1 Reihen S. 460, 465, 1066

1.1 Zahlenreihen S. 460

$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ ist eine (unendliche) Reihe. Sie ist die Folge von Partialsummen einer bestehenden Folge a_n.

1.1.1 Konvergenz, Divergenz S. 460

Konvergiert die Reihe $\langle s_n \rangle$ gegen die Summe $s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ so ist sie konvergent. Existiert der GW nicht, so ist sie divergent.

1.1.2 Geometrische Reihe

Es sei $a_1 \in \mathbb{R}$ und $q \in \mathbb{R} \backslash \{0; 1\}$, dann erhält man aus der geometrischen Folge $\langle a_k \rangle$ mit $a_k = a_1 \cdot q^{k-1}$ die geometrische Reihe $\langle s_n \rangle$ mit $s_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{n-1} = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$

Monotonie

$$\begin{array}{ll} s_n \leq 0 & \rightarrow \text{(streng) monoton Fallend} \\ s_m \geq 0 & \rightarrow \text{(streng) monoton Steigend} \\ 0 < q \leq 1 & \rightarrow \text{(streng) monoton Fallend} \\ 0 < q \geq 1 & \rightarrow \text{(streng) monoton Steigend} \end{array}$$

1.1.3 Harmonische Reihe

Aus der Folge $\langle a_n \rangle$ mit $a_n = \frac{1}{n}$ erhalten wir die harmonisch Reihe mit $\langle s_n \rangle$ mit $s_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots = \infty$

1.1.4 Alternierende Harmonische Reihe

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} = ln(2)$ (bedingt konvergent)

$$\sum_{n=1}^{n} \frac{x^n}{n^\alpha} \begin{cases} x = 1 : \begin{cases} \textbf{konvergiert für } \alpha > 1 \\ \textbf{konvergiert für } \alpha \leq 1 \end{cases} \\ x = -1 : \begin{cases} \textbf{konvergiert für } \alpha > 0 \\ \textbf{konvergiert für } \alpha \leq 0 \end{cases} \end{cases}$$

1.1.5 Konvergenzkriterien

Eine konvergente oder divergente Reihe bleibt konvergent oder divergent auch wenn man endlich viele Summanden entfernt! Abschätzung Restglied = Fehlerabschätzung.

Cauchy-Kriterium Wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Index n_0 existiert, so dass für alle $m > n > n_0$ gilt: $\left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| < \varepsilon$, dann konvergiert die Reihe, ansonsten divergiert sie.

Nullfolgenkriterium (lim = 0) S. 461 Wenn eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann ist a_n eine Nullfolge ($\lim_{n \to \infty} a_n = 0$). Warnung: Dass a_k eine Nullfolge ist, ist nur ein notwendiges, aber kein hinreichendes Kriterium für die Konvergenz der Reihe.

Divergenz Ist $< a_n >$ divergent oder ist $\lim_{n \to \infty} a_n \neq 0$, so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

Teleskopsumme (Raffsumme) Eine Teleskopsumme ist eine Summe der Form $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$.

Hier heben sich benachbarte Summanden auf. Man erhält: $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n) = a_{k+1} - a_1$

MajorantenkriteriumS. 469 Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergent, so konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ für $|a_n| \leq c_n$ (absolut). Dies gilt auch für $|a_n| \leq c_n$ erst ab einer Stelle $n_0 \in \mathbb{N}$.

Minorantenkriterium Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ gegen $+\infty$ divergent, so gilt dies auch für die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bei $a_n \geq d_n$. Dies gilt auch für $a_n \geq d_n$ erst ab einer Stelle $n_0 \in \mathbb{N}$.

Reziprokkriterium $s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ ist konvergent für $\alpha > 1$ und divergent für $\alpha \leq 1$.

QuotientenkriteriumS. 464 $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \alpha$ der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$\alpha < 1 \Rightarrow$ (absolut) konvergent $\alpha > 1 \Rightarrow$ divergent $\alpha = 1 \Rightarrow$ keine Aussage!

WurzelkriteriumS. 464f $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \alpha$ der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$\alpha < 1 \Rightarrow$ (absolut) konvergent $\alpha > 1 \Rightarrow$ divergent $\alpha = 1 \Rightarrow$ keine Aussage!

IntegralkriteriumS. 465 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ ist konvergent, wenn das uneigentliche Integral $\int_1^{\infty} f(x)dx$ konvergent ist. Gilt nur, wenn f auf $[1, \infty)$ definiert und monoton fallend ist. Zudem muss $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [1, \infty)$ sein.

Leibniz-KriteriumS. 466 Die **alternierende** Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent, wenn die Folge $< |a_n| >$ eine monoton fallende Nullfolge ($\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$) ist.

Monotonie mittels Verhältnis ($\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$), Differenz ($|a_{n+1}| - |a_n|$) oder *vollständiger Induktion* beweisen.

Abschätzung Restglied einer alternierenden konvergenten ReiheS. 466,470 (Fehlerabschätzung)

$|R_n| = |s - s_n| \leq |a_{n+1}|$

1.1.6 Bedingte und Absolute KonvergenzS. 465

Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heisst **absolut konvergent**, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent ist.
Bedingt Konvergent: Eine Reihe hat durch Umordnen einen anderen Grenzwert oder wird divergent.
Unbedingt Konvergent: Durch Umordnen ändert sich der Grenzwert nicht.

1.1.7 Produkt von absolut konvergenten ReihenS. 466

Gegeben sei: $\sum a_n = a, \quad \sum b_n = b, \quad \sum c_n = (\sum a_n) \cdot (\sum b_n) = c$ so ist $c_n = \sum a_k b_{n-k+1}$ und $c = a \cdot b$

1.1.8 Fehlerformel

$|s_n - s| \leq |a_{n+1}|$

1.2 Potenzreihen

DefinitionS. 432 Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ heisst Potenzreihe mit Entwicklungspunkt x_0 und Koeffizienten a_n. Die durch Differentiation entstehende Potenzreihe hat denselben Konvergenzradius wie die ursprüngliche.

Geometrische Reihe S. 19 $\frac{a}{1-x} = a \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ $(|x| < 1)$ Beidseitiges $\int$ $\Rightarrow$ $a \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -a \cdot \ln|x-1|$

Binominalreihe $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ $x \in (-1,1)$

Taylor-Reihe S. 474 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x-x_0)^n$ Taylor-Reihe von f bezüglich der Stelle x_0

E-Funktion $e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots$

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n$ für $x_0 = 0$

1.2.1 Konvergenz S. 472

Gegeben sei die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = a$

Für $a = 0$ ist die Potenzreihe für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergent.

Für $a > 0$ ist die Potenzreihe für alle x mit $\begin{cases} |x| < \frac{1}{a} = \rho \Rightarrow & \text{absolut konvergent.} \\ |x| > \frac{1}{a} = \rho \Rightarrow & \text{divergent.} \end{cases}$

Ist die Folge $< \sqrt[n]{|a_n|} >$ nicht beschränkt, so ist die Potenzreihe nur für $x = 0$ konvergent.

1.2.2 Konvergenzradius S. 472

Jeder Potenzreihe kann ein Konvergenzradius ρ zugeordnet werden. Wobei gilt $\rho = \frac{1}{a}$ mit $a = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

Für $a = 0$ gilt $\rho = \infty$. Wenn a nicht exisitiert (Folge divergent) ist $\rho = 0$.

Berechnung mittels Quotientenkriterium: $\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

1.2.3 Differentiation

Alle Potenzreihen mit einem $\rho > 0$ sind für alle $x \in (-\rho, \rho)$ beliebig oft (gliedweise) differenzierbar.
Der Potenzradius ρ ist bei allen Ableitungen gleich demjenigen der Ursprungsfunktion. $\rho_f = \rho_{f^{(i)}}$.
Potenzreihe. Die durch Differentiation entstehende Potenzreihe hat denselben Konvergenzradius wie die ursprüngliche Potenzreihe.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1} \qquad f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) \cdot a_n x^{n-2} \qquad f^{(i)}(x) = \sum_{n=i}^{\infty} n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-i+1) \cdot a_n x^{n-i}$$

Bemerkung: Startwert $(n = 0)$ nur erhöhen, wenn bei x^n, n negativ werden würde!

1.2.4 Integration

Unbestimmtes Integral $\int \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \cdot x^{n+1}$ für alle $x \in (-\rho, \rho)$.

Bestimmtes Integral $\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \cdot x^{n+1}$ für alle $x \in (-\rho, \rho)$.

1.3 Einige Reihen

Leibniz-Reihe: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + = \frac{\pi}{4}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \rightarrow$ Ist divergent

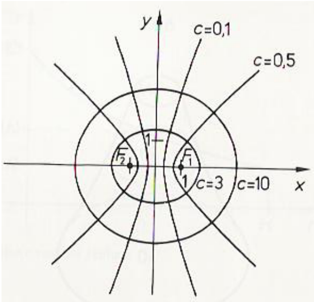
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \rightarrow$ Absolut konvergent gegen 1 (Beweis durch Integralkriterium)

1.4 Grenzwerte einiger Reihen

$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$	$\lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{a}) = 1 (a > 0$ und const. $)$	$\lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n}) = 1$
$\lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{\lvert p(n)\rvert}) = 1 (p(n) \neq 0)$	$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{K}{n!}\right) = 0 (K$ const. $)$	$\lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n!}) = +\infty$
$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\right) = e$	$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n^a}\right) = 1 (a$ const. $)$	$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{\frac{K^n}{n!}}\right) = 0 (K > 0$ und const. $)$

2 Anwendung der Differential- und Integralrechnung

2.1 Orthogonale Trajektorien



Die orthogonalen Trajektorien schneiden alle Kurven der gegebenen Kurvenschar $y = f(x, c)$ im rechten Winkel (orthogonal).
Vorgehen:
1. Kurvenschar $y = f(x, c)$ nach c auflösen
2. c in der abgeleiteten Gleichung ersetzen
3. y' durch $-\frac{1}{y'}$ ersetzen
4. DGL auflösen (sofern nötig...)

Beispiel:
Gesucht: Orthogonalen Trajektorien der Kurvenschar $y = c \cdot x$ mit $c \in \mathbb{R}$.
Die Differentialgleichung ergibt sich mit $c = y'$ zu $y = y' \cdot c$.
Für die orthogonalen Trajektorien gilt also: $y = -\frac{1}{y'} * x$.
Diese Gleichung kann zu $y \cdot y' = -x$ umgeformt werden.
Durch Integration folgt: $\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + c_1$, also $x^2 + y^2 = k$
Das sind für $k > 0$ konzentrische Kreise um den Nullpunkt.

Info: Die Kreise sind Orthogonaltrajektorien der Hyperbeln und umgekehrt.
$\frac{r'}{r} = f(\varphi, r) \xrightarrow{\text{orthogonal}} \frac{r'}{r} = -\frac{1}{f(\varphi, r)}$

3 Differentialgleichungen S. 543

3.1 Lösen von Differentialgleichungen 1. Ordnung

3.1.1 Picard-Lindelöf

Die Funktion $f(x, u, u_1, \ldots, u_{n-1})$ sei in einer Umgebung der Stelle $(x_0, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) \in \mathbf{R}^{\mathbf{n}+1}$ stetig und besitzt dort stetige partielle Ableitungen nach $u, u_1, \ldots, u_{n-1}$, dann existiert in einer geeigneten Umgebung des Anfangspunktes x_0 genau eine Lösung des Anfangswertproblems.
$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$ mit $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$

$\frac{\partial f(x,y,y,\ldots)}{\partial y} \ldots \frac{\partial f}{\partial f^{(n-1)}}$ endlich beschränkt $\Rightarrow$ eindeutige Lösbarkeit

3.1.2 Trennung von Variabeln / Separation S. 545

Form: $y' = f(x)g(y)$ **Vorgehen:** 1. DGL umstellen: $\frac{y'}{g(y)} = f(x)$

2. Beidseitig nach x integrieren wobei $dx = \frac{dy}{y'}$

3. Genzen anpassen: $\int_{y_0=y(x_0)}^{y} \frac{1}{g(y)} dy = \int_{x}^{x_0} f(x) dx$

3.1.3 Lineartermsubstitution S. 545

Form: $y' = f(ax + by + c)$ **Vorgehen:** 1. Substitution: $z = ax + by + c$

2. Einsetzen in $z' = a + by' = a + bf(z)$

3. Separation: $\int_{x_0}^{x} \frac{z'}{a+bf(z)} d\tilde{x} = \int 1 d\tilde{x}$

$\Rightarrow \int_{z_0}^{z} \frac{1}{a+bf(\tilde{z})} d\tilde{z} = \int_{x_0}^{x} 1 d\tilde{x} \quad \left[d\tilde{z} = \underbrace{(a + by')}_{z'} d\tilde{x} \right]$

3.1.4 Gleichgradigkeit

Form: $y' = f(\frac{y}{x})$ **Vorgehen:** 1. Substitution: $z = \frac{y}{x}$

2. Einsetzen in $z' = \frac{1}{x}(f(z) - z)$

3. Seperation: $\frac{z'}{f(z)-z} = \frac{1}{x}$ wobei $z_0 = \frac{y_0}{x_0}$

3.1.5 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung S. 546

Form: $y' + f(x)y = g(x)$ **Vorgehen:** Homogene Rechunug: $y_H = k \cdot e^{-\int f(x) \cdot dx}$

Inhomogene Rechunug: $y_P = (\int g(x) \cdot e^{\int f(x) \cdot dx} \cdot dx) \cdot e^{-\int f(x) \cdot dx}$

Allgemeine Lösung: $y = y_H + y_P$ wobei $k = \frac{y_0 - y_P(x_0)}{e^{\int f(x_0) \cdot dx)}}$

3.2 Lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten S. 564

Form: $y'' + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = f(x)$ **Störglied:** $f(x)$

Homogene Differentialgleichung: $f(x) = 0$ **Inhomogene Differentialgleichung:** $f(x) \neq 0$

3.2.1 Allgemeine Lösung einer homogenen DGL: $y = Y_H$

Charakteristisches Polynom $\lambda^2 + a_1 \cdot \lambda + a_0 = 0$ von $y'' + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = 0$ $\left(\lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \frac{\sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2}\right)$

2 Lösungen	$(D > 0)$	Falls $\lambda_1 \neq \lambda_2$ und $\lambda_{1,2} \in R:$	$Y_H = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}$	}starke Dämpfung
1 Lösung	$(D = 0)$	Falls $\lambda_1 = \lambda_2$ und $\lambda_{1,2} \in R:$	$Y_H = e^{\lambda_1 x}(A + B \cdot x)$	}aperiodischer Grenzfall
Komplex. Lösung	$(D < 0)$	Falls $\lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm j\alpha:$	$Y_H = e^{-\frac{1}{2}a_1 x}(A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x))$	}schwache Dämpfung / Schwingfall

Eigenfrequenz: $\omega = \alpha = \frac{\sqrt{|a_1^2 - 4a_0|}}{2}$ Dämpfung: $|\delta| = |\lambda| = |\lambda|$

3.2.2 Allgemeine Lösung einer inhomogenen DGL: $y = Y_H + Y_P$

3.2.3 Grundlöseverfahren (Faltungsintegral)

$Y_H = g(x)$ und $Y_P = f(t)$

Anfangsbedingungen: $g(x_0) = g'(x_0) = g''(x_0) = ... = g^{(n-2)}(x_0) = 0$ und $g^{(n-1)}(x_0) = 1$ (Mit $x_0 = 0$)

$$y_P(x) = \int_{x_o}^{x} g(x + x_0 - t) \cdot f(t) dt$$

3.2.4 Ansatz in Form des Störglieds

Allgemeines Vorgehen:
1. Ermitteltes y_P m mal ableiten (m = Grad des Polynoms)
2. Ableitungen in DGL einsetzen
3. Koeffizientenvergleich

$\underline{f(x) = p_n(x)}$

$a_0 \neq 0$:	$y_P = q_n(x)$
$a_0 = 0, a_1 \neq 0$:	$y_P = x \cdot q_n(x)$
$a_0 = a_1 = 0$:	$y_P = x^2 \cdot q_n(x)$

$f(x) = e^{bx} \cdot p_n(x)$

b nicht Nullstelle des char. Polynoms:	$y_P = e^{bx} \cdot q_n(x)$
b einfache Nullstelle des char. Polynoms:	$y_P = e^{bx} \cdot x \cdot q_n(x)$
b zweifache Nullstelle des char. Polynoms:	$y_P = e^{bx} \cdot x^2 \cdot q_n(x)$

$f(x) = e^{cx}(p_n(x)\cos bx + q_n(x)\sin bx)$

$c + jb$ **nicht** Lösung der char. Gleichung	$y_p = e^{cx}(r_n(x)\cos bx + s_n(x)\sin bx)$
$c + jb$ Lösung der char. Gleichung	$y_p = e^{cx}x(r_n(x)\cos bx + s_n(x)\sin bx)$

3.2.5 Superpositionsprinzip

$f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$

y_1 ist spezielle Lösung der DGL	$y'' + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = c_1 f_1(x)$
y_2 ist spezielle Lösung der DGL	$y'' + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = c_2 f_2(x)$
dann ist:	$y_P = c_1 y_1 + c_2 y_2$

3.2.6 Faltung

$f(x) = \int_0^x f_1(x-t) f_2(t) dt$ Schreibweise $f = f_1 * f_2$

3.3 Lineare Differentialgleichung n. Ordnung mit konstanten Koeffizienten S. 554

Form: $\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_0 \cdot y = f(x)$

3.3.1 Homogene Lösungen

$Y_H = Ay_1 + By_2 + Cy_3 + \ldots + Ny_n$

Charakteristische Gleichung hat die

a) r-fache Lösung (NS) $\lambda_1 \in \mathbb{R}$:	$y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = xe^{\lambda_1 x}$, $\ldots$, $y_r = x^{r-1}e^{\lambda_1 x}$	Starke Dämpfung
b) k-fache Lösung (NS) $\lambda_2 \in \mathbb{C}$ mit $\lambda_2 = \alpha + j \cdot \beta$	$y_1 = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$, $\ldots$, $y_k = e^{\alpha x}x^{k-1}\cos(\beta x)$	Schwache Dämpfung
sowie $\lambda_3 = \overline{\lambda_2}$	$y_{k+1} = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$, $\ldots$, $y_{2k} = e^{\alpha x}x^{k-1}\sin(\beta x)$	

3.3.2 Inhomogene Lösungen

Grundlösungsverfahren

Integral siehe 3.2.3 Grundlösungsverfahren

$$\begin{pmatrix} g(x_0) = & 0 & = & c_1 g_1(x_0) + c_2 g_2(x_0) + \ldots + c_n(x_0) \\ g'(x_0) = & 0 & = & c_1 g_1'(x_0) + c_2 g_2'(x_0) + \ldots + c_n g_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & & \\ g^{(n-1)}(x_0) = & 1 & = & c_1 g_1^{(n-1)}(x_0) + c_2 g_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + c_n g_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix}$$

Ergibt $c_1, \ldots, c_n$ für
$y_P(x) = \int_{x_0}^{x} g(x + x_0 - t) f(t) dt$
$g_1(x_0) = Y_H$

Ansatz in Form des Störgliedes

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}{}_{f(y,y',y'',\dots)} = \underbrace{e^{\alpha x}(p_{m1}(x)\cos(\beta x) + q_{m2}(x)\sin(\beta x))}_{\text{Störglied}} \qquad \text{mit } m = max(m1, m2)$$

a) $\alpha + j \cdot \beta$ ist nicht Lösung der charakt. Gleich. $\quad y_P = e^{\alpha x}(r_m(x)\cos(\beta x) + s_m(x)\sin(\beta x))$

b) $\alpha + j \cdot \beta$ ist r-fache Lösung der charakt. Gleich. $\quad y_P = e^{\alpha x} x^r (r_m(x)\cos(\beta x) + s_m(x)\sin(\beta x))$ r-fache Resonanz

3.3.3 Anfangswertproblem

$y\,(x_0) = y_0 \quad y'\,(x_0) = y_1 \quad y''\,(x_0) = y_2 \quad \dots \quad y^{(n-1)}\,(x_0) = y_{n-1}$

3.3.4 Hornerschema S. 914

- Pfeile $\Rightarrow$ Multiplikation
- Zahlen pro Spalte werden addiert

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_1	a_0
x_1		$b_{n-1}x_1$	$b_{n-2}x_1$	$\cdots$	b_1x_1	b_0x_1
	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\cdots$	b_0	$f(x_1)$

$x_1 \Rightarrow$ Nullstelle (muss erraten werden!!)
oberste Zeile = zu zerlegendes Polynom

Beispiel:
$f(x) = x^3 - 67x - 126$

	1	0	-67	-126
$x_1 = -2$		-2	4	$+126$
	1	-2	-63	$0 = f(-2)$
	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	
	b_2	b_1	b_0	

$\Rightarrow f(x) = (x - x_1)(b_2x^2 + b_1x + b_0) = (x+2)(x^2 - 2x - 63)$

3.4 Lineare Differentialgleichungssysteme erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Form:
$$\begin{array}{l} \dot{x} = ax + by + f(t) \\ \dot{y} = cx + dy + g(t) \end{array} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}$$

Allgemeine Lösung ergibt sich aus der DGL: $\underbrace{\ddot{x} - (a+d)\dot{x} + (ad-bc)x = \dot{f}(t) - df(t) + bg(t)}_{\text{normale DGL 2. Ordnung} \rightarrow \text{ nach } x \text{ auflösen}}$

Anfangsbedienung: $x_0\,(t_0) = x_0, \dot{x}_0\,(t_0) = ax_0 + by_0 + f\,(t_0)$

Anordnung beachten! Gesuchte Grösse immer zu oberst (in diesem Fall ist die gesuchte Grösse x)

4 Anhang: Tabellen

4.1 Wichtige Formeln S. FF S60

Geometrischer Begriff	karthesische Koordianten	Parameter Darstellung	Polarkoordinaten
Anstieg in $P_0 \in C$	$y' = f'(x_0)$	$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}\ y'' = \frac{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}$	$y' = \frac{f'(\varphi_0)\sin\varphi_0+f(\varphi_0)\cos\varphi_0}{f'(\varphi_0)\cos\varphi_0-f(\varphi_0)\sin\varphi_0}$
Bogenlänge zwischen P_1,$P_2 \in C$	$s = \int_b^a \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$	$\lvert s\rvert = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2(t)}dt$	$\lvert s\rvert = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{(f'(\varphi))^2+(f(\varphi))^2}d\varphi$
Krümmung in $P_0 \in C$	$\kappa = \frac{f''(x_0)}{(\sqrt{1+(f'(x_0))^2})^3}$	$\kappa = \frac{\dot{x}(t_0)\ddot{y}(t_0)-\dot{y}(t_0)\ddot{x}(t_0)}{(\sqrt{\dot{x}(t_0))^2+(\dot{y}(t_0))^2})^3}$	$\kappa = \frac{2(f'(\varphi))^2-f(\varphi_0)f''(\varphi)+(f(\varphi_0))^2}{(\sqrt{(f'(\varphi_0))^2+(f(\varphi_0))^2})^3}$
Flächeninhalt einer Fläche mit dem Rand C	$A = \int_b^a f(x)dx$	$A = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}[x(t)\dot{y}(t)-\dot{x}(t)y(t)]dt$	$A = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}(f(\varphi))^2d\varphi$
Volumen eines Rotationskörpers mit dem Meridian C (Rotation um x)	$V = \pi\int_a^b (f(x))^2dx$	$V = \pi\left\lvert\int_{t_1}^{t_2}(y(t))^2\dot{x}(t)dt\right\rvert$	$V = \pi\left\lvert\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f^2(\varphi)\sin^2\varphi[f'(\varphi)\cos\varphi - f(\varphi)\sin\varphi]d\varphi\right\rvert$
Oberlächeninhalt eines Rotationskörpers mit dem Meridian C	$O = 2\pi\int_a^b \lvert f(x)\rvert\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$	$O = 2\pi\int_{t_1}^{t_2}\lvert y(t)\rvert\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}dt$	$O = 2\pi\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\lvert f(\varphi)\sin\varphi\rvert\sqrt{(f'(\varphi))^2+(f(\varphi))^2}d\varphi$

4.2 Einige unbestimmte Integrale S. 1074

$\int dx = x + C$	$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ x\epsilon\mathbb{R}^+,\ \alpha\epsilon\mathbb{R}\backslash\{-1\}$
$\int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + C,\ x \neq 0$	$\int e^x dx = e^x + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ a\epsilon\mathbb{R}^+\backslash\{1\}$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C,\ x \neq k\pi$ mit $k\epsilon\mathbb{Z}$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C,\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ mit$k\epsilon\mathbb{Z}$	$\int \sinh x dx = \cosh x + C$
$\int \cosh x dx = \sinh x + C$	$\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\coth x + C,\ x \neq 0$
$\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x + C$	$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert + C,\ a \neq 0, x \neq -\frac{b}{a}$
$\int \frac{dx}{a^2x^2+b^2} = \frac{1}{ab}\arctan\frac{a}{b}x + C,\ a \neq 0,\ b \neq 0$	$\int \frac{dx}{a^2x^2-b^2} = \frac{1}{2ab}\ln\left\lvert\frac{ax-b}{ax+b}\right\rvert + C,\ a \neq 0,\ b \neq 0,\ x \neq \frac{b}{a},\ x \neq -\frac{b}{a}$
$\int \sqrt{a^2x^2+b^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2x^2+b^2} + \frac{b^2}{2a}\ln(ax+\sqrt{a^2x^2+b^2}) + C,\ a \neq 0,\ b \neq 0$	$\int \sqrt{a^2x^2-b^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2x^2-b^2} - \frac{b^2}{2a}\ln\lvert ax+\sqrt{a^2x^2-b^2}\rvert + C,\ a \neq 0,\ b \neq 0, a^2x^2 \geqq b^2$
$\int \sqrt{b^2-a^2x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{b^2-a^2x^2} + \frac{b^2}{2a}\arcsin\frac{a}{b}x + C,\ a \neq 0,\ b \neq 0,\ a^2x^2 \leqq b^2$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2x^2-b^2}} = \frac{1}{a}\ln(ax+\sqrt{a^2x^2+b^2}) + C,\ a \neq 0,\ b \neq 0$
$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2x^2-b^2}} = \frac{1}{a}\ln\lvert ax+\sqrt{a^2x^2-b^2}\rvert + C,\ a \neq 0,\ b \neq 0,\ a^2x^2 > b^2$	$\int \frac{dx}{\sqrt{b^2-a^2x^2}} = \frac{1}{a}\arcsin\frac{a}{b}x + C,\ a \neq 0,\ b \neq 0,\ a^2x^2 < b^2$
Die Integrale $\int \frac{dx}{X}, \int \sqrt{X}dx, \int \frac{dx}{\sqrt{X}}$ mit $X = ax^2+2bx+c,\ a \neq 0$ werden durch die Umformung $X = a(x+\frac{b}{a})^2+(c-\frac{b^2}{a})$ und die Substitution $t = x+\frac{b}{a}$ in die oberen 4 Zeilen transformiert.	$\int \frac{xdx}{X} = \frac{1}{2a}\ln\lvert X\rvert - \frac{b}{a}\int\frac{dx}{X},\ a \neq 0,\ X = ax^2+2bx+c$
$\int \sin^2 axdx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4a}\cdot\sin 2ax + C,\ a \neq 0$	$\int \cos^2 axdx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4a}\cdot\sin 2ax + C,\ a \neq 0$
$\int \sin^n axdx = -\frac{sin^{n-1}ax\cdot\cos ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int\sin^{n-2}axdx,\ n\epsilon\mathbb{N},\ a \neq 0$	$\int \cos^n axdx = \frac{\cos^{n-1}ax\cdot\sin ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}axdx,\ n\epsilon\mathbb{N},\ a \neq 0$
$\int \frac{dx}{\sin ax} = \frac{1}{a}\ln\left\lvert\tan\frac{ax}{2}\right\rvert + C,\ a \neq 0,\ x \neq k\frac{\pi}{a}$ mit $k\epsilon\mathbb{Z}$	$\int \frac{dx}{\cos ax} = \frac{1}{a}\ln\left\lvert\tan(\frac{ax}{2}+\frac{\pi}{4})\right\rvert + C,\ a \neq 0,\ x \neq \frac{\pi}{2a} + k\frac{\pi}{a}$ mit $k\epsilon\mathbb{Z}$
$\int \tan axdx = -\frac{1}{a}\ln\lvert\cos ax\rvert + C,\ a \neq 0,\ x \neq \frac{\pi}{2a} + k\frac{\pi}{a}$mit $k\epsilon\mathbb{Z}$	$\int \cot axdx = \frac{1}{a}\ln\lvert\sin ax\rvert + C,\ a \neq 0,\ x \neq k\frac{\pi}{a}mitk\epsilon\mathbb{Z}$
$\int x^n\sin axdx = -\frac{x^n}{a}\cos ax + \frac{n}{a}\int x^{n-1}\cos axdx,\ n\epsilon\mathbb{N},\ a \neq 0$	$\int x^n\cos axdx = \frac{x^n}{a}\sin ax - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\sin axdx,\ n\epsilon\mathbb{N},\ a \neq 0$
$\int x^ne^{ax}dx = \frac{1}{a}x^ne^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}dx,\ n\epsilon\mathbb{N},\ a \neq 0$	$\int e^{ax}\sin bxdx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C,\ a \neq 0,\ b \neq 0$
$\int e^{ax}\cos bxdx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx) + C,\ a \neq 0,\ b \neq 0$	$\int \ln xdx = x(\ln x - 1) + C,\ x\epsilon\mathbb{R}^+$
$\int x^\alpha\cdot\ln xdx = \frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2}[(\alpha+1)\ln x - 1] + C,\ x\epsilon\mathbb{R}^+,\ \alpha\epsilon\mathbb{R}\backslash\{-1\}$	