1 Reihen

Grundlegendes	
Reihe	Folge $\langle a_n \rangle = a_1, a_2 ... a_n$ Folge $\langle s_1 \rangle = a_1$ und $\langle s_2 \rangle = a_1 + a_2$ Eine Reihe ist eine Folge ihrer Partialsummen: $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = s$
Konvergenz/Divergenz	Konvergiert die unendliche Reihe $\langle s_n \rangle$so besitzt sie die Summe s. $s = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ Existiert der Grenzwert nicht, so ist die Reihe divergent. Wenn man in einer Reihe endlich viele Summanden hinzu/weglässt, so bleibt sie Konvergent oder Divergent. (nicht so bei Folge)
Vertauschen der Summanden	Für **unendliche Reihen** gilt, dass die einzelnen Summen untereinander <u>nicht</u> vertauscht werden können
Es gilt ausserdem	$a = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \quad b = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ sind konvergente Reihen $a_k \leq b_k \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad a \leq b$

Konvergenzkriterien *S.472-476*	
Cauchyches Konvergenzkrit.	Es existiert ein $\epsilon > 0$ $\quad \epsilon \geq s_0 = \sum\limits_{k=1}^{n_0}$ Nun gilt für alle $m > n > n_0$ $\quad \lvert \sum\limits_{k=n}^{m} a_k \rvert < \epsilon$ Dann Konvergiert die Reihe, ansonsten divergiert sie. $(\lvert s_m - s_n \rvert < \epsilon)$
Reziprokkrit	$s = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} \text{konvergent für} & \alpha > 1 \\ \text{divergent für} & \alpha \leq 1 \end{cases}$
Trivialkriterium *S. 473 (7.2.1.2)*	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \quad \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0 & \text{divergent} \\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 & \text{konvergent oder divergent} \Rightarrow \text{weitere Tests notwendig!} \end{cases}$
Majorantenkrit. *S. 479 (7.2.5.1)*	Ist die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergent, so konvergiert auch die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lvert a_n \rvert$ und somit auch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ für $\lvert a_n \rvert \leq c_n$ (absolut). Dies gilt auch für $\lvert a_n \rvert \leq c_n$ erst ab einer Stelle $n_0 \in \mathbb{N}$.
Minorantenkrit.	Ist die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n$ gegen $+\infty$ divergent, so gilt dies auch für die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ bei $a_n \geq d_n$. Dies gilt auch für $a_n \geq d_n$ erst ab einer Stelle $n_0 \in \mathbb{N}$.
Quotientenkrit. *S.474 (7.2.2.2)* Wurzelkrit. *S.474 (7.2.2.3)*	$\lim\limits_{n\to\infty} \left\lvert \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\rvert = \alpha$ der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lvert a_n \rvert} = \alpha$ der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ $\begin{cases} \alpha < 1 & \text{(aboslut) konvergent} \\ \alpha = 1 & \text{keine Aussage!} \\ \alpha > 1 & \text{divergent} \end{cases}$
Integralkrit. *S.475 (7.2.2.4)*	wenn $\left\{ \begin{array}{l} -f(x) \text{ auf dem Intervall } [1, \infty) \text{ definiert} \\ (\text{ bzw. } [k, \infty)) \\ -f(x) \geq 0 \\ -f(x) \text{ monoton fallend} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \int_1^\infty f(x)dx \text{ konvergent} \Leftrightarrow \text{Reihe konvergent} \\ \int_1^\infty f(x)dx \text{ divergent} \Leftrightarrow \text{Reihe divergent} \end{cases}$
Leibniz Krit. *S.476 (7.2.3.3)*	Die **alternierende** Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent, wenn die Folge $\langle \lvert a_n \rvert \rangle$ eine monoton fallende Nullfolge $(\lim\limits_{n\to\infty} \lvert a_n \rvert = 0)$ ist. Monotonie mittels Verhältnis $\left(\left\lvert \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\rvert \right)$, Differenz $(\lvert a_{n+1} \rvert - \lvert a_n \rvert)$ oder vollständiger Induktion beweisen. Abschätzung Restglied einer alternierenden konvergenten Reihe: $\lvert R_n \rvert = \lvert s - s_n \rvert \leq \lvert a_n + 1 \rvert$

Absolute und Bedinge Konvergenz *7.2.3 S.475*	
Absolute Konvergenz	Eine Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ heisst **absolut konvergent**, wenn die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lvert a_n \rvert$ konvergent ist.
Unbedingt Konvergent	Unbedingt Konvergent ist eine Reihe die durch umordnen einen anderen Grenzwert hat oder wird divergiert.
Bedingt Konvergent	Unbedingt kann man umordnen, ohne dass sich konvergenz oder Grenzwert ändert.

Potenzreihen *S.1075-79, (20), 482-487*

Grundlegend	$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ ist eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt x_0 und a_n als Koeffizienten
Konvergenzkrit	$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ Es sei $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lvert a_n\rvert} = \beta \Rightarrow \begin{cases} \beta = 0 & \text{absolut Konvergent für alle } x \in \mathbb{R} \\ \beta > 0 & fr \begin{cases} \beta = 0: & \text{absolut konvergent für alle } x \in \mathbb{R} \\ \lvert x\rvert > \frac{1}{\beta}: & \text{divergent} \\ \lvert x\rvert = \frac{1}{\beta}: & \text{keine Aussage möglich} \end{cases} \\ \beta = \pm\infty: & \text{divergent ausser für } x = 0 \end{cases}$
Konvergenzradius	Wurzelkrit.: $\rho = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lvert a_n\rvert}} = \frac{1}{\beta}$ für: $\begin{cases} \beta = 0 & \Rightarrow \rho = \infty \\ \beta = \pm\infty & \Rightarrow \rho = 0 \end{cases}$ Quotientenkrit.: $\rho = \lim_{n\to\infty} \left\lvert \frac{a_n}{a_{n+1}} \right\rvert$
Mehrere Summen	$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hat ρ_1 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ hat ρ_2 $\rho = min\{\rho_1, \rho_2\}$ Dann gilt: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$ $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) x^n$
Ableitung Potreihen	$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1}$ (für alle $x \in (-\rho; \rho)$ Der Konvergenzradius ρ bleibt gleich) Dies kann beliebig oft wiederholt werden: $f^{(i)}(x) = \sum_{n=i}^{\infty} n(n-1)\dots(n-i+1) \cdot a_n x^{n-i}$ (für alle $i \in \mathbb{N}$)
Aufleitung Potreihen	$\int \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \cdot x^{n+1} + C$ (für alle x $\in (-\rho; \rho)$ ρ bleibt dabei gleich)
Taylor-Reihe	Für eine beliebig oft differenzierbare Funktion gibt es die Taylorreihe $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x-x_0)^n}$ Für alle Glieder der Taylorreihe muss die folgende Bedingung erfüllt sein $\lim_{n\to 0} T(\xi) = 0$

Grenzwerte

$\lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{\frac{K^n}{n!}}) = 0$ ($K > 0$ und const.)	$\lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n^a}) = 1$ (a const.)	$\lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n}) = 1$	$\lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{a}) = 1$ ($a > 0$ und const.)
$\lim_{n\to\infty} (\frac{K}{n!}) = 0$ (K const.)	$\lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{\lvert p(n)\rvert}) = 1$ ($p(n) \neq 0$)	$\lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n!}) = +\infty$	$\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{x}{n})^n = e^x$
$\lim_{n\to\infty} (\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}) = e$			

Bekannte Reihen *S.19-21, 477-478, (478)*

Geometrische: $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_0 \cdot q^k = a_0 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$ $s = \sum_{k=0}^{\infty} a_0 \cdot q^k = \frac{a_0}{1-q}$ $\sum_{k=0}^{\infty} a_0 \cdot q^k = \begin{cases} q = 0 & undef \\ \lvert q\rvert < 1 & 1 \\ q < (-1) & \pm\infty \\ q > 1 & +\infty \end{cases}$	p-Reihe: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} p > 1 & konvergent \\ p \leq 1 & divergent \end{cases}$	Potenz-Reihe: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^\alpha} \Rightarrow \rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^\alpha} = 1$ Randwerte: $x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \alpha > 1 & konvergiert \\ \alpha \leq 1 & divergiert \end{cases}$ $x = (-1) \Rightarrow \begin{cases} \alpha > 0 & konvergiert \\ \alpha \leq 0 & divergiert \end{cases}$
Arithmetische: $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_0 + k \cdot d = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$	Exponentialfunktion: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots (\rho = \infty)$	Binominal-Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \cdot x^n = (1+x)^\alpha$ $\lvert\rho\rvert = 1$ p.m. $\binom{u}{k} = \frac{u!}{(u-k)!k!}$
Harmonische: (divergiert) $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots$	alternierende Harmonische: (bedingt konvergent) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{(n+1)} \frac{1}{n} = \ln(2)$	Spezialfall (Binominalreihe): $\Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$ $(1+x)^{1/2} = \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \pm \dots (\rho = 1)$

2 Differentialgleichungen

Grundlegendes *S.553*	
Grundsätzlich	Eine Gleichung zur Bestimmung einer Funktion heisst Differentialgleichung, wenn sie mindestens eine Ableitung der gesuchten Funktion enthält
Ordnung	Die Ordnung wird bestimmt durch die höchste Ableitung der gesuchten Funktion
Anfangswertproblem	Funktion: $y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ Das Anfangswertproblem hat die Aufgabe, eine Funktion zu finden, die folgendes erfüllt: $y(x_0) = y_0 \quad y'(x_0) = y_1 \quad ... \quad y^{n-1}(x_0) = y_{n-1}$ Anfangswerte: $y_0, y_1, ..., y_{n-1}$ mit Anfangspunkt x_0
Existenz/Eindeutigkeit (Piccard-Lindelöf)	Die Funktion $f(x, u, u_1, ..., u_{n-1})$ sei in einer Umgebung der Stelle $(x_0, y_0, y_1, ..., y_{n-1}) \in \mathbf{R}^{\mathbf{n+1}}$ stetig und besitzt dort stetige partielle Ableitungen nach $u, u_1, ..., u_{n-1}$ dann existiert in einer geeigneten Umgebung des Anfangspunktes x_0 genau eine Lösung des Anfangswertproblems $y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ mit $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$ $\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} \; ... \; \frac{\partial f}{\partial f^{(n-1)}} \qquad \text{endlich beschränkt} \Rightarrow \text{eindeutige Lösbarkeit}}$
	$y' = -\frac{x}{2} - \sqrt{y + \frac{x^2}{4}} \qquad \vert\ \text{AW: } y(0) = 1$ $y' = f(x, y) \iff f(x, y) = -\frac{x}{2} - \sqrt{4 + \frac{x^2}{4}} \quad \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-1}{2\sqrt{y + \frac{x^2}{4}}} \qquad \vert\ \text{Nenner} \neq 0 \Rightarrow \quad y \neq -\frac{x^2}{4}$ für dieses AW-Problem $\rightarrow$ AW einsetzen: $-\frac{1}{2\sqrt{1+0}} = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow$ eindeutig lösbar
	Anfangsbedingungen müssen ungabhängig sein: $y_0 = ae^{x_0} + be^{-x_0} \quad y_1 = ae^{x_0} - be^{-x_0} \Rightarrow$ $det \begin{pmatrix} e^{x_0} & e^{-x_0} \\ e^{x_0} & -e^{-x_0} \end{pmatrix} = -2 \neq 0$

DGL 1. Ordnung *S.554*		
Separation *S.555 (9.1.1.2)*	$y' = f(x) \cdot g(y)$	$y' = f(x) \cdot g(y) \qquad \vert\ : g(y) \neq 0!!!$ $y' = f(x) \qquad \vert\ \int_{x_0}^{x} (\ldots) d\tilde{x}$ $\int_{x_0}^{x} \frac{y'(\tilde{x})}{g(y(\tilde{x}))} d\tilde{x} = \int_{x_0}^{x} f(\tilde{x}) d\tilde{x} \qquad \vert\ dy = y'(\tilde{x}) d\tilde{x}$ $\int_{y_0 = y(x_0)}^{y(x)} \frac{1}{g(y)} dy = \int_{x_0}^{x} f(\tilde{x}) d\tilde{x} \qquad \rightarrow$ Auflösen $\rightarrow$ Gleichung in x, y
Linearterm	$y' = f(ax + by + c)$	$y' = f(ax + by + c) \qquad \vert$ Substitution: $z = ax + bx + c$ $y' = f(z) \qquad \vert$ differenzieren $\quad z' = a + by'$ $z' = a + by' \qquad \vert\ y' = f(z)$ $z' = (a + b \cdot f(z)) \cdot 1 \Rightarrow$ separiert! Anfangsbedingungen: $z_o = ax_0 + by_0 + c$
Gleichgradigkeit	$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$	$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \vert$ Substitution: $\quad z = \frac{y}{x} \quad \Leftrightarrow \quad y = z \cdot x \quad (x \neq 0)$ $y' = f(z) \qquad \vert$ differenzieren: $\quad y' = z + z' \cdot x$ $y' = z + z' \cdot x \qquad \vert\ y' = f(z)$ $f(z) = z + z' \cdot x \qquad \vert$ umformen $z' = (f(z) - z) \cdot \frac{1}{x} \quad \Rightarrow$ separiert! Anfangsbedingungen: $\quad z_o = \frac{y_0}{x_0}$
Allgemeine DGL 1. Ordnung	$y' + f(x)y = g(x)$ $y_o = y(x_0)$ $g(x)$: Störterm	**Homogene - Rechnung:** $g(x) = 0$ $\boxed{y_H = k \cdot \mathrm{e}^{-\int f(x)\, dx}} \quad k \in \mathbb{R}$ **Partikuläre - Rechnung:** $g(x) \neq 0$ $\boxed{y_P = \int (g(x) \cdot \mathrm{e}^{\int f(x)\, dx})\, dx \cdot \mathrm{e}^{-\int f(x)\, dx}}$ **Superposition:** $\boxed{\mathbb{L} = \left\{ y \mid y = y_H + y_P = e^{-\int f(x)\, dx} \cdot \left[k + \int (g(x) \cdot \mathrm{e}^{\int f(x)\, dx})\, dx\right]\right\}} \quad k \in \mathbb{R}$

DGL 2. Ordnung *S.564*

Form	Lösung
$y'' + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = g(x)$	Wie bei 1. Ordnung: $Y = y_H + y_p$ Homogene DGL: $g(x) = 0$ Inhomogene DGL: $g(x) \neq 0$

Homogene DGL $\quad y'' + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = 0$

Charakt. Polynom: $\lambda^2 + a_1 \cdot \lambda + a_0 = 0$ von $y'' + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = 0$ $\quad (\lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \frac{\sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2})$

$$D = \left(\tfrac{a_1}{2}\right)^2 - a_0 = \begin{cases} D > 0: & \lambda_{1,2} = -\dfrac{a_1}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{a_1}{2}\right)^2 - a_0} & \in \mathbb{R} & \text{starke Dämpfung} \\ D = 0: & \lambda = -\dfrac{a_1}{2} & \in \mathbb{R} & \text{aperiodischer Grenzfall} \\ D < 0: & \lambda_{1,2} = -\dfrac{a_1}{2} \pm j\sqrt{a_0 - \left(\dfrac{a_1}{2}\right)^2} & \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R} & \text{schwache Dämpfung / Schwingfall} \end{cases}$$

$(D > 0)$ Falls: $\lambda_1 \neq \lambda_2$ und $\lambda_{1,2} \in R$ $: Y_H = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}$ } starke Dämpfung

$(D = 0)$ Falls: $\lambda_1 = \lambda_2$ und $\lambda_{1,2} \in R$ $: Y_H = e^{\lambda_1 x}(A + B \cdot x)$ } aperiodischer Grenzfall

$(D < 0)$ Falls $y_H = A \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} = A \cdot \mathrm{e}^{-\frac{a_1}{2}x} \cdot \mathrm{e}^{\pm j\sqrt{|D|}x} = A \cdot \mathrm{e}^{-\frac{a_1}{2}x} \cdot [\cos(\sqrt{|D|}x) \pm j\sin(\sqrt{|D|}x)]$ } schwache Dämpfung / Schwingfa

(Eigen-)Frequenz	$\omega = \alpha = \dfrac{\sqrt{\lvert a_1^2 - 4a_0 \rvert}}{2}$ $\qquad \omega = \sqrt{\lvert D \rvert} = \sqrt{\lvert \delta^2 - a_0 \rvert}$
Dämpungskonstante	$\delta = -\frac{a_1}{2}$
Resonanz	δ und ω stimmen überein mit Störglied

inhomogene DGL $\quad y'' + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = g(x)$

Grundlöseverfahren (Faltungsintegral)	1. Homogene DGL lösen: $g(x) = 0$ setzen $\rightarrow$ ergibt Y_H 2. Anfangsbedingungen in Hom. DGL einsetzen. Wenn möglich: $x_0 = 0$ $y_H(x_0) = 0$ $y'_H(x_0) = 1$ 3. A, B bestimmen 4. Einsetzen der Hom. Glg. in Faltungsintegral $\Rightarrow$ $\quad y_P(x) = \int_{x_o}^{x} y_H(x + x_0 - t) \cdot g(t)dt$ 5. $Y = y_H + y_P$
Ansatz in Form des Störgliedes	1. Homogene DGL lösen: $g(x) = 0$ setzen $\rightarrow$ ergibt Y_H 2. g(x) in Störgliedtabelle suchen 3. Fall bestimmen 4. y_P aus Tabelle ablesen 5. $Y = y_H + y_P$

$\mathbf{g(x) = p_n(x)}$	($p_n(x)$ und $q_n(x)$ sind Polynome vom gleichen Grad)
Fall 1: $a_0 \neq 0$:	$y_P = q_n(x)$
Fall 2: $a_0 = 0, a_1 \neq 0$:	$y_P = x \cdot q_n(x)$
Fall 3: $a_0 = a_1 = 0$:	$y_P = x^2 \cdot q_n(x)$
(a_0 und a_1 beziehen sich auf die **linke Seite** der DGL)	

$\mathbf{g(x) = e^{bx} \cdot p_n(x)}$	
Fall 1: b nicht Nullstelle des char. Polynoms:	$y_P = e^{bx} \cdot q_n(x)$
Fall 2: b einfache Nullstelle des char. Polynoms:	$y_P = e^{bx} \cdot x \cdot q_n(x)$
Fall 3: b zweifache Nullstelle des char. Polynoms:	$y_P = e^{bx} \cdot x^2 \cdot q_n(x)$

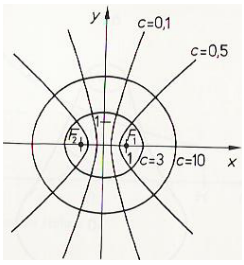
$\mathbf{g(x) = e^{\alpha x}(p_n(x)\cos\beta x + q_n(x)\sin\beta x)}$	
Fall 1: $\alpha + j \cdot \beta$ **nicht Lösung** der charakteristischen Gleichung:	$y_p = e^{\alpha x} \cdot (r_n(x) \cdot \cos(\beta \cdot x) + s_n(x) \cdot \sin(\beta \cdot x))$
Fall 2: $\alpha + j \cdot \beta$ **Lösung** der charakteristischen Gleichung:	$y_p = e^{\alpha x} \cdot \mathbf{x} \cdot (r_n(x) \cdot \cos(\beta \cdot x) + s_n(x) \cdot \sin(\beta \cdot x))$

Vorgehen bei einer DGL in Form des Störgliedes	
1.	Y_H mit λ_1 und λ_2 berechnen
2.	Ordnung n anhand der r.h.s der DGL bestimmen Koeffizient b anhand der r.h.s der DGL bestimmen (Achtung kann aus mehreren Elementen bestehen z.B. $x^2e^x + x$; Superposition)
3.	Anhand der Störglied Tabellen y_p bestimmen
4.	$q_n = ax^n + bx^{n-1} + \dots + cx + d$
5.	y_p ableiten und in die **l.h.s** der DGL einsetzen. $y_p'' + a_1 y_p' + a_0 y_p = f(x)$
6.	Koeffizienten bestimmen: $x^2e^x \cdot 18a + xe^x(6a+12b) + e^x(2b+6c) = x^2e^x$ $18a = 1$ — $18a$ kommt 1mal in der r.h.s vor $(6a+12b) = 0$ — $(6a+12b)$ kommt 0mal vor auf der r.h.s $(2b+6c) = 0$ — $(2b+6c)$ kommt 0mal vor auf der r.h.s
7.	Koeffizienten in y_p einsetzen
8.	Wenn das Störglied $f(x)$ aus mehreren Teilen besteht (z.B. $x^2e^x + x$), Störglied auseinander nehmen und in zwei Teile x^2e^x und x unterteilen und Schritt 3 - 6 wiederholen
9.	$y = Y_H + y_{p1} + y_{p2} + \dots$

Superpositionsprinzip	$f(x) = c_1f_1(x) + c_2f_2(x)$ y_1 ist spezielle Lösung der DGL $\quad y_1'' + a_1 \cdot y_1' + a_0 \cdot y_1 = c_1f_1(x)$ y_2 ist spezielle Lösung der DGL $\quad y_2'' + a_1 \cdot y_2' + a_0 \cdot y_2 = c_2f_2(x)$ dann ist $y_P = c_1y_1 + c_2y_2$

DGL 1. Ordnung

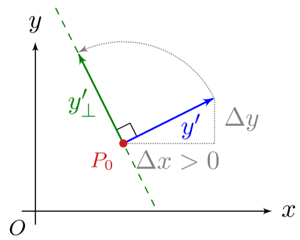
Orthagonaltrajektorien



Orthogonaltrajektorien sind die Normalen der DGL. Sie stehen senkrecht auf den Kurven die durch die DGL entstehen.
Die orthogonalen Trajektorien schneiden alle Kurven der gegebenen Kurvenschar $y = f(x,c)$ im rechten Winkel.

Vorgehen:

1. y nach c umstellen/ auflösen
2. y ableiten $\Rightarrow y'$
3. in y' Gleichung (entweder oder) $\begin{cases} c \text{ substitutieren/ ersetzen} \Rightarrow \text{DGL: F(x,y,y')} \\ y \text{ Gleichung in } y' \text{ Gleichung einsetzen} \end{cases}$
4. y' durch $-\frac{1}{'y}$ ersetzen.
5. DGL auflösen (sofern nötig...)



Kartesische Koordinaten:	Polarkoordinaten
$y' = f(x,y) \quad \Rightarrow \quad y'_\perp = -\frac{1}{f(x,y)}$	$r' = f(r,\varphi) \quad \Rightarrow \quad r'_\perp = -\frac{r^2}{f(r,\varphi)}$

Lineare DGL n. Ordnung mit konstanten Koeffizienten *S.571*

Form	$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_0 \cdot y = g(x)$

n-verschiedene Homogene Lösungen

Fall 1: r reelle Lösungen		Starke Dämpfung / Kriechfall
$\lambda_{r-1} \neq \lambda_r$	$y_1 = A_1 \cdot e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = A_2 \cdot e^{\lambda_2 x}$, $\ldots$,$y_r = A_r \cdot e^{\lambda_r x}$	
$\lambda_{r-1} = \lambda_r \qquad (\Rightarrow \lambda)$	$y_1 = A_1 \cdot e^{\lambda_x}$, $y_2 = A_2 \cdot x \cdot e^{\lambda x}$, $\ldots$,$y_r = A_r \cdot x^{r-1} \cdot e^{\lambda x}$	
Fall 2: k komplexe Lösungen		Schwache Dämpfung / Schwingfall
$\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta \neq \lambda_{k,k-1}$	$y_k = e^{\alpha x}[A_k \cdot \cos(\beta \cdot x) + B_k \cdot \sin(\beta \cdot x)]$	
$\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta = \lambda_{k,k-1}$	$y_1 = e^{\alpha x}[A_1 \cdot \cos(\beta \cdot x) + B_1 \cdot \sin(\beta \cdot x)]$ $y_2 = x \cdot e^{\alpha x}[A_2 \cdot \cos(\beta \cdot x) + B_2 \cdot \sin(\beta \cdot x)]$ $\ldots = \ldots$ $y_k = x^k \cdot e^{\alpha x}[A_k \cdot \cos(\beta \cdot x) + B_k \cdot \sin(\beta \cdot x)]$	(k-fache Resonanz)

$Y_H = y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_n$

Allgemeinste Lösung des partikulären Teils

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}}_{f(y,y',y'',\ldots)} = \underbrace{e^{\alpha x}(p_{m1}(x)\cos(\beta x) + q_{m2}(x)\sin(\beta x))}_{\text{Störglied}}$$

λ aus Homogenlösung

Unterscheide die Lösungen des charakteristischen Polynoms (λ):	mit m = max(m1, m2)
Fall a: $\alpha + j\beta \neq \lambda$, so ist	$y_P = e^{\alpha x}(r_m(x)\cos(\beta x) + s_m(x)\sin(\beta x))$
Fall b: $\alpha + j\beta$ ist u-fache Lösung von λ, so ist	$y_P = e^{\alpha x} x^u (r_m(x)\cos(\beta x) + s_m(x)\sin(\beta x))$ u-fache Resonanz

Grundlöseverfahren

$$\begin{pmatrix} g(x_0) = & 0 & = & Ay_1(x_0) + By_2(x_0) + \ldots + Ny_n(x_0) \\ g'(x_0) = & 0 & = & Ay_1'(x_0) + By_2'(x_0) + \ldots + Ny_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & & \\ g^{(n-1)}(x_0) = & 1 & = & Ay_1^{(n-1)}(x_0) + By_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + Ny_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix}$$

ergibt $c_1, \ldots, c_n$ für $y_P(x) = \int_{x_0}^{x} g(x + x_0 - t) f(t) dt$

Anfangswertproblem	$y(x_0) = y_0 \qquad y'(x_0) = y_1 \qquad y''(x_0) = y_2 \qquad \ldots \qquad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$

Lineare Differentialgleichungssysteme erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Form:

$$\begin{matrix} \dot{x} = ax + by + f(t) \\ \dot{y} = cx + dy + g(t) \end{matrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{\text{M}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}}_{\text{Störvektor}}$$

Die allgem. Lösung ergibt sich aus der DGL:

$$\underbrace{\ddot{x} - (a+d) \cdot \dot{x} + \overbrace{(a \cdot d - b \cdot c)}^{\det(\text{M})} \cdot x = \dot{f}(t) - d \cdot f(t) + b \cdot g(t)}_{\text{normale DGL 2.Ordnung} \rightarrow \text{nach } x \text{ auflösen}}$$

$$y = \frac{1}{b}(\dot{x} - ax - f(t)))$$

Anfangsbedinungen:

$$x_0(t_0) = x_0$$

$$\dot{x}_0(t_0) = a \cdot x_0(t_0) + b \cdot y_0(t_0) + f(t_0) = a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + f(t_0)$$

Anordnung beachten! Gesuchte Grösse immer zu oberst (in diesem Fall ist die gesuchte Grösse x)