der Schnittpunkt gemäss Abbildung 13, gemäss Formel 26
- Ein Grenzyklus existiert, wenn
 - die Linie der Beschreibungsfunktion im Nyquist-Diagramm schneidet die Frequenzlinie (des Open-Loops) von rechts nach links
 - Dabei ist die Betrachtung aus sicht der zunehmenden Frequenz
 - Siehe Beispiel in Abbildung 13
- Es ist das A gesucht, dies entspricht der Amplitude des Eingangssignal
 - In diesem Fall $N(A)$ bestimmen mit Schnittpunkt und das A ausrechnen
- Oder die Grenzfrequenz ist gesucht
 - Bestimmen durch Schnittpunkt gemäss Formel 26
- Oder die Zulässige Verstärkung des Regelkreises $|G(j\omega)|$
 - Formel 26 auflösen nach $G(j\omega)$



$$\frac{-1}{N(A)} = G_{OI}(j\omega) \quad (26)$$

Abbildung 13: Schnittpunkt ist bei der Grenzfrequenz, Beispiel für ein Relais

8 Verschiedene Transformationen

8.1 Berechnung

Transformation	Vorwärts	Rückwärts
Fourier-Reihe	$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jk\omega_1 t} dt$	$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_1 t}$
Fourier-Integral	$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$	$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$
Laplace-Transformation	$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$	Polynomdivision \Rightarrow Partialbruchzerlegung \Rightarrow Tabelle!
Diskrete Fouriertransformation	$F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-j2\pi \frac{n}{N} k}$	$f^*(k) = \frac{1}{N} DFT(F^*(k))$
Z-Transformation ($z = e^{jsT}$)	$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^{-n}$	Polynomdivision \Rightarrow Partialbruchzerlegung \Rightarrow Tabelle!

8.2 Pol/Nullstellentransfo

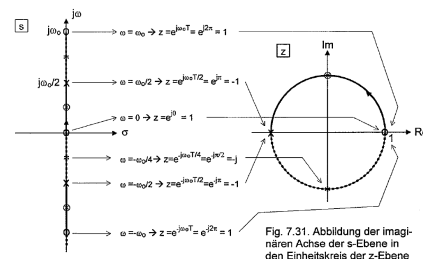


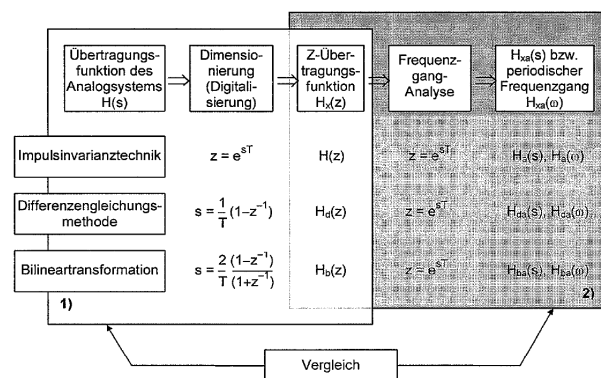
Fig. 7.31: Abbildung der imaginären Achse der s-Ebene in den Einheitskreis der z-Ebene

9 Eigenschaften von Fourier- und Z-Transformation

Bezeichnung	Zeitbereich		Kontinuierlicher Frequenzbereich		Diskreter Frequenzbereich	
	kontinuierlich	diskret	Fourier-Integral	Laplace	Diskrete FT	Z-Transformation
Linearität	$\alpha \cdot f(t) + \beta \cdot g(t)$	$\alpha \cdot f(n) + \beta \cdot g(n)$	$\alpha \cdot F(\omega) + \beta \cdot G(\omega)$	$\alpha \cdot F(s) + \beta \cdot G(s)$	$\alpha \cdot F(n) + \beta \cdot G(n)$	$\alpha \cdot F(z) + \beta \cdot G(z)$
Ähnlichkeit / Zeitskalierung bzw. Spiegelung an Y-Achse	$f(\alpha t)$	$f(-n)$	$\frac{1}{ \alpha } F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$	$\frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right)$	$F(-n)$	$F(z^{-1})$
Dämpfung	-	$e^{dn} f(n)$	-	-	-	$F(ze^d)$
Verschiebung im Zeitbereich	$f(t \pm t_0)$	$f(n \pm n_0)$	$e^{\pm j\omega t_0} F(\omega)$	$F(s) e^{\pm t_0 s}$	$e^{\pm j \frac{2\pi}{N} n_0} F(n)$	$z^{\pm n_0} F(z)$
Verschiebung im Frequenzbereich	$f(t) e^{\mp j\alpha t}$	$f(n) e^{\mp j \frac{2\pi}{N} n_0}$	$F(\omega \pm \alpha)$	$F(s \pm \alpha)$	$F(n \pm n_0)$	$F(z \pm n_0)$
Faltung im Zeitbereich	$f(t) * g(t)$	$f(n) * g(n)$	$F(\omega) \cdot G(\omega)$	$F(s) \cdot G(s)$	$F(n) \cdot G(n)$	$F(z) \cdot G(z)$
Faltung im Frequenzbereich	$f(t) \cdot g(t)$	$f(n) \cdot g(n)$	$\frac{1}{2\pi} F(\omega) * G(\omega)$	$\frac{1}{s} F(s) * G(s)$	$\frac{1}{N} F(n) * G(n)$	$\frac{1}{N} F(z) * G(z)$
Ableitungen im Zeitbereich bzw. Differenzenbildung	$\frac{\partial^n f(t)}{\partial t^n}$	$\Delta^k f(n)$	$(j\omega)^n F(\omega)$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0+) - s^{n-2} \frac{\partial f(0+)}{\partial t} - \dots - s^0 \frac{\partial^{n-1} f(0+)}{\partial t^{n-1}}$		$(1 - z^{-1})^k F(z)$
Ableitung im Frequenzbereich	$(-t)^k \cdot f(t)$	$n f(n)$	$j^k \frac{\partial^k F(\omega)}{\partial \omega^k}$	$\frac{\partial^k F(s)}{\partial s^k}$		$-z \frac{\partial F(z)}{\partial z}$
Integration bzw. Summierung	$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$	$\sum_{n=0}^k f(n)$	$\frac{F(\omega)}{j\omega} + F(0)\pi\delta(\omega)$	$\frac{F(s)}{s}$		$\frac{1}{1-z^{-1}} F(z)$
Anfangswert	$\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$	$f(0)$		$\lim_{s \rightarrow \infty} s F(s)$		$\lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$
Endwert	$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$	$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$		$\lim_{s \rightarrow 0} s F(s)$		$\lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) F(z)$
Stabilität	-	-	-	Pole in LHE		Pole innerhalb Einheitskreis
Kausalität	-	-	A- & Kausal	Nur Kausal		$\lim_{z \rightarrow \infty} z^{-1} F(z) = 0$
Spezial	Bessel-Theorem $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) g^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) G^*(\omega) d\omega$			Parseval-Theorem $W = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) ^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) ^2 d\omega$		

Kleines Z-Lexikon

f(t), t ≥ 0	F(s)	f(n), n ≥ 0	F(z)
δ(t)	1	δ(n) = 1, 0, 0, 0, ...	1
δ(t - t ₀), t ₀ > 0	e ^{-st₀}	δ(n - m), m > 0	z ^{-m}
1 [ε(t)]	1/s	1 [ε(n)]	1/(1 - z ⁻¹)
t	1/s ²	nT	T z / (1 - z ⁻¹) ²
e ^{-at}	1/(s + a)	e ^{-anT}	1/(1 - e ^{-aT} z ⁻¹)
$\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b - a}$	1/((s+a)(s+b))	$\frac{e^{-anT} - e^{-bnT}}{b - a}$	$\frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-bT} z^{-1}} \right)$
$\frac{1 - e^{-at}}{a}$	1/(s(s+a))	$\frac{1 - e^{-anT}}{a}$	$\frac{(1 - e^{-aT}) z^{-1}}{a(1 - z^{-1})(1 - e^{-aT} z^{-1})}$
t e ^{-at}	1/(s+a) ²	nT e ^{-anT}	$\frac{T e^{-aT} z^{-1}}{(1 - e^{-aT} z^{-1})^2}$
cos bt	s/(s ² +b ²)	cos bnT	$\frac{1 - (\cos bT) z^{-1}}{1 - 2(\cos bT) z^{-1} + z^{-2}}$
sin bt	b/(s ² +b ²)	sin bnT	$\frac{(\sin bT) z^{-1}}{1 - 2(\cos bT) z^{-1} + z^{-2}}$
1 - cos bt	b ² /s(s ² +b ²)	1 - cos bnT	$\frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1 - (\cos bT) z^{-1}}{1 - 2(\cos bT) z^{-1} + z^{-2}}$
e ^{-at} cos bt	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + b^2}$	e ^{-anT} cos bnT	$\frac{1 - e^{-aT}(\cos bT) z^{-1}}{1 - 2 e^{-aT}(\cos bT) z^{-1} + e^{-2aT} z^{-2}}$
e ^{-at} sin bt	$\frac{b}{(s+a)^2 + b^2}$	e ^{-anT} sin bnT	$\frac{e^{-aT}(\sin bT) z^{-1}}{1 - 2 e^{-aT}(\cos bT) z^{-1} + e^{-2aT} z^{-2}}$
e ^{-at} [cos bt - (a/b) sin bt]	s/(s+a) ² + b ²	e ^{-anT} [cos bnT - (a/b) sin bnT]	$\frac{1 - e^{-aT}[\cos bT + (a/b) \sin bT] z^{-1}}{1 - 2 e^{-aT}(\cos bT) z^{-1} + e^{-2aT} z^{-2}}$



10 Matrizenrechnung

10.1 Determinante

3x3 Matrix

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Dreiecksmatrix - Alle Elemente entweder ober- oder unterhalb der Hauptdiagonale = 0

$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$ Die Det. ist das Produkt der Hauptdiagonal-Einträge. Gilt somit auch für Diagonalmatrizen.

Null ($|A| = 0$) - Wenn A eine (n,n)-Matrix ist, so wird $|A| = 0$ unter einer der folgenden Bedingungen:

- Zwei Zeilen/Spalten sind linear abhängig (gleich oder ein Vielfaches der anderen).
- Alle Elemente einer Zeile/Spalte sind Null.

Allgemein:

$$A \in M_n : \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & \dots & \\ \dots & & \dots & \\ a_{n1} & & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} D_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} D_{12} + \dots + (-1)^{1+n} a_{1n} D_{1n}$$

10.1.1 Unterdeterminante

$$D_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad D_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

D_{ij} die (n-1)×(n-1)-Untermatrix von D ist, die durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht.

Diese Methode ist zu empfehlen, wenn die Matrix in einer Zeile oder Spalte bis auf eine Stelle nur Nullen aufweist. Dies lässt sich meist mit dem Gausverfahren bewerkstelligen.

10.2 Gaussverfahren

Durch Addition und Subtraktion einzelner Zeilen (auch von Vielfachen einer Zeile) werden einzelne Stellen auf Null gebracht. zB:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & \dots & \\ \dots & & \dots & \\ a_{n1} & & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ ka_{21} - na_{11} & ka_{22} - na_{12} & \dots & ka_{2n} - na_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Die n * erste Zeile wurde von der k * zweiten Zeile abgezogen ($a_{2.} = ka_{2.} - na_{1.}$)

10.3 Inverse Matrix (Existiert nur wenn Matrix regulär: $\det A \neq 0$)

2x2 Matrix:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

3x3 Matrix:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} ei-fh & ch-bi & bf-ce \\ fg-di & ai-cg & cd-af \\ dh-eg & bg-ah & ae-bd \end{bmatrix}$$

Diagonalmatrix (Alle Elemente ausserhalb der Hauptdiagonale = 0, Elemente auf Hauptdiagonale sind Eigenwerte λ_i):

Alle Elemente elementweise invertieren - Kehrwert. \Rightarrow Gilt nur wenn alle Elemente auf der Hauptdiagonale $\neq 0$ sind.

Allgemein:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & \dots & \\ \dots & & \dots & \\ a_{n1} & & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}^{-1}$$

$$1. A^T \text{ bestimmen (Zeilen und Spalten vertauschen)} \quad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & & \dots & \\ \dots & & \dots & \\ a_{1n} & & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$2. \text{ Bei } A^T \text{ jedes Element } a_{ij} \text{ durch Unterdet. } D_{ij} \text{ mit richtigem Vorzeichen ersetzen } A^* = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} D_{11} & \dots & (-1)^{1+n} D_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ (-1)^{n+1} D_{n1} & \dots & (-1)^{n+n} D_{nn} \end{bmatrix}$$

$$3. A^{-1} = \frac{A^*}{\det A}$$

10.4 Diagonalisierung

1. Eigenwerte λ ausrechnen: $\det(A - I_n \lambda) = 0$

2. Eigenvektoren \vec{v} bilden: $(A - \lambda I_n) \vec{v} = 0$

3. Transformationsmatrix: $T = [\vec{v}_1 \dots \vec{v}_n]$

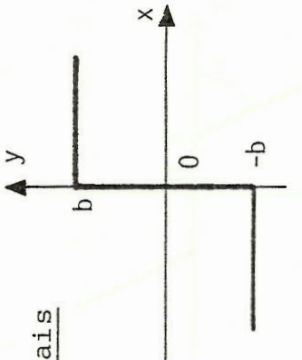
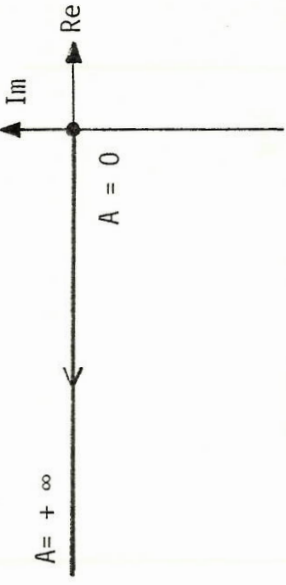
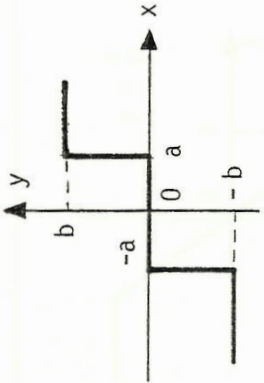
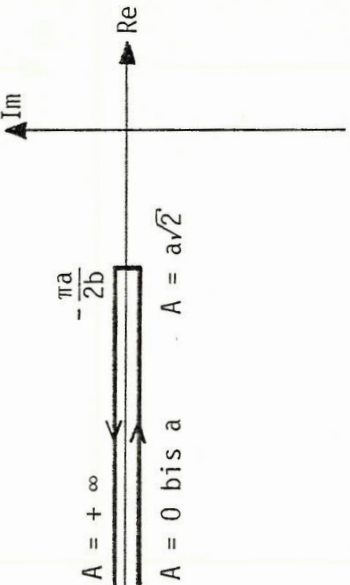
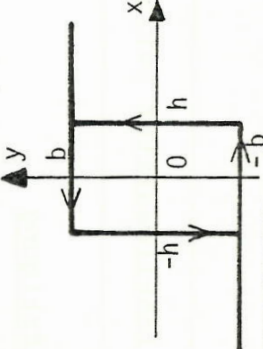
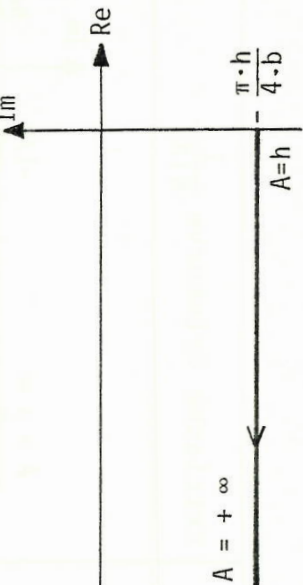
4. T^{-1} berechnen (Achtung ist A symmetrisch, dh. $A^T = A$ und oder alle EV senkrecht zueinander, dann $T^{-1} = T^T$)

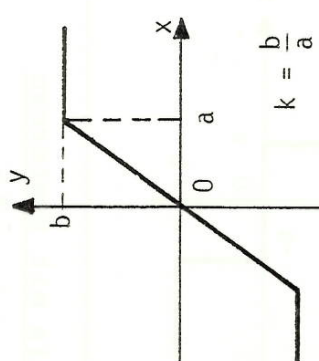
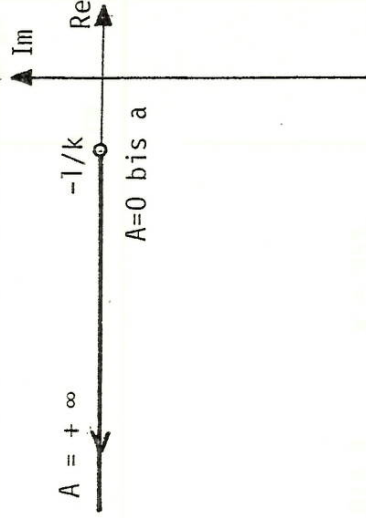
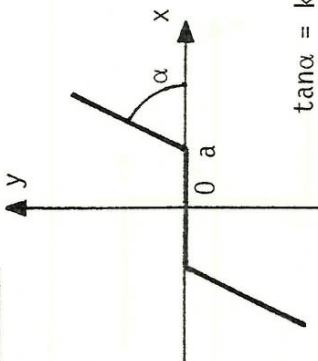
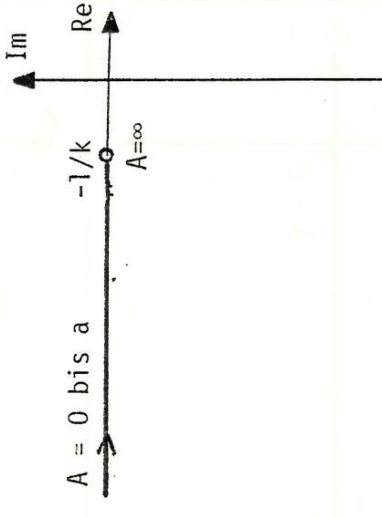
$$5. D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

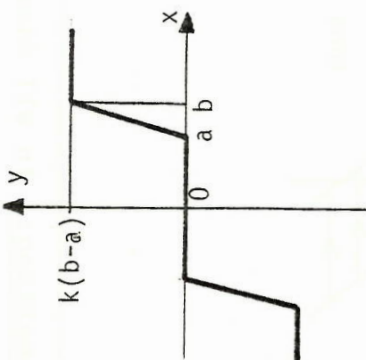
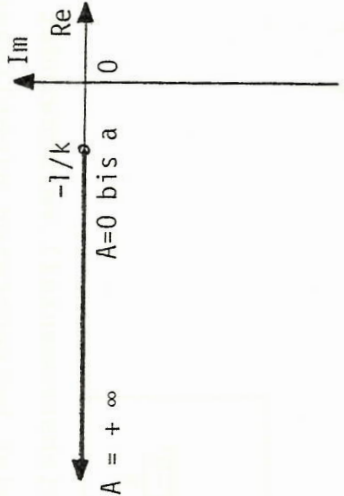
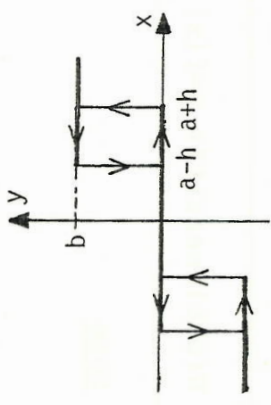
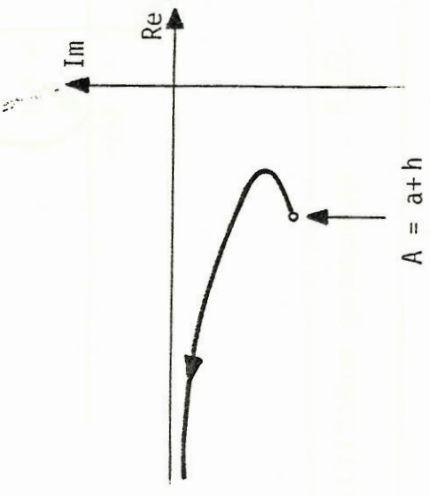
$$6. A^n = T D^n T^{-1}$$

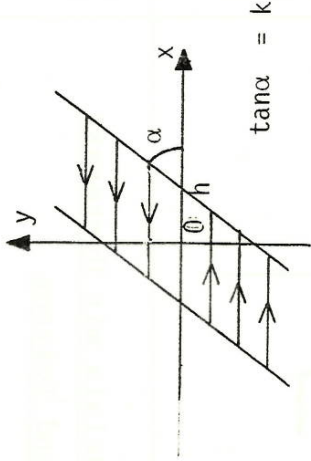
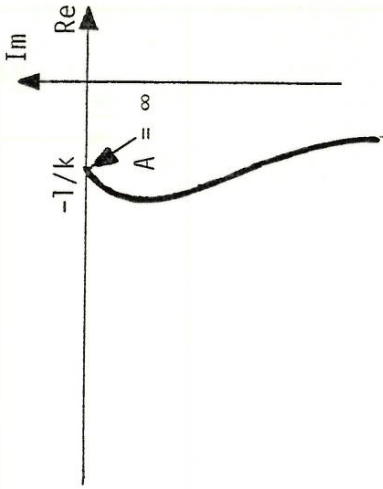
11 Anhang: Beschreibungsfunktionen

II.35

Nichtlinearität $y=f(x)$	Beschreibungsfunktion $N(A)$	Kritische Ortskurve $-\frac{1}{N(A)}$
<u>Relais</u> 	$ N(A) = \frac{4b}{\pi A}$ $\angle N(A) = 0 \quad (N(A) \text{ reell})$	
<u>Relais mit Totzone</u> 	$R_a = \frac{a}{A}$ für $R_a > 1$ ($A < a$) gilt: $ N(A) = 0$ für $R_a \leq 1$ ($a \leq A$) gilt: $ N(A) = \frac{4b}{\pi A} \sqrt{1 - R_a^2}$ $\angle N(A) = 0 \quad (N(A) \text{ reell})$	
<u>Relais mit Hysterese</u> 	$R_h = \frac{h}{A}$ für $R_h \leq 1$ ($h \leq A$) gilt: $ N(A) = \frac{4b}{\pi A}$ $\angle N(A) = -\arcsin R_h$	

Nichtlinearität $y=t(x)$	Beschreibungsfunktion $N(A)$	Kritische Ortskurve $\frac{1}{N(A)}$
<p><u>Sättigung</u></p>  <p>$k = \frac{b}{a}$</p>	<p>$R = \frac{a}{A}$</p> <p>für $R > 1$ ($A < a$) gilt:</p> <p>$N(A) = k$</p> <p>für $R \leq 1$ ($a \leq A$) gilt:</p> <p>$N(A) = \frac{2k}{\pi} \left(\arcsin R + R \sqrt{1-R^2} \right)$</p> <p>$\underline{N(A)} = 0$ ($N(A)$ reell)</p>	
<p><u>Totzone</u></p>  <p>$\tan \alpha = k$</p>	<p>$R = \frac{a}{A}$</p> <p>für $R > 1$ ($A < a$) gilt:</p> <p>$N(A) = 0$</p> <p>für $R \leq 1$ ($a \leq A$) gilt:</p> <p>$N(A) = \frac{2k}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin R + R \sqrt{1-R^2} \right)$</p> <p>$\underline{N(A)} = 0$ ($N(A)$ reell)</p>	

Nichtlinearität $y=t(x)$	Beschreibungsfunktion $N(A)$	Kritische Ortskurve $\frac{-1}{N(A)}$
<p>Sättigung und Totzone:</p> 	<p> $R_\alpha = \frac{a}{A}, R_\beta = \frac{b}{A}$ 1) $R_\alpha > 1 \quad (A < a) \rightarrow N(A) = 0$ 2) $\left. \begin{matrix} R_\alpha \leq 1 \\ R_\beta \geq 1 \end{matrix} \right\} (a < A < b) \rightarrow \text{Totzone}$ 3) $R_\beta \leq 1 \quad (b < A)$ $N(A) = \frac{2k}{\pi} (\arcsin R_\beta - \arcsin R_\alpha + R_\beta \sqrt{1-R_\beta^2} - R_\alpha \sqrt{1-R_\alpha^2})$ $\angle N(A) = 0 \quad (N(A) \text{ reell})$ </p>	
<p><u>Relais mit Hysterese</u> <u>und Totzone</u></p> 	<p> $R_\alpha = \frac{a+h}{A}, R_\beta = \frac{a-h}{A}$ für $R_\alpha > 1 \quad (A < a+h)$ gilt: $N(A) = 0$ für $R_\alpha \leq 1 \quad (a+h \leq A)$ gilt: $N(A) = \frac{2b}{\pi A} \sqrt{2(1-R_\alpha R_\beta) + 2\sqrt{(1-R_\alpha^2)(1-R_\beta^2)}}$ $\angle N(A) = \arcsin \frac{R_\beta - R_\alpha}{\sqrt{1-R_\alpha^2} \sqrt{1-R_\beta^2}}$ </p>	

Nichtlinearität $y=f(x)$	Beschreibungsfunktion $N(A)$	Kritische Ortskurve - $\frac{1}{N(A)}$
<p><u>Lose</u></p>  <p>$\tan \alpha = k$</p>	<p>$R = \frac{h}{A}$</p> <p>für $R > 1$ ($A < h$) gilt:</p> <p>$N(A) = 0$</p> <p>für $R \leq 1$ ($h \leq A$) gilt:</p> $ N(A) = \frac{k}{\pi} \left\{ \left[\frac{\pi}{2} + \arcsin \sin(1-2R) \right]^2 + \right.$ $\left. + \left[\pi + 2 \arcsin \sin(1-2R) \right] 2R(1-2R) \sqrt{\frac{1-R}{R}} + 4R(1-R) \right\}^{1/2}$ $\angle N(A) = \arctan \frac{4R(R-1)}{\frac{\pi}{2} + \arcsin(1-2R) + 2R(1-2R) \sqrt{\frac{1-R}{R}}}$	
<p><u>Anmerkung:</u> In all diesen Formeln wurde vorausgesetzt, dass der Gleichstromanteil verschwindet (symmetrische Auslenkung). Aus Symmetriegründen (alle hier betrachteten nichtlinearen Kennlinien sind punktsymmetrisch zum Nullpunkt) gilt dies immer, wenn der Gleichstromanteil des Eingangssignals Null ist.</p>		