HSR
HOCHSCHULE FÜR TECHNIK
RAPPERSWIL

ELEKTROTECHNIK

# Elektrische Maschinen und Antriebstechnik

## Formelsammlung

Juli 2012

# 1. Elektromagnetische Grundlagen

## 1.1 Feldstärke H und Induktion B

( F 1.1) $\boxed{\oint \vec{B}_x d\vec{A} = 0}$; $\vec{\mu}_x = \vec{\mu}_0 \cdot \mu_r$; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m bzw. Vs/Am

## 1.2 Fluss Φ und Durchflutung Θ im magnetischen Kreis

( F 1.2) $\boxed{\Phi = \int_A \vec{B}_x d\vec{A}}$ mit $[\Phi] = 1\text{Vs}$. Bei **orthogonalen** Verhältnissen: $\Phi = B \cdot A$

( F 1.3) $\boxed{\Theta = \int_A \vec{J}_x d\vec{A} = \oint \vec{H} \cdot d\vec{l}}$. Vereinfacht: $\Theta = I \cdot N$ mit $[\Theta] = 1\text{A}$. Bei **abschnittsweise homogenem** Feld gilt:

( F 1.4) $\boxed{\Theta = \sum_{x=1}^{x=n} H_x \cdot l_x = \sum_{x=1}^{x=n} V_x = R_m \cdot \Phi}$

$V_x$ = magnetische Spannung in A

$R_m$ = magnetischer Widerstand in S/s

## 1.3 Spannungsinduktion

( F 1.5) $\boxed{\Psi = \sum_{n=1}^{n=N} \Phi_N}$ = Flusssumme aller Windungen N einer Spule

( F 1.6) $\boxed{u_q = d\Psi_t/dt = N \cdot d\Phi_t/dt}$ wenn alle N Windungen einer Spule mit dem gleichen Fluss Φ verkettet sind. Bei **orthogonalen** Verhältnissen gilt:

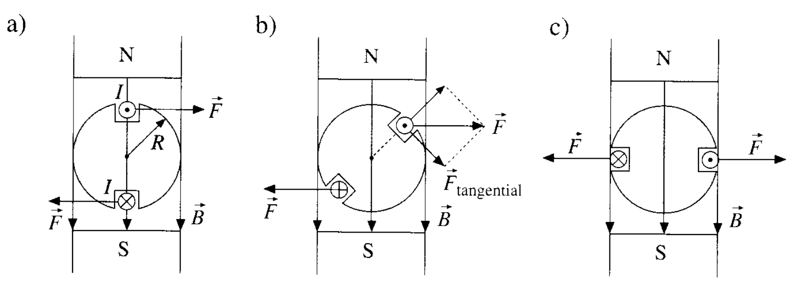
( F 1.7) $\boxed{u_q = z \cdot B \cdot l \cdot v}$ mit v = Geschwindigkeit, l = Länge und z = Anzahl Leiter in Serie

## 1.4 Kraft F und Drehmoment M

( F 1.8) $\boxed{\vec{F} = \int_V \vec{J} \times \vec{B}\, dV}$ mit $I = \int \vec{J} \cdot dA$ und $dV = l \cdot d\vec{A}$ ergibt sich: $\vec{F} = I(\vec{l} \times \vec{B})$ bzw.

$\boxed{F = I \cdot l \cdot B \cdot \sin\angle(\vec{l}, \vec{B})}$. Über den Hebelarm r ergibt sich das Drehmoment:

( F 1.9) $\boxed{\vec{M} = \int \vec{F} \times d\vec{r}}$ mit $\vec{F} = I\int d\vec{l} \times \vec{B}$ bzw. $M = F \cdot r \cdot \sin\alpha$ mit $\alpha = \angle(\vec{F}, \vec{r})$



# 2. Gleichstrommaschinen

( F 2.1)

$$v_u = \omega \cdot R = 2\pi \cdot n \cdot R = \frac{2\pi \cdot f \cdot R}{p} = 2 \cdot f \cdot \tau_p$$

$v_u$ = Umfangsgeschwindigkeit eines Ankerleiters
p = Polpaarzahl
f = Frequenz in Hz
n = Drehzahl in 1/s
$\tau_p$ = Polteilung in m

( F 2.2)

$$U_{iL} = 2 \cdot \tau_p \cdot f \cdot l \cdot B_m = 2 \cdot f \cdot \Phi = 2 \cdot p \cdot n \cdot \Phi$$

$U_{iL}$ = Teilspannung eines Leiters
$B_m$ = mittlere Flussdichte
$\Phi$ = Fluss pro Pol
l = Länge eines Ankerleiters im Feld

( F 2.3)

$$U_i = \frac{z}{2 \cdot a} \cdot U_{iL} = \frac{z}{2 \cdot a} \cdot 2p \cdot n \cdot \Phi = \frac{z}{a} \cdot p \cdot \Phi \cdot n = k_1 \cdot \Phi \cdot n$$

$U_i$ = Gesamtspannung
z = Anzahl Ankerleiter
a = Zahl paralleler Ankerleiterpaare
$k_1$ = Masch.konstante

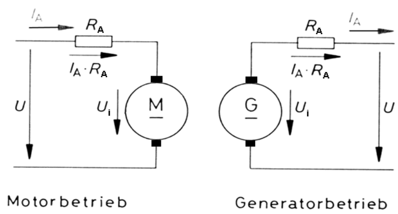
( F 2.4)

$$P_{el,A} = U_i \cdot I_A \pm I_A^{\,2} \cdot R_{Ages}$$

+ : Motorbetrieb
− : Generatorbetrieb

$I_A$ = Ankerstrom

$P_{el,A}$ = im Ankerkreis umgesetzte Leistung ohne Bürstenverluste




$R_{Ages}$ = Gesamtwiderstand des Ankerkreises

( F 2.5)

$$P_{Luft} = U_i \cdot I_A$$

= ideale Luftspaltleistung; Bürsten-, Eisen- und Reibungsverluste vernachlässigt!

( F 2.6)

$$P_{Welle} = P_{Luft} - V_{Fe} - V_{Reib} - V_{zus}$$

= mechanische Leistung an der Welle eines Motors

## 2.1 Gleichstrom-Nebenschlussmaschine

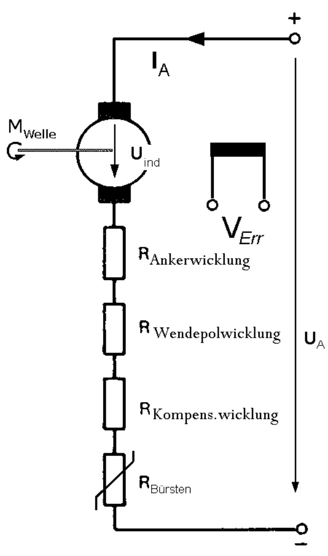
( F 2.7)

$$n = \frac{U_A}{k_1 \cdot \Phi} - \frac{R_A \cdot M}{k_1 \cdot k_2 \cdot \Phi^2}$$

( F 2.8)

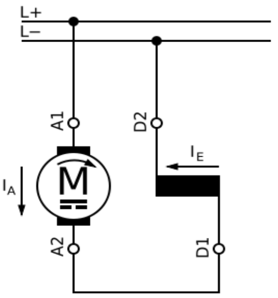
$$M = \frac{k_2 \cdot \Phi \cdot U_A}{R_A} - \frac{k_1 \cdot k_2 \cdot \Phi^2}{R_A} \cdot n$$

n = Drehzahl in 1/s
M = Drehmoment an der Welle in Nm
$k_1$ , $k_2$ = Maschinenkonstanten
$\Phi$ = magnetischer Fluss des Hauptfeldes
$U_A$ = Ankerspannung
$R_A = R_{Ankerwickl} + R_{Wende} + R_{Komp}$




Motorbetrieb

## 2.2 Gleichstrom-Reihenschlussmaschine




( F 2.9) $$M = \frac{U_i \cdot I_A}{2 \cdot \pi \cdot n} = \frac{k_1 \cdot k_E \cdot I_A^2}{2 \cdot \pi}$$

( F 2.10) $$I_A = \sqrt{\frac{2 \cdot \pi \cdot M}{k_1 \cdot k_E}}$$

( F 2.11) $$M = \frac{k_1 \cdot k_E}{2 \cdot \pi} \cdot \left( \frac{U}{R_A + R_E + k_1 \cdot k_E \cdot n} \right)^2$$

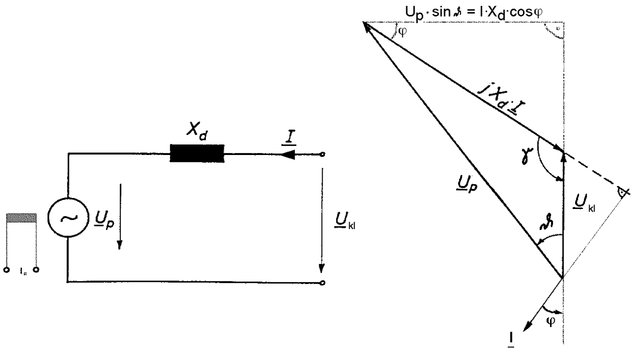
$R_E$ = Widerstand der Erregerwicklung
$k_1$, $k_E$ = Maschinenkonstanten
U = Spannung an L+, L-

# 3. Drehfeldmaschinen

( F 3.1) $n_d = \frac{f}{p}$ bzw. $n_d = \frac{f \cdot 60}{p}$ Drehfelddrehzahl in $s^{-1}$ bzw. $min^{-1}$

( F 3.2) $s = \frac{n_d - n}{n_d}$ Schlupf in [-]

## 3.1 Drehstrom-Synchronmaschine




Einphasiges ESB und Zeigerdiagramm eines DSG

( F 3.3) $$\underline{U}_{kl} = \underline{U}_p + j\,X_d \cdot \underline{I} \text{ bzw.}$$
$$\underline{I} = \frac{j}{X_d} \cdot (\underline{U}_p - \underline{U}_{kl})$$

$X_d$ = synchrone Reaktanz
$U_{Kl}$ = Strang- bzw. Phasenspannung
$U_p$ = Polradspannung
$I_E$ = lastabhängiger Erregerstrom
$I_{E0N}$ = Leerlauferregerstrom für Nennspannung

( F 3.4) $$\frac{I_E}{I_{E0N}} = \frac{U_p}{U_{Kl}}$$

***Eine übererregte Synchronmschine gibt Blindleistung ab; verhält sich also wie eine Kapazität.***
***Eine untererregte Synchronmschine nimmt Blindleistung auf; verhält sich also wie eine Induktivität.***

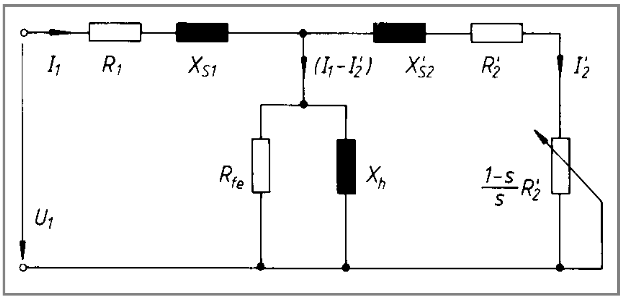
( F 3.5) $$U_p = \sqrt{U_{Kl}^2 + X_d^2 \cdot I^2 + 2 \cdot U_{Kl} \cdot X_d \cdot I \cdot \sin\varphi}$$ (Kosinussatz)

( F 3.6) $$P_{el} = 3 \cdot U_{Kl} \cdot \frac{U_p}{X_d} \cdot \sin\vartheta$$

( F 3.7) $$M_{Welle} = \frac{3 \cdot 60}{2\pi \cdot n \cdot \eta} \cdot U_{Kl} \cdot \frac{U_p}{X_d} \cdot \sin\vartheta$$

I = Laststrom der Synchronmaschine
$\vartheta$ = Polradwinkel gem. ESB
$P_{el}$ = Wirkleistung des DSG
n = Drehzahl in 1/min
$M_{Welle}$ = Antriebsmoment des DSG
$\eta$ = Wirkungsgrad des DSG

## 3.2 Drehstrom-Asynchronmaschine




Erweitertes ESB der Drehstrom-Asynchronmaschine mit schlupfabhängigem Lastwiderstand

( F 3.8) $P_{zu} = P_{el} = 3 \cdot U_1 \cdot I_1 \cdot \cos\varphi$ = zugeführte Wirkleistung

( F 3.9) $P_\delta = P_{el} - 3 \cdot (I_1^2 \cdot R_1 + P_{Fe}) = 3 \cdot \frac{R'_2}{s} \cdot I'^2_2$ = Drehfeldleistung

( F 3.10) $P_{mech} = P_\delta - 3 I'^2_2 \cdot R'_2 = (1-s) \cdot P_\delta$ = Wellenleistung (Reibung vernachlässigt)

( F 3.11) $P_{v2} = 3 \cdot R'_2 \cdot I'^2_2 = s \cdot P_\delta$ =Läuferverlustleistung

( F 3.12) $M = \frac{P_{mech}}{2 \cdot \pi \cdot n} = \frac{(1-s) \cdot P_\delta}{2 \cdot \pi \cdot n_o \cdot (1-s)} = \frac{P_\delta}{2 \cdot \pi \cdot n_o}$ = Drehmoment

( F 3.13) $M_{kipp} = \frac{3 \cdot U_1^2}{4\pi \cdot n_1} \cdot \frac{1-\sigma}{R_1(1-\sigma) + \sqrt{R_1^2 + X_1^2}} \approx \frac{3 \cdot U_1^2}{4\pi \cdot n_1 \cdot X_\sigma}$ = Kippmoment

( F 3.14) $\frac{M}{M_{kipp}} = \frac{2}{\left(\frac{s}{s_{kipp}} + \frac{s_{kipp}}{s}\right)}$ = Kloss'sche Gleichung.

# 4. Antriebstechnik

## 4.1 Gradlinige Bewegungen

( F 4.1) $F = m \cdot a = m \cdot \frac{dv}{dt}$

( F 4.2) $P = v \cdot F$

( F 4.3) $W_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$

F = Kraft in N
m = Masse in kg
a = Beschleunigung in m/s$^2$
P = Leistung in W
v = Geschwindigkeit in m/s
$W_{kin}$ = kinetische Energie eines Körpers der Masse m und Geschwindigkeit v in Ws

## 4.2 Rotierende Bewegungen

( F 4.4) $$\omega = 2 \cdot \pi \cdot n$$

( F 4.5) $$v = \omega \cdot r = 2 \cdot \pi \cdot n \cdot r$$

( F 4.6) $$P = \frac{M}{r} \cdot 2 \cdot \pi \cdot n \cdot r = 2 \cdot \pi \cdot n \cdot M = \omega \cdot M$$

( F 4.7) $$W_{kin} = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega^2$$

$\omega$ = Winkelgeschwindigkeit in 1/s

n = Drehzahl in 1/s

r = Radius in m

M = Drehmoment in Nm

P = Leistung in W

$W_{kin}$ = kinetische Energie eines rotierenden Körpers mit Trägheitsmoment J und Winkelgeschwindigkeit $\omega$ in Ws

## 4.3 Massenträgheit und Beschleunigung

( F 4.8) $$J = \int_0^m r^2 \cdot dm$$

( F 4.9) $$M_B = J \cdot \alpha = J \cdot \frac{d\omega}{dt} = J \cdot 2\pi \cdot \frac{dn}{dt}$$

( F 4.10) $$W = \frac{1}{2} \cdot J \cdot (\omega_2^2 - \omega_1^2) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_2^2 - v_1^2)$$

J = Trägheitsmoment in $kgm^2$

$M_B$ = Beschleunigungsmoment in Nm

$\alpha$ = Drehbeschleunigung in $1/s^2$

W = Energieaufwand für die Beschleunigung von $\omega_1$ auf $\omega_2$ bzw. von $v_1$ auf $v_2$ in Ws

## 4.4 Umrechnen der Bewegungsgrössen auf die Motorwelle

( F 4.11) $$i = \frac{n_1}{n_2}$$

( F 4.12) $$M_1 = \frac{M_2}{\eta_G} \cdot \frac{n_2}{n_1}$$

( F 4.13) $$J_1 = \frac{J_2}{\eta_G \cdot i^2}$$

( F 4.14) $$M_{ers} = \frac{F \cdot v}{\omega} = F \cdot r_{ers}$$

( F 4.15) $$J_{ers} = m \cdot r_{ers}^2$$

i = Übersetzungsverhältnis des Getriebes

$n_1$ = Drehzahl der Motorwelle

$n_2$ = Drehzahl der Lastmaschinenwelle

$M_2$ = Moment der Lastmaschine in Nm

$M_1$ = Moment der Lastmaschine, auf die Motorwelle umgerechnet

$\eta_G$ = Wirkungsgrad des Getriebes

$J_2$ = Trägheitsmoment der Lastmaschine

$J_1$ = Trägheitsmoment der Lastmaschine, auf die Motorwelle umgerechnet

$M_{ers}$ = Ersatzmoment einer Masse m, die sich gradlinig mit v bewegt, bezogen auf eine Welle mit $\omega$

$r_{ers}$ = Ersatzradius einer Masse m

$J_{ers}$ = Ersatzträgheitsmoment einer Masse m

## 4.5 Beschleunigungsvorgänge

( F 4.16) $$J \cdot \frac{d\omega}{dt} = \sum M(\omega) = M_{Mot(\omega)} + M_{Last(\omega)}$$

Dynamisches Grundgesetz der Antriebstechnik

**Vorzeichen von $M_{Mot}$ und $M_{Last}$ entgegengesetzt!**

( F 4.17) $$\sum M = 0 = M_{Mot} + M_{Last}$$

stationärer Lastfall

( F 4.18) $$t_{an} = J \cdot \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{M_B} \cdot d\omega$$ Zeitbedarf in s für eine Drehzahlerhöhung von $\omega_1$ auf $\omega_2$

Bei *konstantem* Beschleunigungsmoment gilt:

( F 4.19) $$t_{an} = \frac{J}{M_B} \cdot (\omega_2 - \omega_1)$$

Bei *linear abnehmendem* Beschleunigungsmoment gilt:

( F 4.20) $$t_{an} = \frac{J}{M_{B_{max}}} \cdot \omega_N \cdot \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{\omega_N - \omega} \cdot d\omega$$ bzw.

$\omega_N$ = Winkelgeschwindigkeit entsprechend Nenndrehzahl $n_N$

( F 4.21) $$t_{12} = \frac{J}{M_{B_{max}}} \cdot \omega_N \cdot \ln\frac{\omega_N - \omega_1}{\omega_N - \omega_2}$$ für $\omega_1 < \omega_2 < \omega_N$

Für einen Hochlauf aus dem Stillstand ($\omega_1 = 0$) bis zur Nenndrehzahl ($\omega_2 = \omega_N$) gibt es keine endliche Lösung. Es gilt die Näherung:

( F 4.22) $$t_{an} \approx 5 \cdot T_{an} \approx 5 \cdot \omega_N \cdot \frac{J}{M_{B_{max}}}$$ mit $T_{an}$ = Anlaufzeitkonstante in s.

Für einen Hochlauf mit stark *variierendem* Beschleunigungsmoment kann die Anlaufzeit grafisch ermittelt werden (s. Übungsbeispiel).

## 4.6 Stabilität von Arbeitspunkten

Der stationäre Betriebspunkt eines Antriebs ist durch den Schnittpunkt der M-n-Kennlinien von Motor und Arbeitsmaschine gekennzeichnet.

( F 4.23) $$M = -M_W$$

M = Motormoment

$M_W$ = Lastmoment

Ein Arbeitspunkt ist *stabil*, wenn bei einer virtuellen Drehzahlerhöhung das Widerstandsmoment $M_W$ grösser ist als das Motormoment M, d.h. einer Drehzahlerhöhung entgegengewirkt:

( F 4.24) $$\frac{\Delta M - \Delta M_W}{\Delta\omega} < 0$$ Stabilitätsbedingung für einem Arbeitspunkt.