

# 1 Felder

## 1.1 Elektrisches Feld

Folgende Formeln gelten für 2 Dimensionen. Dazu müssen die Ladungsträger zylinderförmig sein.

$$\varepsilon \left[ \frac{As}{Vm} \right] \quad \text{dielektrische Permittivität}$$

$$Q, q \left[ \frac{C}{m} \right] \quad \text{Linienladungsdichte}$$

$$\vec{r}_0 \quad \text{Einheitsvektor}$$

$$\vec{F}_e \left[ \frac{N}{m} \right] \quad \text{Elektrische Kraft}$$

$$\vec{E} \left[ \frac{V}{m} \right] \quad \text{Elektrisches Feld}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r, \quad \varepsilon_0 = 8.8542 \cdot 10^{-12}$$

$$\vec{F}_e = \frac{Q \cdot q}{2\pi\varepsilon r} \cdot \vec{r}_0$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_e}{q} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon r} \cdot \vec{r}_0$$

$$U_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \varphi_A - \varphi_B$$

## 1.2 Magnetisches Feld

Für die Richtungen der Vektoren eines Kreuzproduktes kann folgende Regel angewendet werden:  $\vec{a}$ : Daumen,  $\vec{b}$ : Zeigefinger,  $\vec{a} \times \vec{b}$ : Mittelfinger

$$\mu \left[ \frac{N}{A^2} \right] \quad \text{magnetische Permeabilität}$$

$$I, i [A] \quad \text{Ströme der Leiter}$$

$$\vec{F}_m \left[ \frac{N}{m} \right] \quad \text{magnetische Kraft}$$

$$\vec{H} \left[ \frac{A}{m} \right] \quad \text{magnetisches Feld}$$

$$\vec{B} [T] \quad \text{magnetische Flussdichte}$$

$$\Phi [Wb] \quad \text{magnetischer Fluss}$$

$$\Psi [Wb] \quad \text{verketteter mag. Fluss}$$

$$\Theta [A] \quad \text{magnetische Durchflutung}$$

$$V_m [A] \quad \text{Magnetische Spannung}$$

$$R_m \left[ \frac{A}{Wb} \right] \quad \text{Magnetischer Widerstand}$$

$$\gamma \quad \text{geschlossener Weg um Leiter}$$

$$l, r \quad \text{Länge / Radius einer Spule}$$

$$W_m [J] \quad \text{Magnetische Energie}$$

$$\mu = \mu_0 \cdot \mu_r \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$$

$$\vec{F}_m = \frac{\mu}{2\pi} \cdot \frac{Ii}{r} \cdot \vec{r}_0 = \mu \cdot i \cdot \vec{l}_0 \times \vec{H}$$

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi} \cdot \frac{\vec{L}_0 \times \vec{r}_0}{r}$$

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$$

$$\Phi = \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A}, \quad \Psi = N \cdot \Phi$$

$$U_{ind} = -\frac{d\Psi}{dt} = -N \cdot \frac{d\Phi}{dt}$$

$$\Theta = \sum_{k=1}^n I_k = \oint_{\gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = N \cdot I$$

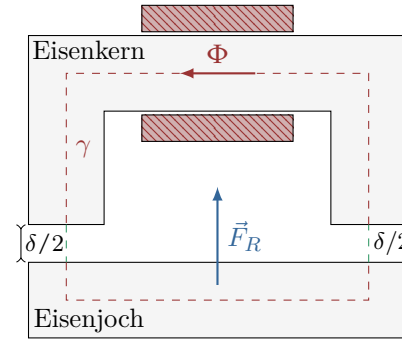
$$V_m = \int_A^B \vec{H} \cdot d\vec{l}$$

$$R_m = \frac{\Phi}{V_m} = \frac{l}{\mu \cdot A} \quad (\text{wenn Homogen})$$

$$H = \frac{N \cdot I}{l}, \quad \text{wenn } l \gg r$$

$$W_m = \frac{1}{2} \iiint_V B \cdot H \cdot dV = \frac{1}{2} \cdot H \cdot B \cdot V$$

## 1.3 einfacher Magnetkreis



Im Luftspalt: **B Konstant!**

$$\oint_{\gamma} \vec{H} d\vec{l} = H_{Fe} \cdot l_{Fe} + 2\delta H_{\delta} = NI$$

Länge aller Luftspalte  $\delta$

$$H_{\delta} = \frac{N \cdot I}{\delta}, \quad \text{wenn } H_{\delta} \gg H_{Fe}$$

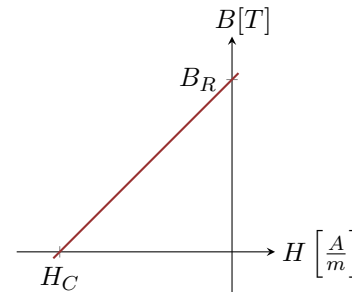
$$F_R = \frac{\partial W_m}{\partial \delta} = \mu_0 \cdot \frac{N^2 I^2 A_{Fe}}{4\delta^2}$$

$$W_m = \frac{1}{2} H_{\delta} B_{\delta} \cdot 2A_{Fe} \delta = \frac{\mu_0 A_{Fe} I^2 N^2}{4\delta}$$

in der Sättigung:

$$H_{\delta} = \frac{N \cdot I}{\frac{\mu_0}{\mu_{Fe}} l_{Fe} + 2\delta}$$

## 1.4 Dauermagnet



Koerzitivfeldstärke  $H_C$

Remanenz  $B_R$

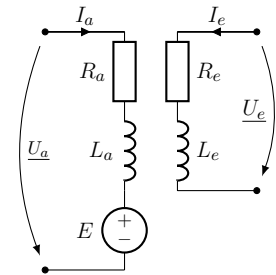
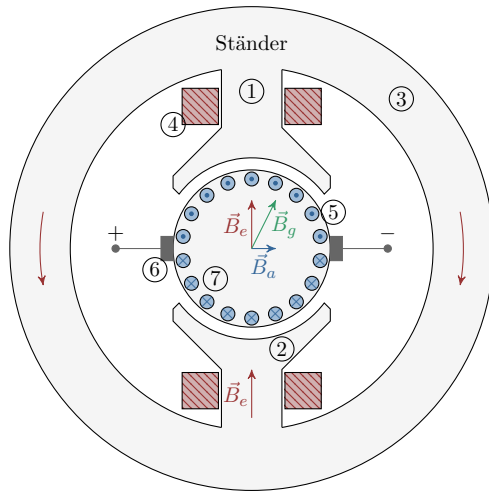
$$B_m = \mu_m \cdot H_m + B_R, \quad \mu_m = \mu_0$$

**Magnetkreis mit Dauermagnet**

Magnet:  $l_m, \mu_m$ , im Eisenjoch

$$H_{\delta} = \frac{N \cdot I + \frac{B_R l_m}{\mu_m}}{\frac{\mu_0}{\mu_{Fe}} l_{Fe} + \frac{\mu_0}{\mu_m} l_m + 2\delta}$$

## 2 Gleichstrommaschine



- ①: Polkern, ②: Polschuh  
 ③: Ständerjoch  
 ④: Erregerwicklung (EW)  
 ⑤: Ankerwicklung (AW)  
 ⑥: Bürste, ⑦: Anker

$M[Nm]$  Drehmoment

$P[W]$  Leistung

$X_a$  Anker-grösse

$X_e$  Erreger-Grösse

$\vec{B}_a$  Ankerrückwirkung

$n \left[ \frac{1}{min} \right]$  Drehzahl

$$U_e = R_e \cdot I_e + L_e \cdot \frac{dI_e}{dt}$$

$$U_a = R_a \cdot I_a + L_a \cdot \frac{dI_a}{dt} + E$$

$$E = \omega \cdot \Psi \quad \omega = \frac{2\pi}{60} \cdot n \quad \Psi = L_e \cdot I_e$$

$$P_{el} = \underbrace{R_e \cdot I_e^2}_{\text{Erregerverluste}} + \underbrace{R_a \cdot I_a^2}_{\text{Ankerverluste}} + \omega \cdot \Psi \cdot I_a$$

$$P_{mech} = \omega \cdot M, \quad M = \Psi \cdot I_a$$

$$M = \frac{U_a \cdot \Psi - \omega \cdot \Psi^2}{R_a} \quad I_a = \frac{U_a - \omega \Psi}{R_a}$$

### 2.1 Kompensation der Ankerrückwirkung

- Die **Kompensationswicklung (KW)** wird im Polschuh des Stators eingesetzt. Somit wirkt ein Feld  $\vec{B}_{kw}$  gegen die Ankerrückwirkung  $\vec{B}_a$ . Die Nuten werden durch den Polschuh geführt.
- Die **Compoundwicklung (KP)** gleicht die durch die Nuten der KW verursachte Hauptfeldschwächung aus. Diese wird in Serie zu der EW montiert.
- Durch die KP wird das Feld  $\vec{B}_e$  verstärkt. Somit stimmt das Gleichgewicht von  $\vec{B}_g$  nicht mehr. Deshalb wird die **Wendepolwicklung (WW)** eingesetzt. Sie wird im Ständerjoch montiert, so dass  $\vec{B}_{ww}$  gegen  $\vec{B}_a$  zeigt.

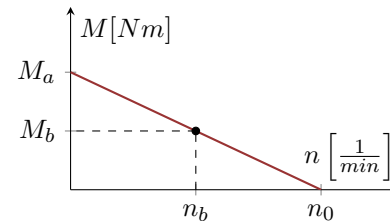
## 2.2 Beschaltung

### 2.2.1 Nebenschluss

Hier werden Erreger- und Ankerwicklung parallel an die gleiche Spannungsquelle geschaltet. Somit gilt:  $U_e = U_a = U$ .  $M_A$ : Anlaufmoment,  $n_0$ : Leerlaufdrehzahl,  $I_{aA}$ : Anlaufstrom,  $R_v$ : Anlaufwiderstand

$$M = I_a \cdot \Psi = \frac{U \cdot \Psi - \frac{2\pi}{60} n \cdot \Psi^2}{R_a} \quad I_a = \frac{U - \frac{2\pi}{60} n \cdot \Psi}{R_a}$$

$$n = 0 \Rightarrow M_A = \frac{U \cdot \Psi}{R_a} \quad I_{aA} = \frac{U}{R_a + R_v} \quad M = 0 \Rightarrow n_0 = \frac{U}{\frac{2\pi}{60} \Psi}$$



$$\frac{M}{M_A} = 1 - \frac{n}{n_0}$$

$M_B$ : Betriebsmoment  
 $n_b$ : Betriebsdrehzahl

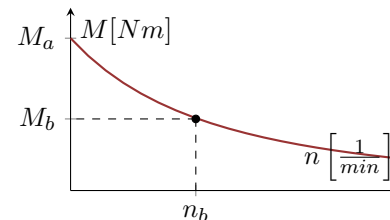
### 2.2.2 Reihenschluss

Hier werden Erreger- und Ankerwicklungen in Serie an die gemeinsame Spannungsquelle geschaltet. Nun gilt:  $I_e = I_a = I$ .  $M_A$ : Anlaufmoment,  $n_b$ : Bezugsdrehzahl

$$U = U_a + U_e = (R_a + R_e)I + \frac{2\pi}{60} n \cdot \Psi, \quad \Psi = L_e \cdot I$$

$$M = I \cdot \Psi = L_e \left( \frac{U}{R_a + R_e + \frac{2\pi}{60} n L_e} \right)^2$$

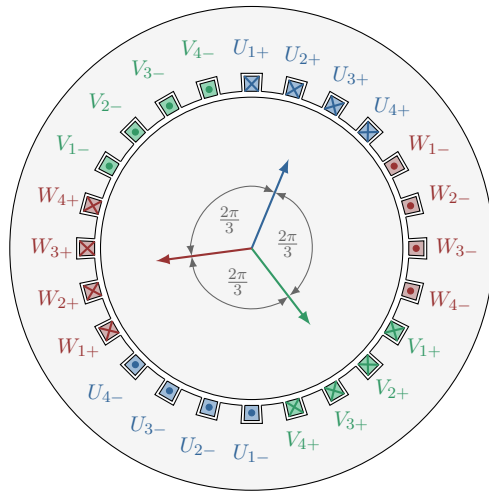
$$n = 0 \Rightarrow M_A = \frac{L_e \cdot U^2}{(R_a + R_e)^2} \quad n_b = \frac{R_a + R_e}{\frac{2\pi}{60} L_e}$$



$$\frac{M}{M_A} = \frac{1}{\left(1 + \frac{n}{n_b}\right)^2}$$

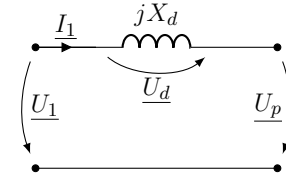
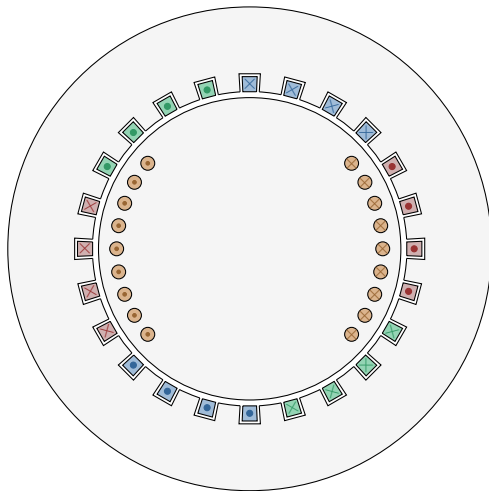
$M_B$ : Betriebsmoment  
 $n_b$ : Betriebsdrehzahl

### 3 Drehfelderzeugung



$p$  Polpaarzahl  
 $2p$  Polzahl  
 $N_n$  Nutenzahl  
 $m$  Strangzahl  
 $q$  Nuten pro Phasenband  
 $N = 2p \cdot q \cdot m$   
 $n = \frac{60 \cdot f}{p}$

### 4 Synchronmaschine



$X_d$ : Synchronreaktanzen  
 $X_{\sigma 1}$ : Streureaktanz  
 $X_h$ : Hauptreaktanzen  
 $U_p$ : Polradspannung  
 $U_1$ : Netzspannung

**Meist in Stern-Schaltung!** Die Polradspannung  $U_p$  ist eine fiktive Hilfsgrösse. In der Ankerwicklung (Erreger) wird ein Gleichstrom  $I_e$  angelegt, welcher das Feld erzeugt. Im Leerlauf der Maschine entspricht  $U_p$  der von dem Erregerstrom

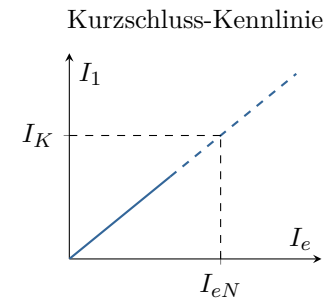
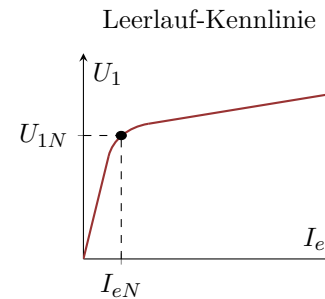
induzierten Spannung der Statorwicklung.

$$\underline{U}_p = \underline{U}_p(\underline{I}_e) \quad \underline{U}_p = jX_h \cdot \underline{I}'_e, \quad \text{wobei } \underline{I}'_e: \text{Erregerstrom auf Statorseite}$$

So entsteht die Grundgleichung einer Synchronmaschine:

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_d + \underline{U}_p \quad \underline{U}_d = jX_d \cdot \underline{I}_1 \quad X_d = X_{\sigma 1} + X_h = \frac{U_1}{\sqrt{3} \cdot I_k}$$

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_d + \underline{U}_p = jX_d \cdot \underline{I}_1 + \underline{U}_p(I_e)$$



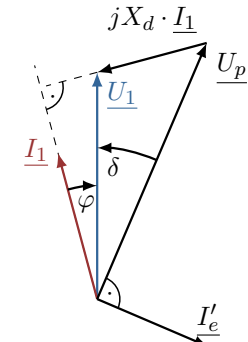
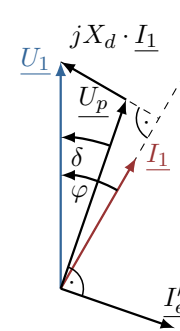
#### 4.1 Zeigerdiagramme

Bei den Zeigerdiagrammen einer Synchronmaschine wird als Referenz der Vektor  $\underline{U}_1$  gewählt. Danach wird  $\underline{I}_1$  gesetzt.  $\underline{I}'_e$  entsteht, indem  $I_e$  mit der Richtung (Umdrehung) der Welle multipliziert wird.

##### 4.1.1 Zeigerdiagramm im Motorbetrieb: $P > 0$ , $\delta > 0$

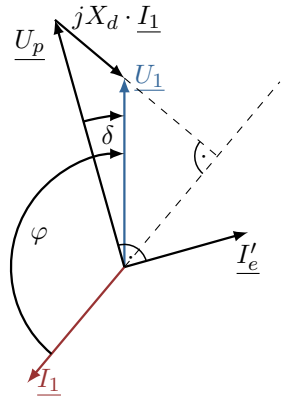
Untererregt:  $U_p < U_1$  (induktiv  $\varphi > 0$ )

Übererregt:  $U_p > U_1$  (kapazitiv:  $\varphi < 0$ )

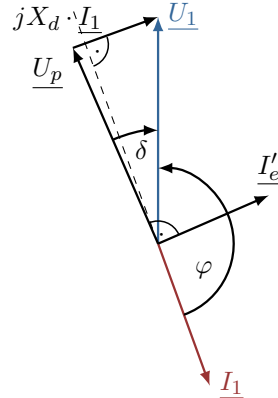


#### 4.1.2 Zeigerdiagramm im Generatorbetrieb: $\delta < 0$

Übererregt:  $U_p > U_1$  (kapazitiv:  $\varphi < 0$ )



Untererregt:  $U_p < U_1$  (induktiv:  $\varphi > 0$ )



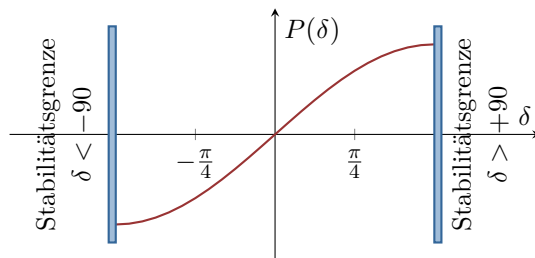
$$(X_d \cdot I_1)^2 = \left(\frac{U_1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{U_p}{\sqrt{3}}\right)^2 - 2 \cdot \frac{U_1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{U_p}{\sqrt{3}} \cdot \cos \delta$$

## 4.2 Leistung

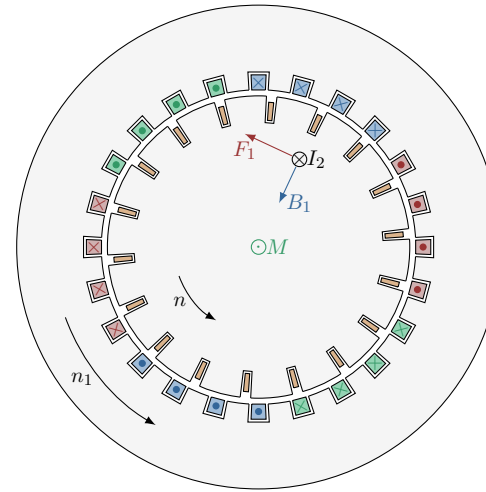
Der Faktor 3 kommt nur dazu, wenn die Leistung von allen 3 Strängen gefragt ist. (Leistung ist nicht abhängig von Stern- oder Dreieckschaltung.)

$$P = 3 \cdot U_1 \cdot I_1 \cdot \cos \varphi = 3 \cdot \frac{U_p \cdot U_1}{\omega L_d} \cdot \sin \delta$$

$$P(\delta) = 3 \cdot \frac{U_p U_1}{X_d} \cdot \sin \delta = \begin{cases} P_{mech} - P_V = \omega \cdot M - P_V & \text{wenn Generator} \\ P_{mech} + P_V = \omega \cdot M + P_V & \text{wenn Motor} \end{cases}$$



## 5 Asynchronmaschine



$n_1$  Synchrone Drehzahl (Drehfeld)

$n$  Drehzahl des Läufers

$n_2$  Relative Drehzahl

$s$  Schlupf

$I_2$  Induzierter Strom

$q_1$  Anz. Phasen

$n_2 = n_1 - n$

$$s = \frac{n_2}{n_1} = \frac{n_1 - n}{n_1} = \frac{f_2}{f_1}$$

$$I_2' = \frac{U_1}{\sqrt{\left(\frac{R_2'}{s}\right)^2 + X_{2\sigma}'^2}}$$

Stillstand (Anlauf)

Synchroner Lauf

$$s = 1 \quad f_2 = f_1$$

$$s = 0 \quad f_2 = 0$$

$$I_2 = I_{2max} = \frac{U_{i20}}{\sqrt{R_2'^2 + X_{2\sigma}'^2}}$$

$$I_2 = I_{2min} = 0$$

$r$ : Radius des Rotors,  $B$ : Flussdichte des Drehfeldes,  $l_2$ : Länge des Rotors

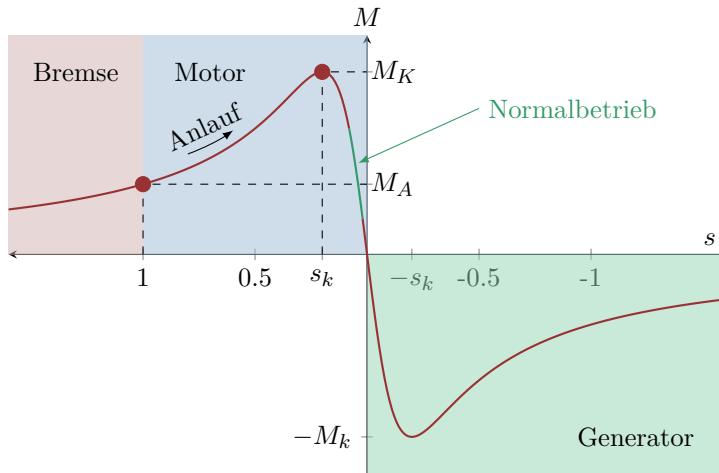
$$M = r \cdot F_1 = R \cdot I_2 B l_2 = \frac{60}{2\pi n_1} \cdot \frac{P_{Cu2}}{s} \quad \frac{M}{M_K} = \frac{2}{\frac{s}{s_k} + \frac{s_k}{s}} \quad s_k = \frac{R_2'}{X_{2\sigma}'}$$

$$M = \frac{60}{2\pi \cdot n_1} \cdot \frac{P_{Cu2}}{s} = \frac{60 \cdot q_2 \cdot U_{i20}^2 \cdot R_2'}{2\pi n_1 s \cdot \left(\left(\frac{R_2'}{s}\right)^2 + X_{2\sigma}'^2\right)} \quad M_K = \frac{60 \cdot q_1}{4\pi n_1} \cdot \frac{U_1^2}{X_{2\sigma}'}$$

### 5.1 Leistung

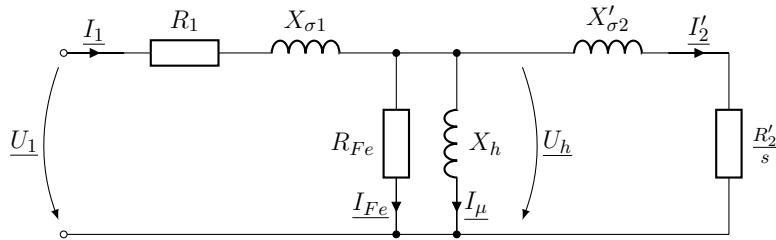
$$P_m' = P_m - P_R = P_{D1} - P_{Cu2} - P_R = P_1 - P_{Cu1} - P_{Fe} - P_{Cu2} - P_R$$

$$P_{D1} = \frac{2\pi}{60} \cdot n_1 \cdot M \quad P_m = \frac{2\pi}{60} \cdot n \cdot M$$



$M_k$ : Kippmoment,  $M_A$ : Anlaufmoment,  $s_k$ : Kippschlupf

## 5.2 Modell der Asynchronmaschine



$N$	Windungszahl
$k_w$	Wicklungsfaktor
$R_{Fe}$	Eisen-Verlustwiderstand
$X_h$	Hauptreaktanz
$\underline{U}_h$	innere Spannung
$\underline{I}_\mu$	Magnetisierungsstrom
$u$	Übersetzungsverhältnis
$I_0$	Leerlaufstrom

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{Fe} + \underline{I}_\mu + \underline{I}'_2 \approx \underline{I}'_2$$

$$\underline{U}_1 = R_1 \cdot \underline{I}_1 + jX_{\sigma 1} \underline{I}_1 + \underline{U}_h$$

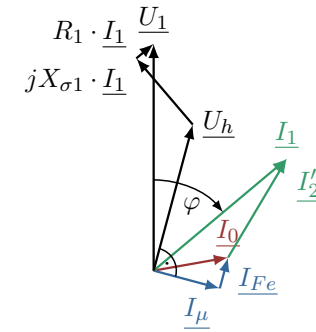
$$u = \frac{N_1 \cdot k_{w1}}{N_2 \cdot k_{w2}}, \quad \underline{I}'_2 = \underline{I}_2 \cdot u, \quad R'_2 = R_2 \cdot u^2$$

$$\underline{I}_0 = \underline{I}_{Fe} + \underline{I}_\mu \quad \cos \varphi = \frac{P}{U \cdot I}$$

$$s_k = \frac{R'_2}{X'_{2\sigma}} \quad M_K = \frac{60 \cdot q_1}{4\pi n_1} \cdot \frac{U_1^2}{X'_{2\sigma}}$$

$$U_Y = \frac{U_\Delta}{\sqrt{3}} \quad I_Y = \frac{I_\Delta}{\sqrt{3}} \quad M_Y = \frac{M_\Delta}{3}$$

## 5.3 Zeigerdiagramm



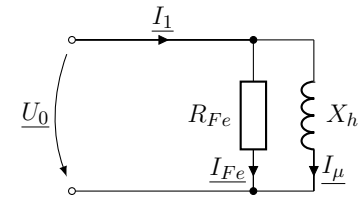
## 5.4 Leerlauf

Hier wird die Asynchronmaschine an der Welle nicht belastet.

$$R_1 \ll R_{Fe}, \quad X_{\sigma 1} \ll X_h$$

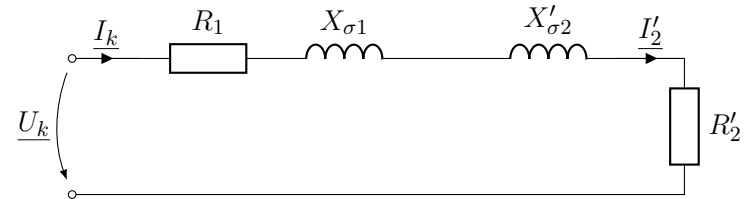
$$R_{Fe} = \frac{U_0}{I_{Fe}} = \frac{U_0}{I_0 \cdot \cos \varphi_0}$$

$$X_h = \frac{U_0}{I_\mu} = \frac{U_0}{I_0 \cdot \sin \varphi_0}$$



## 5.5 Kurzschluss

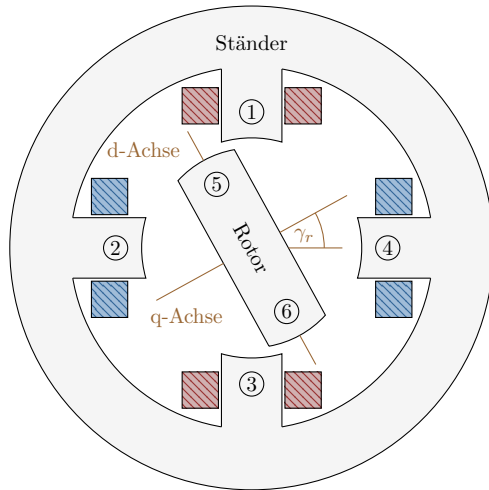
Hier wird die Welle der Asynchronmaschine blockiert ( $s = 1$ ).



$$R_1 + R'_2 = \frac{U_R}{I_K} = \frac{U_K \cdot \cos \varphi_K}{I_K} \quad X_{\sigma 1} + X'_{\sigma 2} = \frac{U_X}{I_K} = \frac{U_K \cdot \sin \varphi_K}{I_K}$$

$$\cos \varphi_K = \frac{P_K}{U_K \cdot I_K} \quad X'_{2\sigma} = \frac{q_1 \cdot 60}{4\pi n_1} \cdot \frac{U_1^2}{M_K}$$

## 6 Schrittmotor



- ①: Statorzahn- und Wicklung 1  
 ②: Statorzahn- und Wicklung 2  
 ③: Statorzahn- und Wicklung 3  
 ④: Statorzahn- und Wicklung 4  
 ⑤: Rotorzahn 1  
 ⑥: Rotorzahn 2

Diese Grafik ist nicht realistisch. Normalerweise sind viel mehr Statorzähne vorhanden. Der Rotor kann aus Eisen, sowie aus einem Permanentmagnet bestehen. Wenn er ein Permanentmagnet ist, so kann dieser auch abstossend wirken. So kann die Richtung gewechselt werden.

$Z_s$  Stator-Zahnzahl

$Z_R$  Rotor-Zahnzahl

$\alpha_S$  Stator-Winkel

$\alpha_R$  Rotor-Winkel

$\alpha_0$  Vollschritt-Winkel

$m$  Strangzahl

$N_p$  Schrittzahl

$f_s$  Steuerfrequenz

$L_d$  Ind. in d-Achse

$L_q$  Ind. in q-Achse

$A_Z$  Fläche eines Zahns

$\omega_1$  ist die Geometrische Kreisfrequenz des Rotors zu dem Zeitpunkt des Impulsschaltens ( $\omega_1 = 0$  bedeutet der Rotor ist im Stillstand, ist  $\omega_1 = \omega_{BP}$ ), dann ist man am Betriebspunkt).

$$\alpha_S = \frac{2\pi}{Z_S} \quad \alpha_R = \frac{2\pi}{Z_R}$$

$$\alpha_0 = \alpha_R - \alpha_S \quad m = \frac{Z_S}{Z_S - Z_R}$$

$$N_p = \frac{2\pi}{\alpha_0} \quad f_s = N_p \cdot \frac{n}{60}$$

$$L_d = 2N \cdot \frac{\Phi}{I_1} = 2N^2 \cdot \mu_0 \cdot \frac{A_Z}{\delta_d}$$

$$L_q = 2N \cdot \frac{\Phi}{I_1} = 2N^2 \cdot \mu_0 \cdot \frac{A_Z}{\delta_q}$$

### 6.1 Drehmoment und Leistung

$W_m$  mechanische Energie

$L_d$  Induktivität in d-Achse

$L_q$  Induktivität in q-Achse

$\delta_d$  Kleinster Luftspalt

$\delta_q$  grösster Luftspalt

$M_M$  Motormoment

$J_g$  gesamtes Trägheitsmoment

$N$  Windungszahl einer Spule

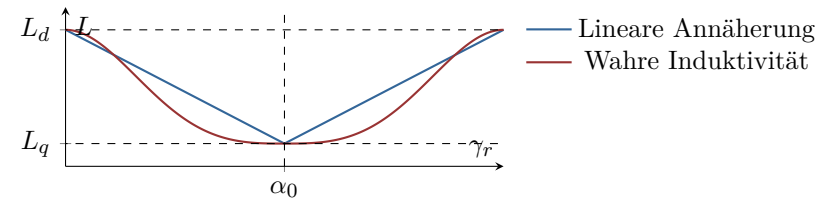
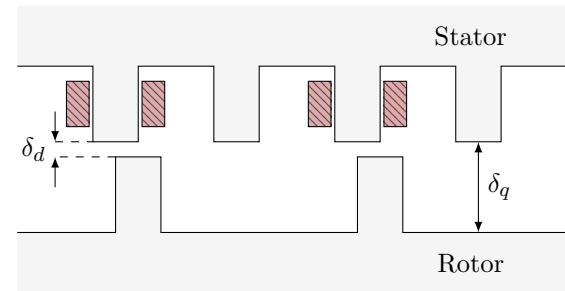
$$M = \frac{dW_m}{d\varphi} = \frac{1}{2} \cdot I^2 \cdot \frac{dL(\varphi)}{d\varphi}$$

$$\Rightarrow M_M = \frac{1}{2} \cdot I^2 \cdot \frac{L_d - L_q}{\alpha_0}$$

$$L_d = N^2 \cdot \mu_0 \cdot \frac{A_Z}{2\delta_d}$$

$$L_q = N^2 \cdot \mu_0 \cdot \frac{A_Z}{2\delta_q}$$

$$M_M = J_g \cdot \frac{\omega_s - \omega_1}{f_s} + M_L = J_g \cdot \dot{\omega} + M_L$$



$$p_\delta(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{dL}{d\gamma_r}(\gamma_r) \cdot \omega_r \cdot i^2(t)$$

$$M_M(t) = \frac{p_\delta(t)}{\omega_r} = \frac{1}{2} \cdot \frac{dL}{d\gamma_r}(\gamma_r) \cdot i^2(t)$$

$$M_L(f_s, \omega_1) = M_M - J_g \alpha_0 f_s^2 + J_g \omega_1 f_s$$

$$P_{Stator}(t) = Ri^2(t) + \frac{\partial L}{\partial \gamma_r}(\gamma_r) \cdot \omega_r \cdot i^2(t) + Li(t) \cdot \frac{di}{dt}(t)$$

## 7 Vergleich der Maschinen

	GSM	RSM	SYM	ASM
Komplexität des Aufbaus	4	2	3	1
Kosten	4	3	2	1
Wirkungsgrad	4	2	1	3
Anpassungsfähigkeit	1	2	3	4

### 7.1 Anlaufstrom

- **GSM:** Begrenzung durch Vorwiderstand:  $I_a = \frac{U}{R_a}$
- **RSM:** Begrenzung durch Speisung
- **SYM:**  $I_a = K \cdot I_n$ ,  $0.5 \leq K \leq 30$
- **ASM:**  $I_a = K \cdot I_n$ ,  $0.5 \leq K \leq 30$

### 7.2 Anlaufmoment

- **GSM:**  $M \sim I$ , Begrenzt durch  $R_a$ ,  $I_{max}$
- **RSM:**  $M \sim U$
- **SYM:**  $M \sim \left(\frac{U}{f}\right)^2$ , Begrenzt durch  $X_\sigma$
- **ASM:**  $M \sim \left(\frac{U}{f}\right)^2$ , Begrenzt durch  $X_\sigma$

### 7.3 Drehzahlregelung

- **GSM:** Über Spannung und Erregerstrom
- **RSM:** Über die Frequenz der digitalen Logik
- **SYM:** Über die Poolparzahl und die Frequenz
- **ASM:** Über die Poolparzahl und die Frequenz

### 7.4 Anwendungsbereiche

- **GSM:** Regelbare Antriebe mit grossem Stellbereich und guter Dynamik
- **RSM:** Verstellantriebe kleiner Leistung ohne Regelung
- **SYM:** Antriebe mit konstanter Drehzahl und gutem Leistungsfaktor
- **ASM:** Einfache Antriebe und regelbare Antriebe mit beschränkter Dynamik