1 Integralrechnung S. 483

1.1 Integrationsmethoden S. 486ff

Linearität	$\int f(\alpha x+\beta)dx = \frac{1}{\alpha} \cdot F(\alpha x + \beta) + C$
Partielle Integration	$\int\limits_a^b u'(x) \cdot v(x)dx = \Big[u(x) \cdot v(x)\Big]_a^b - \int\limits_a^b u(x) \cdot v'(x)dx$ ($v(x)$ = einfacheste Funktion wählen!)
Weierstrass-Substitution (Rationalisierung)	$t = \tan\frac{x}{2}$ $\quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ $\quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ $\quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ $\quad \int R(\sin(x)\cos(x))dx$ *siehe auch Bronstein S. 82.*
Allgemeine Substitution	$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_{g(a)}^{g(b)} f(g(t)) \cdot g'(t)dt$ $\quad t = g^{-1}(x)$ $\quad \boxed{\text{x=g(t)}}$ $\quad dx = g'(t) \cdot dt$
Logarithmische Integration	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln\lvert f(x)\rvert + C \qquad (f(x) \neq 1)$
Potenzregel	$\int f'(x) \cdot (f(x))^\alpha dx = f(x)^{\alpha+1} \cdot \frac{1}{\alpha+1} + C \qquad (\alpha \neq -1)$
Differentiation	$\int\limits_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a) \qquad \frac{d}{dx}\int\limits_1^x f(t)dt = f(x)$

1.1.1 Einige unbestimmte Integrale S. 1074 ff

Siehe Tabelle 4.2 im Anhang.

1.2 Uneigentliches Integral S. 509 ff

Uneigentliches Integral heisst, dass entweder eine **unbeschränkte Funktion** integriert wird, oder eine Funktion über einen **unbeschränkten Integrationsberech** integriert wird.

- $f(x)$ auf abgeschlossenem Intervall definiert, aber **nicht** beschränkt.
- $f(x)$ auf abgeschlossenem Intervall definiert mit Ausnahme eines Punktes.
- $f(x)$ hat eine Unendlichkeitsstelle.

Für unbeschränkte Funktionen:

$$I = \int\limits_a^c f(x)dx = \lim_{t\to b-}\int\limits_a^t f(x)dx + \lim_{t\to b+}\int\limits_t^c f(x)dx$$

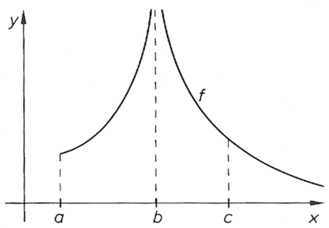
Für die unbeschränkte Integration:

$$I = \int\limits_a^\infty f(x)dx = \lim_{t\to\infty}\int\limits_a^t f(x)dx;$$

$$I = \int\limits_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{t\to-\infty}\int\limits_t^a f(x)dx;$$

$$I = \int\limits_{-\infty}^\infty f(x)dx = \lim_{t_1\to\infty}\lim_{t_2\to\infty}\int\limits_{t_1}^a f(x)dx + \int\limits_a^{t_2} f(x)dx$$

Beispiel: $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = \lim_{t\to\infty}\int\limits_1^t \frac{1}{x^2}dx = \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{t} + \frac{1}{1} = 1$



unbeschränkte Funktion

1.2.1 Prinzip der Restfläche

Wenn $\lim\limits_{t\to\infty}\int\limits_t^\infty f(x)dx = 0$, dann konvergiert $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ und umgekehrt.

1.2.2 Majorantenprinzip (konvergent)

Um nachzuweisen, ob eine Funktion $\lvert f(x)\rvert \geq 0$ konvergiert, wird eine zweite Funktion $g(x) \geq \lvert f(x)\rvert$ (Majorante) gesucht. Konvergiert $\int\limits_a^\infty g(x)dx$, dann konvergiert auch $\int\limits_a^\infty f(x)dx$. $(x \in [a,\infty))$

1.2.3 Minorantenprinzip (divergent)

Um nachzuweisen, ob eine Funktion $f(x)$ divergiert, wird eine zweite Funktion $0 \leq g(x) \leq f(x)$ (Minorante) gesucht. Divergiert $\int\limits_a^\infty g(x)dx$, dann divergiert auch $\int\limits_a^\infty f(x)dx$. $(x \in [a,\infty))$

2 Anwendung der Differential- und Integralrechnung

2.1 Beschreibungsvarianten S. 49ff

Funktion (explizit)	Koordinatengleichung (implizit)	Parameterform (Kartesisch)	Polarform x
$y = f(x)$ (Bronstein Form 2.4)	$F(x,y) = 0$ (Bronstein Form 2.5)	$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi(t) \\ \varphi(t) \end{pmatrix}$ (Bronstein Form 2.6)	$r = f(\varphi)$

Hat man die explizite Form gegeben, so hat man automatisch die Implizite- und Parameter-Form

2.2 Umrechnen diverser Systeme S. (197)

x	$r\cos(\varphi)$	
y	$r\sin(\varphi)$	
r	$\sqrt{x^2+y^2}$	
Parameter	$\Rightarrow$ explizit	$\Longrightarrow t = f(x);\ y = g(f(x))$
Ex- bzw. implizit	$\Rightarrow$ Polar	$\Longrightarrow$ Ersetze x durch $r\cos(\varphi)$ & y durch $r\sin(\varphi)$
Polar	$\Rightarrow$ implizit	$\Longrightarrow$ Ersetze $r\sin(\varphi)$ durch y, $r\cos(\varphi)$ durch x, r durch $\sqrt{x^2+y^2}$
Polar	$\Rightarrow$ Parameterform	$\Longrightarrow \begin{pmatrix} x(\varphi) \\ y(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(\varphi)\cos(\varphi) \\ r(\varphi)\sin(\varphi) \end{pmatrix}$
Explizit	$\Rightarrow$ Parameter	$\Longrightarrow \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t)) \\ t \end{pmatrix}$
Einzelner Punkt	$\Rightarrow$ Polar	$\Longrightarrow r = \sqrt{x^2+y^2};\ \varphi = \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}) + \pi & x < 0 \\ \arctan(\frac{y}{x}) & x > 0 \\ \frac{\pi}{2} & x = 0;\ y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & x = 0;\ y < 0 \\ \text{unbestimmt} & x = y = 0 \end{cases}$

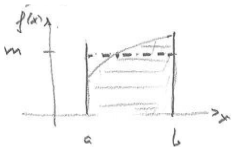
2.3 Kurvenarten S. 203ff

	Kreis S. 203	**Ellipse** S. 204
Implizit:	$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$	$(\frac{x-x_0}{a})^2 + (\frac{y-y_0}{b})^2 = 1$
Bemerkung:	Mittelpunkt (x_0, y_0); Radius r	Mittelpunkt (x_0, y_0); Halbachsen a, b
Polarform:	$r = \frac{p}{1+\epsilon\cos(\varphi)}; \epsilon = 0$	$r = \frac{p}{1+\epsilon\cos(\varphi)}; 0 < \epsilon < 1$
Parameterform:	$x = x_0 + R\cos(t), y = y_0 + R\sin(t)$	$x = a\cos(t), y = b\sin(t)$

	Hyperbel S. 206	**Parabel** S. 209
Implizit:	$(\frac{x}{a})^2 - (\frac{y}{b})^2 = 1; -(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 = 1$	$y = ax^2 + bx + c$
Bemerkung:		Parabeln mit Scheitelpunkt auf der vertikaler Achse
Polarform:	$r = \frac{p}{1+\epsilon\cos(\varphi)}; \epsilon > 1$	$r = \frac{p}{1+\epsilon\cos(\varphi)}; \epsilon = 1$
Parameterhform:	$x = a\cosh(t), y = b\sinh(t)$	$x = t, y = at^2 + bt + c$

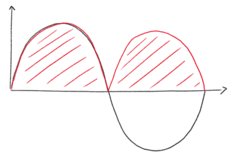
	Kardioide/Herzk. S. 99	**Lemniskate "∞"** S. 101	**Strophoide/harm. K.** S. 96
Polarform:	$r = a(1+\cos(\varphi))$	$r = a\sqrt{2\cos(2\varphi)}$	$r = -a\frac{\cos(2\varphi)}{\cos(\varphi)}, (a > 0)$

2.4 Gleichungen S. 248, Mittelwerte S. 19ff



Tangentengleichung
$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

Linearer Mittelwert (= Gleichrichtwert)
$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$



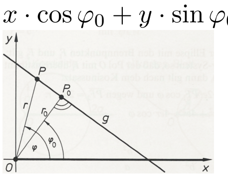
Normalengleichung
$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$

Quadratischer Mittelwert (= Effektivwert)
$\bar{f} = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)^2 dx}$

2.5 Tangenten- & Normalenabschnitt, Subtangente & Subnormale S. 249ff

2.6 Abstandsformeln

Hessesche Normalform S. 200f, 222
$x \cdot \cos\varphi_0 + y \cdot \sin\varphi_0 = r_0$



Geradengleichung
$y - y_0 = m(x - x_0)$

Abstand zum Ursprung
$\frac{|y_0 - m \cdot x_0|}{\sqrt{m^2+1}}$

2.7 Berührung in n-ter Ordnung

Zwei explizit gegebene Kurven $y = f(x)$ und $y = g(x)$ berühren einander im Punkt P x_0, y_0 von der Ordnung n, wenn die Funktionswerte und die ersten n Ableitungen existieren und übereinstimmen.
$f(x_0) = g(x_0);\ f'(x_0) = g'(x_0);\ f''(x_0) = g''(x_0);\ \ldots;\ f^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0) \qquad f^{(n+1)}(x_0) \neq g^{(n+1)}(x_0)$

2.8 Scheitel S. 254

Scheitelpunkte sind Extremalwerte der Krümmungs- bzw. Krümmungsradiusfunktion. Falls bei $\kappa'(x)$ an der Stelle x_0 ein Vorzeichenwechsel besteht, existiert dort eine Extremalstelle.

2.9 Krümmung

Die Krümmung entspricht der Steigung pro Weg: $\kappa = \frac{d\alpha}{ds} = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{det\begin{pmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{pmatrix}}{|\dot{c}|^3}$

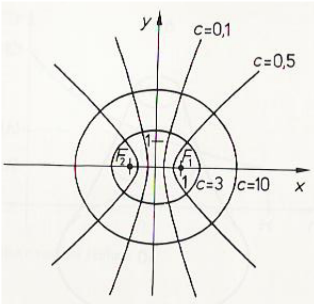
$\kappa > 0$	Linkskrümmung	konvex
$\kappa = 0$	Wendepunkt	
$\kappa < 0$	Rechtskrümmung	konkav

Der Krümmungsradius ergibt sich aus dem Kehrwert der Krümmung: $\rho = \frac{1}{\kappa}$

2.10 Wichtige Formeln S. FF S60

Siehe Tabelle 4.1 im Ahnang.

2.11 Orthogonale Trajektorien



Die orthogonalen Trajektorien schneiden alle Kurven der gegebenen Kurvenschar $y = f(x, c)$ im rechten Winkel (orthogonal).
Vorgehen:
1. Kurvenschar $y = f(x, c)$ nach c auflösen
2. c in der abgeleiteten Gleichung ersetzen
3. y' durch $-\frac{1}{y'}$ ersetzen
4. DGL auflösen (sofern nötig...)

Beispiel:
Gesucht: Orthogonalen Trajektorien der Kurvenschar $y = c \cdot x$ mit $c \in \mathbb{R}$.
Die Differentialgleichung ergibt sich mit $c = y'$ zu $y = y' \cdot c$.
Für die orthogonalen Trajektorien gilt also: $y = -\frac{1}{y'} * x$.
Diese Gleichung kann zu $y \cdot y' = -x$ umgeformt werden.
Durch Integration folgt: $\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + c_1$, also $x^2 + y^2 = k$
Das sind für $k > 0$ konzentrische Kreise um den Nullpunkt.

Info: Die Kreise sind Orthogonaltrajektorien der Hyperbeln und umgekehrt.

$$\frac{r'}{r} = f(\varphi, r) \quad \xrightarrow{\text{orthogonal}} \quad \frac{r'}{r} = -\frac{1}{f(\varphi, r)}$$

3 Grenzwerte mitn n-ten Wurzeln und Fakultäten

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$	für jede konstante Zahl x
$\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[n]{a}) = 1$	für jede konstante Zahl $a > 0$
$\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n}) = 1$	
$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n^a}\right) = 1$	für jede konstante Zahl α
$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{p(n)}\right) = 1$	für jede Polynomfunktion $p(n)$ mit $lim_{n\to\infty} p(n) = \infty$
$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{r(n)}\right) = 1$	für jede rationale Funktion $r(n)$ mit $lim_{n\to\infty} r(n) = \infty$
$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{K^n}{n!}\right) = 0$	für jede konstante Zahl K
$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n!}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n}\right) = +\infty$	
$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{\frac{K^n}{n!}}\right) = 0$	für jede konstante Zahl $K > 0$
$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\right) = e$	Eulersche Zahl

4 Anhang: Tabellen

4.1 Wichtige Formeln S. FF S60

Geometrischer Begriff	karthesische Koordianten	Parameter Darstellung	Polarkoordinaten
Anstieg in $P_0 \in C$	$y' = f'(x_0)$	$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ $y'' = \frac{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}$	$y' = \frac{f'(\varphi_0)\sin\varphi_0 + f(\varphi_0)\cos\varphi_0}{f'(\varphi_0)\cos\varphi_0 - f(\varphi_0)\sin\varphi_0}$
Bogenlänge zwischen P_1,$P_2 \in C$	$s = \int_b^a \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$	$\lvert s\rvert = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2(t)}dt$	$\lvert s\rvert = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{(f'(\varphi))^2+(f(\varphi))^2}d\varphi$
Krümmung in $P_0 \in C$	$\kappa = \frac{f''(x_0)}{(\sqrt{1+(f'(x_0))^2})^3}$	$\kappa = \frac{\dot{x}(t_0)\ddot{y}(t_0)-\dot{y}(t_0)\ddot{x}(t_0)}{(\sqrt{\dot{x}(t_0))^2+(\dot{y}(t_0))^2})^3}$	$\kappa = \frac{2(f'(\varphi))^2-f(\varphi_0)f''(\varphi)+(f(\varphi_0))^2}{(\sqrt{(f'(\varphi_0))^2+(f(\varphi_0))^2})^3}$
Flächeninhalt einer Fläche mit dem Rand C	$A = \int_b^a f(x)dx$	$A = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}[x(t)\dot{y}(t)-\dot{x}(t)y(t)]dt$	$A = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}(f(\varphi))^2d\varphi$
Volumen eines Rotationskörpers mit dem Meridian C (Rotation um x)	$V = \pi\int_a^b (f(x))^2dx$	$V = \pi\left\lvert\int_{t_1}^{t_2}(y(t))^2\dot{x}(t)dt\right\rvert$	$V = \pi\left\lvert\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f^2(\varphi)\sin^2\varphi[f'(\varphi)\cos\varphi - f(\varphi)\sin\varphi]d\varphi\right\rvert$
Oberlächeninhalt eines Rotationskörpers mit dem Meridian C	$O = 2\pi\int_a^b \lvert f(x)\rvert\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$	$O = 2\pi\int_{t_1}^{t_2}\lvert y(t)\rvert\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}dt$	$O = 2\pi\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\lvert f(\varphi)\sin\varphi\rvert\sqrt{(f'(\varphi))^2+(f(\varphi))^2}d\varphi$

4.2 Einige unbestimmte Integrale S. 1074

$\int dx = x + C$	$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ x\epsilon\mathbb{R}^+,\ \alpha\epsilon\mathbb{R}\backslash\{-1\}$
$\int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + C,\ x \neq 0$	$\int e^x dx = e^x + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ a\epsilon\mathbb{R}^+\backslash\{1\}$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C,\ x \neq k\pi$ mit $k\epsilon\mathbb{Z}$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C,\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ mit$k\epsilon\mathbb{Z}$	$\int \sinh x dx = \cosh x + C$
$\int \cosh x dx = \sinh x + C$	$\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\coth x + C,\ x \neq 0$
$\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x + C$	$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert + C,\ a \neq 0, x \neq -\frac{b}{a}$
$\int \frac{dx}{a^2x^2+b^2} = \frac{1}{ab}\arctan\frac{a}{b}x + C,\ a \neq 0,\ b \neq 0$	$\int \frac{dx}{a^2x^2-b^2} = \frac{1}{2ab}\ln\left\lvert\frac{ax-b}{ax+b}\right\rvert + C,\ a \neq 0,\ b \neq 0,\ x \neq \frac{b}{a},\ x \neq -\frac{b}{a}$
$\int \sqrt{a^2x^2+b^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2x^2+b^2} + \frac{b^2}{2a}\ln(ax+\sqrt{a^2x^2+b^2}) + C,\ a \neq 0,\ b \neq 0$	$\int \sqrt{a^2x^2-b^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2x^2-b^2} - \frac{b^2}{2a}\ln\lvert ax+\sqrt{a^2x^2-b^2}\rvert + C,\ a \neq 0,\ b \neq 0, a^2x^2 \geqq b^2$
$\int \sqrt{b^2-a^2x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{b^2-a^2x^2} + \frac{b^2}{2a}\arcsin\frac{a}{b}x + C,\ a \neq 0,\ b \neq 0,\ a^2x^2 \leqq b^2$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2x^2-b^2}} = \frac{1}{a}\ln(ax+\sqrt{a^2x^2+b^2}) + C,\ a \neq 0,\ b \neq 0$
$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2x^2-b^2}} = \frac{1}{a}\ln\lvert ax+\sqrt{a^2x^2-b^2}\rvert + C,\ a \neq 0,\ b \neq 0,\ a^2x^2 > b^2$	$\int \frac{dx}{\sqrt{b^2-a^2x^2}} = \frac{1}{a}\arcsin\frac{a}{b}x + C,\ a \neq 0,\ b \neq 0,\ a^2x^2 < b^2$
Die Integrale $\int \frac{dx}{X}, \int \sqrt{X}dx, \int \frac{dx}{\sqrt{X}}$ mit $X = ax^2 + 2bx + c,\ a \neq 0$ werden durch die Umformung $X = a(x+\frac{b}{a})^2 + (c - \frac{b^2}{a})$ und die Substitution $t = x + \frac{b}{a}$ in die oberen 4 Zeilen transformiert.	$\int \frac{xdx}{X} = \frac{1}{2a}\ln\lvert X\rvert - \frac{b}{a}\int\frac{dx}{X},\ a \neq 0,\ X = ax^2 + 2bx + c$
$\int \sin^2 ax dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4a}\cdot\sin 2ax + C,\ a \neq 0$	$\int \cos^2 ax dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4a}\cdot\sin 2ax + C,\ a \neq 0$
$\int \sin^n ax dx = -\frac{sin^{n-1}ax\cdot\cos ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int\sin^{n-2}ax dx,\ n\epsilon\mathbb{N},\ a \neq 0$	$\int \cos^n ax dx = \frac{\cos^{n-1}ax\cdot\sin ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}ax dx,\ n\epsilon\mathbb{N},\ a \neq 0$
$\int \frac{dx}{\sin ax} = \frac{1}{a}\ln\left\lvert\tan\frac{ax}{2}\right\rvert + C,\ a \neq 0,\ x \neq k\frac{\pi}{a}$ mit $k\epsilon\mathbb{Z}$	$\int \frac{dx}{\cos ax} = \frac{1}{a}\ln\left\lvert\tan(\frac{ax}{2}+\frac{\pi}{4})\right\rvert + C,\ a \neq 0,\ x \neq \frac{\pi}{2a} + k\frac{\pi}{a}$ mit $k\epsilon\mathbb{Z}$
$\int \tan ax dx = -\frac{1}{a}\ln\lvert\cos ax\rvert + C,\ a \neq 0,\ x \neq \frac{\pi}{2a} + k\frac{\pi}{a}$mit $k\epsilon\mathbb{Z}$	$\int \cot ax dx = \frac{1}{a}\ln\lvert\sin ax\rvert + C,\ a \neq 0,\ x \neq k\frac{\pi}{a}mitk\epsilon\mathbb{Z}$
$\int x^n \sin ax dx = -\frac{x^n}{a}\cos ax + \frac{n}{a}\int x^{n-1}\cos ax dx,\ n\epsilon\mathbb{N},\ a \neq 0$	$\int x^n \cos ax dx = \frac{x^n}{a}\sin ax - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\sin ax dx,\ n\epsilon\mathbb{N},\ a \neq 0$
$\int x^n e^{ax} dx = \frac{1}{a}x^n e^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}dx,\ n\epsilon\mathbb{N},\ a \neq 0$	$\int e^{ax}\sin bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C,\ a \neq 0,\ b \neq 0$
$\int e^{ax}\cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx) + C,\ a \neq 0,\ b \neq 0$	$\int \ln x dx = x(\ln x - 1) + C,\ x\epsilon\mathbb{R}^+$
$\int x^\alpha\cdot\ln x dx = \frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2}[(\alpha+1)\ln x - 1] + C,\ x\epsilon\mathbb{R}^+,\ \alpha\epsilon\mathbb{R}\backslash\{-1\}$	