1 Trigonometrische FunktionenS77-84 ArcusS86 TabelleS86

x	0	30	45	60	90	120	135	150	180	270	360
x	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\pm\infty$	0
cot	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$

Trigometrische Wertebereiche

	D_f	W_f		D_f	W_f
sin	$\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$[-1,1]$	arcsin	$[-1,1]$	$\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
cos	$[0,\pi]$	$[-1,1]$	arccos	$[-1,1]$	$[0,\pi]$
tan	$\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	$\mathbb{R}$	arctan	$\mathbb{R}$	$\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
cot	$(0,\pi)$	$\mathbb{R}$	arccot	$[-1,1]$	$(0,\pi)$

$\sin(-x) = -\sin(x)$	$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$	$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$	$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
$\cos(-x) = \cos(x)$	$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$	$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

$f(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) = A \cdot \sin(\omega t + \frac{\pi}{2} + \varphi_0)$

2 Binomischer Satz S12

$\boxed{(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} \cdot b^i}$ $\quad \boxed{\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}}$ $\quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad 2^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Bsp: $(a+b)^3 = \binom{3}{0}a^3 \cdot b^0 + \binom{3}{1}a^2 \cdot b^1 + \binom{3}{2}a^1 \cdot b^2 + \binom{3}{3}a^1 \cdot b^3 = 1a^3 + 3a^2 \cdot b^1 + 3a^1 \cdot b^2 + 1b^3$

3 Logarithmus S9

$\ln(b) = x \Leftrightarrow e^x = b \Leftrightarrow e^{\ln(b)}$ $\qquad \log(b^c) = c \cdot \log(b)$

$\log(b \cdot c) = \log(b) + \log(c)$ $\qquad \log\left(\frac{b}{c}\right) = \log(b) - \log(c)$

$\frac{\lg(b)}{\lg(a)} = \frac{\ln(a)}{\ln(b)}$ $\qquad \ln(e) = 1$

$\lg(10) = 1$ $\qquad \ln(1) = 0$

4 Potenzen S9

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $\qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $\qquad a^0 = 1$

$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ $\qquad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ $\qquad a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ $\qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$ $\qquad a^1 = a$

$1^m = 1$ $\qquad 0^m = 0$

5 Ganzrationale Funktionen (Polynom $P(x) \in \mathbb{R}[x]_n$) S63,65

$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

- faktorisieren mit Hilfe von Binomen
- faktorisieren mit Hilfe des **Hornerschemas**S966

Wichtig: eine ganzrationale Funktion n-ten Grades, hat höchstens n verschiedene Nullstellen

Polynomdivision S15
Vorgehen: Polynomdivision. f der Asymptote kann aus dem Resultat gelesen werden.

Beispiel: $\quad f(x) = \frac{x^3 + x + 2}{3x}$

$x^2 + x + 2 : 3x = \underbrace{\frac{x^2}{3} + \frac{1}{3}}_{\text{Asymptote}} + \frac{2}{3x}$
$-x^2$
$x + 2$
$-x$
2

$\overset{Pol.Div.}{\Longrightarrow}$

z.B.: Nulstelle:
$(-1) \Rightarrow: (x - (-1)) \iff : (x+1)$
$3 \Rightarrow: (x - 3)$

Mitternachtsformel S41
$ax^2 + bx + c = 0$
$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

pq-Formel
$x^2 + px + q = 0$
$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

Diskriminante S41 $\mathbb{L} \in \mathbb{R}$

$D = b^2 - 4ac \quad \Rightarrow \begin{cases} D > 0: & \text{2 Lösungen} \\ D = 0: & \text{1 Lösung} \\ D < 0: & \text{keine Lösung} \end{cases}$

Satz von Vieta
$ax^2 + bx + c = 0 \quad \overset{:a}{\Longrightarrow} \quad x^2 + px + q = 0$

Zusammenhänge: $x_1 + x_2 = -p \qquad x_1 \cdot x_2 = q$

Gleichungen 3. und 4. Grades S.42-43
siehe: Bronstein, S.42-43

6 Partialbruchzerlegung S15

$f(x) = \frac{-x^2+20x+149}{x^3+4x^2-11x-30} \Rightarrow$ Nenner Faktorisieren mit Hornerschema S965 , Binom

$x^3 + 4x^2 - 11x - 30 = (x+2)(x^2+2x-15) = (x+2)(x+5)(x-3)$

Ansatz: $f(x) = \frac{-x^2+20x+149}{x^3+4x^2-11x-30} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+5} = \frac{A(x+2)(x+5)+B(x-3)(x+5)+C(x+2)(x-3)}{(x-3)(x+2)(x+5)}$

Gleichungssystem (**Zähler gleichsetzten**) aufstellen mit beliebigen x_i-Werten (am Besten Polstellen oder 0, 1, -1 wählen):

$x_1 = 3: \quad -9 + 60 + 149 = A \cdot 5 \cdot 8 \quad \Rightarrow A = 5$
$x_2 = -2: \quad -4 - 40 + 149 = B \cdot (-5) \cdot 3 \quad \Rightarrow B = -7 \qquad f(x) = \frac{5}{x-3} + \frac{-7}{x+2} + \frac{1}{x+5}$
$x_3 = -5: \quad -25 - 100 + 149 = C \cdot (-8) \cdot (-3) \quad \Rightarrow C = 1$

weitere Ansätze für andere Typen von Termen:(Mehrere Werte für x verwenden, auch wenn kein Koeffizient 0 wird.)

Typ 1: $f(x) = \frac{5x^2-37x+54}{(x+1)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3}$

Typ 2: $f(x) = \frac{5x^2-37x+54}{(x+1)(x-3)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x-3)^1} + \frac{C}{(x-3)^2}$

Typ 3: $f(x) = \frac{1}{x^4+x^2} = \frac{1}{x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x^1} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$

7 Folgen S19,470

7.1 Limes Inferior und Superior

Der Limes superior einer Folge $x_n \subset \mathbb{R}$ ist der gröSSte Grenzwert konvergenter Teilfolgen x_{n_k} der Folge x_n
Der Limes inferior einer Folge $x_n \subset \mathbb{R}$ der kleinste Grenzwert konvergenter Teilfolgen x_{n_k} der Folge x_n

8 Grenzwerte von Funktionen S54ff

8.1 Rechenregeln mit uneigentlichen Grenzwerten S58

Die eigentlichen (reellen) Grössen wie 0,1, oder $g \in \mathbb{R}$ bzw. uneigentliche Grössen $\pm\infty$ sind als Grenzwerte bzw. als bestimmtes Divergenzverhalten von Funktionen zu interpretieren.

Bestimmte Formen

für $g \in \mathbb{R}$	für $g \in \mathbb{R}$	für $g \in \mathbb{R} - \{0\}$	für $g \in \mathbb{R} - \{0\}$	für $g \in \mathbb{R} - \{0\}$	sonstiges
$\infty + \infty = \infty$	$\frac{1}{\infty} = 0$	$\frac{1}{0+} = \infty$	$\infty \cdot \infty = \infty$	$\frac{\infty}{g} = \begin{cases} \infty, & g > 0 \\ -\infty, & g < 0 \end{cases}$	$0 \cdot 0 = 0$
$g + \infty = \infty$	$\frac{g}{\infty} = 0$	$\frac{1}{0-} = -\infty$	$-\infty \cdot \infty = -\infty$		$\frac{0}{\infty} = 0$
$-\infty - \infty = -\infty$	$\frac{\infty}{0+} = \infty$	$\frac{g}{0+} = \begin{cases} +\infty, & g > 0 \\ -\infty, & g < 0 \end{cases}$	$g \cdot \infty = \begin{cases} +\infty, & g > 0 \\ -\infty, & g < 0 \end{cases}$		$0 + \infty = \infty$
$g - \infty = -\infty$	$\frac{\infty}{0-} = -\infty$	$\frac{g}{0-} = \begin{cases} -\infty, & g > 0 \\ +\infty, & g < 0 \end{cases}$			$0 - \infty =$

Unbestimmte Formen S57

Für Grenzwerte, die auf einen unbestimmten Ausdruck der Form $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ führen, gilt die Regel von **l'Hospital**

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{g'(x)}{h'(x)}$$

Funktion $f(x)$	$\lim_{x \to x_0} f(x)$	Elementare Umformung
$g(x) \cdot h(x)$	$0.\infty$ bzw $\infty \cdot 0$	$\frac{g(x)}{\frac{1}{h(x)}}$ bzw $\frac{h(x)}{\frac{1}{g(x)}}$
$g(x) - h(x)$	$\infty - \infty$	$\frac{\frac{1}{h(x)} - \frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{g(x) \cdot h(x)}}$
$g(x)^{h(x)}$	$0^0, \infty^0, 1^\infty$	$e^{h(x) \cdot \ln g(x)}$

8.2 Berechnung von Grenzwerten S56

Technik des Erweiterns: $\lim_{n \to \infty} \frac{n}{n^2} \Rightarrow$Erweitern mit $\frac{1}{n^2} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{n}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$

Binomische Formel: $\lim_{n \to \infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \lim_{n \to \infty} \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$

8.3 Spezielle Grenzwerte S58

$\lim_{x \to 0} \frac{sinx}{x} = 1$ $\qquad \lim_{x \to 0+} xlnx = 0$ $\qquad \lim_{x \to \infty} \sqrt[x]{x} = 1$

$\lim_{\alpha \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$ $\qquad \lim_{x \to 1} \frac{lnx}{x-1} = 1$ $\qquad \lim_{x \to \infty} \frac{a^x - 1}{x} = lna$

$\lim_{x \to 0} \frac{log_a(x+1)}{x} = \frac{1}{lna}$ $\qquad \lim_{x \to \infty} \frac{(lnx)^\alpha}{x^\beta} = 0$ $\qquad \lim_{x \to \infty} ln\sqrt{\frac{x^2-4}{x-2}} = ln2$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ $\qquad \lim_{x \to \infty} \frac{x^\alpha}{a^\beta} = 0 \ (\alpha > 1; \alpha, \beta > 0)$ $\qquad \lim_{n \to \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$

$\lim_{x \to 0} \frac{x}{1-e^x} = 1$ $\qquad \lim_{x \to \infty} \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} +\infty, & q \geq 1 \\ \frac{1}{1-q}, & |q| < 1 \end{cases}$ $\qquad \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$

$\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ $\qquad \lim_{x \to \infty} \frac{x^k}{q^x} = 0 (q > 1; k \in \mathbb{N})$ $\qquad \lim_{x \to \infty} \sqrt[x]{p} = 1$

bei $x \to \infty$ gilt: $log_{Basis}(x) < \sqrt{x} < x < a^x < x! \Rightarrow$ Wachstum gegen: $\infty \qquad (|a| > 1)$

$a_n = q^n \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & |q| < 1 \\ 1 & q = 1 \\ \pm\infty & q < -1 \\ +\infty & q > 1 \end{cases}$

$a_n = \frac{1}{n^k} \to 0 \qquad \forall k \geq 1$

$a_n = \left(1 + \frac{c}{n}\right)^n \to e^c$

$a_n = n\left(c^{\frac{1}{n}} - 1\right) = \ln c$

$a_n = \frac{n^2}{2^n} \to 0 \quad (2^n \geq n^2 \ \forall n \geq 4)$

$\lim_{n \to \infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

9 Ableitungsregeln S445,450, erste Seite, zweit letzte Seite

Linearität: $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
Produktregel: $(f \cdot g)' = f'g + fg'$
Quotientenregel $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

Kettenregel: $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
Kehrwertregel: $\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = \frac{-f'(x)}{[f(x)]^2}$
Konstantenregel: $\frac{d}{dx}(c) = 0 \quad (c \in \mathbb{R})$

Potenzreihe: $f : \underbrace{]-R+a, a+R[}_{\subseteq D} \to \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1}$

Tangentengleichung: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

10 Integrationsregeln S493ff, 1083ff

Summenregel: $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
Faktorregel: $\int n \cdot f(x)dx = n \cdot \int f(x)dx$

Potenzregel: $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + C \qquad (n \neq (-1))$

11 Wichtige Zahlen

$\sqrt{2} = 1.41421 \quad \sqrt{3} = 1.73205 \quad \sqrt{5} = 2.23607 \quad \sqrt{7} = 2.64575 \quad \pi = 3.14159 \quad e = 2.71828 \quad e^{-1} = 0.36788$

CC BY-NC-SA