ElMag - Formelsammlung

S. Reinli M. Gisler

26. Dezember 2016

Inhaltsverzeichnis

1 Mathematische Grundlagen

1.1 Vektorfelder

1.1.1 Divergenz

Die Divergenz beschreibt die Quellendichte eines Skalarfeldes. Interpretiert man ein Vektorfeld als Strömungsfeld, so gibt die Divergenz für jede Stelle die Tendenz an, ob ein Teilchen in der Nähe zu diesem Punkt hin- bzw. von diesem Punkt wegfliesst. Es sagt damit aus, ob und wo das Vektorfeld Quellen (Divergenz grösser als Null) oder Senken (Divergenz kleiner als Null) hat. Ist die Divergenz überall gleich Null, so bezeichnet man das Feld als quellenfrei.

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial(F)}{\partial x} + \frac{\partial(F)}{\partial y} + \frac{\partial(F)}{\partial z}}$$

1.1.2 Rotation

Interpretiert man ein Vektorfeld als Strömungsfeld, so gibt die Rotation für jeden Ort an, wie schnell und um welche Achse ein mitschwimmender Körper rotieren würde. Ein Vektorfeld, dessen Rotation überall null ist, nennt man wirbelfrei.

$$\boxed{\operatorname{rot}(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \begin{pmatrix} (F_3)_y - (F_2)_z \\ (F_1)_z - (F_3)_x \\ (F_2)_x - (F_1)_y \end{pmatrix}}$$

1.1.3 Gradient

Der Gradient zeigt in einem Vektorfeld immer in die Richtung des steilsten Anstiegs.

$$\boxed{\operatorname{grad}(f) = \nabla \cdot f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}}$$

1.1.4 Vektorfeldoperatoren

Nabla-Operator ∇

Operator um kontextabhängig

Divergenz, Rotation oder Gradient darzustellen

$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$

Laplace-Operator Δ

Operator um einem Skalarfeld

die Divergenz seines Gradienten zuzuordnen

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

$\Delta\vec{F} = \operatorname{div}(\operatorname{grad}(\vec{F}))$

$\Delta\vec{F} = \nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{F})$

1.1.5 Rechenregeln

- $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0$ “Gradientenfeld ist wirbelfrei”
- $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{v}) = 0$ “Feld der Rotation ist quellfrei”
- $\operatorname{div}(f\vec{v}) = (\operatorname{grad} f) \cdot \vec{v} + f \operatorname{div}\vec{v}$
- $\operatorname{rot}(f\vec{v}) = (\operatorname{grad} f) \times \vec{v} + f \operatorname{rot}\vec{v}$
- $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{v}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{v}) - \Delta\vec{v}$

1.2 Integralgesetze

1.2.1 Der Satz von Gauss

Das Volumenintegral über die Divergenz eines Vektorfeldes wird in ein Oberflächenintegral umgewandelt.

$$\boxed{\int_V \operatorname{div} \vec{F} dv = \oint_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{A}}$$

1.2.2 Der Satz von Stokes

Das Oberflächenintegral über die Rotation eines Vektorfeldes wird in ein Kurvenintegral umgewandelt.

$$\boxed{\int_A \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \oint_{\partial A} \vec{F} \cdot d\vec{s}}$$

1.2.3 Der Satz von Green

Die Greensche Formel beschreibt den Zusammenhang zwischen Wegintegral und einem Oberflächenintegral.

$$\boxed{\int_A \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} dA = \oint_{\partial A} \vec{F} \cdot d\vec{s}}$$

1.3 Einheiten

	Elektr. Feld	**Magn. Feld**	**Strömungsfeld**
Feldgrösse	$\vec{E}, \vec{D}$	$\vec{H}, \vec{B}$	$\vec{E}, \vec{J}$
Konstante	$\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}$ Dielektrizitätskonstante	$\mu_0 = 4\pi\, 10^{-7}$ Permeabilitätskonstante	$\sigma = \frac{1}{\rho}$ Spezifische Leitfähigkeit
Dichte	$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$	$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$	$\vec{J} = \sigma \vec{E}$

$[\varepsilon] = \frac{As}{Vm}$	$[D] = \frac{As}{m^2} = \frac{C}{m^2}$	$[E] = \frac{V}{m}$	$[U] = V$	$[\Psi_{el}] = As = C$	$[C] = F$
$[\mu] = \frac{H}{m} = \frac{Vs}{Am}$	$[B] = \frac{Vs}{m^2} = T$	$[H] = \frac{A}{m}$	$[V_m] = [\Theta] = A$	$[\Psi_m] = [\Phi_m] = Wb = Vs$	$[L] = \frac{Vs}{A} = H$
$[\sigma] = \frac{S}{m}$	$[E] = \frac{V}{m}$	$[J] = \frac{A}{m^2} = 10^{-6} \frac{A}{mm^2}$	$[U] = V$	$[I] = A$	$[R] = \Omega$

1.4 Weiteres

Die Bedeutung der nachfolgenden Integralgleichungen ist die fundamentale Grundlage elektromagnetische Feldtheorie. Der elektrische Strom erzeugt das elektrische Feld in seiner Umgebung (Gausssches Gesetz), der elektrische Strom erzeugt das quellenfreie rotationssymmetrische magnetische Feld (Coulombsches Gesetz), die Verteilung des magnetische Feld durch eine geschlossene Kurve ist der gesamte Strom durch die entsprechende Fläche (Ampèresches Gesetz) und das zeitvariante magnetische Feld induziert eine elektrische Spannung (Faradaysches Gesetz).
Durch die Gesetze von Stoke und Gauss können diese 4 Gesetze in die Maxwellgleichungen überführt werden.

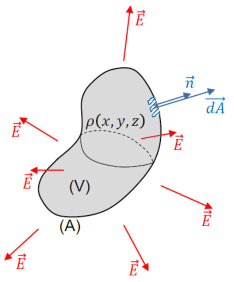
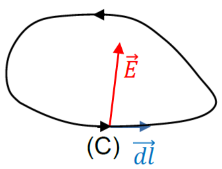
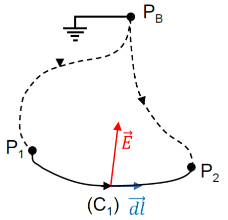
Elektrostatik Die Elektrostatik befasst sich mit ruhenden elektrischen Ladungen, Ladungsverteilungen und den elektrischen Feldern geladener Körper Die Phänomene der Elektrostatik rühren von den Kräften her, die elektrische Ladungen aufeinander ausüben. Diese Kräfte werden vom coulombschen Gesetz beschrieben.

Elektrodynamik Die Elektrodynamik befasst sich mit bewegten elektrischen Ladungen und mit zeitlich veränderlichen elektrischen und magnetischen Feldern. Diese Vorggänge werden durch die Maxwellgleichungen beschrieben.

2 Elektrostatische Analyse (ES, Electrostatic Analysis)

Die elektrostatische Analyse arbeitet mit dem elektrostatischen (ruhend) Feld. In diesem Fall ist die elektrische Ladung stationär verteilt (Ladungsverteilung ändert sich nicht). Mittels dieser Analyse kann das elektrische Feld, die Kapazität und die Energie in elektrischen Komponenten berechnet werden.

2.1 Integralgleichungen

<table>
<tr>
<td>Gausssches Gesetz

</td>
<td>Der Fluss des Vektors $\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E}$ durch eine geschlossene orientierte Fläche (A) ist gleich der gesamten elektrischen Ladung Q, die von der Fläche (A) umgeben ist.
$\oiint_{(A)} \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q \quad oder \quad \oiint_{(A)} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon}$
$$\oiint_{(A)} \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q = \iiint_{(V)} \varrho \cdot dV$$</td>
</tr>
<tr>
<td>Wirbelfreiheit des elektrostatischen Feldes

</td>
<td>Das Kurvenintegral des elektrostatischen Feldes $\vec{E}$ über jede geschlossene orientierte Kurve (C) ist gleich null.
$\oint_{(C)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$
$$\oint_{(C)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_{\substack{P_1 \\ (C_1)}}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} - \oint_{\substack{P_1 \\ (C_2)}}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$</td>
</tr>
<tr>
<td>Elektrisches Skalarpotential

</td>
<td>Das elektrische Skalarpotential eines Punktes gegenüber dem Bezugspunkt (P_B).
$\varphi_{P_1} = \oint_{P_1}^{P_N} \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad und \quad \varphi_{P_2} = \oint_{P_2}^{P_N} \vec{E} \cdot d\vec{l}$
$$U_{P_1P_2} = \varphi_{P_1} - \varphi_{P_2} = \oint_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$</td>
</tr>
</table>

2.2 Differenzialgleichungen der elektrostatischen Analyse

Poisson-Gleichung

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

Laplace-Gleichung

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \Delta\varphi = 0$$

Gradient

$$\vec{E} = -\nabla \cdot \varphi = -\operatorname{grad}\varphi$$

Divergenz

$$Q = \nabla \cdot \vec{D} = \operatorname{div}\vec{D}$$

2.3 Randbedingungen

- Der geerdete Rand

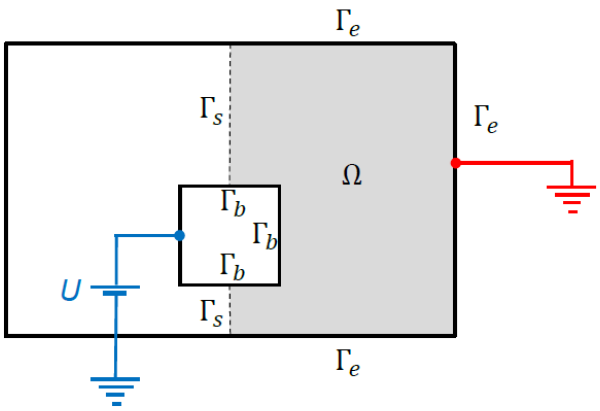
$$\varphi = 0$$

- Der Rand mit bekannten Potential

$$\varphi = A$$

- Der Rand der Symmetrie

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$$



2.4 Anwendung: pn-Übergang

Einige Elektronen füllen die Löcher des Gitters und dadurch entsteht eine Raumladungszone. In dieser Zone ist eine Ladung verteilt, aber die Elektronen sind in diesem Bereich nicht frei. Durch diese Zone können die Elektronen nicht mehr die Löcher füllen.

$$\varrho_p = \frac{Q_p}{d_p \cdot d \cdot L}$$

$$\varrho_n = \frac{Q_n}{d_n \cdot d \cdot L}$$

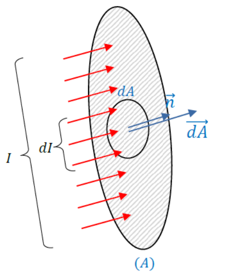
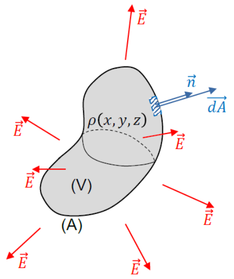
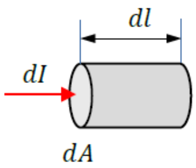
$$\oiint_{(A)} \vec{E} \cdot d\vec{A} = -\frac{\varrho_p}{\varepsilon} \cdot d \cdot L \cdot (x + d_p) \Rightarrow E_{x1}(x) = -\frac{\varrho_p}{\varepsilon} \cdot (x + d_p)$$

$$\oiint_{(A)} \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon} = \frac{\varrho \cdot V}{\varepsilon} = -\frac{\varrho_p}{\varepsilon}$$

3 Stationäre Strömungsanalyse (SCD, Stationray Current Distribution)

Die stationäre Strömungsanalyse wird für die Berechnung des Ersatzwiderstand gebraucht

3.1 Integralgleichungen

Elektrische Stromdichte 	Die elektrische Stromdichte kennzeichnet wie dicht zusammengedrängt ein elektrischer Strom fliesst. Damit ist auch die Belastung eines Leiters durch den Strom bekannt. $\vec{J} = \frac{dI}{dA} \cdot \vec{n} \qquad [\vec{J}] = \frac{A}{m^2}$ $I = \iint\limits_{(A)} \vec{J} \cdot d\vec{A}$
Kontinuitätsgleichung 	Der herausfliessende Strom aus einer geschlossenen Fläche ist gleich der Abnahme der Ladung $I = -\frac{dQ}{dt} = -\frac{d}{dt} \iiint\limits_{(V)} \varrho \cdot dV = -\iiint\limits_{(V)} \frac{d\varrho}{dt} \cdot dV$ $\oint\!\!\!\oint\limits_{(A)} \vec{J} \cdot d\vec{A} = -\iiint\limits_{(V)} \frac{d\varrho}{dt} \cdot dV$ $\oint\!\!\!\oint\limits_{(A)} \vec{J} \cdot d\vec{A} = 0$
Ohmsches Gesetz 	$J = \sigma \cdot E$ $R = \varrho \cdot \frac{l}{A}$ $\sigma = \frac{1}{\varrho}$ $G = \sigma \cdot \frac{A}{l}$

3.2 Differenzialgleichungen der elektrostatischen Analyse

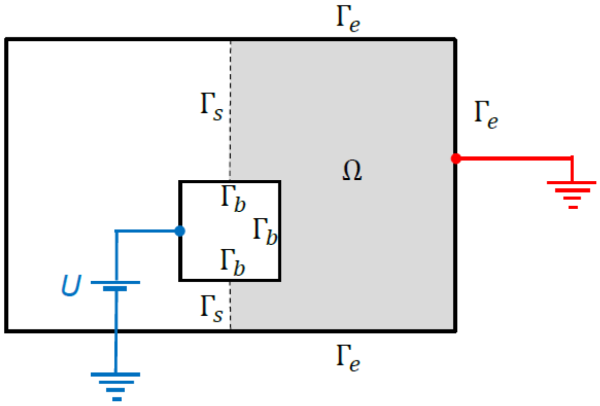
Stationäre Analyse

$$\nabla \vec{J} = -\frac{d\rho}{dt} = 0$$

Laplace Gleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \Delta\varphi = 0$$

3.3 Randbedingungen



- Der geerdete Rand

$$\varphi = 0$$

- Der Rand mit bekannten Potential

$$\varphi = U$$

- Der Rand der Symmetrie

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$$

- Der Rand zwischen zwei Materialien

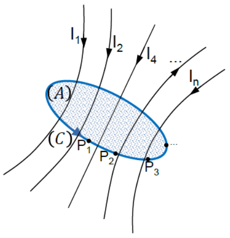
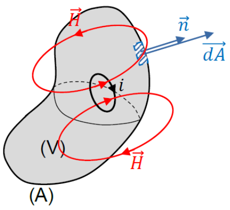
$$\sigma_1 \cdot \frac{d\varphi_2}{dn} = \sigma_2 \cdot \frac{d\varphi_1}{dn}$$

3.4 Anwendung

4 Magnetostatische Analyse (MS, Magnetostatic Analysis)

Die magnetostatische Analyse basiert auf der gleichmässigen Bewegung des elektrische Stroms. Der elektrische Strom ist über die Zeit konstant. Die magnetostatische Analyse wird für die Berechnung der Ersatzinduktivität von elektrischen Komponenten gebraucht

4.1 Integralgleichungen

Ampèresches Gesetz 	Das Ampèresche Gesetz definiert die Verteilung des magnetischen Feldes durch eine geschlossene Kurve ist der gesamte Strom durch die entsprechende Fläche $$\oint_{(C)} \vec{H} \cdot \vec{dl} = \iint_{(A)} \vec{J} \cdot \vec{dA}$$ $$\oint_{(C)} \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 \iint_{(A)} \vec{J} \cdot \vec{dA}$$
Durchflutungsgesetz	$$\oint_{(C)} \vec{H} \cdot \vec{dl} = \sum_{k=1}^{n} I_k = \theta$$
Coulombsches Gesetz 	Der magnetische Fluss durch eine geschlossene Fläche ist immer Null. Somit sind die magnetische Feldlinien immer geschlossen. Es gibt keine magnetische Monopole. Das magnetische Feld ist Quellenfrei $$\oiint_{(A)} \vec{B} \cdot \vec{dA} = 0$$

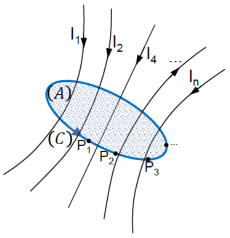
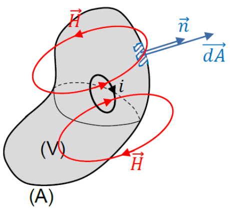
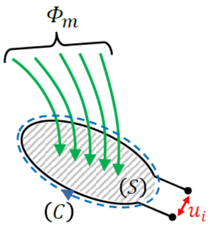
4.2 Differenzialgleichungen der magnetostatischen Analyse

4.3 Randbedingungen

4.4 Anwendung

5 Magnetoquasistatische Analyse (MQS, Magnetoquasistatic Analysis)

5.1 Integralgleichungen

Ampèresches Gesetz 	Das Ampèresche Gesetz definiert die Verteilung des magnetischen Feldes durch eine geschlossene Kurve ist der gesamte Strom durch die entsprechende Fläche $$\oint_{(C)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_{(A)} \vec{J} \cdot d\vec{A}$$ $$\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_{(A)} \vec{J} \cdot d\vec{A}$$
Coulombsches Gesetz 	Der magnetische Fluss durch eine geschlossene Fläche ist immer Null. Somit sind die magnetische Feldlinien immer geschlossen. Es gibt keine magnetische Monopole. Das magnetische Feld ist Quellenfrei $$\oiint_{(A)} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$
Faradaysches Induktionsgesetz 	Der zeitabhängige magnetische Fluss induziert elektrische Spannung in der vom Fluss durchflossenen Spule. $$u_i = -\frac{\partial \Phi_m}{\partial t}$$ $$\Phi_m = \oiint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad und \quad u_i = \oint_{(C)} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$ $$\oint_{(C)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \oiint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

5.2 Differenzialgleichungen der magnetoquasostatischen Analyse

5.3 Randbedingungen

5.4 Anwendung

6 Maxwell Gleichungen

Differentialform 1.Art	**Differentialform** 2.Art	**Integralform**
$\operatorname{div}\vec{D} = \nabla \cdot \vec{D} = \rho$	$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$	$\oint_{\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{A} = \int\int\int_V \rho \cdot dV = Q$
$\operatorname{div}\vec{B} = \nabla \cdot \vec{B} = 0$	$\operatorname{div}\vec{H} = \nabla \cdot \vec{H} = 0$	$\oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$
$\operatorname{rot}\vec{E} = \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}$	$\operatorname{rot}\vec{E} = \nabla \times \vec{E} = -\mu\frac{\partial H}{\partial t}$	$\oint_{\partial A} \vec{E} \cdot ds = -\int\int_A \frac{\partial B}{\partial t} \cdot dA$
$\operatorname{rot}\vec{B} = \nabla \times \vec{B} = \mu_0(J + \frac{\partial D}{\partial t})$	$\operatorname{rot}\vec{H} = \nabla \times \vec{H} = \sigma\vec{E} + \epsilon\frac{\partial E}{\partial t}$	$\oint_{\partial A} \vec{H} \cdot ds$

6.1 Erstes Maxwell-Gesetz

Differentialform

Das E-Feld ist ein Quellenfeld. Die Ladung ist die Quelle des elektrischen Feldes.

Integralform

Der elektrische Fuss durch die geschlossene Oberfläche eines Volumen ist direkt proportional zur elektrischen Ladung in seinem inneren.

6.2 Zweites Maxwell-Gesetz

Differentialform

Das B-Feld ist quellenfrei. Es gibt keine magnetische Monopole (Magnet welcher nur ein Pol hat).

Integralform

Der magnetische Fluss durch die Oberfläche eines Volumen ist gleich der magnetischen Ladung in seinem inneren, nämlich Null

6.3 Drittes Maxwell-Gesetz

Differentialform

Jede Änderung des B-Feldes führt zu einem elektrischen Gegenfeld. Die Wirbel des elektrischen Feldes sind von der zeitlichen Änderung der magnetischen Flussdichte abhängig (Induktionsgesetz).

Integralform

Die elektrische Zirkulation (Umlaufintegral eines Vektorfeldes über einen geschlossenen Weg) über eine Kurve einer Fläche ist gleich der negativen Änderung des magnetischen Flusses durch die Fläche.

6.4 Viertes Maxwell-Gesetz

Differentialform

Die Wirbel des Magnetfeldes hängen von der Stromdichte und von der elektrischen Flussdichte ab. Die zeitliche Änderung der Flussdichte wird als Verschiebungsstromdichte bezeichnet (Durchflutungsgesetz)

Integralform

Die magnetische Zirkulation über eine Kurve einer Fläche ist gleich der Summe aus dem Leitungsstrom und der zeitlichen Änderung des Flusses durch die Fläche.

6.5 Elektromagnetische Wellengleichung

Magnetisches Feld

$\Delta\vec{H} - \mu\sigma\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} - \mu\epsilon\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = 0$

Elektrisches Feld

$\Delta\vec{E} - \mu\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} - \mu\epsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0$

6.6 Randwertproblem

$$\boxed{\Delta\vec{H} - \mu\sigma\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} - \mu\epsilon\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = 0}$$

$$\boxed{\Delta\vec{H} - \mathrm{j}\,\omega\mu\sigma\vec{H} + \omega^2\mu\epsilon\vec{H} = 0}$$