ElMag - Formelsammlung

S. Reinli M. Gisler

30. Oktober 2016

Inhaltsverzeichnis

1 Mathematische Grundlagen

1.1 Vektorfelder

1.1.1 Divergenz

Die Divergenz beschreibt die Quellendichte eines Skalarfeldes. Interpretiert man ein Vektorfeld als Strömungsfeld, so gibt die Divergenz für jede Stelle die Tendenz an, ob ein Teilchen in der Nähe zu diesem Punkt hin- bzw. von diesem Punkt wegfliesst. Es sagt damit aus, ob und wo das Vektorfeld Quellen (Divergenz grösser als Null) oder Senken (Divergenz kleiner als Null) hat. Ist die Divergenz überall gleich Null, so bezeichnet man das Feld als quellenfrei.

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial(F)}{\partial x} + \frac{\partial(F)}{\partial y} + \frac{\partial(F)}{\partial z}}$$

1.1.2 Rotation

Interpretiert man ein Vektorfeld als Strömungsfeld, so gibt die Rotation für jeden Ort an, wie schnell und um welche Achse ein mitschwimmender Körper rotieren würde. Ein Vektorfeld, dessen Rotation überall null ist, nennt man wirbelfrei.

$$\boxed{\operatorname{rot}(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \begin{pmatrix} (F_3)_y - (F_2)_z \\ (F_1)_z - (F_3)_x \\ (F_2)_x - (F_1)_y \end{pmatrix}}$$

1.1.3 Gradient

Der Gradient zeigt in einem Vektorfeld immer in die Richtung des steilsten Anstiegs.

$$\boxed{\operatorname{grad}(f) = \nabla \cdot f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}}$$

1.1.4 Vektorfeldoperatoren

Nabla-Operator ∇

Operator um kontextabhängig

Divergenz, Rotation oder Gradient darzustellen

$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$

Laplace-Operator Δ

Operator um einem Skalarfeld

die Divergenz seines Gradienten zuzuordnen

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

$\Delta\vec{F} = \operatorname{div}(\operatorname{grad}(\vec{F}))$

$\Delta\vec{F} = \nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{F})$

1.1.5 Rechenregeln

- $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0$ “Gradientenfeld ist wirbelfrei”
- $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{v}) = 0$ “Feld der Rotation ist quellfrei”
- $\operatorname{div}(f\vec{v}) = (\operatorname{grad} f) \cdot \vec{v} + f \operatorname{div}\vec{v}$
- $\operatorname{rot}(f\vec{v}) = (\operatorname{grad} f) \times \vec{v} + f \operatorname{rot}\vec{v}$
- $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{v}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{v}) - \Delta\vec{v}$

1.2 Integralgesetze

1.2.1 Der Satz von Gauss

Das Volumenintegral über die Divergenz eines Vektorfeldes wird in ein Oberflächenintegral umgewandelt.

$$\boxed{\int_V \operatorname{div} \vec{F} dv = \oint_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{A}}$$

1.2.2 Der Satz von Stokes

Das Oberflächenintegral über die Rotation eines Vektorfeldes wird in ein Kurvenintegral umgewandelt.

$$\boxed{\int_A \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \oint_{\partial A} \vec{F} \cdot d\vec{s}}$$

1.2.3 Der Satz von Green

Die Greensche Formel beschreibt den Zusammenhang zwischen Wegintegral und einem Oberflächenintegral.

$$\boxed{\int_A \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} dA = \oint_{\partial A} \vec{F} \cdot d\vec{s}}$$

1.3 Einheiten

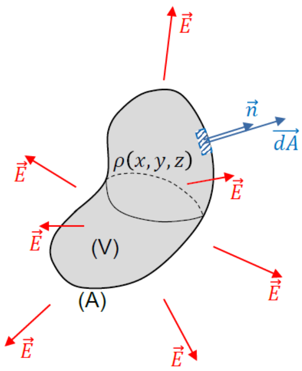
	Elektr. Feld	**Magn. Feld**	**Strömungsfeld**
Feldgrösse	$\vec{E}, \vec{D}$	$\vec{H}, \vec{B}$	$\vec{E}, \vec{J}$
Konstante	$\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}$ Dielektrizitätskonstante	$\mu_0 = 4\pi\, 10^{-7}$ Permeabilitätskonstante	$\sigma = \frac{1}{\rho}$ Spezifische Leitfähigkeit
Dichte	$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$	$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$	$\vec{J} = \sigma \vec{E}$

$[\varepsilon] = \frac{As}{Vm}$	$[D] = \frac{As}{m^2} = \frac{C}{m^2}$	$[E] = \frac{V}{m}$	$[U] = V$	$[\Psi_{el}] = As = C$	$[C] = F$
$[\mu] = \frac{H}{m} = \frac{Vs}{Am}$	$[B] = \frac{Vs}{m^2} = T$	$[H] = \frac{A}{m}$	$[V_m] = [\Theta] = A$	$[\Psi_m] = [\Phi_m] = Wb = Vs$	$[L] = \frac{Vs}{A} = H$
$[\sigma] = \frac{S}{m}$	$[E] = \frac{V}{m}$	$[J] = \frac{A}{m^2} = 10^{-6} \frac{A}{mm^2}$	$[U] = V$	$[I] = A$	$[R] = \Omega$

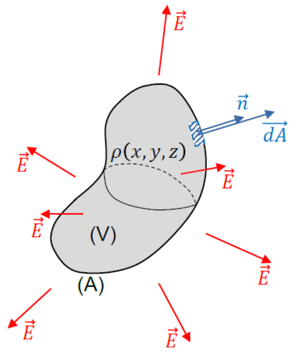
2 Elektrostatische Analyse

Die elektrostatische Analyse arbeitet mit dem elektrostatischen (ruhend) Feld. In diesem Fall ist die elektrische Ladung stationär verteilt (Ladungsverteilung ändert sich nicht). Mittels dieser Analyse kann das elektrische Feld, die Kapazität und die Energie in elektrischen Komponenten berechnet werden.

2.1 Integralgleichungen

<table>
<tr>
<td>


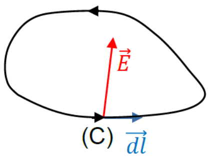
</td>
<td>
Gausssches Gesetz
Der Fluss des Vektors $\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E}$ durch eine geschlossene orientierte Fläche (A) ist gleich der gesamten elektrischen Ladung Q, die von der Fläche (A) umgeben ist
$$\oiint_{(A)} \vec{D} \cdot \vec{dA} = Q \quad oder \quad \oiint_{(A)} \vec{E} \cdot \vec{dA} = \frac{Q}{\varepsilon}$$
</td>
</tr>
</table>



Gaussches Gesetz:

Der Fluss des Vektors $\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E}$ durch eine geschlossene orientierte Fläche (A) ist gleich der gesamten elektrischen Ladung Q, die von der Fläche (A) umgeben ist:

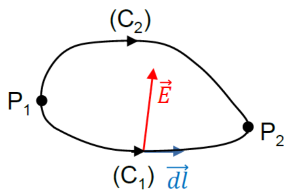
$$\oiint_{(A)} \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q \quad oder \quad \oiint_{(A)} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon}$$



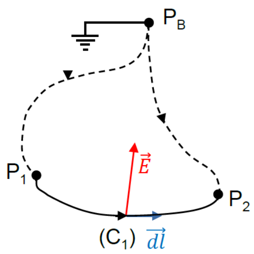
Wirbelfreiheit des elektrostatischen Feldes:

Das Kurvenintegral des elektrostatischen Feldes $\vec{E}$ über jede geschlossene orientierte Kurve (C) ist gleich null:

$$\oint_{(C)} \vec{E} \cdot \vec{dl} = 0$$



$$\oint_{(C)} \vec{E} \cdot \vec{dl} = \oint_{\substack{P_1 \\ (C_1)}}^{P_2} \vec{E} \cdot \vec{dl} - \oint_{\substack{P_1 \\ (C_2)}}^{P_2} \vec{E} \cdot \vec{dl} = 0$$



Das elektrische Skalarpotential eines Punktes gegenüber dem Bezugspunkt (P_B):

$$\varphi_{P_1} = \oint_{P_1}^{P_N} \vec{E} \cdot \vec{dl} \quad und \quad \varphi_{P_2} = \oint_{P_2}^{P_N} \vec{E} \cdot \vec{dl}$$

$$U_{P_1P_2} = \varphi_{P_1} - \varphi_{P_2} = \oint_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot \vec{dl}$$

Poisson-Gleichung

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

Laplace-Gleichung

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0$$

Randbedingungen

Der geerdete Rand:

$$\varphi = 0$$

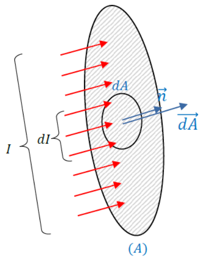
Der Rand mit bekannten Potential:

$$\varphi = A,$$

Der Rand der Symmetrie:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$$

3 Stationäre Strömungsanalyse



Elektrische Stromdichte

$$\vec{J} = \frac{dI}{dA} \cdot \vec{n} \qquad [\vec{J}] = \frac{A}{m^2}$$

$$I = \iint\limits_{(A)} \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

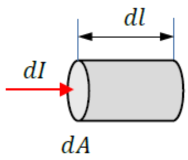
Kontinuitätsgleichung:

$$I = -\frac{dQ}{dt} = -\frac{d}{dt} \iiint\limits_{(V)} \varrho \cdot dV = -\iiint\limits_{(V)} \frac{d\varrho}{dt} \cdot dV$$

$$\oiint\limits_{(A)} \vec{J} \cdot d\vec{A} = -\iiint\limits_{(V)} \frac{d\varrho}{dt} \cdot dV$$

In der stationären Strömungsanalyse:

$$\oiint\limits_{(A)} \vec{J} \cdot d\vec{A} = 0$$



Ohmsches Gesetz:

Der gesamte Strom durch die Fläche A

$$\oiint\limits_{(A)} \vec{J} \cdot d\vec{A} = -\iiint\limits_{(V)} \frac{d\varrho}{dt} \cdot dV$$

und stationär sieht diese Gleichung folgendermassen aus:

$$\oiint\limits_{(A)} \vec{J} \cdot d\vec{A} = 0$$

Ohmsches Gesetz:

$$R = \varrho \cdot \frac{l}{A}$$

$$\sigma = \frac{1}{\varrho}$$

$$G = \sigma \cdot \frac{A}{l}$$

4 Magnetostatische Analyse

Ampèresches Gesetz:

$$\oint_{(C)} \vec{H} \cdot \vec{dl} = \sum_{k=1}^{n} I_k = \theta$$

5 Magnetoquasistatische Analyse

6 Maxwell Gleichungen

Differentialform 1.Art	**Differentialform** 2.Art	**Integralform**
$\operatorname{div}\vec{D} = \nabla \cdot \vec{D} = \rho$	$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$	$\oint_{\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{A} = \int\int\int_{V} \rho \cdot dV = Q$
$\operatorname{div}\vec{B} = \nabla \cdot \vec{B} = 0$	$\operatorname{div}\vec{H} = \nabla \cdot \vec{H} = 0$	$\oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$
$\operatorname{rot}\vec{E} = \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}$	$\operatorname{rot}\vec{E} = \nabla \times \vec{E} = -\mu\frac{\partial H}{\partial t}$	$\oint_{\partial A} \vec{E} \cdot ds = -\int\int_{A} \frac{\partial B}{\partial t} \cdot dA$
$\operatorname{rot}\vec{B} = \nabla \times \vec{B} = \mu_0(J + \frac{\partial D}{\partial t})$	$\operatorname{rot}\vec{H} = \nabla \times \vec{H} = \sigma\vec{E} + \epsilon\frac{\partial E}{\partial t}$	$\oint_{\partial A} \vec{H} \cdot ds$

6.1 Erstes Maxwell-Gesetz

Differentialform

Das E-Feld ist ein Quellenfeld. Die Ladung ist die Quelle des elektrischen Feldes.

Integralform

Der elektrische Fuss durch die geschlossene Oberfläche eines Volumen ist direkt proportional zur elektrischen Ladung in seinem inneren.

6.2 Zweites Maxwell-Gesetz

Differentialform

Das B-Feld ist quellenfrei. Es gibt keine magnetische Monopole (Magnet welcher nur ein Pol hat).

Integralform

Der magnetische Fluss durch die Oberfläche eines Volumen ist gleich der magnetischen Ladung in seinem inneren, nämlich Null

6.3 Drittes Maxwell-Gesetz

Differentialform

Jede Änderung des B-Feldes führt zu einem elektrischen Gegenfeld. Die Wirbel des elektrischen Feldes sind von der zeitlichen Änderung der magnetischen Flussdichte abhängig (Induktionsgesetz).

Integralform

Die elektrische Zirkulation (Umlaufintegral eines Vektorfeldes über einen geschlossenen Weg) über eine Kurve einer Fläche ist gleich der negativen Änderung des magnetischen Flusses durch die Fläche.

6.4 Viertes Maxwell-Gesetz

Differentialform

Die Wirbel des Magnetfeldes hängen von der Stromdichte und von der elektrischen Flussdichte ab. Die zeitliche Änderung der Flussdichte wird als Verschiebungsstromdichte bezeichnet (Durchflutungsgesetz)

Integralform

Die magnetische Zirkulation über eine Kurve einer Fläche ist gleich der Summe aus dem Leitungsstrom und der zeitlichen Änderung des Flusses durch die Fläche.

6.5 Elektromagnetische Wellengleichung

Magnetisches Feld

$\Delta\vec{H} - \mu\sigma\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} - \mu\epsilon\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = 0$

Elektrisches Feld

$\Delta\vec{E} - \mu\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} - \mu\epsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0$

6.6 Randwertproblem

$$\boxed{\Delta\vec{H} - \mu\sigma\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} - \mu\epsilon\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = 0}$$

$$\boxed{\Delta\vec{H} - \mathrm{j}\,\omega\mu\sigma\vec{H} + \omega^2\mu\epsilon\vec{H} = 0}$$