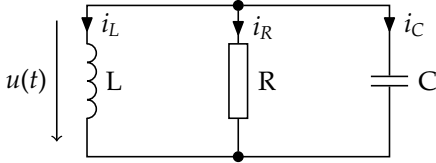
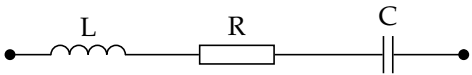


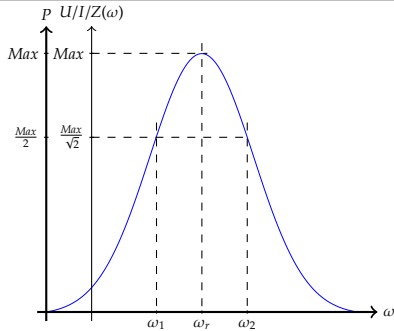
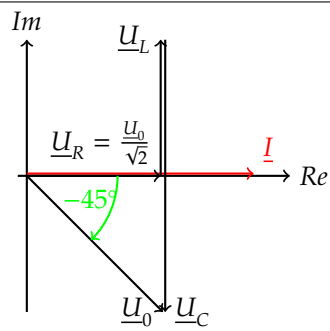
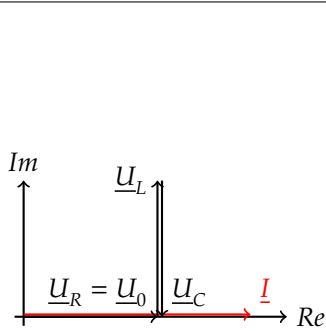
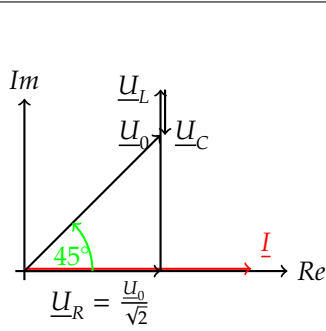
1 Schwingkreise

1.1 Freie Schwingung

Die Werte U_1, U_2, β_u sowie I_1, I_2, β_i müssen aus den Anfangswerten bestimmt werden.

	Parallelschwingkreis	Serienschwingkreis
		
DGL	$\ddot{u} + \frac{1}{RC}\dot{u} + \frac{1}{LC}u = 0$ $\ddot{u} + \frac{\omega_r}{Q_P}\dot{u} + \omega_r^2 u = 0$	$\ddot{i} + \frac{R}{L}\dot{i} + \frac{1}{LC}i = 0$ $\ddot{i} + \frac{\omega_r}{Q_S}\dot{i} + \omega_r^2 i = 0$
Resonanzfrequenz	$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$	
Güte	$Q_P = R\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{R}{\omega_r L} = R\omega_r C$	$Q_S = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\omega_r L}{R} = \frac{1}{R\omega_r C}$
Dämpfungsfaktor	$\xi = \frac{1}{2Q}$	
Standardstartbedingungen	$u(t=0) = U_0 \quad \dot{u}(t=0) = -\frac{U_0}{RC}$	$i(t=0) = 0 \quad \dot{i}(t=0) = \frac{U_0}{L}$
Aperiodisch, $Q < \frac{1}{2}$	$u(t) = U_1 e^{\alpha_1 t} + U_2 e^{\alpha_2 t}$ $\alpha_{1,2} = -\frac{\omega_r}{2Q_P} \pm \omega_r \sqrt{\frac{1}{4Q_P^2} - 1}$ $U_1 = U_0 \frac{\frac{\omega_r}{Q} + \alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1} \quad U_2 = U_0 \frac{\frac{\omega_r}{Q} + \alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2}$	$i(t) = I_1 e^{\alpha_1 t} + I_2 e^{\alpha_2 t}$ $\alpha_{1,2} = -\frac{\omega_r}{2Q_S} \pm \omega_r \sqrt{\frac{1}{4Q_S^2} - 1}$ $I_1 = \frac{U_0}{(\alpha_1 - \alpha_2)L} \quad I_2 = -I_1$
Kritisch, $Q = \frac{1}{2}$	$u(t) = (U_1 + \beta_u t)e^{\alpha t} = (U_1 + \beta_u t)e^{-\omega_r t}$ $\alpha_{1,2} = -\frac{\omega_r}{2Q_P} = -\omega_r$ $U_1 = U_0 \quad \beta = -U_0 \left(\frac{\omega_r}{Q} + \alpha \right)$	$u(t) = (I_1 + \beta_i t)e^{\alpha t} = (I_1 + \beta_i t)e^{-\omega_r t}$ $\alpha_{1,2} = -\frac{\omega_r}{2Q_S} = -\omega_r$ $I_1 = 0 \quad \beta = \frac{U_0}{L}$
Periodisch, $Q > \frac{1}{2}$	$u(t) = U_1 e^{\alpha_1 t} + U_2 e^{\alpha_2 t}$ $\alpha_{1,2} = -\frac{\omega_r}{2Q_P} \pm j\omega_r \sqrt{1 - \frac{1}{4Q_P^2}}$ $\omega_0 = \omega_r \sqrt{1 - \frac{1}{4Q_P^2}} \quad \omega_0 \approx \omega_r (Q_P > 10)$ $u(t) = \frac{U_0 \omega_r}{\omega_0} e^{-\frac{\omega_r}{2Q_P} t} \cos \left[\omega_0 t + \arctan \frac{1}{\sqrt{4Q_P^2 - 1}} \right]$	$i(t) = I_1 e^{\alpha_1 t} + I_2 e^{\alpha_2 t}$ $\alpha_{1,2} = -\frac{\omega_r}{2Q_S} \pm j\omega_r \sqrt{1 - \frac{1}{4Q_S^2}}$ $\omega_0 = \omega_r \sqrt{1 - \frac{1}{4Q_S^2}} \quad \omega_0 \approx \omega_r (Q_S > 10)$ $I_1 = \frac{U_0}{L \cdot 2 \cdot j\omega_0} \quad I_2 = -I_1 \quad i(t) = \frac{U_0}{\omega_0 L} e^{-\xi \omega_r t} \sin(\omega_0 t)$

1.2 Erzwungene Schwingung

Maximalwerte	$I_{Lmax} = I_{Cmax} = \frac{I \cdot Q_P}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q_P^2}}}$ $\omega_{I_{Lmax}} = \omega_r \sqrt{1 - \frac{1}{2Q_P^2}} \quad \omega_{I_{Cmax}} = \frac{\omega_r}{\sqrt{1 - \frac{1}{2Q_P^2}}}$	Gilt auch für $U_{Lmax} = U_{Cmax}$ bei dem Serieschwingkreis, jedoch muss Q_P mit Q_S ersetzt werden.	
Bandbreite, Verstimmung		$b_w = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_r}{Q}$ $B = \frac{f_r}{Q} = \frac{b_w}{2\pi}$ $\eta = \frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega} \quad \frac{Z}{R} = \frac{U}{U_{max}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\eta Q)^2}}$	
	$\omega = \omega_1$	$\omega = \omega_r$	$\omega = \omega_2$
Zeigerdiagramme			

1.3 Verlustbehafteter Schwingkreis

Resonanzfrequenz ω_r tritt dort auf, wo $\text{Im}\{Y(\omega)\} = \text{Im}\{Z(\omega)\} = 0$.

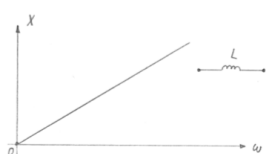
1.4 Resonanzkreis mit realen Elementen

Umrechnungen Parallel- \iff Serieschaltungen von L & R oder C & R.

	Parallel \Rightarrow Seriell	Seriell \Rightarrow Parallel
L & R	$R_S = \frac{R_P(\omega L_P)^2}{R_P^2 + (\omega L_P)^2} \quad L_S = \frac{R_P^2 L_P}{R_P^2 + (\omega L_P)^2}$	$R_P = \frac{R_S^2 + (\omega L_S)^2}{R_S} \quad L_P = \frac{R_S^2 + (\omega L_S)^2}{\omega^2 L_S}$
C & R	$R_S = \frac{R_P}{1 + (\omega R_P C_P)^2} \quad C_S = \frac{1 + (\omega R_P C_P)^2}{(\omega R_P)^2 C_P}$	$R_P = \frac{(\omega C_S R_S)^2 + 1}{(\omega C_S)^2 R_S} \quad C_P = \frac{C_S}{1 + (\omega C_S R_S)^2}$

2 RET - Reaktanz-Eintore

2.1 Reaktanzen



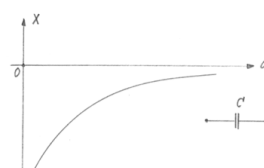
Induktivität

$$\underline{Z} = j\omega L \quad X = \omega L$$

$$B = -\frac{1}{\omega L}$$

Nullstelle: $\lim_{\omega \rightarrow 0} X(\omega) = 0$

Polstelle: $\lim_{\omega \rightarrow \infty} X(\omega) = \infty$



Kapazität

$$\underline{Z} = \frac{1}{j\omega C} = \frac{-j}{\omega C} \quad X = \frac{-1}{\omega C}$$

$$B = \omega C$$

Nullstelle: $\lim_{\omega \rightarrow \infty} X(\omega) = 0$

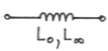
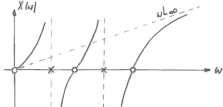
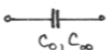
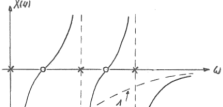
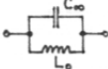
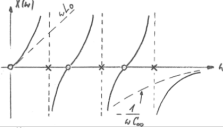
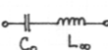
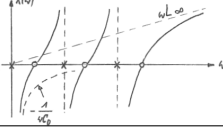
Polstelle: $\lim_{\omega \rightarrow 0} X(\omega) = -\infty$

2.2 Vorgehen bei Netzwerkanalyse

1. Schaltung übersichtlich aufzeichnen und den Startpunkt der Addition bestimmen

2. Frequenzverlauf der Reaktanz finden durch fortgeschrittene Addition und Inversion
3. Inversion: $B(\omega) = \frac{-1}{X(\omega)}$; Polstelle \iff Nullstelle
4. Die so entstandenen Pole und Nullstellen, ausser 0 und ∞ sind die Resonanzfrequenzen des RET

2.3 RET-Typen

Typ	Reaktanz	Impedanzfunktion		Verhalten gegen 0/ ∞	Grad/Potenz
Summenform	Produktform				
L-Typ 		$\underline{Z}(p) = p \frac{a_n p^{n-1} + \dots + a_1}{b_m p^m + \dots + b_0}$	$= \frac{j\omega L_\infty [(j\omega)^2 + \omega_2^2] [\dots]}{[(j\omega)^2 + \omega_1^2] [\dots]}$	$\underline{Z}(p) \mid_{\rightarrow \infty} = p \frac{a_n}{b_m} = p L_\infty$ $\underline{Z}(p) \mid_{\rightarrow 0} = p \frac{a_1}{b_0} = p L_0$	$n : \text{ungerade}$ $m = n - 1$
C-Typ 		$\underline{Z}(p) = \frac{1}{p} \frac{a_n p^n + \dots + a_0}{b_m p^{m-1} + \dots + b_1}$	$= \frac{[(j\omega)^2 + \omega_2^2] [\dots]}{j\omega C_\infty [(j\omega)^2 + \omega_1^2] [\dots]}$	$\underline{Z}(p) \mid_{\rightarrow \infty} = \frac{1}{p} \frac{a_n}{b_m} = \frac{1}{p C_\infty}$ $\underline{Z}(p) \mid_{\rightarrow 0} = \frac{1}{p} \frac{a_1}{b_0} = \frac{1}{p C_0}$	$n : \text{gerade}$ $m = n + 1$
P-Typ 		$\underline{Z}(p) = p \frac{a_n p^{n-1} + \dots + a_1}{b_m p^m + \dots + b_0}$	$= \frac{j\omega [(j\omega)^2 + \omega_3^2] [\dots]}{C_\infty [(j\omega)^2 + \omega_2^2] [(j\omega)^2 + \omega_1^2] [\dots]}$	$\underline{Z}(p) \mid_{\rightarrow \infty} = \frac{1}{p} \frac{a_n}{b_m} = \frac{1}{p C_\infty}$ $\underline{Z}(p) \mid_{\rightarrow 0} = p \frac{a_1}{b_0} = p L_0$	$n : \text{ungerade}$ $m = n + 1$
S-Typ 		$\underline{Z}(p) = \frac{1}{p} \frac{a_n p^n + \dots + a_0}{b_m p^{m-1} + \dots + b_1}$	$= \frac{[L_\infty (j\omega)^2 + \omega_2^2] [(j\omega)^2 + \omega_4^2] [\dots]}{j\omega [(j\omega)^2 + \omega_3^2] [\dots]}$	$\underline{Z}(p) \mid_{\rightarrow \infty} = p \frac{a_n}{b_m} = p L_\infty$ $\underline{Z}(p) \mid_{\rightarrow 0} = \frac{1}{p} \frac{a_1}{b_0} = \frac{1}{p C_0}$	$n : \text{gerade}$ $m = n - 1$

2.4 Minimalreaktanzeintor (MRET)

1. Netzwerk übersichtlich aufzeichnen
2. Tor offen; Kreise suchen die nur L oder C enthalten; Ein Element des Kreises weglassen, es darf aber kein anderer Zweig stromlos werden.
3. Tor kurzgeschlossen; Trennbündel suchen (Knoten an denen nur L oder C liegen); Ein Element kurzschliessen, dabei darf kein anderes Element kurzgeschlossen werden.
4. Die verbleibenden Elemente im MRET haben nicht mehr die gleichen Grössen und müssen neu berechnet werden.

2.5 Dualität

Vorgehen

1. Netzwerk ohne Kreuzungen aufzeichnen
2. In jede Masche (auch in Umfangsmasche) einen dualen Knoten setzen
3. Knoten von anstossenden Maschen verbinden. Jeder dieser Maschen hat gemeinsamen Zweig (dualen Zweig).
4. In die dualen Zweige die dualen Schaltungselemente einsetzen.

$$C \leftrightarrow L$$

$$R \leftrightarrow G$$

$$u \leftrightarrow i$$

$$\underline{Z} \leftrightarrow \underline{Y}$$

$$\text{Knoten} \leftrightarrow \text{Masche} \quad \text{Stern} \leftrightarrow \text{Dreieck}$$

$$\text{Parallelschaltung} \leftrightarrow \text{Serieschaltung}$$

$$\text{Stromquelle} \leftrightarrow \text{Spannungsquelle}$$

Zahlenwerte der Dual-Elemente

$$R' = D^2 G \quad C' = \frac{L}{D^2} \quad U' = DI$$

$$L' = D^2 C \quad G' = \frac{R}{D^2} \quad I' = \frac{U}{D}$$

$$D = \text{Dualfaktor} [\Omega]$$

$$\text{Impedanzfunktion } Z_D(s) = \frac{1}{Z(s)}$$

2.6 Netzwerksynthese

Mittels Partialbruchzerlegung

1. $j\omega \Rightarrow p$

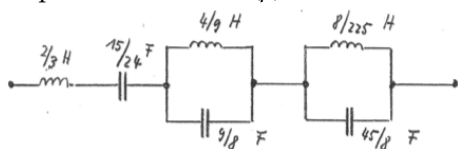
$$F(p) = \frac{2p^6 + 22p^4 + 68p^2 + 48}{3p^5 + 21p^3 + 30p}$$
2. $F(p)$ Ausdividieren, falls $n > m$
3. Nenner des echten Bruches zerlegen und Ansatz bilden

$$\frac{2}{3}p + \frac{8p^4 + 48p^2 + 48}{3p^5 + 21p^3 + 30p} = \frac{A}{3p} + \frac{Bp}{p^2 + 2} + \frac{Cp}{p^2 + 5}$$
4. Erweitern und Koeffizienten bestimmen

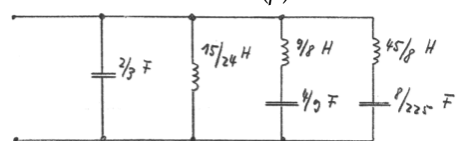
$$A = \frac{24}{5} \quad B = \frac{8}{9} \quad C = \frac{8}{45}$$
5. Koeffizienten einsetzen

$$F(p) = \frac{2}{3}p + \frac{1}{15} \frac{1}{p} + \frac{1}{9} \frac{1}{p + \frac{1}{3}} + \frac{1}{45} \frac{1}{p + \frac{1}{5}}$$
6. Schaltung aufzeichnen:
 (Schaltung ist MRET!)

Impedanzfunktion $Z(p)$:



Admittanzfunktion $Y(p)$:



Mittels Kettenbruchzerlegung

1. $j\omega \Rightarrow p$

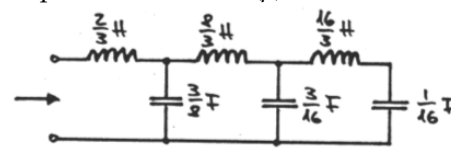
$$F(p) = \frac{2p^6 + 22p^4 + 68p^2 + 48}{3p^5 + 21p^3 + 30p}$$
2. $F(p)$ ausdividieren

$$= \frac{2}{3}p + \frac{8p^4 + 48p^2 + 48}{3p^5 + 21p^3 + 30p}$$
3. Kehrwert des Restes wieder ausdividieren

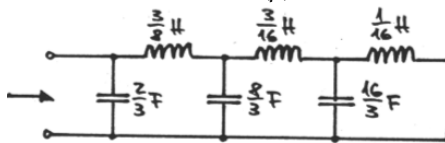
$$\frac{2}{3}p + \frac{1}{\frac{3p^5 + 21p^3 + 30p}{8p^4 + 48p^2 + 48}} = \frac{2}{3}p + \frac{1}{\frac{3}{8}p + \frac{3p^3 + 12p}{8p^4 + 48p^2 + 48}}$$
4. Schritt zwei wiederholen bis kein Rest mehr vorhanden ist

$$F(P) = \frac{2}{3}p + \frac{1}{\frac{3}{8}p + \frac{1}{\frac{8}{3}p + \frac{1}{\frac{3}{16}p + \frac{1}{\frac{16}{5}p + \frac{1}{\frac{1}{16}p}}}}}$$
5. Schaltung aufzeichnen:

Impedanzfunktion $Z(p)$:

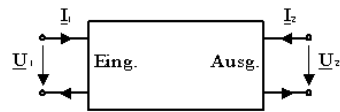


Admittanzfunktion $Y(p)$:



3 Vierpole

3.1 Vierpolgleichungen und ihre Parameter



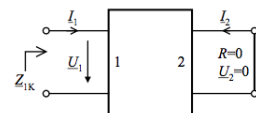
Prim. Kurzschluss: $\underline{U}_1 = 0$
 Sek. Kurzschluss: $\underline{U}_2 = 0$

Prim. Leerlauf: $I_1 = 0$
 Sek. Leerlauf: $I_2 = 0$

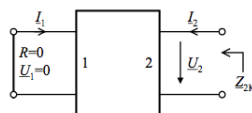
Form	Vierpolgleichung	Δ_{11}	Δ_{12}	Δ_{21}	Δ_{22}	Matrixform
Impedanzform	$\underline{U}_1 = \underline{Z}_{11}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{12}\underline{I}_2$ $\underline{U}_2 = \underline{Z}_{21}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{22}\underline{I}_2$	$\underline{Z}_{11} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} \mid_{\underline{I}_2=0}$	$\underline{Z}_{12} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2} \mid_{\underline{I}_1=0}$	$\underline{Z}_{21} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_1} \mid_{\underline{I}_2=0}$	$\underline{Z}_{22} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} \mid_{\underline{I}_1=0}$	$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = [\underline{Z}] \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix}$
Admittanzform	$\underline{I}_1 = \underline{Y}_{11}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{12}\underline{U}_2$ $\underline{I}_2 = \underline{Y}_{21}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{22}\underline{U}_2$	$\underline{Y}_{11} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1} \mid_{\underline{U}_2=0}$	$\underline{Y}_{12} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2} \mid_{\underline{U}_1=0}$	$\underline{Y}_{21} = \frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_1} \mid_{\underline{U}_2=0}$	$\underline{Y}_{22} = \frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_2} \mid_{\underline{U}_1=0}$	$\begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = [\underline{Y}] \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix}$
Kettenform	$\underline{U}_1 = \underline{A}_{11}\underline{U}_2 + \underline{A}_{12}\underline{I}_2$ $\underline{I}_1 = \underline{A}_{21}\underline{U}_2 + \underline{A}_{22}\underline{I}_2$	$\underline{A}_{11} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} \mid_{\underline{I}_2=0}$	$\underline{A}_{12} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2} \mid_{\underline{U}_2=0}$	$\underline{A}_{21} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2} \mid_{\underline{I}_2=0}$	$\underline{A}_{22} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} \mid_{\underline{U}_2=0}$	$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = [\underline{A}] \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix}$
Hybridform	$\underline{U}_1 = \underline{H}_{11}\underline{I}_1 + \underline{H}_{12}\underline{U}_2$ $\underline{I}_2 = \underline{H}_{21}\underline{I}_1 + \underline{H}_{22}\underline{U}_2$	$\underline{H}_{11} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} \mid_{\underline{U}_2=0}$	$\underline{H}_{12} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} \mid_{\underline{I}_1=0}$	$\underline{H}_{21} = \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} \mid_{\underline{U}_2=0}$	$\underline{H}_{22} = \frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_2} \mid_{\underline{I}_1=0}$	$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = [\underline{H}] \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix}$

3.2 Leerlauf und Kurzschlussimpedanzen

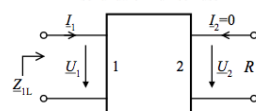
	\underline{Z}	\underline{Y}	\underline{A}	\underline{H}
\underline{Z}_{1K}	$\frac{\det(\underline{Z})}{\underline{Z}_{22}}$	$\frac{1}{\underline{Y}_{11}}$	$\frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{22}}$	\underline{H}_{11}
\underline{Z}_{2K}	$\frac{\det(\underline{Z})}{\underline{Z}_{11}}$	$\frac{1}{\underline{Y}_{22}}$	$\frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}}$	$\frac{\underline{H}_{11}}{\det(\underline{H})}$
\underline{Z}_{1L}	\underline{Z}_{11}	$\frac{\underline{Y}_{22}}{\det(\underline{Y})}$	$\frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{21}}$	$\frac{\det(\underline{H})}{\underline{H}_{22}}$
\underline{Z}_{2L}	\underline{Z}_{22}	$\frac{\underline{Y}_{11}}{\det(\underline{Y})}$	$\frac{\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{21}}$	$\frac{1}{\underline{H}_{22}}$



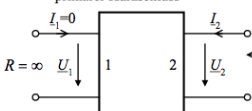
sekundärer Kurzschluss



primärer Kurzschluss

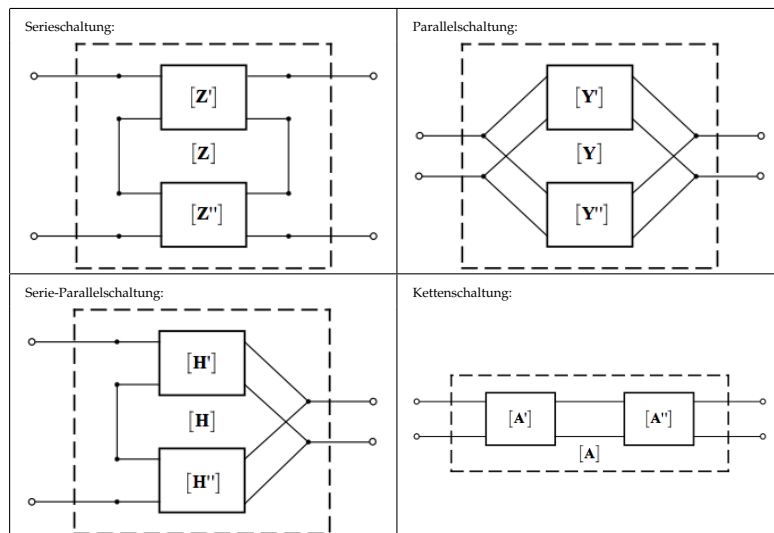


sekundärer Leerlauf



primärer Leerlauf

3.3 Zusammenschalten von 2-Toren

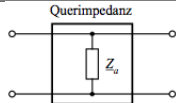
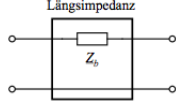
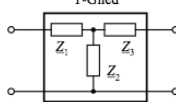
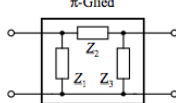
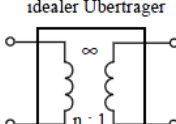
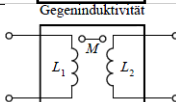


Schaltung	Matrix	allgemeine Form
Serieschaltung	$[\underline{Z}] = [\underline{Z}'] + [\underline{Z}']$	$\underline{U}_1 = (\underline{Z}'_{11} + \underline{Z}''_{11})\underline{I}_1 + (\underline{Z}'_{12} + \underline{Z}''_{12})\underline{I}_2$ $\underline{U}_2 = (\underline{Z}'_{21} + \underline{Z}''_{21})\underline{I}_1 + (\underline{Z}'_{22} + \underline{Z}''_{22})\underline{I}_2$
Parallelschaltung	$[\underline{Y}] = [\underline{Y}'] + [\underline{Y}']$	$\underline{I}_1 = (\underline{Y}'_{11} + \underline{Y}''_{11})\underline{U}_1 + (\underline{Y}'_{12} + \underline{Y}''_{12})\underline{U}_2$ $\underline{I}_2 = (\underline{Y}'_{21} + \underline{Y}''_{21})\underline{U}_1 + (\underline{Y}'_{22} + \underline{Y}''_{22})\underline{U}_2$
Serie-Parallelschaltung	$[\underline{H}] = [\underline{H}'] + [\underline{H}']$	$\underline{U}_1 = (\underline{H}'_{11} + \underline{H}''_{11})\underline{I}_1 + (\underline{H}'_{12} + \underline{H}''_{12})\underline{U}_2$ $\underline{I}_2 = (\underline{H}'_{21} + \underline{H}''_{21})\underline{I}_1 + (\underline{H}'_{22} + \underline{H}''_{22})\underline{U}_2$
Kettenschaltung	$[\underline{A}] = [\underline{A}'] \cdot [\underline{A}']$	$\underline{U}_1 = (\underline{A}'_{11}\underline{A}''_{11} + \underline{A}'_{12}\underline{A}''_{21})\underline{U}_2 + (\underline{A}'_{11}\underline{A}''_{12} + \underline{A}'_{12}\underline{A}''_{22})\underline{I}_2$ $\underline{I}_1 = (\underline{A}'_{21}\underline{A}''_{11} + \underline{A}'_{22}\underline{A}''_{21})\underline{U}_2 + (\underline{A}'_{21}\underline{A}''_{12} + \underline{A}'_{22}\underline{A}''_{22})\underline{I}_2$

3.4 Umkehrung eines 2-Tores

	\tilde{X}	$\det(\tilde{X})$
\tilde{Z}	$\begin{bmatrix} \underline{Z}_{22} & \underline{Z}_{21} \\ \underline{Z}_{12} & \underline{Z}_{11} \end{bmatrix}$	$\det(Z)$
\tilde{Y}	$\begin{bmatrix} \underline{Y}_{22} & \underline{Y}_{21} \\ \underline{Y}_{12} & \underline{Y}_{11} \end{bmatrix}$	$\det(Y)$
\tilde{A}	$\frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} \underline{A}_{22} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{11} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\det(A)}$
\tilde{H}	$\frac{1}{\det(H)} \begin{bmatrix} \underline{H}_{11} & -\underline{H}_{21} \\ -\underline{H}_{12} & \underline{H}_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\det(H)}$

3.5 Spezielle 2-Tore

	Z	Y	A
 <p>Quersimpedanz</p>	$\begin{bmatrix} \underline{Z}_a & \underline{Z}_a \\ \underline{Z}_a & \underline{Z}_a \end{bmatrix}$	-	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\underline{Z}_a} & 1 \end{bmatrix}$
 <p>Längsimpedanz</p>	-	$\begin{bmatrix} \frac{1}{\underline{Z}_b} & -\frac{1}{\underline{Z}_b} \\ -\frac{1}{\underline{Z}_b} & \frac{1}{\underline{Z}_b} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & \underline{Z}_b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
 <p>T-Glied</p>	$\begin{bmatrix} \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 & \underline{Z}_2 \\ \underline{Z}_2 & \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_3 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_3} \begin{bmatrix} \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 & -\underline{Z}_2 \\ -\underline{Z}_2 & \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} & \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2} \\ \frac{1}{\underline{Z}_2} & 1 + \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2} \end{bmatrix}$
 <p>π-Glied</p>	$\frac{1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} \begin{bmatrix} \underline{Z}_1(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) & -\underline{Z}_1 \underline{Z}_3 \\ -\underline{Z}_1 \underline{Z}_3 & \underline{Z}_3(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} & -\frac{1}{\underline{Z}_2} \\ -\frac{1}{\underline{Z}_2} & \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_3} & \underline{Z}_2 \\ \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_3} + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_3} & 1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1} \end{bmatrix}$
 <p>idealer Übertrager</p>	existiert nicht	existiert nicht	$\begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{bmatrix}$
 <p>Gegeninduktivität</p>	$\begin{bmatrix} sL_1 & sM \\ sM & sL_2 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\sigma} \begin{bmatrix} \frac{1}{sL_1} & -\frac{k^2}{sM} \\ -\frac{k^2}{sM} & \frac{1}{sL_2} \end{bmatrix} \quad \sigma = 1 - k^2$	$\begin{bmatrix} \frac{L_1}{sM} & sM(k^{-2} - 1) \\ \frac{1}{sM} & \frac{L_2}{M} \end{bmatrix} \quad k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$

4 Leitungstheorie

4.1 Leitungsgleichungen

/bilder/LeitungselementESB.png

Leitungsbeläge

$R'[\frac{\Omega}{m}]$: Widerstandsbelag

$L'[\frac{H}{m}]$: Induktivitätsbelag

$G'[\frac{S}{m}]$: Leitwertbelag

$C'[\frac{F}{m}]$: Kapazitätsbelag

Leerlauf:

$$\underline{Y}_L = \frac{1}{\underline{Z}_L} = \frac{I_L}{U} = G + j\omega C = \frac{\alpha l + j\beta l}{\underline{Z}_W}$$

Kurzschluss:

$$\underline{Z}_K = \frac{U}{I_K} = R + j\omega L = (\alpha l + j\beta l)\underline{Z}_W$$

$$\underline{U}_1 = \cosh(\gamma l) \cdot \underline{U}_2 + \underline{Z}_W \cdot \sinh(\gamma l) \cdot \underline{I}_2$$

$$\underline{I}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_W} \cdot \sinh(\gamma l) \cdot \underline{U}_2 + \cosh(\gamma l) \cdot \underline{I}_2$$

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\gamma l) & \underline{Z}_W \sinh(\gamma l) \\ \frac{1}{\underline{Z}_W} \sinh(\gamma l) & \cosh(\gamma l) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix}$$

wenn $\alpha l \gg \beta l$ kann $\cosh(\gamma l) \approx \sinh(\gamma l) = \frac{1}{2}e^{\gamma l}$ angenommen werden!!!

4.1.1 Verlustbehaftete Leitungen

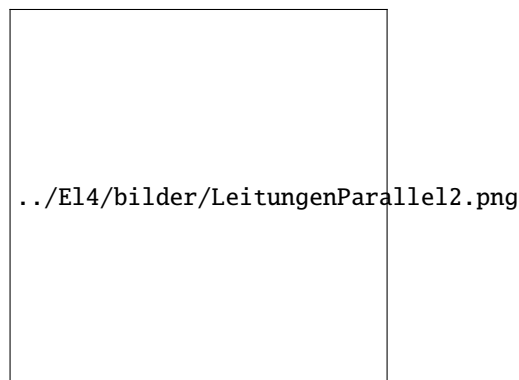
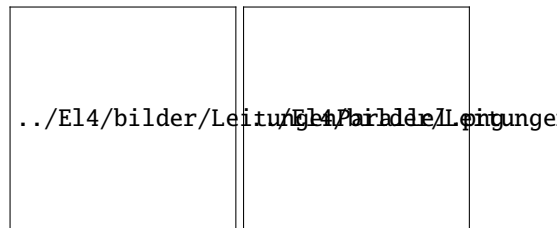
Fortpflanzungskonstante	$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')}$ $\alpha = [\frac{Np}{m}]$ $\beta = [\frac{^\circ}{m}]$
Dämpfungsmass	$\alpha l = \frac{1}{2} \ln(\operatorname{Re}\{e^{2\gamma l}\}) = \alpha \cdot l$
Phasenmass	$\beta l = \frac{1}{2} \ln(\operatorname{Im}\{e^{2\gamma l}\}) = \beta \cdot l$ $\beta = \frac{\omega}{v_p}$
Wellenwiderstand	$\underline{Z}_W = \frac{U}{I} = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}} = \sqrt{\underline{Z}_L \cdot \underline{Z}_K}$
Eingangswid. \underline{Z}_1 bei Abschluss mit Lastwid. \underline{Z}_a	$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_W \frac{\underline{Z}_a + \underline{Z}_W \tanh(\gamma l)}{\underline{Z}_W + \underline{Z}_a \tanh(\gamma l)} = \underline{Z}_W \frac{e^{+\gamma l} + \Gamma_{Last} e^{-\gamma l}}{e^{+\gamma l} - \Gamma_{Last} e^{-\gamma l}}$
Phasengeschwindigkeit, Wellenlänge	$v_p = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} = \frac{\lambda}{T}$ $\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{v_p}{f} \approx \lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}$ $\beta = [rad]$
Freiraumwellenlänge	$\lambda_0 = \frac{c}{f} = \frac{2\pi c}{\omega}$ $c \approx 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$
Wellengleichung	$\underline{U}(z) = \underline{U}_0^+ \cdot e^{-\gamma z} + \underline{U}_0^- \cdot e^{\gamma z}$ $\underline{I}(z) = \underline{I}_0^+ \cdot e^{-\gamma z} - \underline{I}_0^- \cdot e^{\gamma z}$ <p style="text-align: center;">hinlaufend rücklaufend</p>
Reflektions-, Transmissionskoeffizienten	$\Gamma_{Last} = \frac{\underline{U}^-}{\underline{U}^+} = \frac{\underline{Z}_{Last} - \underline{Z}_W}{\underline{Z}_{Last} + \underline{Z}_W}$ bzw. $\Gamma_{Quelle} = \frac{\underline{Z}_{Quelle} - \underline{Z}_W}{\underline{Z}_{Quelle} + \underline{Z}_W}$ $\tau = 1 + \Gamma$
Keine Reflexion bei:	$\underline{Z}_{Last} = \underline{Z}_W$ bzw. $\underline{Z}_{Quelle} = \underline{Z}_W$
Totalreflexion	$\Gamma = -1 \Rightarrow \underline{Z}_{Last} = \underline{Z}_{Quelle} = 0$ ideale U-Quelle (Kurzschluss) $\Gamma = +1 \Rightarrow \underline{Z}_{Last} = \underline{Z}_{Quelle} = \infty$ ideale I-Quelle (Leerlauf)
Neper	$1dB = \frac{\ln(10)}{20} Np$ $U_2 = U_1 \cdot e^{L_U}$
Bei Abschluss mit \underline{Z}_W	$\underline{U}_1(z) = \underline{U}_2 \cdot e^{\gamma z}$ $\underline{I}_1(z) = -\underline{I}_2 \cdot e^{\gamma z}$ $\alpha l = \ln(\frac{U_1}{U_2})$ $\beta l = \arg(\frac{U_1}{U_2})$
wichtige Formeln	$\gamma l = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + \sqrt{\underline{Z}_K / \underline{Z}_L}}{1 - \sqrt{\underline{Z}_K / \underline{Z}_L}}\right)$ $\sqrt{\frac{\underline{Z}_K}{\underline{Z}_L}} = \frac{e^{2\gamma l} - 1}{e^{2\gamma l} + 1}$ $e^{2\gamma l} = e^{2\alpha l} \cdot e^{j2\beta l} = \frac{1 + \sqrt{\underline{Z}_K / \underline{Z}_L}}{1 - \sqrt{\underline{Z}_K / \underline{Z}_L}}$

4.1.2 Verlustfreie Leitungen

Fortpflanzungskonstante	$\gamma = j\beta = j\omega \sqrt{L'C'} \quad R' = G' = \alpha = 0$
Dämpfungsmass	$\alpha = 0$
Phasenmass	$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \omega \sqrt{L'C'}$
Wellenwiderstand	$Z_W = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$
LE Leerlauf $\underline{I}_2 = 0 \quad \underline{\Gamma} = 1$	$\underline{Z}_1 = -j \frac{Z_W}{\tan(\beta l)}$
LE Kurzschluss $\underline{U}_2 = 0 \quad \underline{\Gamma} = -1$	$\underline{Z}_1 = jZ_W \tan(\beta l)$
LE mit \underline{Z}_{Last} abgeschlossen	$\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2} = \cosh(j\beta l) \underline{Z}_{Last} + Z_W \sinh(j\beta l)$ $\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} = \frac{1}{Z_W} \sinh(j\beta l) \underline{Z}_{Last} + \cosh(j\beta l)$

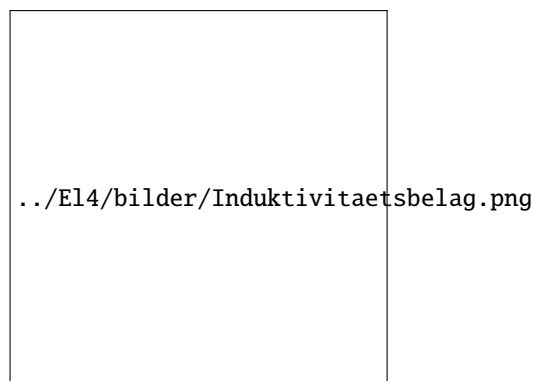
4.2 Kapazitätsbelag

Leiterpotential	$\vec{E} = -\text{grad}V \quad V(\varrho) = -\frac{\lambda}{\varepsilon_0 2\pi} \ln \frac{\varrho}{k}$
ϱ	Abstand zwischen Linienladungen und deren Spiegelungen
k	Integrationskonstante (kürzt sich weg)
ε_0	$8,85419 \cdot 10^{-12} [\frac{As}{Vs}]$
Leiterpotentiale (aus Beispiel)	$V_1 = \frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0} (-\ln \frac{r}{k} + \ln \frac{2a}{k}) + \frac{\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0} (-\ln \frac{\varrho_1}{k} + \ln \frac{\varrho_2}{k})$ $V_2 = \frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0} (-\ln \frac{\varrho_1}{k} + \ln \frac{\varrho_2}{k}) + \frac{\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0} (-\ln \frac{r}{k} + \ln \frac{2b}{k})$
Matrix Potentialkoeff.	$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & p_0 \\ p_0 & p_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$ $p_1 = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{2a}{r} \quad p_2 = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{2b}{r} \quad p_0 = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{\varrho_1}{\varrho_2}$
Matrix Kapazitätskoeff.	$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & C_0 \\ C_0 & C_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$ $C_1 = \frac{p_2}{\det p} \quad C_2 = \frac{p_1}{\det p} \quad C_0 = \frac{p_0}{\det p} = C_{12}$ $C_{10} = C_1 - C_0; C_{20} = C_2 - C_0$



4.3 Induktivitätsbelag

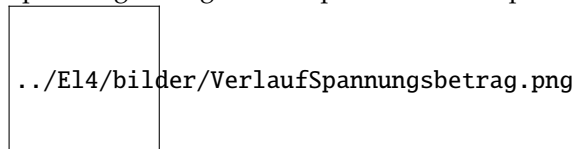
Rotation B-Feld	$\vec{B} = \text{rot} \vec{A} \quad A(\varrho) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left(\frac{\varrho}{k} \right)$
Linienströme	$+I \quad -I$
μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7} [\frac{Vs}{Am}]$
Leiterpotentiale (aus Beispiel)	$A^+ = \frac{\mu_0 I}{2\pi} (-\ln \frac{r}{k} + \ln \frac{\varrho_1}{k} - \ln \frac{2a}{k} + \ln \frac{\varrho_2}{k}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{\varrho_1 \varrho_2}{2ar}$ $A^- = \frac{\mu_0 I}{2\pi} (-\ln \frac{\varrho_1}{k} + \ln \frac{r}{k} - \ln \frac{\varrho_2}{k} + \ln \frac{2b}{k}) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{\varrho_1 \varrho_2}{2br}$
Äussere Induktivität	$L_a = \frac{1}{I} (A^+ - A^-) = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \left(\frac{\varrho_1 \varrho_2}{4r^2 ab} \right)$
Innere Induktivität	$L_i = \frac{\mu_0}{8\pi}$ pro Leiter
Induktivitätsbelag	$L' = L_a + 2L_i = \frac{\mu_0}{\pi} \left(\ln \left(\frac{\varrho_1 \varrho_2}{2r \sqrt{ab}} \right) + \frac{1}{4} \right)$



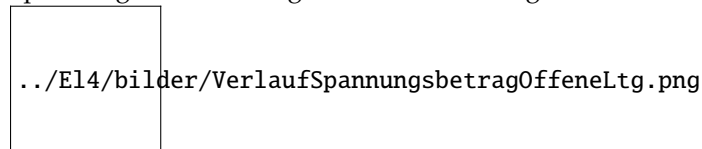
4.4 Stehende Wellen

Spannung	$ U(z) = U^+ e^{-j\beta z} (1 + \Gamma_L e^{2j\beta z}) = U^+ 1 + \Gamma_L e^{2j\beta z} = U^+ 1 + \Gamma_L e^{j(\Phi - 2\beta z)} $
Strom	$ I(z) = U^+ / Z 1 - \Gamma_L e^{j(\Phi - 2\beta z)} $
Spannungsmaxima bei:	$e^{j(\Phi - 2\beta z)} = 1$
Spannungsminima bei:	$e^{j(\Phi - 2\beta z)} = -1$

Spannungsbetrag mit kompl. Abschlussimpedanz:



Spannungs- Strombetrag der offenen Leitung:



4.4.1 Spezialfälle

Kurzschluss/Leerlauf

Bei Kurzschluss oder Leerlauf, also Reflexionsfaktor Γ ist -1 oder 1, verschwinden die Spannungs- Stromminima. Da die rückläufige Welle ebensoviel Energie transportiert wie die hinlaufende, wird längs der Leitung keine Energie transportiert. Es sieht also so aus, als ob die Welle am Ort stehen bleibt (Bild 2).

Leitung ideal abgeschlossen

Ist die Leitung ideal abgeschlossen, existiert keine reflektierende Welle. Die hinlaufende Welle transportiert so die gesamte Energie vom Sender zum Empfänger.

Leitung nicht ideal abgeschlossen

Es entsteht beim Empfänger eine Überlagerung der absorbierten und der stehenden Welle. Aus dem Verhältnis von Spannungsmaximum zu Spannungsminimum entsteht das Stehwellenverhältnis SWR.

$$\text{Stehwellenverhältnis : } SWR = \frac{U_{max}}{U_{min}} = \frac{1 + |\Gamma_L|}{1 - |\Gamma_L|} \quad \text{Betrag des Reflexionsfaktor : } |\Gamma_L| = \frac{SWR - 1}{SWR + 1}$$

4.5 Mehrfachreflexion

../El4/bilder/Leitungen_MFReflex_EnAP_SnAP.png

Das nebenstehende Schema zeigt eine Leitung, welche last- und quellenseitig falsch abgeschlossen ist. Zur Berechnung der Spannung \underline{U}_0^+ werden alle Widerstände am Leitungsende ignoriert ($\underline{Z}_L = 0$). Die reflektierenden Wellen werden anhand der Reflexionskoeffizienten Γ_{Last} , Γ_{Quelle} berechnet. Bsp.:

$$\begin{aligned} \underline{U}_0^+ &= \frac{U_{Quelle} \underline{Z}_0}{\underline{Z}_0 + \underline{Z}_L}; & \underline{U}_0^- &= \underline{U}_0^+ \cdot \Gamma_{Last}; \\ \underline{U}_1^+ &= \underline{U}_0^- \cdot \Gamma_{Quelle}; & \underline{U}_1^- &= \underline{U}_1^+ \cdot \Gamma_{Last}; \quad \text{usw.} \\ \underline{U}_{Resultierend} &= \underline{U}_0^+ + \underline{U}_0^- + \underline{U}_1^+ + \underline{U}_1^- + \dots + \underline{U}_n^+ + \underline{U}_n^- \end{aligned}$$

../El4/bilder/Leitungen_MFReflex_EnAP_SnAP_RaumZeit.png

../El4/bilder/Leitungen_MFReflex_EnAP_SnAP_Eingangsspannung.png

5 Smith Chart**5.1 Eigenschaften**

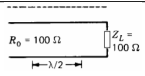
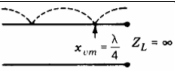
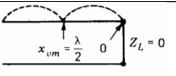
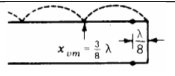
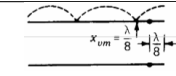
1. **Normieren:** $Z_{\text{einzutragen}} = \frac{Z}{Z_0}$
2. **Impedanz \Leftrightarrow Admittanz:** Am Kreismittelpunkt spiegeln
3. **Kurzschluss:** Impedanz Admittanz
4. **Leerlauf:** Impedanz Admittanz
5. **Phase:** Verlängerung der Reflexionsgerade an Kreisrand und Winkel ablesen
6. **SWR:** Kreis mit Radius $|\Gamma|$ auf reeller Achse
7. **Leitungslänge:** Äusserste Skala am Kreisrand $\frac{l}{\lambda}$
8. **Entnormieren:** $Z_{\text{gewünscht}} = Z_0 Z_{\text{abgelesen}}$

../El4/bilder/SmithChart2.png

5.2 Formeln

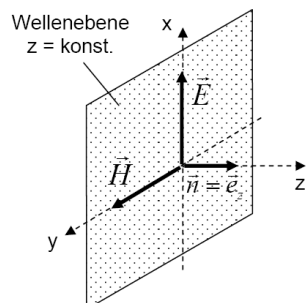
$$z = r + jx = \frac{1+\Gamma}{1-\Gamma} = \frac{1}{y} \quad \Gamma = \frac{z-1}{z+1} = \frac{1-y}{1+y}$$

5.3 Beispiele bei $Z_0 = 100\Omega$

Fall	1	2	3	4	5
LE	Anpassung	Leerlauf	Kurzschluss	$\lambda/8$ Stichleit. KS	$\lambda/8$ Stichleit. LL
SWR	1	∞	∞	∞	∞
Γ	0	$1\angle 0^\circ$	$1\angle 180^\circ$	$1\angle 90^\circ$	$1\angle 90^\circ$
z	$1 + j0$	$\infty + j\infty$	$0 + j0$	$0 + j1$	$0 - j1$
v_{xm}	—	$\lambda/4$	$\lambda/2$	$3\lambda/8$	$\lambda/8$
Grafik					

6 Elektromagnetische Felder

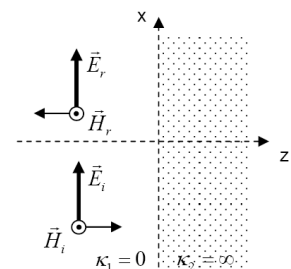
6.1 Elektromagnetische Wellenausbreitung



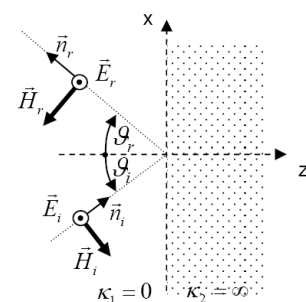
Definition Ebenen		
Wellenebene: Durch \vec{H} und \vec{E} aufgespannt.		
Trennebene: Grenzfläche zwischen den beiden Medien.		
Einfallebene: Durch Richtungsvektor der Wellenausbreitung und $\vec{n}_{Trennebene}$ aufgespannt.		
Wellenwiderstand	Wellenwid. - Vakuum	Wellengeschwindigkeit, -konstante
$Z = \frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$	$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi\Omega$	$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad v_0 = c \approx 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}; \quad \beta = \omega \sqrt{\mu\epsilon}$
Orientierung	Poynting Vektor	Konstanten
$Z \cdot \vec{H} = \vec{n} \times \vec{E}$	$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$	$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} [\frac{As}{Vm}] \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} [\frac{Vs}{Am}]$
Gebräuchliche Indizes		
i: incident = einfallend	r: reflected = reflektiert	t: transmitted = übermittelt

6.1.1 Leitender Halbraum

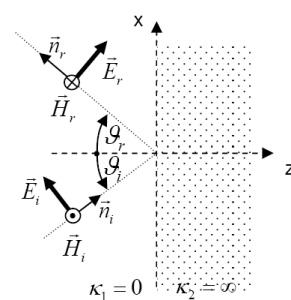
Die Welle wird an der Trennebene vollständig reflektiert.



Senkrecht einfallende Ebene Welle		
$E_r + E_i = 0 \Rightarrow E_r = -E_i$		
$\vec{E}_i(z) = \vec{e}_x E_i e^{-j\beta_1 z}$	$\vec{E}_r(z) = \vec{e}_x E_r e^{+j\beta_1 z}$	$\vec{H}_i(z) = \vec{e}_y \frac{E_i}{Z_1} e^{-j\beta_1 z}$
$\vec{E}_1(z) = \vec{e}_x E_i (e^{-j\beta_1 z} - e^{+j\beta_1 z}) = -\vec{e}_x j 2 E_i \sin(\beta_1 z)$		$\vec{H}_r(z) = \vec{e}_y \frac{E_i}{Z_1} e^{+j\beta_1 z}$
$E_1(z, t) = \text{Re} \{ \vec{E}_1(z) e^{j\omega t} \} = \vec{e}_x 2 E_i \sin(\beta_1 z) \sin(\omega t)$		$\vec{H}_1(z) = \vec{e}_y \frac{E_i}{Z_1} (e^{-j\beta_1 z} + e^{+j\beta_1 z}) = \vec{e}_y j 2 \frac{E_i}{Z_1} \cos(\beta_1 z)$
		$H_1(z, t) = \text{Re} \{ \vec{H}_1(z) e^{j\omega t} \} = \vec{e}_y 2 \frac{E_i}{Z_1} \cos(\beta_1 z) \cos(\omega t)$



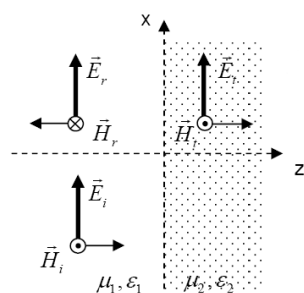
Schräg einfallende Welle	
Senkrechte Polarisation	Parallele Polarisation
$\vec{E} \perp \text{Einfallebene}$	$\vec{E} \parallel \text{Einfallebene}$
$\vec{n}_i = \vec{e}_x \sin(\vartheta_i) + \vec{e}_z \cos(\vartheta_i)$ $\vec{n}_r = \vec{e}_x \sin(\vartheta_i) - \vec{e}_z \cos(\vartheta_i)$ $\vec{r} = \vec{e}_x x + \vec{e}_z z; E_r = -E_i; \vartheta_r = \vartheta_i$ $\vec{E}_{i(x,z)} = \vec{e}_y E_i e^{-j\beta_1 \vec{n}_i \cdot \vec{r}}$ $\vec{E}_r(x, z) = \vec{e}_y E_i e^{-j\beta_1 \vec{n}_r \cdot \vec{r}} = -\vec{e}_y E_i e^{-j\beta_1 (x \sin(\vartheta_i) - z \cos(\vartheta_i))}$ $\vec{H}_{r(x,z)} = \frac{1}{Z_1} (\vec{n}_r \times \vec{E}_{r(x,z)})$	
$\vec{n}_i = \frac{\beta_x}{\beta} \vec{e}_x + \frac{\beta_y}{\beta} \vec{e}_y + \frac{\beta_z}{\beta} \vec{e}_z$ $\beta = \sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2}$	



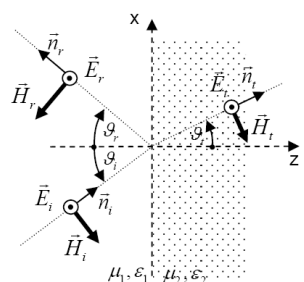
6.1.2 Dielektrischer Halbraum

Je nach Einfallswinkel ϑ_i wird die Welle nicht nur reflektiert, sondern dringt in das zweite Medium ein.

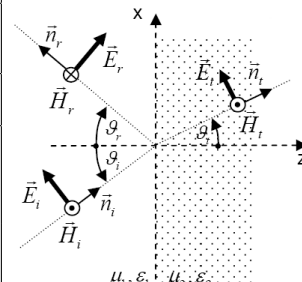
Transmissionskoeffizient	Reflexionskoeffizient	Stehwellenverhältnis
$t = \frac{E_t}{E_i} = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1} \quad 1 + r = t$	$r = \frac{E_r}{E_i} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \quad r = \frac{SWR - 1}{SWR + 1}$	$SWR = \frac{ E _{max}}{ E _{min}} = \frac{1 + r }{1 - r }$



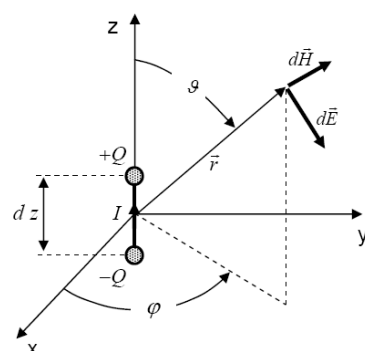
Senkrecht einfallende Ebene Welle	
$E_i + E_r = E_t$	$H_i + H_r = H_t$



Schräg einfallende Welle	
$\frac{\sin \vartheta_t}{\sin \vartheta_i} = \sqrt{\frac{\mu_1 \epsilon_1}{\mu_2 \epsilon_2}} \quad \vartheta_r = \vartheta_i$	
Senkrechte Polarisation	Parallele Polarisation
$\sin^2 \vartheta_{\text{Brewster}_1} = \frac{1 - \frac{\mu_1 \epsilon_2}{\mu_2 \epsilon_1}}{1 - \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^2}$	$\sin^2 \vartheta_{\text{Brewster}_2} = \frac{1 - \frac{\mu_2 \epsilon_1}{\mu_1 \epsilon_2}}{1 - \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\right)^2}$
$r_{SP} = \frac{E_r}{E_i} = \frac{Z_2 \cos \vartheta_i - Z_1 \cos \vartheta_t}{Z_2 \cos \vartheta_i + Z_1 \cos \vartheta_t}$	$r_{PP} = \frac{E_r}{E_i} = \frac{Z_2 \cos \vartheta_t - Z_1 \cos \vartheta_i}{Z_2 \cos \vartheta_t + Z_1 \cos \vartheta_i}$
$t_{SP} = \frac{E_t}{E_i} = \frac{2Z_2 \cos \vartheta_i}{Z_2 \cos \vartheta_i + Z_1 \cos \vartheta_t}$	$t_{PP} = \frac{E_t}{E_i} = \frac{2Z_2 \cos \vartheta_t}{Z_2 \cos \vartheta_t + Z_1 \cos \vartheta_i}$

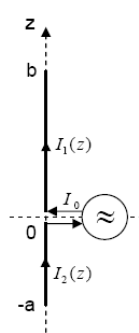


6.2 Hertz'scher Dipol

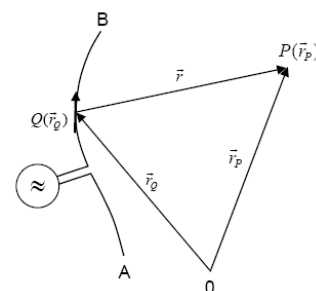


Magnetische Feld	Wellenwiderstand	
$\vec{H} = \vec{e}_\varphi \frac{j\beta \sin \vartheta}{4\pi r} e^{-j\beta r} \int_{-l}^{+l} I(z) e^{j\beta z \cos \vartheta} dz$	$Z_0 = \frac{dE}{dH} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$	
Fernfeld - ($\beta z = 2\pi z/\lambda \ll 1$)		
$\vec{H} = \vec{e}_\varphi \frac{I_0 l \sin \vartheta}{4\pi r} j\beta e^{-j\beta r}$	$\vec{E} = \vec{e}_\vartheta Z_0 \frac{I_0 l \sin \vartheta}{4\pi r} j\beta e^{-j\beta r}$	
Strahlungsleistung	Strahlungswid.	Strahlungsschar. ($\Phi_0 = \Phi(\frac{\pi}{2})$)
$\bar{P}_s = \frac{2\pi}{3} Z_0 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 I_0^2 = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \oint_{F_\infty} (\vec{E} \times \vec{H}^*) d\vec{F} \right\}$	$R_s = \frac{2\pi}{3} Z_0 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2$	$\Phi(\vartheta) = \frac{Z_0}{4} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 I_0^2 \sin^2 \vartheta$


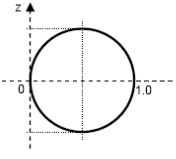

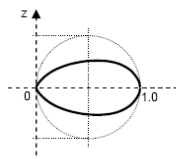
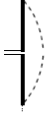
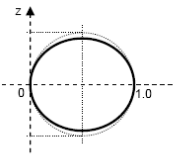

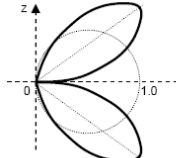
6.3 Lineare Antennen



Strahlung linearer Antennen - siehe Bild rechts	
$\vec{H}(\vec{r}_p) = -\frac{j}{2\lambda r_p} e^{-j2\pi \frac{r_p}{\lambda}} \int_A^B I(\vec{r}_Q) e^{j2\pi \frac{\vec{r}_Q \cdot \vec{r}_p}{\lambda}} (\vec{n} \times d\vec{r}_Q)$	$\vec{E}(\vec{r}_p) = -Z_0 [\vec{n} \times \vec{H}(\vec{r}_p)]$
Strahlungscharakteristik	
$\Phi(\vec{n}) = \frac{1}{2} Z_0 r_p^2 \vec{H}(\vec{r}_p) \cdot \vec{H}^*(\vec{r}_p) = \vec{n} r_p^2 \vec{S}(\vec{r}_p) = \frac{1}{2} \vec{n} r_p^2 \text{Re} \left\{ -Z_0 (\vec{n} \times \vec{H}) \times \vec{H}^* \right\}$	
Stromverteilung auf linearen Antennen - siehe Bild links	
$I_1(z) = \frac{\sin[\beta(b-z)]}{\sin[\beta b]} I_0; \quad 0 \leq z \leq b$	$I_2(z) = \frac{\sin[\beta(a+z)]}{\sin[\beta a]} I_0; \quad -a \leq z \leq 0$
Strahlungsleistung	Strahlungswiderstand
$\bar{P}_s = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \Phi(\vartheta) \sin \vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\varphi$	$R_s = \frac{2}{I_0^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \Phi(\vartheta) \sin \vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\varphi$



6.3.1 Richtcharakteristika

Stromverteilung	Richtcharakteristik	Abstrahlkeulen	Stromverteilung	Richtcharakteristik	Abstrahlkeulen
Kurze Linearantenne $\ell \ll \lambda$ 	$\Phi(\vartheta) = \sin \vartheta$		Ganzwellendipol $\ell = \lambda$ 	$\Phi(\vartheta) = \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos \vartheta\right)}{\sin \vartheta}$	
Halbwellendipol $\ell = \lambda/2$ 	$\Phi(\vartheta) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \vartheta\right)}{\sin \vartheta}$		Doppelwellendipol $\ell = 2\lambda$ 	$\Phi(\vartheta) = \frac{\sin^2(\pi \cos \vartheta)}{\sin \vartheta}$	

7 Integral-Gesetze der Elektrotechnik

	Elektr. Feld	Magn. Feld	Strömungsfeld	Bemerkung
Feldgrösse	\vec{E}, \vec{D}	\vec{H}, \vec{B}	\vec{E}, \vec{j}	
Konstante	$\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}$ Dielektrizitätskonstante	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Permeabilitätskonstante	$\sigma = \frac{1}{\rho}$ Spezifische Leitfähigkeit	
Stoffgleichung	$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$	$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$	$\vec{j} = \sigma \vec{E}$	
Kraft	$\vec{F}_C = q \vec{E}$	$\vec{F}_L = q(\vec{v} \times \vec{B})$		
Fluss (durch Fläche A)	$\Psi_{el} = \int \vec{D} d\vec{A}$	$\Phi_m = \int \vec{B} d\vec{A}^{1)}$	$I = \int \vec{j} d\vec{A}$	1) bei Spulen: $\Psi_m = \sum_i \Phi_i \approx N \Phi$
Spannung (Weg A → B)	$U_{AB} = \int_A^B \vec{E} d\vec{s}$	$V_{mAB} = \int_A^B \vec{H} d\vec{s}$	$U_{AB} = \int_A^B \vec{E} d\vec{s}$	
Schaltelemente	$Q = CU$	$\Psi_m = LI, \Psi_{m21} = M_{21} I_1$	$I = GU, U = RI$	$R_m = \frac{1}{\Lambda}, R = \frac{1}{G}$
Hüllengesetz (Quellengleichungen)	$\oint \vec{D} d\vec{A} = \sum Q_i$ Maxwell IV	$\oint \vec{B} d\vec{A} = 0^{2)}$ Maxwell III	$\oint \vec{j} d\vec{A} = 0$ Kirchhoff 1	2) ohne Verschiebungsstrom (käme ggf. noch dazu)
Umlaufspannung	$\oint \vec{E} d\vec{s} = 0 - \dot{\Phi}_m$ Induktionsgesetz Maxwell II	$\oint \vec{H} d\vec{s} = \theta + \Psi_{el}$ Vollständiges Durchflutungsgesetz Maxwell I	$\oint \vec{E} d\vec{s} = 0 - \dot{\Phi}$ Kirchhoff 2	

Einheiten

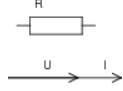
$[\epsilon] = \frac{As}{Vm}$	$[D] = \frac{As}{m^2} = \frac{C}{m^2}$	$[E] = \frac{V}{m}$	$[U] = V$	$[\Psi_{el}] = As = C$	$[C] = F$
$[\mu] = \frac{H}{m} = \frac{Vs}{Am}$	$[B] = \frac{Vs}{m^2} = T$	$[H] = \frac{A}{m}$	$[V_m] = [\Theta] = A$	$[\Psi_m] = [\Phi_m] = Wb = Vs$	$[L] = \frac{Vs}{A} = H$
$[\sigma] = \frac{S}{m}$	$[E] = \frac{V}{m}$	$[j] = \frac{A}{m^2} = 10^{-6} \frac{A}{mm^2}$	$[U] = V$	$[I] = A$	$[R] = \Omega$

8 Allgemein

8.1 Schaltelemente bei zeitabhängigen Vorgängen

Ohmscher Widerstand R

u und i können sprunghaft ändern



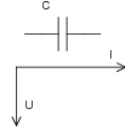
$$u(t) = Ri(t)$$

$$i(t) = \frac{u(t)}{R}$$

$$\underline{Z} = R$$

Kapazität C

u kann nicht sprunghaft ändern



$$u(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau + u(0)$$

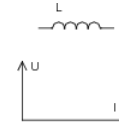
$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$$

$$\underline{Z} = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C}$$

$$W_C = \frac{1}{2} C U_C^2$$

Induktivität L

i kann nicht sprunghaft ändern



$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t u(\tau) d\tau + i(0)$$

$$\underline{Z} = j\omega L$$

$$W_L = \frac{1}{2} L I_L^2$$

8.2 Vorgehen bei Schaltvorgängen

$u(t) = U_E + (U_A - U_E)e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \tau = CR \text{ bzw. } \tau = \frac{L}{R} = \frac{\varepsilon}{\sigma}$	$U_A = \lim_{t \rightarrow 0^+} u(t) \quad U_E = \lim_{t \rightarrow \infty} u(t)$	Für Ströme äquivalent
---	--	-----------------------

8.3 Taschenrechner TI-89/Voyage 200 englisch

<code>comDenom(Z/N, x)</code>	Gemeinsamen Nenner finden
<code>cZeros(...p^m... p = i * ω, ω)</code>	Komplexe Nullstellen finden (für Pole jeweils Nenner der UTF einsetzen)
<code>expand(pⁿ/q^m)</code>	Partialbruchzerlegung
<code>propFrac(pⁿ/q^m)</code>	Polynomdivision
<code>pds\partialial({a_n, ..., a₀}, {b_m, ..., b₀})</code>	100%-ige Partialbruchzerlegung, Root-Folder : Mode → Current Folder → pds
<code>pds\roots({a_n, ..., a₀})</code>	Nullstellen bestimmen
<code>acst\laplace(f(t))</code>	Laplacetransformation
<code>acst\invlap(F(s))</code>	inverse Laplacetransformation

8.4 Vektor -/ Kreuzprodukt, Rechte-Hand-Regel

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}: \quad \vec{a} \Leftrightarrow \text{Daumen}; \vec{b} \Leftrightarrow \text{Zeigefinger}; \vec{c} \Leftrightarrow \text{Mittelfinger}$$

8.5 Partialbruchzerlegung^{S15}

Falls möglich, erst Polynomdivision.

$$f(x) = \frac{x^2 + 20x + 149}{x^3 + 4x^2 - 11x - 30} \Rightarrow \text{Nenner faktorisieren mit Horner Schema^{S914}, Binom, etc.} \Rightarrow x^3 + 4x^2 - 11x - 30 = (x+2)(x^2 + 2x - 15) = (x+2)(x+5)(x-3)$$

Ansatz:

$$f(x) = \frac{x^2 + 20x + 149}{x^3 + 4x^2 - 11x - 30} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+5} = \frac{A(x-3)(x+5) + B(x-3)(x+5) + C(x-3)(x+2)}{(x-3)(x+2)(x+5)}$$

Gleichungssystem aufstellen mit beliebigen x_i -Werten (am Besten Polstellen oder 0,1,-1 wählen):

$$\begin{aligned} x_1 = 3: & -9 + 60 + 149 = A \cdot 5 \cdot 8 \Rightarrow A = 5 \\ x_2 = -2: & -4 - 40 + 149 = B(-5) \cdot 3 \Rightarrow B = -7 \\ x_3 = -5: & -25 - 100 + 149 = C(-8)(-3) \Rightarrow C = 1 \end{aligned} \Rightarrow f(x) = \frac{5}{x-3} + \frac{7}{x+2} - \frac{1}{x+5}$$

weitere Ansätze für andere Typen von Termen:

$$f(x) = \frac{5x^2 - 37x + 54}{x^3 - 6x^2 + 9x} = \frac{A}{x} + \frac{B_1}{x-3} + \frac{B_2}{(x-3)^2} = \frac{A(x-3)^2 + B_1x(x-3) + B_2x}{x(x-3)^2}$$

$$f(x) = \frac{1,5x}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{(x-2)^2} + \frac{A_3}{(x-2)^3} = \frac{A_1(x-2)^2 + A_2(x-2) + A_3}{(x-2)^3}$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 + 2x^2 - 2x - 12} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+4x+6} = \frac{A(x^2+4x+6) + (Bx+C)(x-2)}{(x-2)(x^2+4x+6)}$$

8.6 Komplexe Trigonometrie

$$\sin \underline{\alpha} = \frac{e^{j\underline{\alpha}} - e^{-j\underline{\alpha}}}{2j} \quad \cos \underline{\alpha} = \frac{e^{j\underline{\alpha}} + e^{-j\underline{\alpha}}}{2} \quad \tan \underline{\alpha} = \frac{\sin \underline{\alpha}}{\cos \underline{\alpha}} \quad \sinh \underline{\alpha} = \frac{e^{\underline{\alpha}} - e^{-\underline{\alpha}}}{2} \quad \cosh \underline{\alpha} = \frac{e^{\underline{\alpha}} + e^{-\underline{\alpha}}}{2} \quad \tanh(jb) = j \tan(b)$$