

# 1 Komplexe Zahlen Skript S. 1

## 1.1 Grundlagen Skript S. 1ff

### Cartesische Form

Normalform:  $z = z_1 + jz_2$

$z_1 = \operatorname{Re}(z)$ ,  $z_2 = \operatorname{Im}(z)$

Umrechnung in Polar:

$$r = |z| = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}, \quad \varphi = \begin{cases} \arctan(\frac{z_2}{z_1}) & z_1 \geq 0 \\ \arctan(\frac{z_2}{z_1}) + \pi & z_1 < 0 \end{cases}$$

**Imaginäre Einheit**

$$j^2 = -1 \quad e^{j\pi} = -1 \quad \frac{1}{j} = -j$$

### Polarsystem

Normalform:  $z = r \operatorname{cjs}(\varphi) = r(\cos \varphi + j \sin \varphi) = re^{j\varphi}$

$\varphi = \arg(z)$

Umrechnung in Cartesisch:

$$z_1 = |z| \cos \varphi, \quad z_2 = |z| \sin \varphi$$

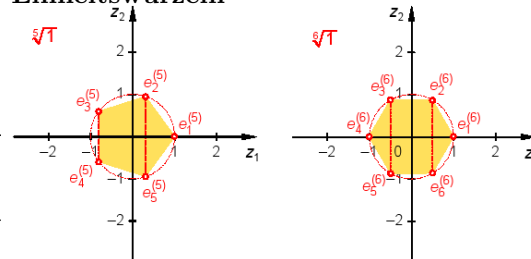
## 1.2 Rechenregeln Skript S. 10ff

+, −	Selbige Regeln wie für $\mathbb{R}$
Multiplikation	$a \cdot b =  a  b  \operatorname{cjs}(\alpha + \beta) =  a  b e^{j(\alpha + \beta)}$
Division	$\left \frac{a}{b}\right  = \frac{ a }{ b } \operatorname{cjs}(\alpha - \beta) = \frac{ a }{ b }e^{j(\alpha - \beta)}$ (cartesisch: Mit conj. complex des Nenners erweitern)
Conjugiert complex	$\bar{z} = \overline{z_1 + jz_2} = z_1 - jz_2; \quad z \cdot \bar{z} =  z ^2$
Wurzeln	$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{ a } \operatorname{cjs}(\frac{\arg(a)}{n} + k\frac{2\pi}{n}) = \sqrt[n]{ a }e^{j(\frac{\alpha}{n} + k\frac{2\pi}{n})} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1 \Rightarrow n \text{ Lösungen in } \mathbb{C}!)$
Potenzen	$a^n =  a ^n \operatorname{cjs}(n\alpha) =  a ^n e^{jn\alpha}$
$e^z$	$e^{z_1 + jz_2} = e^{z_1} \operatorname{cjs}(z_2) = e^{z_1}(\cos z_2 + j \sin z_2)$
Moirve'sche Formel	$\operatorname{cjs}^n(\varphi) = (\cos \varphi + j \sin \varphi)^n = \cos(n\varphi) + j \sin(n\varphi) \quad (n \in \mathbb{N})$
Logarithmus	$\operatorname{Ln}(z) = \ln  z  + j(\arg(z) + 2k\pi)$

### Bemerkungen

- $p_n(z)$  ( $n \geq 1, z \in \mathbb{C}$ ) hat  $n$  Lösungen und Nullstellen (in  $\mathbb{C}$ )
- Allgemeine Potenzen  $a^b$ ,  $a, b \in \mathbb{C}$  können mit  $e^{b \cdot \operatorname{Ln}(a)}$  und den bekannten für  $\mathbb{R}$  gültigen Potenzregeln gelöst werden.
- $\operatorname{Re}(\frac{a}{b}) = 0$ : Die beiden compl. Zahlen  $a, b$  stehen senkrecht zueinander.

### Einheitswurzeln



## 1.3 12. Einheitswurzeln ( $k30^\circ$ )

$$e_1^{(12)} = 1, \quad e_2^{(12)} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}j, \quad e_3^{(12)} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j, \quad e_4^{(12)} = j, \quad e_5^{(12)} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j, \quad e_6^{(12)} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}j, \\ e_7^{(12)} = -1, \quad e_8^{(12)} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}j, \quad e_9^{(12)} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j, \quad e_{10}^{(12)} = -j, \quad e_{11}^{(12)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j, \quad e_{12}^{(12)} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}j$$

## 1.4 Nullstellen von Polynomen

Ein complexes Polynom  $p(z)$  von Grad  $n$  hat in  $\mathbb{C}$  genau  $n$  Nullstellen.

Alle diese Nullstellen liegen in einer Kreisscheibe um den Ursprung mit dem Radius  $\max_{k=0}^n \left| \frac{a_k}{a_n} \right|$

Bei Polynomen mit reellen Koeffizienten treten nicht-reelle Nullstellen immer als conj.-compl. Paare ( $z_0$  und  $\bar{z}_0$ ) auf.

## 1.5 Euler Skript S. 30f

$$\sin \alpha = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j} \quad \cos \alpha = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2} \quad \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \sinh \alpha = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2} \quad \cosh \alpha = \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2}$$

## 1.6 Überlagerung von harmonischen Schwingungen Skript S. 32f

$$A \cdot \sin(\omega t + \varphi) = \operatorname{Im}[A \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}] = \operatorname{Im}[\underbrace{A \cdot e^{j\varphi}}_{\text{Complex Amplitude}} \cdot \underbrace{e^{j\omega t}}_{\text{Zeitfunktion}}]$$

$$A_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cdot \cos(\omega t + \varphi_2) \Rightarrow \operatorname{Im}[A_1 \cdot e^{j(\omega t + \varphi_1)} + A_2 \cdot e^{j(\omega t + \varphi_2 + \frac{\pi}{2})}] \Rightarrow \operatorname{Im}[e^{j\omega t} \cdot (A_1 \cdot e^{j\varphi_1} + A_2 \cdot e^{j(\varphi_2 + \frac{\pi}{2})})]$$

Complex Amplituden in cartesische Form umwandeln, zusammenzählen und wieder zurück in Polarform wandeln.

$$\operatorname{Im}[e^{j\omega t} \cdot (A_{\text{total}} \cdot e^{j\varphi_{\text{total}}})] \Rightarrow \operatorname{Im}[A_{\text{total}} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_{\text{total}})}] \Rightarrow A_{\text{total}} \cdot \sin(\omega t + \varphi_{\text{total}})$$

## 2 Komplexe Funktionen (Abbildungen) Skript S. 37ff

Eine komplexe Funktion hat einen 2-dimensionalen Input ( $z_1, z_2$ ) und einen 2-dimensionalen Output ( $w_1, w_2$ ). Diese Abbildungen sind bis jeweils auf wenige Punkte (bei der Sinus-Funktion  $\pm 1$ , etc) winkeltreu.

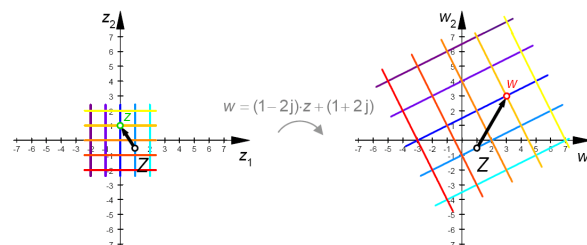
$$f: \mathbb{D} \subseteq \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C} \quad z \mapsto w = f(z)$$

$$w_1 = \operatorname{Re}(f(r + jc)); w_2 = \operatorname{Im}(f(r + jc))$$

### 2.1 Lineare Funktion Skript S. 41ff

$$f: z \mapsto w = az + b \quad (a, b \in \mathbb{C} \text{ und } a \neq 0)$$

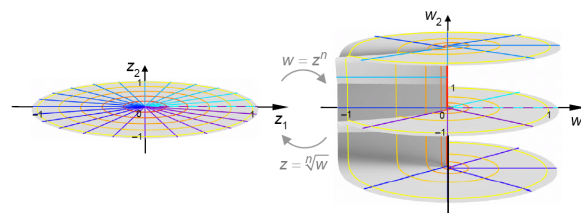
- für  $a = 1$  eine Translation um den Ortsvektor  $b$
- für  $a \neq 1$  eine Drehstreckung mit dem Zentrum  $\frac{b}{1-a}$ , dem Drehwinkel  $\arg(a)$  und dem Streckfaktor  $|a|$ .



### 2.2 Quadratfunktion und Quadratwurzelfunktion Skript S. 45ff

$$f: z \mapsto w = z^2 \quad f: z \mapsto w = \sqrt{z}$$

Bei der Quadratfunktion wird schon die rechte Hälfte der  $z$ -Ebene auf die ganze  $w$ -Ebene abgebildet (die Argumente werden verdoppelt). Daraus ergibt sich zwei bzw. mehrere Ebenen.



Eine Riemannsche Fläche 3. Grades

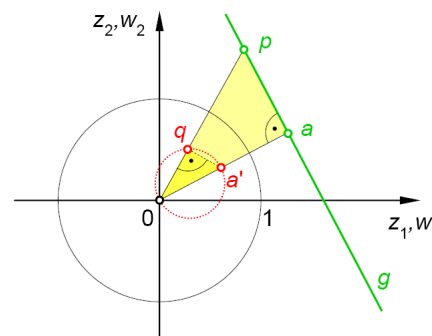
### 2.3 Kehrwertfunktion und Kreisspiegelung Skript S. 51ff

$$f: z \mapsto w = \frac{1}{z}; \quad (\arg(w) = -\arg(z), |w| = \frac{1}{|z|})$$

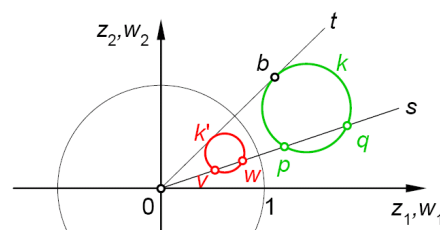
$$\bar{f}: z \mapsto w = \frac{1}{\bar{z}}; \quad (\arg(w) = \arg(z), |w| = \frac{1}{|z|})$$

Kreisspiegelung: Alle Punkte auf der  $z$ -Ebene werden am Einheitskreis gespiegelt. Geraden auf Kreise abgebildet und umgekehrt. Der Ursprungspunkt  $(0;0)$  wird auf  $\infty$  abgebildet (auf allen Winkeln zwischen  $0^\circ - 360^\circ$ ). Die Abbildungen sind im verallgemeinerten Sinn (Geraden sind Kreise mit unendlichem Radius) kreistreu. Ausserdem sind sie bis auf den Koordinatenursprung winkeltreu

- Gerade durch 0  $\implies$  Fixgerade (gleiche Gerade, aber die Punkte darauf sind anders verteilt)
- Gerade nicht durch 0  $\implies$  Kreis durch 0



- Kreis nicht durch 0  $\implies$  Spiegelung des Kreises an dem Einheitskreis
- Kreis durch 0  $\implies$  Gerade nicht durch 0



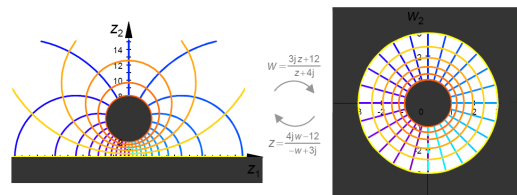
## 2.4 Möbiustransformation Skript S. 57ff

$$f : z \mapsto w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

( $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  mit  $c \neq 0$  und  $ad - bc \neq 0$ )

Die Möbiustransformation ist eine Verkettung einer linearen Funktion, der Kehrwertfunktion und einer weiteren linearen Funktion. Diese Transformationen sind winkeltreu und kreistreu. Die Umkehrfunktion ergibt wieder eine Möbiustransformation.

Eigentlich besitzt diese Funktion nur drei Parameter, da man den Bruch  $\frac{az+b}{cz+d}$  stets so kürzen kann, dass einer der vier Parameter 1 ist. Durch die 3 Freiheitsgrade kann man unterschiedlichste Kriterien vorgeben und damit komplizierte Umformungen machen, wie im Bild gezeigt wird:

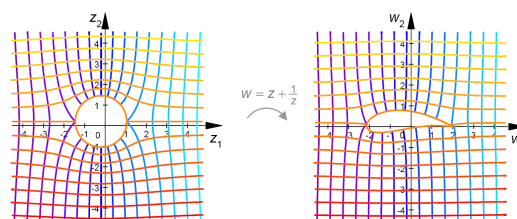


## 2.5 Joukowski-Funktion Skript S. 60ff

$$f : z \mapsto w = z + \frac{1}{z}$$

Die Funktion ist winkeltreu bis auf  $\pm 2$

Wenn man einen Kreis, der nicht ganz im Zentrum steht transformiert, ergibt sich ein Flügelprofil

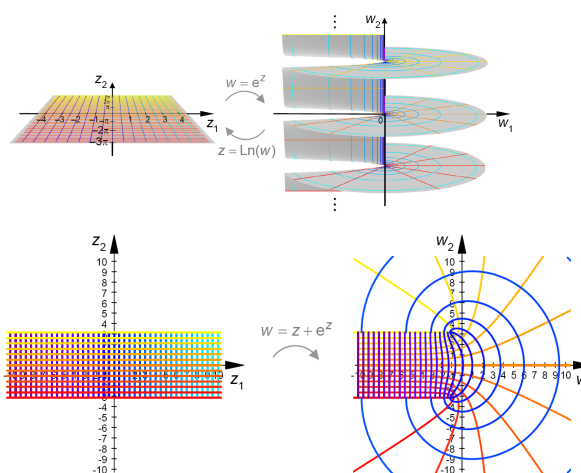


## 2.6 Exponentialfunktion Skript S. 64ff

$$f : z \mapsto w = e^z$$

Waagrechte Gitternetzlinien gehen gemäss der obigen Gleichung in Strahlen über, die im Koordinatenursprung beginnen, senkrechte Gitternetzlinien in Kreise um den Koordinatenursprung. Die  $e^z$ -Funktion ist periodisch, deshalb braucht es eine Riemannsche Fläche

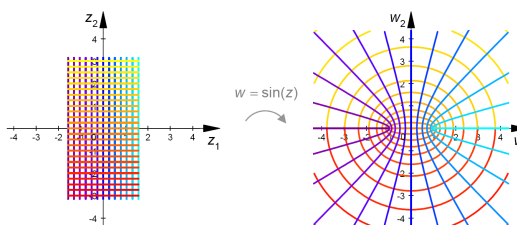
Mit dieser Funktion kann man das Feld bei den Rändern des Plattenkondensator berechnen



## 2.7 Sinus-Funktion Skript S. 67f

$$f : z \mapsto w = \sin(z)$$

Die Sinusfunktion ist ausser bei den Punkten  $z = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$  winkeltreu



## 2.8 Kreisgleichung

Die Lösungen von  $z$  bilden einen Kreis in der mit dem Radius  $r$  um den Mittelpunkt  $M = (m_x, m_y) \Rightarrow m = m_x + jm_y$ .

$$|z - m| = r; \quad (z - m)(\bar{z} - \bar{m}) = r^2; \quad z\bar{z} - \bar{m}z - m\bar{z} + m\bar{m} = r^2$$

$$\text{Parameterform: } f(t) = m + r \cdot e^{jt}, \quad \text{mit } (0 \leq t \leq 2\pi)$$

### 3 Fourierreihen Skript S. 67ff

#### 3.1 Orthogonalitätsbeziehungen der Basisfunktionen Skript S. 75

$$\int_0^T \cos(n\omega t) \cdot \cos(m\omega t) dt = \begin{cases} T, & n = m = 0 \\ \frac{T}{2}, & n = m > 0 \\ 0, & n \neq m \end{cases} \quad \int_0^T \sin(n\omega t) \cdot \sin(m\omega t) dt = \begin{cases} \frac{T}{2}, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases} \quad \int_0^T \cos(n\omega t) \cdot \sin(m\omega t) dt = 0$$

#### 3.2 Allgemeine Form Skript S. 79

Eine periodische Funktion  $f$  mit Periode  $T > 0$ , lässt sich durch eine Reihe von Sinus- und Kosinusfunktionen darstellen, deren Frequenzen ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz  $\omega = 2\pi/T$  sind:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(n\omega t) + b_n \cdot \sin(n\omega t))$$

Die Koeffizienten der Entwicklung von  $f(t)$  sind:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \cos(n\omega t) dt \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \sin(n\omega t) dt \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Der erste Summand der Reihe  $a_0/2$  ist der Gleichstromanteil (Mittelwert) von  $f(t)$  im Intervall  $(0, T)$

#### 3.3 Komplexwertige Darstellung der Fourierreihen Skript S. 95ff

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{jk\omega t} \quad \text{mit} \quad c_n = \overline{c_{-n}} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot e^{-jn\omega t} dt$$

##### 3.3.1 Umrechnungsformeln

$$c_n = \overline{c_{-n}} = \frac{a_n - jb_n}{2} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots \text{ wobei } b_0 = 0) \quad \left. \begin{matrix} a_n = 2 \cdot \operatorname{Re}(c_n) \\ b_n = -2 \cdot \operatorname{Im}(c_n) \end{matrix} \right\} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots, b_0 = 0)$$

#### 3.4 LTI-Systeme Skript S. 72

##### 3.4.1 Linear

$$\begin{array}{ll} \text{Aus:} & f(t) \rightarrow \boxed{S} \rightarrow F(t) \quad \text{und} \quad g(t) \rightarrow \boxed{S} \rightarrow G(t) \\ \text{folgt} & f(t) + g(t) \rightarrow \boxed{S} \rightarrow F(t) + G(t) \quad \text{und} \quad r \cdot f(t) \rightarrow \boxed{S} \rightarrow r \cdot F(t) \end{array}$$

##### 3.4.2 Zeitinvarianz

$$\text{Aus} \quad f(t) \rightarrow \boxed{S} \rightarrow F(t) \quad \text{folgt} \quad f(t + t_0) \rightarrow \boxed{S} \rightarrow F(t + t_0)$$

#### 3.5 Sätze zur Berechnung der Koeffizienten Skript S. 80ff

##### 3.5.1 Symmetrie Skript S. 80f

$$\begin{array}{ll} \text{Falls } f(t) \text{ gerade } (f(-t) = f(t)) \text{ ist} & \implies b_n = 0, \quad a_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot \cos(n\omega t) dt \\ \text{Falls } f(t) \text{ ungerade } (f(-t) = -f(t)) \text{ ist} & \implies a_n = 0, \quad b_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot \sin(n\omega t) dt \end{array}$$

##### 3.5.2 Linearität Skript S. 82

$$h(t) = r \cdot f(t) + s \cdot g(t) \implies a_n^{(h)} = r \cdot a_n^{(f)} + s \cdot a_n^{(g)}, \quad b_n^{(h)} = r \cdot b_n^{(f)} + s \cdot b_n^{(g)}$$

##### 3.5.3 Zeitstreckung/-stauchung (Ähnlichkeit) Skript S. 83

$$g(t) = f(r \cdot t) \quad (\text{mit } 0 < r \in \mathbb{R}) \implies a_n^{(g)} = a_n^{(f)}, \quad b_n^{(g)} = b_n^{(f)} \quad T^{(g)} = \frac{T^{(f)}}{r}.$$

### 3.5.4 Zeitverschiebung Skript S. 84

$$g(t) = f(t + t_0) \quad \begin{aligned} a_n^{(g)} &= \cos(n\omega t_0) \cdot a_n^{(f)} + \sin(n\omega t_0) \cdot b_n^{(f)} & (n = 0, 1, 2, \dots) \\ b_n^{(g)} &= -\sin(n\omega t_0) \cdot a_n^{(f)} + \cos(n\omega t_0) \cdot b_n^{(f)} & (n = 1, 2, 3, \dots) \\ c_n^{(g)} &= e^{jk\omega t_0} \cdot c_k^{(f)} & (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

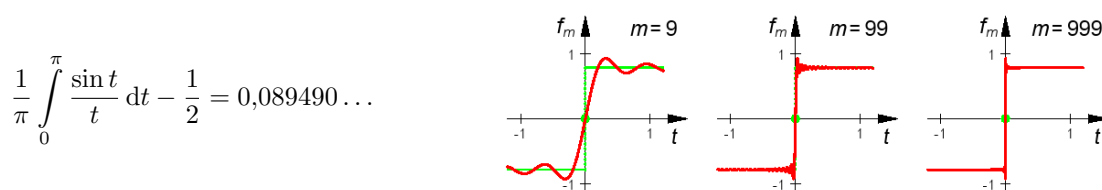
### 3.6 Integral und Differential Skript S. 88

Falls die T-periodische Funktion  $f$  (auf ganz  $\mathbb{R}$ ) zweimal stetig differenzierbar ist und die Fourierkoeffizienten  $a_n$  und  $b_n$  besitzt, so gilt:

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [b_n n\omega \cdot \cos(n\omega t) - a_n n\omega \cdot \sin(n\omega t)] \quad \int_0^t f(\tau) d\tau = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n\omega} + \frac{a_0}{2} t + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{a_n}{n\omega} \cdot \sin(n\omega t) - \frac{b_n}{n\omega} \cdot \cos(n\omega t) \right]$$

### 3.7 Gibbs'sches Phänomen Skript S. 92f

Die Fourier-Reihen schwingen bei Unstetigkeitsstellen über. Die Höhe des Überschingers lässt sich so berechnen:



### 3.8 Frequenz-, Amplituden- und Phasengang Skript S. 72

Frequenzgang eines Systems:  $H(\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\Phi(\omega)}$  Amplitudengang:  $A(\omega) = |H(\omega)|$  Phasengang  $\Phi(\omega) = \arg[H(\omega)]$

Die komplexe Funktion  $H(\omega)$  der reellwertigen Frequenz  $\omega$  enthält zugleich die Informationen über die Veränderung der Amplitude und der Phasenverschiebung des Systems S bei der betrachteten Frequenz  $\omega$ .

$$f(t) = \text{Im}[z(t)] \rightarrow \boxed{S} \rightarrow F(t) = \text{Im}[z(t) \cdot H(\omega)] \quad \text{oder} \quad f(t) = \text{Re}[z(t)] \rightarrow \boxed{S} \rightarrow F(t) = \text{Re}[z(t) \cdot H(\omega)]$$

Je nach Eingangssignal wird der Real- oder der Imaginärteil behandelt:  $f(t) = \begin{cases} \sin(nt) = \text{Im}[e^{j \cdot nt}] \\ \cos(nt) = \text{Re}[e^{j \cdot nt}] \end{cases} \Rightarrow z(t) = e^{j \cdot nt}$

Somit kann die Antwort des Systems mittels einer komplexen Multiplikation mit der Hilfsfunktion  $z(t)$  berechnet werden.

11. $\int \cosh x \, dx = \sinh x + C$	29. $\int \frac{dx}{\sin ax} = \frac{1}{a} \ln \left  \tan \frac{ax}{2} \right  + C, \quad a \neq 0, \quad x \neq k \frac{\pi}{a} \text{ mit } k \in \mathbb{Z}$
12. $\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\coth x + C, \quad x \neq 0$	30. $\int \frac{dx}{\cos ax} = \frac{1}{a} \ln \left  \tan \left( \frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right  + C, \quad a \neq 0, \quad x \neq \frac{\pi}{2a} + k \frac{\pi}{a} \text{ mit } k \in \mathbb{Z}$
13. $\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x + C$	31. $\int \tan ax \, dx = -\frac{1}{a} \ln  \cos ax  + C, \quad a \neq 0, \quad x \neq \frac{\pi}{2a} + k \frac{\pi}{a} \text{ mit } k \in \mathbb{Z}$
14. $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln  ax+b  + C, \quad a \neq 0, \quad x \neq -\frac{b}{a}$	32. $\int \cot ax \, dx = \frac{1}{a} \ln  \sin ax  + C, \quad a \neq 0, \quad x \neq k \frac{\pi}{a} \text{ mit } k \in \mathbb{Z}$
15. $\int \frac{dx}{a^2 x^2 + b^2} = \frac{1}{ab} \arctan \frac{a}{b} x + C, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0$	33. $\int x^n \sin ax \, dx = -\frac{x^n}{a} \cos ax + \frac{n}{a} \int x^{n-1} \cos ax \, dx, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a \neq 0$
16. $\int \frac{dx}{a^2 x^2 - b^2} = \frac{1}{2ab} \ln \left  \frac{ax-b}{ax+b} \right  + C, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0, \quad x \neq \pm \frac{b}{a}$	34. $\int x^n \cos ax \, dx = \frac{x^n}{a} \sin ax - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \sin ax \, dx, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a \neq 0$
17. $\int \sqrt{a^2 x^2 + b^2} \, dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 x^2 + b^2} + \frac{b^2}{2a} \ln(ax + \sqrt{a^2 x^2 + b^2}) + C, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0$	35. $\int x^n e^{ax} \, dx = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} \, dx, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a \neq 0$
18. $\int \sqrt{a^2 x^2 - b^2} \, dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 x^2 - b^2} - \frac{b^2}{2a} \ln  ax + \sqrt{a^2 x^2 - b^2}  + C, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0, \quad a^2 x^2 \geq b^2$	36. $\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx) + C, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0$
19. $\int \sqrt{b^2 - a^2 x^2} \, dx = \frac{x}{2} \sqrt{b^2 - a^2 x^2} + \frac{b^2}{2a} \arcsin \frac{a}{b} x + C, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0, \quad a^2 x^2 \leq b^2$	37. $\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx) + C, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0$
20. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 x^2 + b^2}} = \frac{1}{a} \ln(ax + \sqrt{a^2 x^2 + b^2}) + C, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0$	38. $\int \ln x \, dx = x(\ln x - 1) + C, \quad x \in \mathbb{R}^+$
21. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 x^2 - b^2}} = \frac{1}{a} \ln  ax + \sqrt{a^2 x^2 - b^2}  + C, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0, \quad a^2 x^2 > b^2$	39. $\int x^a \cdot \ln x \, dx = \frac{x^{a+1}}{(a+1)^2} [(\alpha+1) \ln x - 1] + C, \quad x \in \mathbb{R}^+, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

## 4 Spektren Skript S. 103

### 4.1 Spektraldarstellungen Skript S. 103ff

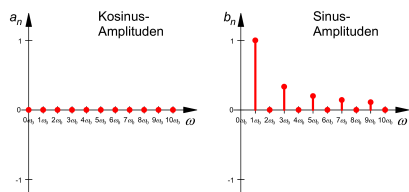


Abbildung 1: Kosinus- und Sinusamplitudendiagramm

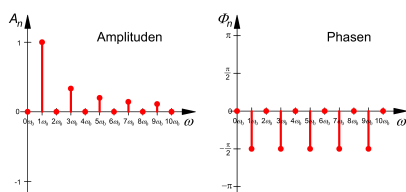


Abbildung 2: Einseitiges Amplituden-/Phasendiagramm

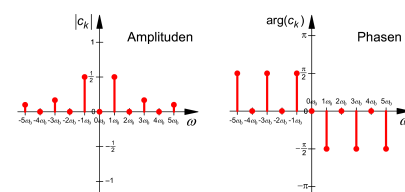


Abbildung 3: Zweiseitiges Amplituden-/Phasendiagramm

#### 4.1.1 (1) Kosinus- und Sinusamplitudendiagramm

Reelle Fourierkoeffizienten  $(a_n, b_n)$  können direkt abgelesen werden. Bei einer Phasenverschiebung ändern sich jedoch die Koeffizienten grafisch nicht nachvollziehbar.

Diese Darstellung hat gegenüber den anderen zwei mehr Nachteile und wird daher eher selten genutzt.

#### 4.1.2 (2) Einseitiges Amplituden-/Phasendiagramm

$$A_n = |a_n - j \cdot b_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \text{oder} \quad A_n = 2 \cdot |c_n| \quad \Phi_n = \arg(a_n - j \cdot b_n) \quad \text{oder} \quad \Phi_n = \arg(c_n)$$

$$\text{Spezialfall } n = 0 \Rightarrow A_0 = \left| \frac{a_0}{2} \right| \quad \text{und} \quad \Phi_0 = \begin{cases} 0, & a_0 \geq 0 \\ \pi, & a_0 < 0 \end{cases}$$

#### 4.1.3 (3) Zweiseitiges Amplituden-/Phasendiagramm (komplexes Spektrum)

Amplitudendiagramm ist achsensymmetrisch wegen  $c_n = \overline{c_{-n}}$ . Phasendiagramm ist punktsymmetrisch.

Ähnlichkeit mit Einseitigem:  $|c_k| = \frac{1}{2} A_k$  und  $\arg(c_k) = \Phi_k$  für alle  $n \geq 0$ .

### 4.2 Spezialfälle Skript S. 106

Funktion  $f$  gerade

(1) Sinusamplitudendiagramm überall 0

(2,3) Phasendiagramm enthält nur die Werte 0 und  $\pi$

Funktion  $f$  ungerade

(1) Kosinusamplitudendiagramm überall 0

(2,3) Phasendiagramm enthält nur die Werte  $\pm \frac{\pi}{2}$  (oder 0 falls Amplitudenwert = 0)

Ähnlichkeit  $g(t) = f(r \cdot t)$

(1,2,3) Das Spektrum von  $g$  ist das horizontal mit den Faktor  $r$  gestreckte Spektrum vom  $f$ .

Zeitverschiebung  $g(t) = f(t + t_0)$

(1) (siehe auch 3.5.4, Zeitverschiebung (S. 5))

(2,3) Amplitudendiagramme sind identisch.

(2,3) Phasendiagramme: Die Säule der Frequenz  $k\omega_0$  wächst um  $k\omega_0 t_0$ .

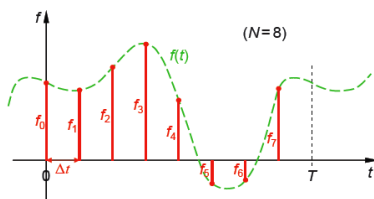
Weisses Rauschen

Überlagerung von Schwingungen aller möglichen Frequenzen mit gleichen Amplituden und zufälligen Phasen.

1. $\int dx = x + C$	22. $\int \frac{dx}{\sqrt{b^2 - a^2 x^2}} = \frac{1}{a} \arcsin \frac{a}{b} x + C, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0, \quad a^2 x^2 < b^2$
2. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	23. Die Integrale $\int \frac{dx}{X}, \int \sqrt{X} dx, \int \frac{dx}{\sqrt{X}}$ mit $X = ax^2 + 2bx + c, \quad a \neq 0$ werden durch die Umformung $X = a \left( x + \frac{b}{a} \right)^2 + \left( c - \frac{b^2}{a} \right)$ und die Substitution $t = x + \frac{b}{a}$ in die Integrale 15. bis 22. transformiert.
3. $\int \frac{1}{x} dx = \ln  x  + C, \quad x \neq 0$	24. $\int \frac{x dx}{X} = \frac{1}{2a} \ln  X  - \frac{b}{a} \frac{dx}{X}, \quad a \neq 0, \quad X = ax^2 + 2bx + c$
4. $\int e^x dx = e^x + C$	25. $\int \sin^2 ax dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4a} \sin 2ax + C, \quad a \neq 0$
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$	26. $\int \cos^2 ax dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4a} \sin 2ax + C, \quad a \neq 0$
6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$	27. $\int \sin^n ax dx = -\frac{\sin^{n-1} ax \cdot \cos ax}{na} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} ax dx, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a \neq 0$
7. $\int \cos x dx = \sin x + C$	28. $\int \cos^n ax dx = \frac{\cos^{n-1} ax \cdot \sin ax}{na} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} ax dx, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a \neq 0$
8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C, \quad x \neq k\pi \text{ mit } k \in \mathbb{Z}$	
9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ mit } k \in \mathbb{Z}$	
10. $\int \sinh x dx = \cosh x + C$	

## 5 DFT - Diskrete Fourier Transformation Skript S. 109

### 5.1 Definitionen



#### 5.1.1 Diskrete komplexe Fourierkoeffizienten

$\hat{c}_k$  sind die diskreten Fourierkoeffizienten die zu den (reellen Abtastwerten  $f_0, f_1, \dots, f_{N-1}$ ) gehören

$$\hat{c}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n \cdot e^{-\frac{2\pi j}{N} \cdot kn}$$

Kompakte Darstellung mit der Matrix W: 
$$\begin{pmatrix} \hat{c}_0 \\ \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \\ \hat{c}_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} w^0 w^0 w^0 w^0 \\ w^0 w^1 w^2 w^3 \\ w^0 w^2 w^4 w^6 \\ w^0 w^3 w^6 w^9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} \quad \text{wobei } w = e^{-\frac{2\pi j}{N}}$$

#### 5.1.2 Rechenaufwand DFT / FFT

Der Rechenaufwand für die DFT ist proportional zu  $N^2$  hingegen ist er bei der Fast Fourier Transform (FFT) nur  $N \cdot \log(N)$ .

## 5.2 Eigenschaften der Diskreten Fouriertransformation Skript S. 112

### 5.2.1 Alias-Effekt

Mit  $\hat{c}_k (\hat{c}_0, \dots, \hat{c}_{N-1})$  kennt man alle diskreten Fourierkoeffizienten. Es gilt:  $\hat{c}_k = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_k + l \cdot N \quad l \in \mathbb{Z}$

### 5.2.2 Nyquist-Shannon-Abtasttheorem

Ein Signal muss mit mindestens der doppelten Frequenz seines höchstfrequenten Anteils abgetastet werden.

## 5.3 Inverse Diskrete Fouriertransformation iDFT Skript S. 116

### 5.3.1 Abtastwerte berechnen

Die N diskreten Fourierkoeffizienten lassen sich mit der iDFT wieder auf ihre Abtastwerte  $f_n$  zurückführen.

$$f_n = \sum_{k=0}^{N-1} (\hat{c}_k \cdot e^{\frac{2\pi j}{N} \cdot nk})$$

### 5.3.2 Kontinuierliche Funktion berechnen

Die N diskreten Fourierkoeffizienten lassen sich auch auf die kontinuierliche Funktion  $f(t)$  zurückführen.

$$t \mapsto \sum_{k=0}^{N-1} (\hat{c}_k e^{jk\omega_0 t})$$

ist eine Funktion die diese diskreten Fourierkoeffizienten besitzt. für  $k = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}$  so ist auch

$$t \mapsto \hat{c}_k + \sum k = 1 \frac{N}{2} - 1 [2 \operatorname{Re}(\hat{c}_k e^{jk\omega_0 t})] + \hat{c}_{\frac{N}{2}} \cdot \cos(\frac{N}{2} \omega_0 t)$$

eine reelle Funktion mit halb so grossen höchsten Frequenzen.



