

1 Felder

1.1 Elektrisches Feld

Folgende Formeln gelten für 2 Dimensionen. Dazu müssen die Ladungsträger zylinderförmig sein.

$$\varepsilon \left[\frac{As}{Vm} \right] \quad \text{dielektrische Permittivität}$$

$$Q, q \left[\frac{C}{m} \right] \quad \text{Linienladungsdichte}$$

$$\vec{r}_0 \quad \text{Einheitsvektor}$$

$$\vec{F}_e \left[\frac{N}{m} \right] \quad \text{Elektrische Kraft}$$

$$\vec{E} \left[\frac{V}{m} \right] \quad \text{Elektrisches Feld}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r, \quad \varepsilon_0 = 8.8542$$

$$\vec{F}_e = \frac{Q \cdot q}{2\pi\varepsilon r} \cdot \vec{r}_0$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_e}{q} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon r} \cdot \vec{r}_0$$

$$U_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \varphi_A - \varphi_B$$

1.2 Magnetisches Feld

Für die Richtungen der Vektoren eines Kreuzproduktes kann folgende Regel angewendet werden: \vec{a} : Daumen, \vec{b} : Zeigefinger, $\vec{a} \times \vec{b}$: Mittelfinger

$$\mu \left[\frac{N}{A^2} \right] \quad \text{magnetische Permeabilität}$$

$$I, i [A] \quad \text{Ströme der Leiter}$$

$$\vec{F}_m \left[\frac{N}{m} \right] \quad \text{magnetische Kraft}$$

$$\vec{H} \left[\frac{A}{m} \right] \quad \text{magnetisches Feld}$$

$$\vec{B} [T] \quad \text{magnetische Flussdichte}$$

$$\Phi [Wb] \quad \text{magnetischer Fluss}$$

$$\Psi [Wb] \quad \text{verketteter mag. Fluss}$$

$$\Theta [A] \quad \text{magnetische Durchflutung}$$

$$V_m [A] \quad \text{Magnetische Spannung}$$

$$R_m \left[\frac{A}{Wb} \right] \quad \text{Magnetischer Widerstand}$$

$$\gamma \quad \text{geschlossener Weg um Leiter}$$

$$l, r \quad \text{Länge / Radius einer Spule}$$

$$W_m [J] \quad \text{Magnetische Energie}$$

$$\mu = \mu_0 \cdot \mu_r \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$$

$$\vec{F}_m = \frac{\mu}{2\pi} \cdot \frac{Ii}{r} \cdot \vec{r}_0 = \mu \cdot i \cdot \vec{l}_0 \times \vec{H}$$

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi} \cdot \frac{\vec{L}_0 \times \vec{r}_0}{r}$$

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$$

$$\Phi = \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A}, \quad \Psi = N \cdot \Phi$$

$$U_{ind} = -\frac{d\Psi}{dt} = -N \cdot \frac{d\Phi}{dt}$$

$$\Theta = \sum_{k=1}^n I_k = \oint_{\gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = N \cdot I$$

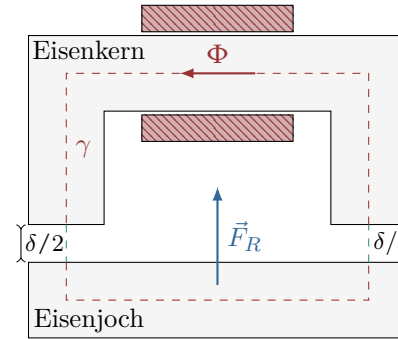
$$V_m = \int_A^B \vec{H} \cdot d\vec{l}$$

$$R_m = \frac{\Phi}{N \cdot I} = \frac{l}{\mu \cdot A} \quad (\text{wenn Homogen})$$

$$H = \frac{N \cdot I}{l}, \quad \text{wenn } l \gg r$$

$$W_m = \frac{1}{2} \iiint_V B \cdot H \cdot dV = \frac{1}{2} \cdot H \cdot B \cdot V$$

1.3 einfacher Magnetkreis



Im Luftspalt: **B Konstant!**

$$\oint_{\gamma} \vec{H} d\vec{l} = H_{Fe} \cdot l_{Fe} + 2\delta H_{\delta} = NI$$

Länge aller Luftspalte δ

$$H_{\delta} = \frac{N \cdot I}{\delta}, \quad \text{wenn } H_{\delta} \gg H_{Fe}$$

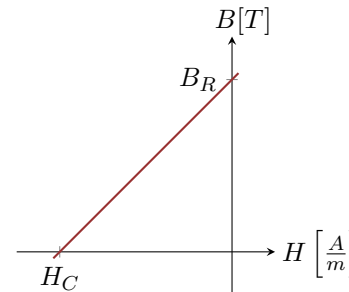
$$F_R = \mu_0 \cdot \frac{N^2 I^2 A_{Fe}}{4\delta^2}$$

$$W_m = \frac{1}{2} H_{\delta} B_{\delta} \cdot 2A_{Fe} \delta = \frac{\mu_0 A_{Fe} I^2 N^2}{4\delta}$$

in der Sättigung:

$$H_{\delta} = \frac{N \cdot I}{\frac{\mu_0}{\mu_{Fe}} l_{Fe} + 2\delta}$$

1.4 Dauermagnet



Koerzitivfeldstärke H_C

Remanenz B_R

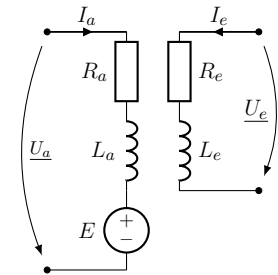
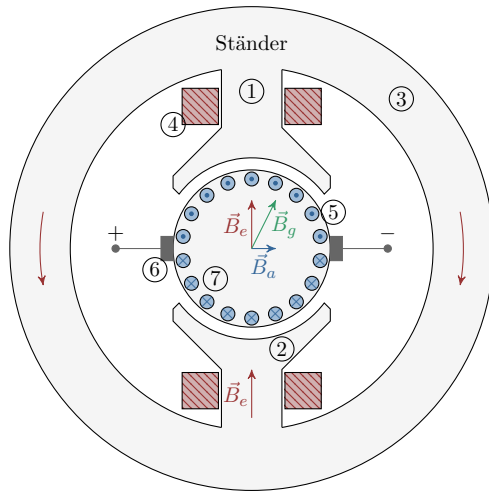
$$B_m = \mu_m \cdot H_m + B_R, \quad \mu_m = \mu_0$$

Magnetkreis mit Dauermagnet

Magnet: l_m, μ_m , im Eisenjoch

$$H_{\delta} = \frac{N \cdot I + \frac{B_R l_m}{\mu_m}}{\frac{\mu_0}{\mu_{Fe}} l_{Fe} + \frac{\mu_0}{\mu_m} l_m + 2\delta}$$

2 Gleichstrommaschine



- ①: Polkern, ②: Polschuh
 ③: Ständerjoch
 ④: Erregerwicklung (EW)
 ⑤: Ankerwicklung (AW)
 ⑥: Bürste, ⑦: Anker

$M[Nm]$	Drehmoment
$P[W]$	Leistung
X_a	Anker-grösse
X_e	Erreger-Grösse
\vec{B}_a	Ankerrückwirkung
$n \left[\frac{1}{min} \right]$	Drehzahl

$$U_e = R_e \cdot I_e + L_e \cdot \frac{dI_e}{dt}$$

$$U_a = R_a \cdot I_a + L_a \cdot \frac{dI_a}{dt} + E$$

$$E = \omega \cdot \Psi \quad \Psi = L_e \cdot I_e$$

$$P_{el} = \underbrace{R_e \cdot I_e^2}_{\text{Erregerverluste}} + \underbrace{R_a \cdot I_a^2}_{\text{Ankerverluste}} + \omega \cdot \Psi \cdot I_a$$

$$P_{mech} = \omega \cdot M, \quad M = \Psi \cdot I_a$$

$$M = \frac{U_a \cdot \Psi - \omega \cdot \Psi^2}{R_a} \quad I_a = \frac{U_a - \omega \Psi}{R_a}$$

2.1 Kompensation der Ankerrückwirkung

- Die **Kompensationswicklung (KW)** wird im Polschuh des Stators eingesetzt. Somit wirkt ein Feld \vec{B}_{kw} gegen die Ankerrückwirkung \vec{B}_a . Die Nuten werden durch den Polschuh geführt.
- Die **Compoundwicklung (KP)** gleicht die durch die Nuten der KW verursachte Hauptfeldschwächung aus. Diese wird in Serie zu der EW montiert.
- Durch die KP wird das Feld \vec{B}_e verstärkt. Somit stimmt das Gleichgewicht von \vec{B}_g nicht mehr. Deshalb wird die **Wendepolwicklung (WW)** eingesetzt. Sie wird im Ständerjoch montiert, so dass \vec{B}_{ww} gegen \vec{B}_a zeigt.

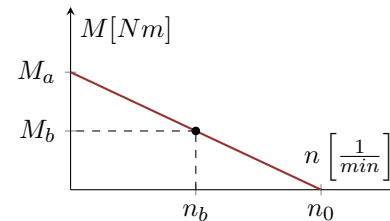
2.2 Beschaltung

2.2.1 Nebenschluss

Hier werden Erreger- und Ankerwicklung parallel an die gleiche Spannungsquelle geschaltet. Somit gilt: $U_e = U_a = U$. M_A : Anlaufmoment, n_0 : Leerlaufdrehzahl, I_{aA} : Anlaufstrom, R_v : Anlaufwiderstand

$$M = I_a \cdot \Psi = \frac{U \cdot \Psi - \frac{2\pi}{60} n \cdot \Psi^2}{R_a} \quad I_a = \frac{U - \frac{2\pi}{60} n \cdot \Psi}{R_a}$$

$$n = 0 \Rightarrow M_A = \frac{U \cdot \Psi}{R_a} \quad I_{aA} = \frac{U}{R_a + R_v} \quad M = 0 \Rightarrow n_0 = \frac{U}{\frac{2\pi}{60} \Psi}$$



$$\frac{M}{M_A} = 1 - \frac{n}{n_0}$$

M_B : Betriebsmoment
 n_b : Betriebsdrehzahl

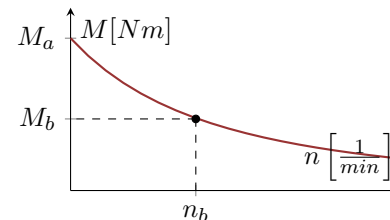
2.2.2 Reihenschluss

Hier werden Erreger- und Ankerwicklungen in Serie an die gemeinsame Spannungsquelle geschaltet. Nun gilt: $I_e = I_a = I$. M_A : Anlaufmoment, n_b : Bezugsdrehzahl

$$U = U_a + U_e = (R_a + R_e)I + \frac{2\pi}{60} n \cdot \Psi, \quad \Psi = L_e \cdot I$$

$$M = I \cdot \Psi = L_e \left(\frac{U}{R_a + R_e + \frac{2\pi}{60} n L_e} \right)^2$$

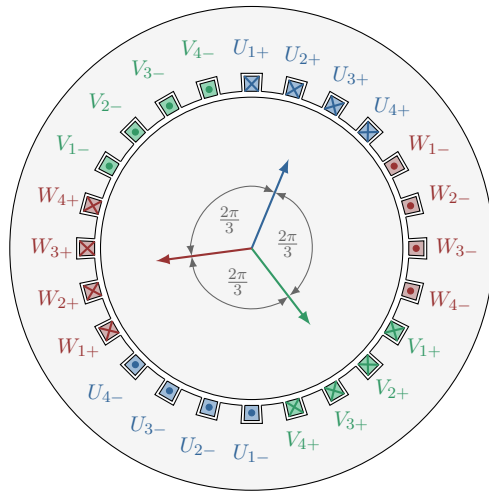
$$n = 0 \Rightarrow M_A = \frac{L_e \cdot U^2}{(R_a + R_e)^2} \quad n_b = \frac{R_a + R_e}{\frac{2\pi}{60} L_e}$$



$$\frac{M}{M_A} = \frac{1}{\left(1 + \frac{n}{n_b}\right)^2}$$

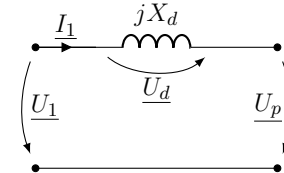
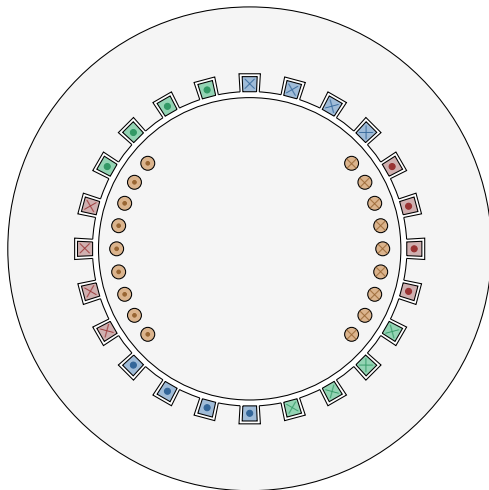
M_B : Betriebsmoment
 n_b : Betriebsdrehzahl

3 Drehfelderzeugung



p Polpaarzahl
 $2p$ Polzahl
 N_n Nutenzahl
 m Strangzahl
 q Nuten pro Phasenband
 $N = 2p \cdot q \cdot m$
 $n = \frac{60 \cdot f}{p}$

4 Synchronmaschine



X_d : Synchronreaktanzen
 $X_{\sigma 1}$: Streureaktanz
 X_h : Hauptreaktanzen
 U_p : Polradspannung
 U_1 : Netzspannung

Die Polradspannung U_p ist eine fiktive Hilfsgrösse. In der Ankerwicklung (Erreger) wird ein Gleichstrom I_e angelegt, welcher das Feld erzeugt. Im Leerlauf der Maschine entspricht U_p der von dem Erregerstrom induzierten Spannung der

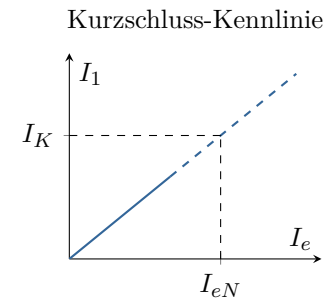
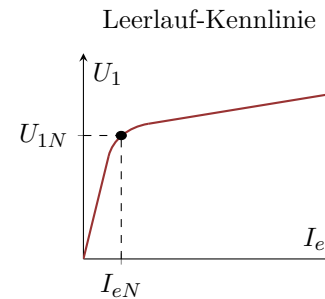
Statorwicklung.

$$\underline{U}_p = \underline{U}_p(I_e) \quad \underline{U}_p = jX_h \cdot \underline{I}'_e, \quad \text{wobei } \underline{I}'_e: \text{Erregerstrom auf Statorseite}$$

So entsteht die Grundgleichung einer Synchronmaschine:

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_d + \underline{U}_p \quad \underline{U}_d = jX_d \cdot \underline{I}_1 \quad X_d = X_{\sigma 1} + X_h = \frac{U_1}{\sqrt{3} \cdot I_k}$$

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_d + \underline{U}_p = jX_d \cdot \underline{I}_1 + \underline{U}_p(I_e)$$



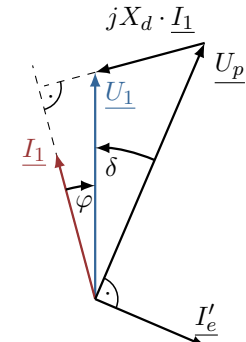
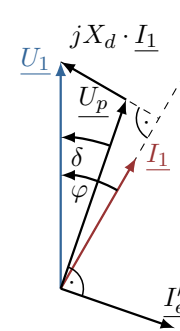
4.1 Zeigerdiagramme

Bei den Zeigerdiagrammen einer Synchronmaschine wird als Referenz der Vektor \underline{U}_1 gewählt. Danach wird \underline{I}_1 gesetzt. \underline{I}'_e entsteht, indem I_e mit der Richtung (Umdrehung) der Welle multipliziert wird.

4.1.1 Zeigerdiagramm im Motorbetrieb: $P > 0$, $\delta > 0$

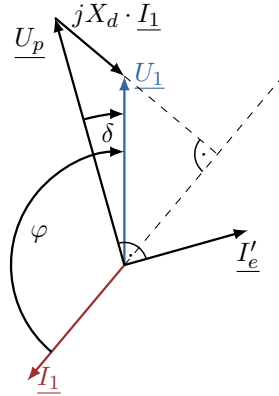
Untererregt: $U_p < U_1$ (induktiv $\varphi > 0$)

Übererregt: $U_p > U_1$ (kapazitiv: $\varphi < 0$)

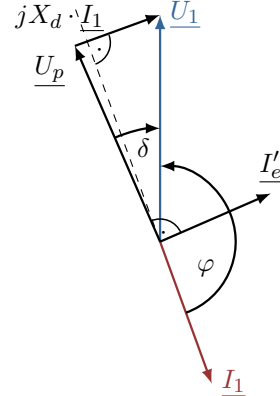


4.1.2 Zeigerdiagramm im Generatorbetrieb: $\delta > 0$

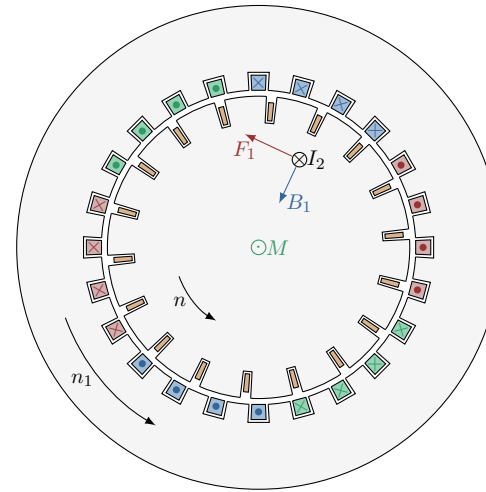
Übererregt: $U_p > U_1$ (kapazitiv: $\varphi < 0$)



Untererregt: $U_p < U_1$ (induktiv: $\varphi > 0$)



5 Asynchronmaschine



n_1 Synchrone Drehzahl (Drehfeld)

n Drehzahl des Läufers

n_2 Relative Drehzahl

s Schlupf

I_2 Induzierter Strom

$$n_2 = n_1 - n$$

$$s = \frac{n_2}{n_1} = \frac{n_1 - n}{n_1} = \frac{f_2}{f_1}$$

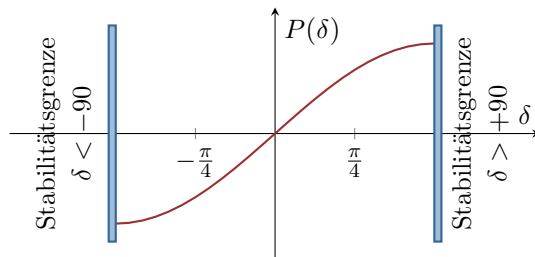
$$I_2 = \frac{U_{i20}}{\sqrt{\left(\frac{R_2}{s}\right)^2 + X_{2\sigma}^2}}$$

4.2 Leistung

Der Faktor 3 kommt nur dazu, wenn die Leistung von allen 3 Strängen gefragt ist. (Leistung ist nicht abhängig von Stern- oder Dreieckschaltung.)

$$P = 3 \cdot U_1 \cdot I_1 \cdot \cos \varphi$$

$$P(\delta) = 3 \cdot \frac{U_p U_1}{X_d} \cdot \sin \delta = \begin{cases} P_{mech} - P_V = \omega \cdot M - P_V & \text{wenn Generator} \\ P_{mech} + P_V = \omega \cdot M + P_V & \text{wenn Motor} \end{cases}$$



Stillstand

$$s = 1 \quad f_2 = f_1$$

$$I_2 = I_{2max} = \frac{U_{i20}}{\sqrt{R_2^2 + X_{2\sigma}^2}}$$

Synchroner Lauf

$$s = 0 \quad f_2 = 0$$

$$I_2 = I_{2min} = 0$$

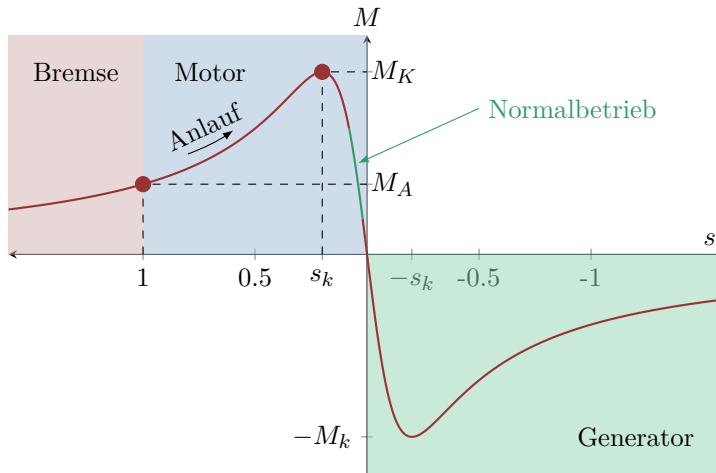
5.1 Leistung

P_1 : primäre Netzleistung, P_{Cu} : Ohmsche Verluste, P_{Fe} : Blechkernverluste, P_{D1} : Drehfeldleistung, P_m : mechanische Leistung, P_R : Reibungsverluste und Lüftung, P'_m : mechanische Nutzleistung

$$P'_m = P_m - P_R = P_{D1} - P_{Cu2} - P_R = P_1 - P_{Cu1} - P_{Fe} - P_{Cu2} - P_R$$

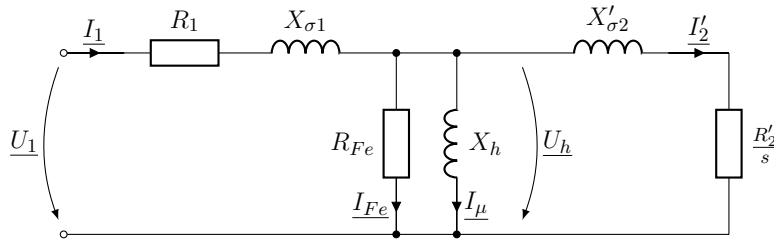
$$P_{D1} = 2\pi \cdot n_1 \cdot M \quad P_m = 2\pi \cdot n \cdot M$$

$$M = \frac{1}{2\pi \cdot n_1} \frac{P_{Cu2}}{s} = \frac{q_2 \cdot U_{i20}^2 \cdot R_2}{2\pi n_1 s \cdot \left(\left(\frac{R_2}{s} \right)^2 + X_{2\sigma}^2 \right)}$$



M_k : Kippmoment, M_A : Anlaufmoment, s_k : Kippschlupf

5.2 Modell der Asynchronmaschine



N	Windungszahl
k_w	Wicklungsfaktor
R_{Fe}	Eisen-Verlustwiderstand
X_h	Hauptreaktanz
\underline{U}_h	innere Spannung
\underline{I}_{μ}	Magnetisierungsstrom
u	Übersetzungsverhältnis
I_0	Leerlaufstrom

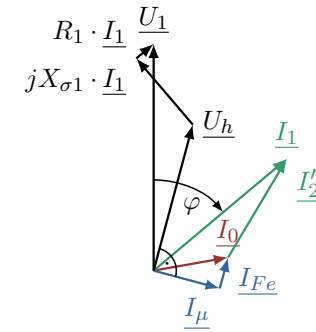
$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{Fe} + \underline{I}_{\mu} + \underline{I}'_2$$

$$\underline{U}_1 = R_1 \cdot \underline{I}_1 + jX_{\sigma 1} \underline{I}_1 + \underline{U}_h$$

$$u = \frac{N_1 \cdot k_{w1}}{N_2 \cdot k_{w2}}, \quad \underline{I}'_2 = \underline{I}_2 \cdot u, \quad R'_2 = R_2 \cdot u^2$$

$$\underline{I}_0 = \underline{I}_{Fe} + \underline{I}_{\mu}$$

5.3 Zeigerdiagramm



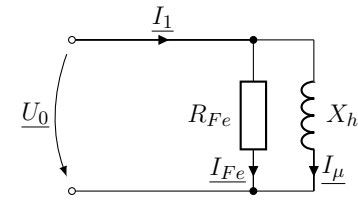
5.4 Leerlauf

Hier wird die Asynchronmaschine an der Welle nicht belastet.

$$R_1 \ll R_{Fe}, \quad X_{\sigma 1} \ll X_h$$

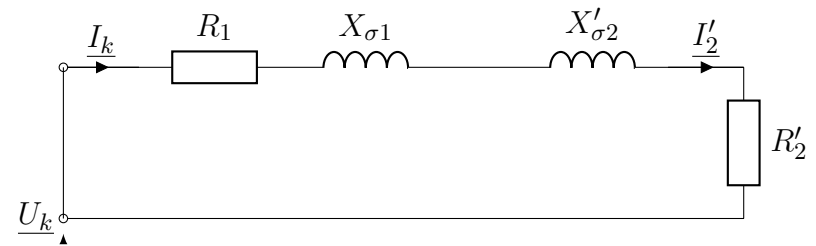
$$R_{Fe} = \frac{U_0}{I_{Fe}} = \frac{U_0}{I_0 \cdot \cos \varphi_0}$$

$$X_h = \frac{U_0}{I_{\mu}} = \frac{U_0}{I_0 \cdot \sin \varphi_0}$$



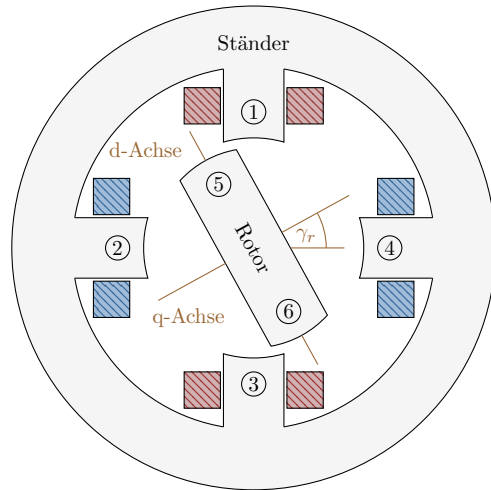
5.5 Kurzschluss

Hier wird die Welle der Asynchronmaschine blockiert ($s = 1$).



$$R_1 + R'_2 = \frac{U_R}{I_K} = \frac{U_K \cdot \cos \varphi_K}{I_K} \quad X_{\sigma 1} + X'_{\sigma 2} = \frac{U_X}{I_K} = \frac{U_K \cdot \sin \varphi_K}{I_K}$$

6 Schrittmotor



- ①: Statorzahn- und Wicklung 1
- ②: Statorzahn- und Wicklung 2
- ③: Statorzahn- und Wicklung 3
- ④: Statorzahn- und Wicklung 4
- ⑤: Rotorzahn 1
- ⑥: Rotorzahn 2

Diese Grafik ist nicht realistisch. Normalerweise sind viel mehr Statorzähne vorhanden. Der Rotor kann aus Eisen, sowie aus einem Permanentmagnet bestehen. Wenn er ein Permanentmagnet ist, so kann dieser auch abstossend wirken. So kann die Richtung gewechselt werden.

- Z_s Stator-Zahnzahl
- Z_R Rotor-Zahnzahl
- α_S Stator-Winkel
- α_R Rotor-Winkel
- α_0 Vollschritt-Winkel
- m Strangzahl
- N_p Schrittzahl
- f_s Steuerfrequenz
- L_d Ind. in d-Achse
- L_q Ind. in q-Achse
- A_Z Fläche eines Zahns

$$\alpha_S = \frac{2\pi}{Z_S} \quad \alpha_R = \frac{2\pi}{Z_R}$$

$$\alpha_0 = \alpha_R - \alpha_S \quad m = \frac{Z_S}{Z_S - Z_R}$$

$$N_p = \frac{2\pi}{\alpha_0} \quad f_s = N_p \cdot \frac{n}{60}$$

$$L_d = 2N \cdot \frac{\Phi}{I_1} = 2N^2 \cdot \mu_0 \cdot \frac{A_Z}{\delta_d}$$

$$L_q = 2N \cdot \frac{\Phi}{I_1} = 2N^2 \cdot \mu_0 \cdot \frac{A_Z}{\delta_q}$$

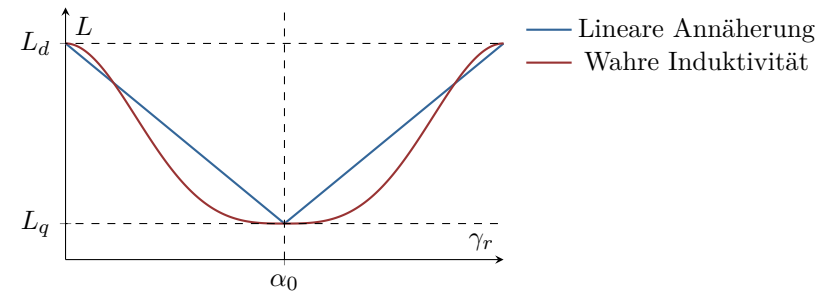
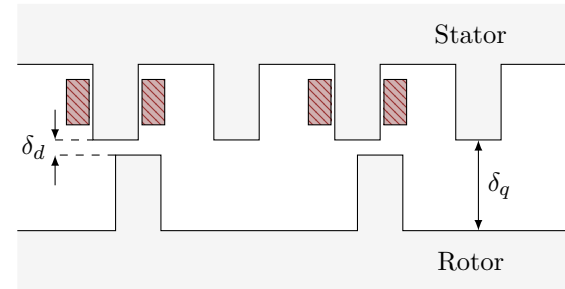
6.1 Drehmoment und Leistung

- W_m mechanische Energie
- L_d Induktivität in d-Achse
- L_q Induktivität in q-Achse
- δ_d Kleinster Luftspalt
- δ_q grösster Luftspalt
- m_M Motormoment
- J_g gesamtes Trägheitsmoment
- M_M Drehmoment des Motors

$$M = \frac{dW_m}{d\varphi} = \frac{1}{2} I^2 \cdot \frac{dL(\varphi)}{d\varphi}$$

$$L_d = 2 \cdot N^2 \cdot \mu_0 \cdot \frac{A_Z}{\delta_d}$$

$$L_q = 2 \cdot N^2 \cdot \mu_0 \cdot \frac{A_Z}{\delta_q}$$



$$p_\delta(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{dL}{d\gamma_r}(\gamma_r) \cdot \omega_r \cdot i^2(t)$$

$$m_M(t) = \frac{p_\delta(t)}{\omega_r} = \frac{1}{2} \cdot \frac{dL}{d\gamma_r}(\gamma_r) \cdot i^2(t)$$

$$M_L(f_s, \omega_1) = M_M - J_g \alpha_0 f_s^2 + J_g \omega_1 f_s$$

7 Vergleich der Maschinen

	GSM	RSM	SYM	ASM
Komplexität des Aufbaus	4	2	3	1
Kosten	4	3	2	1
Wirkungsgrad	4	2	1	3
Anpassungsfähigkeit	1	2	3	4

7.1 Anlaufstrom

- **GSM:** Begrenzung durch Vorwiderstand: $I_a = \frac{U}{R_a}$
- **RSM:** Begrenzung durch Speisung
- **SYM:** $I_a = K \cdot I_n$, $0.5 \leq K \leq 30$
- **ASM:** $I_a = K \cdot I_n$, $0.5 \leq K \leq 30$

7.2 Anlaufmoment

- **GSM:** $M \sim I$, Begrenzt durch R_a , I_{max}
- **RSM:** $M \sim U$
- **SYM:** $M \sim \left(\frac{U}{f}\right)^2$, Begrenzt durch X_σ
- **ASM:** $M \sim \left(\frac{U}{f}\right)^2$, Begrenzt durch X_σ

7.3 Drehzahlregelung

- **GSM:** Über Spannung und Erregerstrom
- **RSM:** Über die Frequenz der digitalen Logik
- **SYM:** Über die Poolparzahl und die Frequenz
- **ASM:** Über die Poolparzahl und die Frequenz

7.4 Anwendungsbereiche

- **GSM:** Regelbare Antriebe mit grossem Stellbereich und guter Dynamik
- **RSM:** Verstellantriebe kleiner Leistung ohne Regelung
- **SYM:** Antriebe mit konstanter Drehzahl und gutem Leistungsfaktor
- **ASM:** Einfache Antriebe und regelbare Antriebe mit beschränkter Dynamik