

Leistungselektronik - Formelsammlung

L. Mazzoleni

Inhaltsverzeichnis

23. Dezember 2016

1 Halbleiter	2
1.1 Kristallgitter	2
1.2 Dotierung	2
1.3 pn-Übergang	2
2 Diode	3
2.1 Ersatzschaltbild	3
2.2 Grundformeln	3
2.3 Schaltverhalten und Schaltverluste	3
3 Transistor	4
3.1 Bipolarer Transistor	4
3.2 Darlington-Transistoren	5
3.3 MOSFET	5
3.4 IGBT	5
3.5 Transistoren im Vergleich	6
4 Thyristoren	7
4.1 Thermische Eratzschaltung	7
4.2 Abschaltbarer Thyristor	7
4.3 IGCT	7
5 Stromrichterschaltung	8
5.1 Gruppierung	8
5.2 Kennzeichnung	8
5.3 Ungesteuerter Gleichrichter	9
5.4 Gesteuerte Gleichrichter	11
5.5 Wechselstrom-Schalter/Steller	12
6 Gleichstromumrichter	13
6.1 Buck-Converter	13
6.2 Boost-Converter	13
6.3 Inverse-Converter	14
6.4 Gleichstrom-Schalter/Steller	14
7 Grundformeln	15
7.1 Leistungen	15
7.2 Fourier	16
8 Lösen von Differentialgleichungen	17
8.1 Allgemeine Vorgehensweisen	17
8.2 Differentialgleichung 1. Ordnung	17
9 Idiotenseite	18

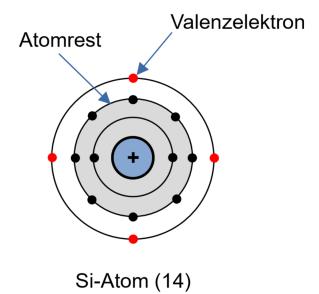
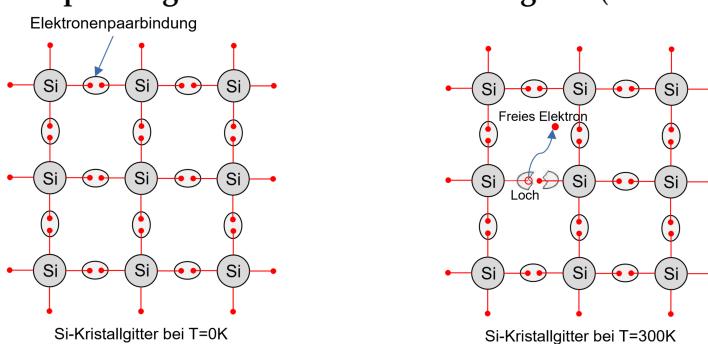
1 Halbleiter

- **Metallische Leiter:** der Stromtransport wurde durch Elektronen erzeugt.
- **Isolatoren:** der Stromtransport wurde durch Isolatoren erzeugt.
- **Halbleiter:** die Leitfähigkeit liegt irgendwo zwischen Metallen und Isolatoren.
Die wichtigsten Halbleiter sind Si, Ge, CuO₂ und GaAs
- **Dotierte Halbleiter:** Durch kontrollierte Verunreinigung (Dotierung) der reinen Halbleiterwerkstoffe kann die Leitfähigkeit wesentlich verändert werden.

1.1 Kristallgitter

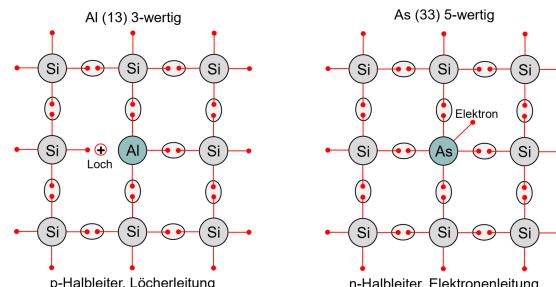
Durch die thermische Bewegung der Atomem um ihre Ruhelage im Kristallgitter ist es möglich einige **Elektronenpaarbindungen** aufzubrechen.

Auf diese weise ein gelöstes Elektron bewegt sich im Kristallgitter frei und hinterlässt eine **positiv geladene Lücke im Kristallgitter** (Defektelektron).



1.2 Dotierung

Durch eine Dotierung des Halbleitermaterials mit Fremdatomen ist es möglich die Ladungsträgerdichte effizient zu kontrollieren:



1.3 pn-Übergang

1.3.1 Diffusionsstrom

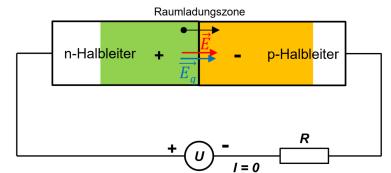
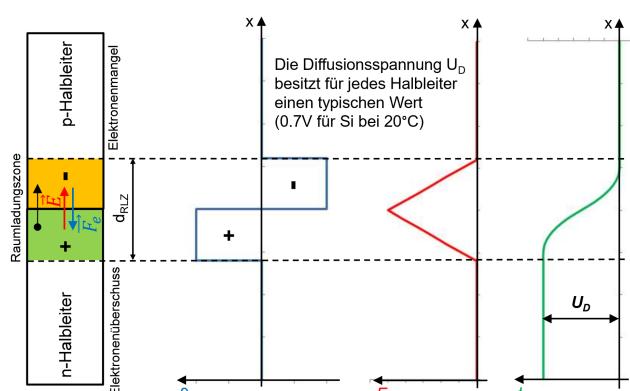
Der Diffusionsstrom wird durch den Ladungsträgeraustausch zwischen beiden Halbleitergebieten erzeugt und dadurch verschwinden in der Grenzschicht alle freien Ladungsträger.

Durch die Elektronenwanderung entsteht im n-Teil des Grenzgebiets die **ortsfeste** Positive Ladung(+). Die ein-diffundierten Elektronen erzeugen im p-Teil des Grenzgebiets die **ortsfeste** negative Ladung (-). Die ortsfesten Ladungen erzeugen das elektrische Feld in der Raumladungszone und damit auch den Driftstrom.

Der Driftstrom ist gegen den Diffusionsstrom gerichtet. Sobald die Ströme gleich sind, ist eine stabile Raumladungszone etabliert.

1.3.2 pn-Übergang mit äusserer Spannung

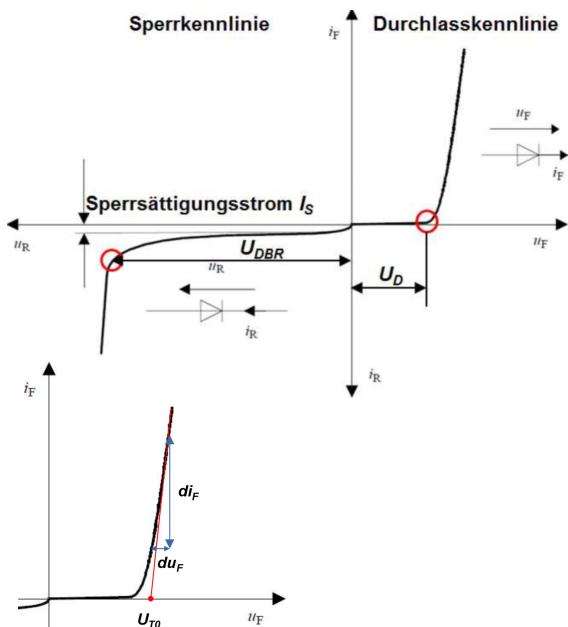
Die Spannungsquelle ist an den pn-Übergang in **Sperrrichtung** geschalten. Die Spannung U vergrössert die Breite der Raumladungszone. Der Strom kann nicht über den pn-Übergang fliessen.



2 Diode

Eine Diode besteht aus PN Übergängen und ist deswegen ein nichtlineares Element:

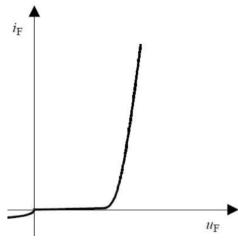
U_{DBR}	Durchbruchspannung
U_D	Diffusionsspannung (0.7V Si)
U_F	Flussspannung
U_R	Sperrspannung
i_F	Diffusionsstrom, Strom in Durchlassrichtung
i_R	Leckstrom, Strom in Sperrichtung



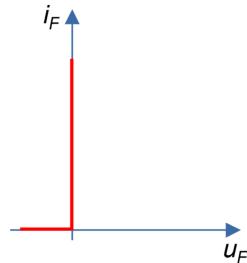
i_f, u_F	Durchlassrichtung
U_{T0}	Schwellenspannung
$r_f = \frac{dU_F}{di_F}$	Differenzieller Durchlasswiderstand

2.1 Ersatzschaltbild

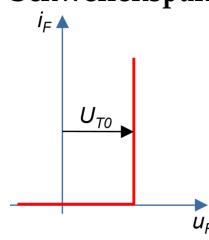
Reale Diode



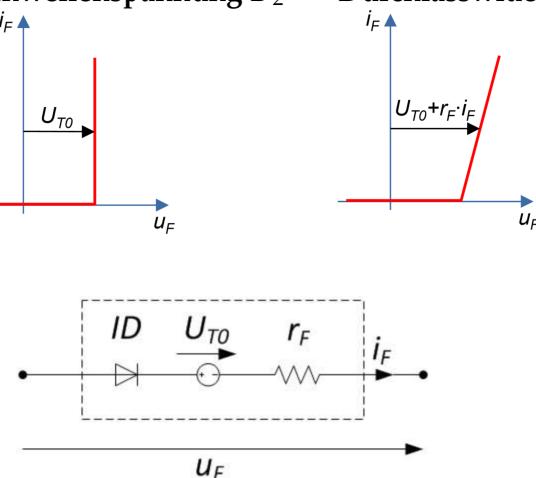
Ideale Diode (D_1)



Diode D_1 mit der Schwellenspannung D_2



Diode D_2 mit dem Durchlasswiderstand (D_3)



2.2 Grundformeln

Flussspannung	$u_F = U_{T0} + i_F \cdot r_F$
Momentanleistung	$p(t) = u_F(t) \cdot i_F(t)$
Verlustleistung	$P_v = U_{T0} \cdot I_{FAV} + r_F \cdot I_{FRMS}^2$
I_{FAV}	arithmetische Mittelwert von i_F
I_{FRMS}	Effektivwert von i_F

I_{FAV}	arithmetische Mittelwert von i_F
I_{FRMS}	Effektivwert von i_F

2.3 Schaltverhalten und Schaltverluste

Durchlassverzug:

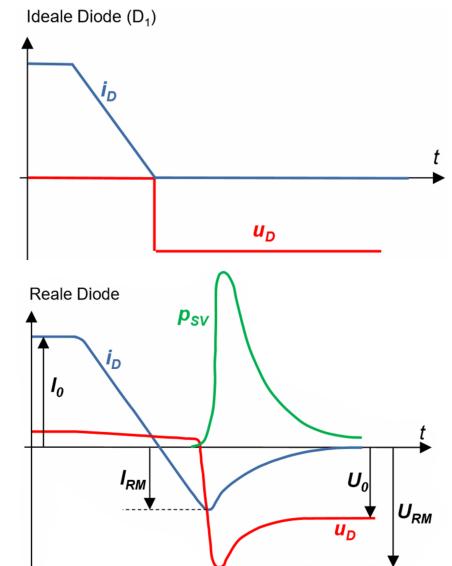
freie Ladungsträger müssen zuerst die Ladungsfrei Zone "füllen"

Sperrverzug

freie Ladungsträger müssen zuerst das Gebiet des pn-Überganges freiräumen

Diese Erscheinungen sind wichtig bei $\frac{du}{dt} > 100V/\mu s$ und $\frac{di}{dt} > 10A/\mu s$

I_{RM}	Maximalwert des Rückstroms
U_{RM}	Maximalwert der Rückspannung



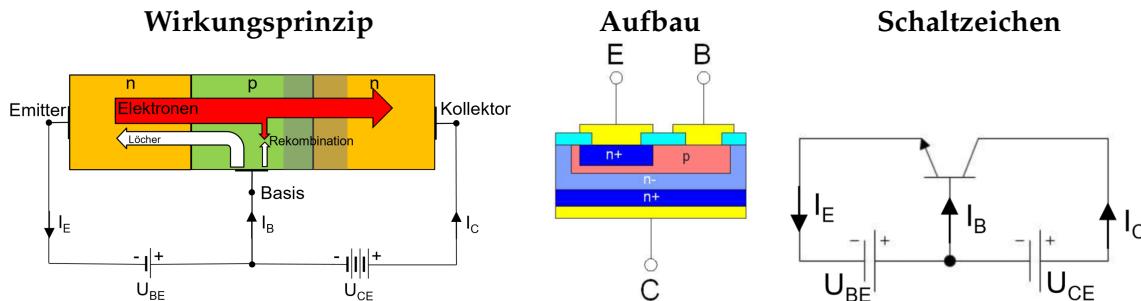
3 Transistor

3.1 Bipolarer Transistor

3.1.1 Wirkungsprinzip

Ein Bipolartransistor besteht aus drei dünnen dotierten Halbleiterschichten, d.h. aus zwei pn-Übergängen. Gemäß der Reihenfolge und dem Dotierungstyp der Schichtung werden Bipolartransistoren in npn- und pnp-Typen unterteilt.

Als Leistungstransistoren werden überwiegend npn-Transistoren in der Emitter-Schaltung verwendet



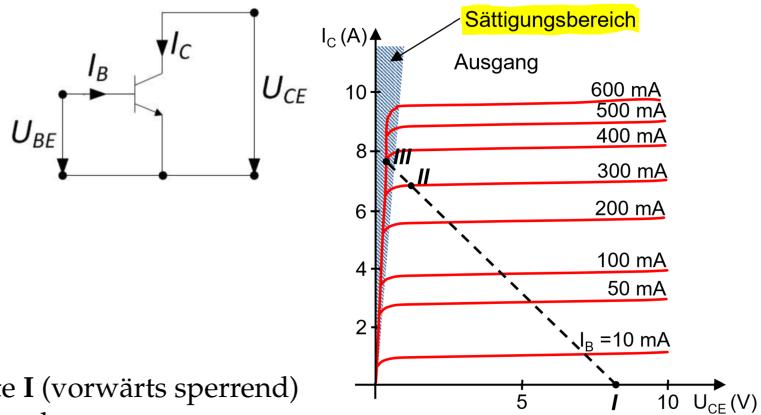
3.1.2 Schaltverhalten

Im Sättigungsbereich ist der Basisstrom so gross, dass sich in der Basiszone mehr Ladungsträger befinden als für den Kollektorstrom nötig ist.

Die beiden pn-Übergänge sind in die Durchlassrichtung polarisiert. $U_{BE} > U_{CE}$ und $U_{BC} > 0$

$$\text{Im Verstärkungsbereich gilt: } \beta = \frac{I_C}{I_B}$$

Im Schaltbetrieb werden die Arbeitspunkte I (vorwärts sperrend) und III (Durchlassbetrieb -Sättigung) verwendet.

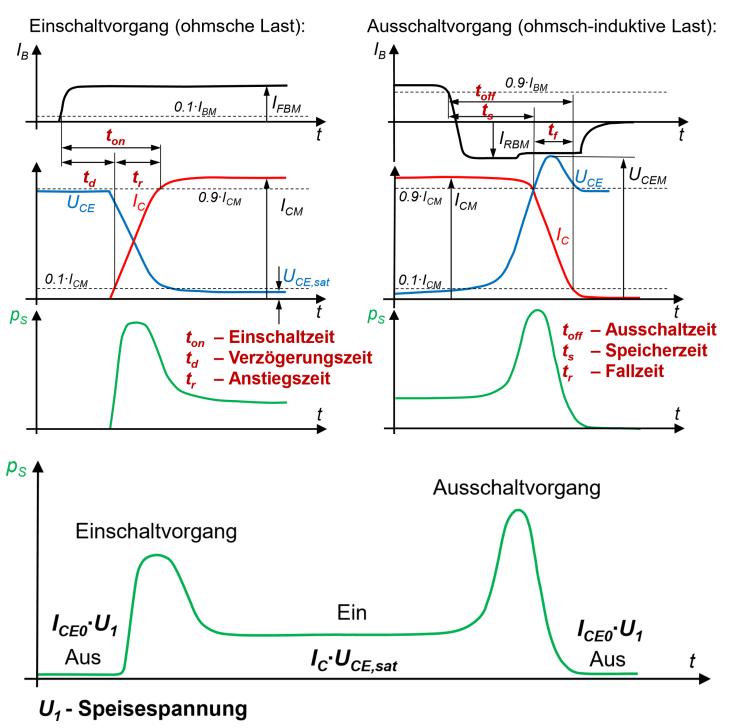


3.1.3 Kennwerte

U_{CES}	Kollektor-Emitter-Sperrspannung Der höchstzulässige Wert der U_{CES} bei Ansteuerung mit einer negativen U_{BE}
U_{CEO}	Kollektor-Emitter-Sperrspannung Der höchstzulässige Wert der U_{CE} bei offenem Basisanschluss
I_{CAVM}	Kollektor-Dauergrenzstrom Der höchstzulässige Wert des Gleichstrom-Mittelwerts bei vorgegebener Temperatur
I_{CRM}	periodischer Kollektor-Spitzenstrom der höchstzulässige Wert eines Pulstromes mit angegebener Periodendauer und Einschaltdauer

3.1.4 Verluste

- Einschaltverluste
- Ausschaltverluste
- Durchlassverluste
- Sperrverluste



3.2 Darlington-Transistoren

Der Stromverstärkungsfaktor der Leistungstransistoren ist relativ klein. Deswegen ist ein strarker Basisstrom für diese Transistoren notwendig. Ein Darlington-Transistor löst dieses Problem.

3.2.1 Formeln

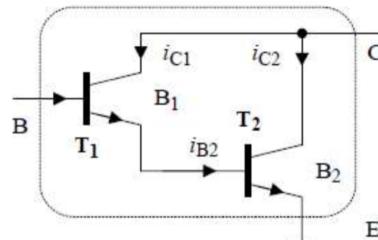
$$\beta_1 = \frac{i_{C1}}{i_{B1}} \quad \beta_2 = \frac{i_{C2}}{i_{B2}}$$

$$i_{E1} = i_{C1} + i_{B1} = (1 + \beta_1)i_{B1} = i_{B2}$$

$$i_{C2} = \beta_2 i_{B2} = \beta_2 i_{E1} = \beta_2 (1 + \beta_1) i_{B1} = \beta_{ges} i_{B1}$$

$$\beta_{ges} = \beta_2 (1 + \beta_1) \approx \beta_1 \beta_2$$

3.2.2 Aufbau



3.2.3 Vor und Nachteile

- + Gleichbleibender Platzbedarf, höhere Stromverstärkung
- + $B \approx B_1 \cdot B_2$ im Bereich < 1000
- + $\beta \approx \beta_1 \cdot \beta_2$ im Bereich $< 50'000$
- grosse Phasenverschiebung
- für Hochfrequenzanwendungen ungeeignet
- langsame Schaltzeiten
- doppelte Basis-Emitter-Spannung

Für effiziente Schaltanwendungen eignen sich Darlingtontransistoren wegen diesen Nachteilen kaum.

3.3 MOSFET

Die elektrische Leitfähigkeit des Substrats ist durch ein el. Feld gesteuert. Das el. Feld ruft im Substrat eine Influenzladung hervor.

Die Gate-Elektrode ist durch ein Metaloxid vom Substrat isoliert.

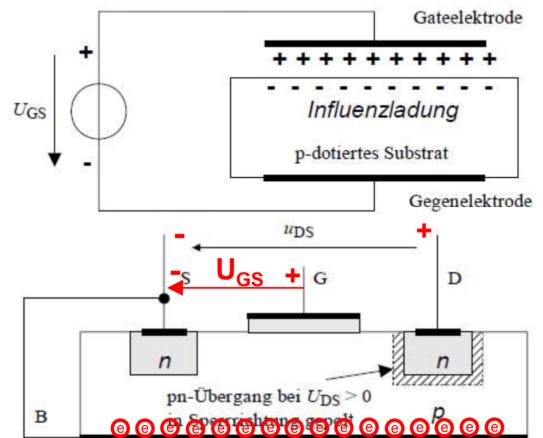
S = Source D = Drain

G = Gate B = Bulk(Substrat)

U_{DS} ist positiv damit ist der rechte pn-Übergang in Sperrrichtung gepolt. Deswegen kann kein Strom in beide Richtungen fließen.

→ Der Transistor ist selbstsperrend.

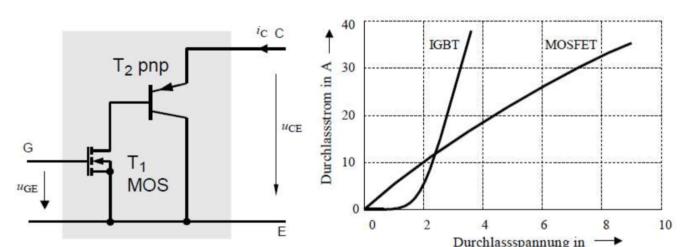
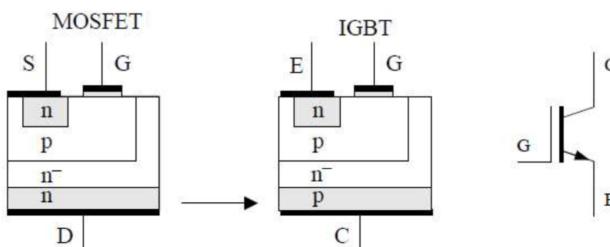
⚠ Sobald eine positive Spannung zwischen G und S angelegt ist, entsteht ein leitfähiger n-Kanal und damit auch ein Strom vom D- zum S-Anschluss.



3.4 IGBT

Der IGBT setzt sich aus einem Bipolartransistor T_2 und einem MOSFET T_1 zusammen.

n- ist eine schwach dotierte Zone, welche zur Erhöhung der Spannungsfestigkeit verwendet wird.



3.4.1 Eigenschaften

- Über die Kollektor-Emitter-Strecke fällt mindestens die Schleusenspannung ab
- kleine Durchlassverluste bei hohen Strömen
- in Rückwärtsrichtung nur begrenzt Sperrfähig
- Grosse Sperrverluste vor allem beim Abchläten

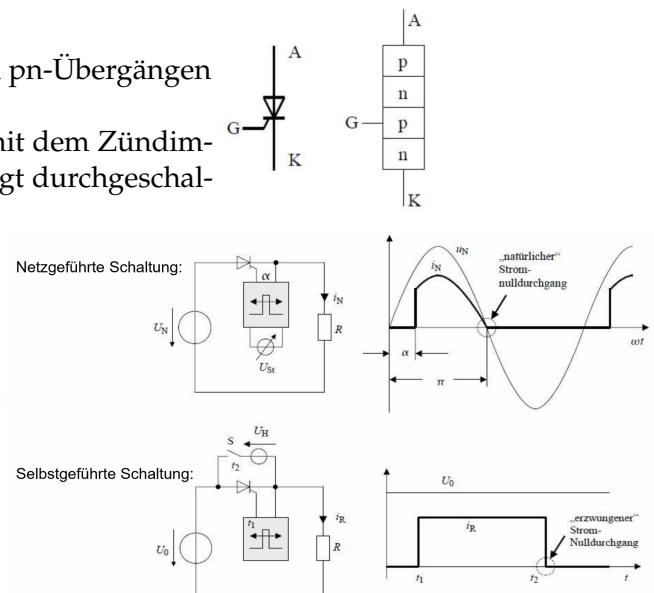
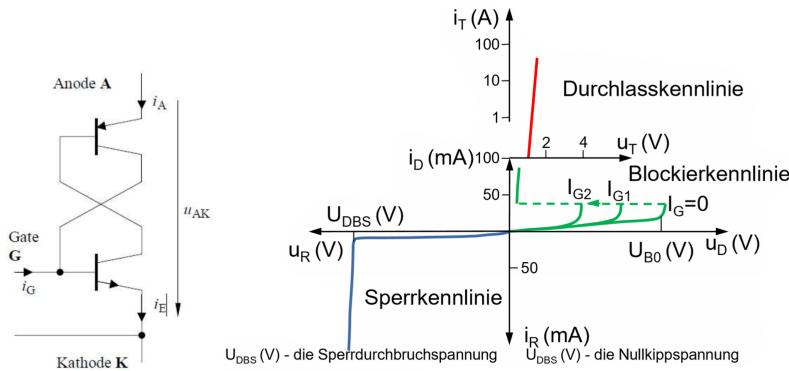
3.5 Transistoren im Vergleich

	Darlington-Transistor	MOSFET	IGBT
Schalsymbol			
Schichtaufbau			
Sperrverhalten- Obergrenze	mittel	niedrig	hoch
Steuergenerator - Aufwand - Leistung	mittel hoch	gering niedrig	gering niedrig
Schaltverhalten - Einschaltzeit - Abschaltzeit - Verlustleistung	mittel lang hoch	kurz kurz niedrig	mittel kurz niedrig
Durchlassverhalten - Stromtragfähigkeit - Verlustleistung	hoch niedrig	niedrig hoch	hoch niedrig
Pulsfrequenz	4kHz	250kHz	20kHz

4 Thyristoren

Ein Thyristor besteht aus vier Halbleiterschichten d.h. aus drei pn-Übergängen
Thyristoren sind einschaltbare Bauelemente.

Thyristoren sind einschaltbare Dioden. Thyristoren werden mit dem Zündimpuls der Zwischen Gate (G) und Kathode (K) kurzzeitig anliegt durchgeschalten.



4.1 Thermische Eratzschaltung

Thermische Kenngrössen

Wärmeleistung P [W]

Temperaturunterschied ϑ [K]

Wärmewiderstand R_{th} K/W

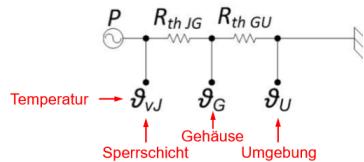
Elektrische Kenngrössen

Strom I [A]

Spannung $[V]$

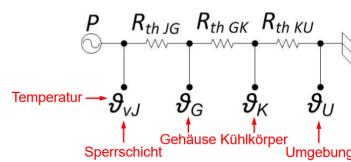
Widerstand (V/A)

4.1.1 Thyrisor ohne Kühlung



$$\vartheta_{vJ} - \vartheta_U = P \cdot (R_{th JG} + R_{th GU})$$

4.1.2 Thyrisor mit Kühlung



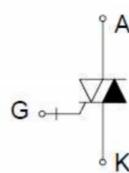
$$\vartheta_{vJ} - \vartheta_U = P \cdot (R_{th JG} + R_{th GK} + R_{th KU}) \quad R_{th KU} = \frac{\Delta \vartheta}{P}$$

4.2 Abschaltbarer Thyristor

(GTO = Gate-Turn-Off)

Der GTO schaltet aus, wenn ein ausreichend hoher negativer Gate-Strom auftritt.

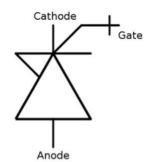
Amplitude des Gate-Stromes muss 20% bis 30% des abzuschaltenden GTO-Stromes betragen.



4.3 IGCT

Integrated Gate-Commutated Thyristor (IGCT) sind die Weiterentwicklung der GTO.

Sie werden hauptsächlich für Mittelspannungsumrichter eingesetzt.



5 Stromrichterschaltung

5.1 Gruppierung

5.1.1 nach Steuerung

- Ungesteuerte Stromrichter:

Das Verhältniss von Eingangs- zu Ausgangsspannung wird durch die Stromrichterschaltung festgesetzt

- Gesteuerte Stromrichter

Das Verhältniss von Eingangs- zu Ausgangsspannung wird durch Steuereingriff am Halbleiterschalter verändert.

5.1.2 nach Führung

Kommuntierung WIKI

Bzw nach der Herlkunft der Kommutierungsspannung.

Kommutierung bedeutet die Wechselung des Stromflusses von einem HL-Ventil auf ein anderes.

- Netzgeführte Schaltung

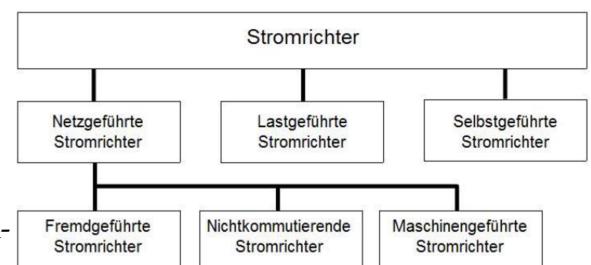
Kommutierungsspannung vom Netzwerk

- Lastgeführte Schaltung

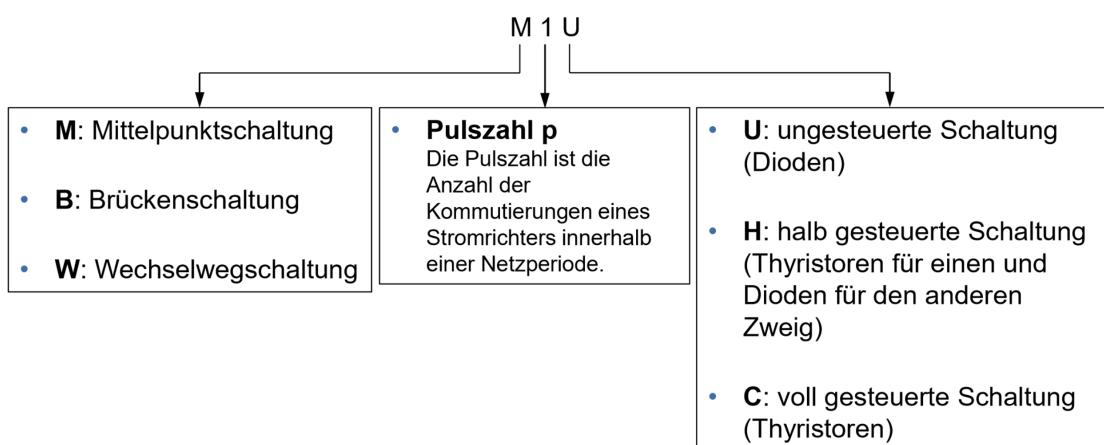
Kommutierungsspannung wird durch Lastkreis (zb Synchromotor) gesteuert

- Selbstgeführte Schaltung

Kommutierungsspannung wird selbst erzeugt



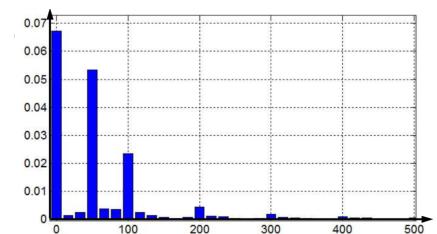
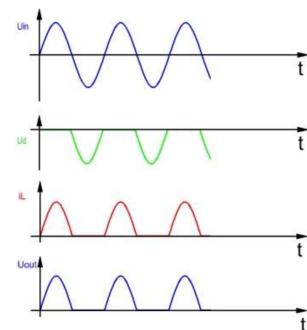
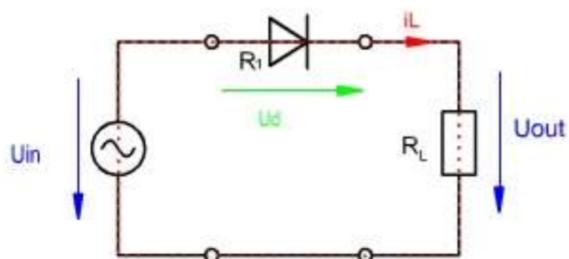
5.2 Kennzeichnung



Gleichrichter WIKI

5.3 Ungesteuerter Gleichrichter

5.3.1 M1U

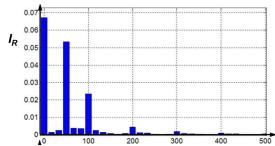
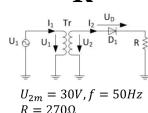


Die Diode wird als Ideal betrachtet → keine Schwellenspannung oder Innenwiderstand

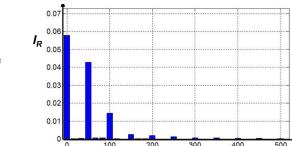
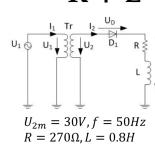
Grundgleichungen	$U_2 = U_D + U_R$ $U_R = I_2 \cdot R$ $\bar{U}_{OUT} = \frac{\hat{U}}{\pi}$	
Durchlassrichtung $0 < \omega t < \pi$	$U_2 = U_R \quad U_D = 0$	
Sperrrichtung $\pi < \omega t < 2\pi$	$U_2 = U_D \quad U_R = 0$	
Wirkleistung der Last R	$P = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\alpha) d\alpha = \frac{U_{R RMS}^2}{R}$	

Oberwellen

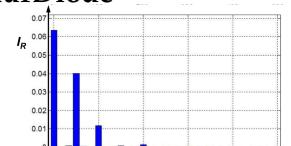
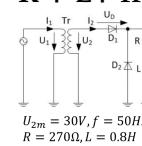
R



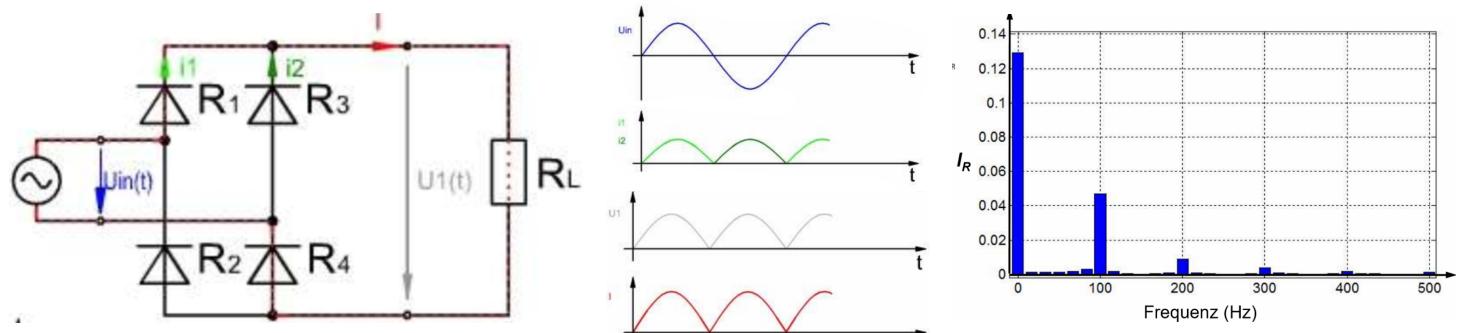
R + L



R + L + freilaufDiode



5.3.2 B2U

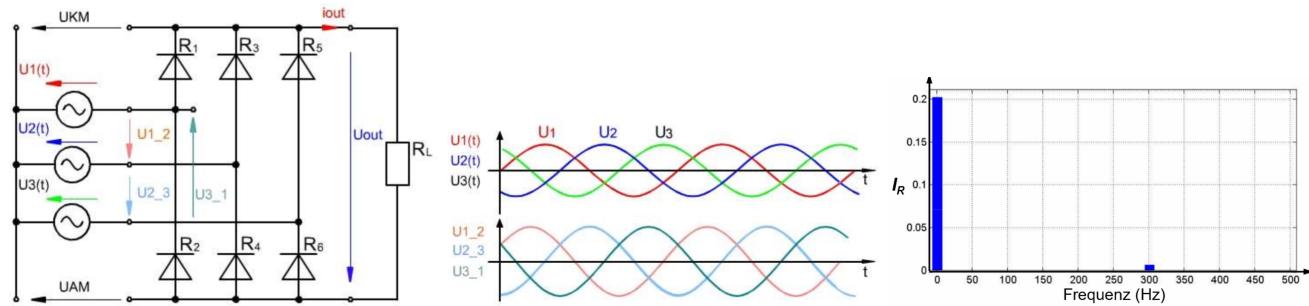


Im Gegensatz zur M1U-Schaltung wird hier die negative Netzspannung zur Gleichrichtung genutzt.
Die Schaltung wird oft mit Glättungskondensator betrieben.

Grundgleichungen

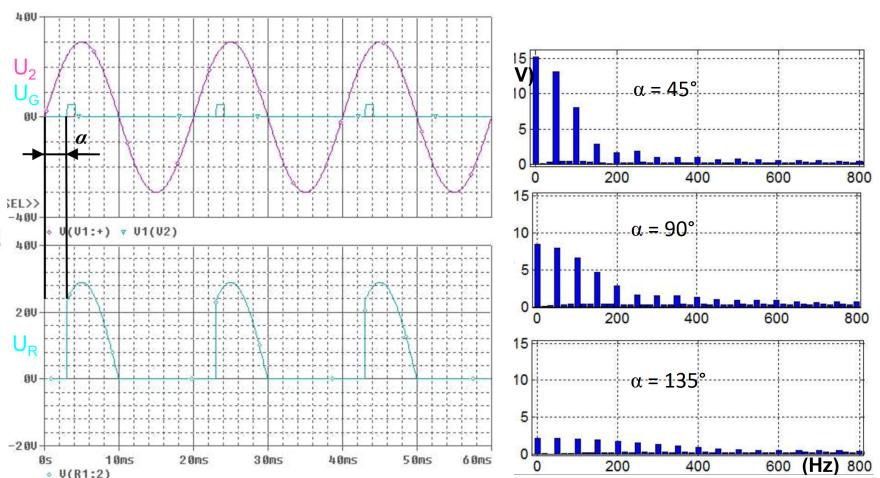
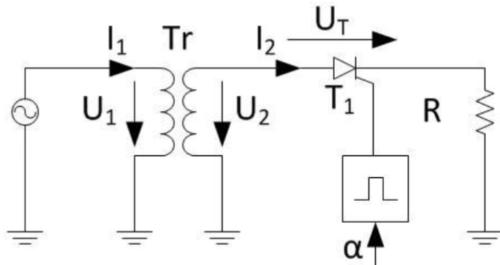
$$\bar{U}_{OUT} = 2 \frac{\hat{U}}{\pi}$$

5.3.3 B6U



5.4 Gesteuerte Gleichrichter

5.4.1 M1C

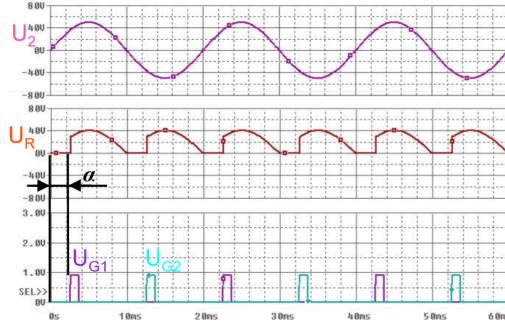
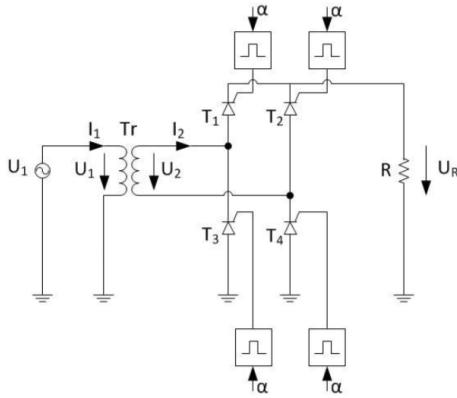


Grundgleichungen

$$\begin{aligned} \bar{U}_{OUT} &= \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\pi} \hat{U}_2 \cdot \sin(\beta) d\beta \\ &= \frac{\hat{U}_2}{2\pi} (1 + \cos(\alpha)) \end{aligned}$$

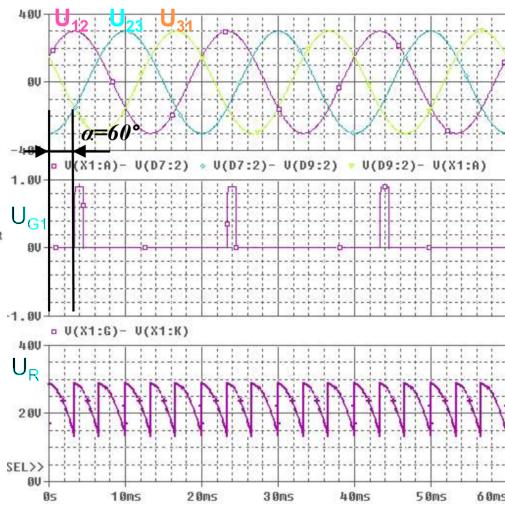
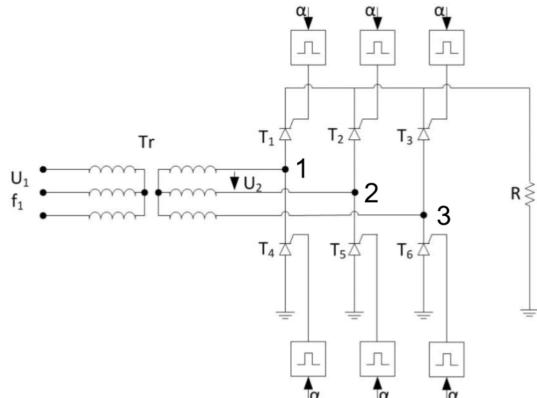
$$\beta = \omega t$$

5.4.2 B2C



todo Oberwellen grafik

5.4.3 B6C

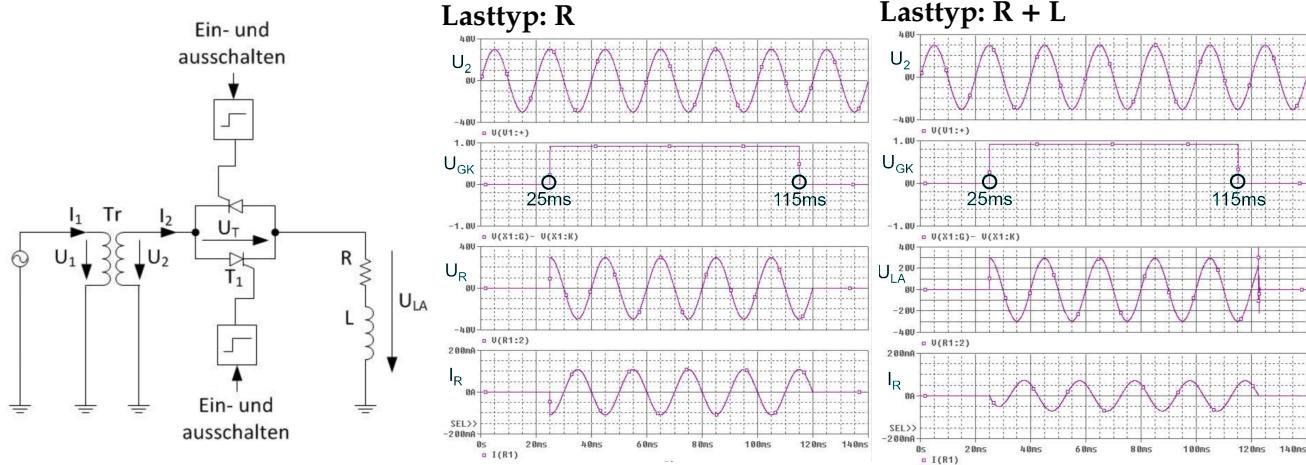


todo Oberwellengrafik

5.5 Wechselstrom-Schalter/Steller

5.5.1 Wechselstrom-Schalter

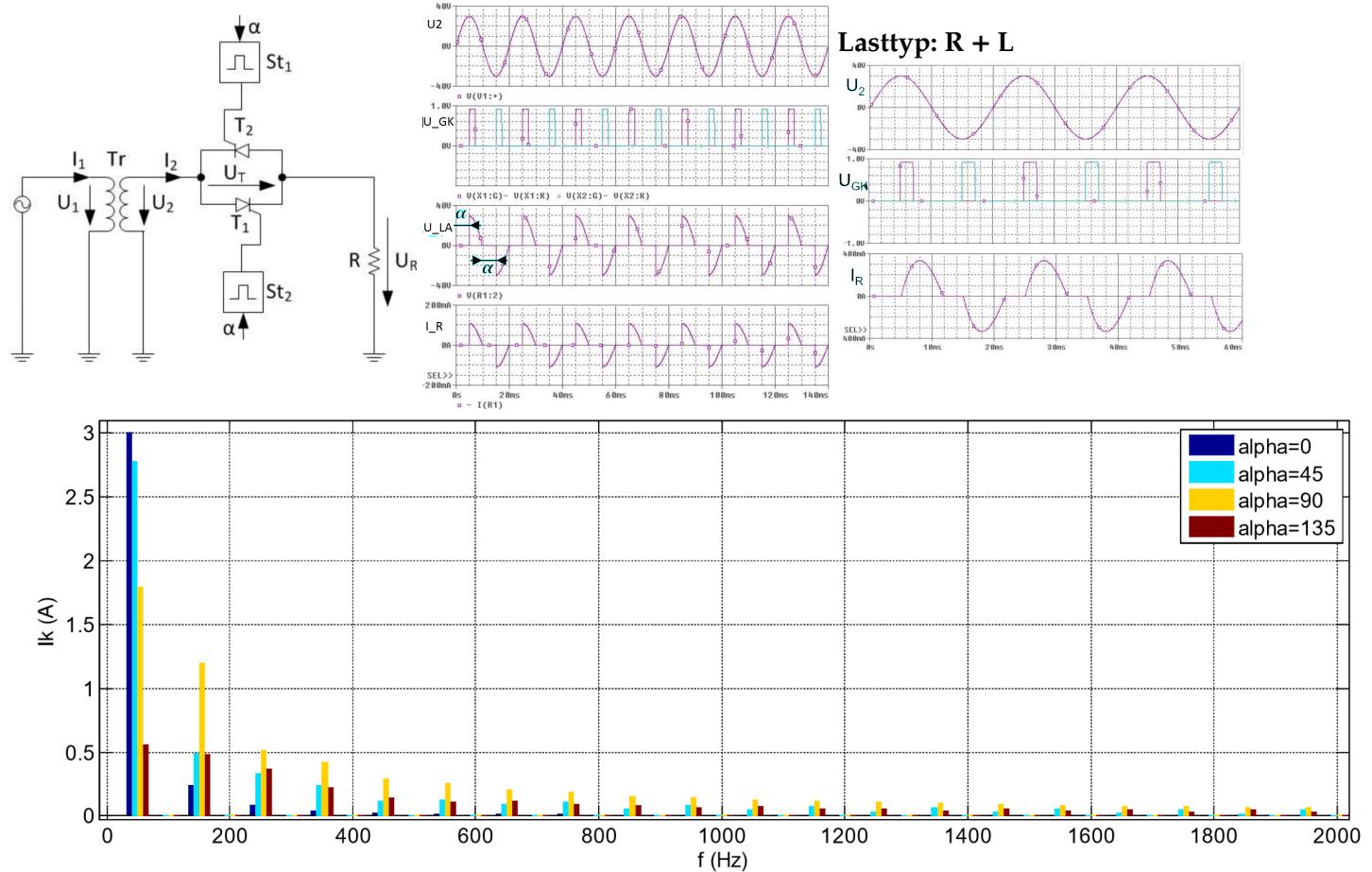
Wegen dem Polaritätswechsel besteh der Wechselstromschalter aus zwei antiparallelen Thyristoren, welche die Stromhalbschwingung abwechselnd ausführen.



5.5.2 Wechselstrom-Steller

Im vergleich mit den Wechselstrom-Schalter, welche eimaligs Ein- oder Ausschalten von Wechselstromkreisen ermöglichen, erlaubt der Wechselstrom-Steller in jeder Halbperiode wiederholtes Einschalten, wobei der Strom vom Zündzeitpunkt bis zm Nulldurchgang fliesst.

Lasttyp: R



6 Gleichstromumrichter

Ein Gleichstromumrichter dient zur Änderung von: **Polarität, Spannung, Strom.**

$$\tau = \frac{L_1}{R_1} \quad T_s = T_{on} + T_{off} \quad D = \frac{U_2}{U_1} = \frac{I_1}{I_2} = \frac{t_{on}}{T_s}$$

6.1 Buck-Converter

Tiefsetzsteller (Buck-Converter) $U_a < U_e$

Rechnung ohne C

$$V_1 = i_L \cdot R_1 + L_1 \cdot \frac{di_L}{dt}$$

$$0 < t < T_{on}$$

$$0 = i_L \cdot R_1 + L_1 \cdot \frac{di_L}{dt}$$

$$T_{on} < t < T_s$$

$$i_L = \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_1}{R_1} \cdot \frac{e^{-\frac{T_{off}}{\tau}} - 1}{1 - e^{-\frac{T_s}{\tau}}} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$0 < t < T_{on}$$

$$i_L = \frac{V_1}{R_1} \cdot \frac{1 - e^{-\frac{T_{on}}{\tau}}}{1 - e^{-\frac{T_s}{\tau}}} \cdot e^{-\frac{t-T_{on}}{\tau}}$$

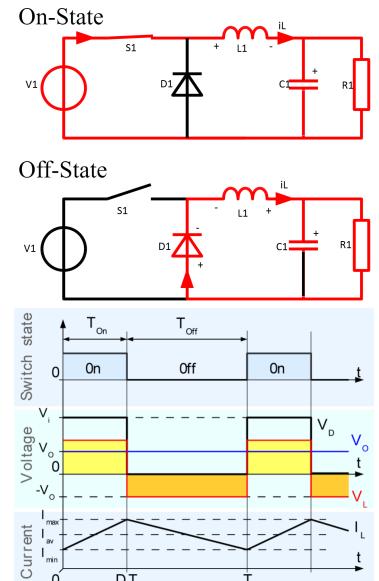
$$T_{on} \leq t \leq T_s$$

$$i_{Lmax} = i_L(T_{on}) \quad i_{Lmin} = i_L(0) = i_L(T_s)$$

$$T_{off} = -\tau \cdot \ln \frac{i_{Lmin}}{i_{Lmax}} = -\frac{L_1}{R_1} \cdot \ln \frac{i_{Lmin}}{i_{Lmax}}$$

$$T_{on} = -\tau \cdot \ln \left(\frac{\frac{1}{i_{Lmax}} \cdot \frac{V_1}{R_1} - 1}{\frac{1}{i_{Lmax}} \cdot \frac{V_1}{R_1} - e^{-\frac{T_{off}}{\tau}}} \right)$$

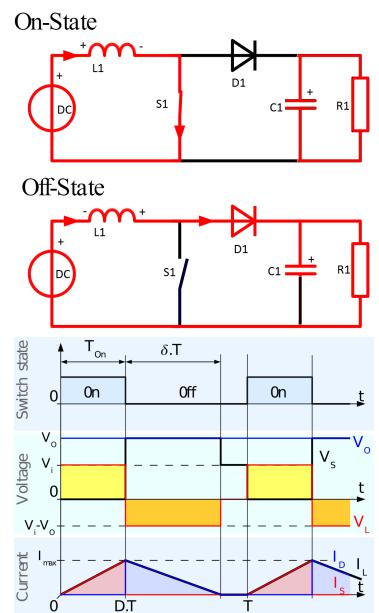
$$V_{out} = V_{in} \cdot \frac{T_{on}}{T_{on} + T_{off}} - V_D \frac{T_{off}}{T_{on} + T_{off}}$$



6.2 Boost-Converter

Hochsetzsteller (Boost-Converter) $U_a > U_e$

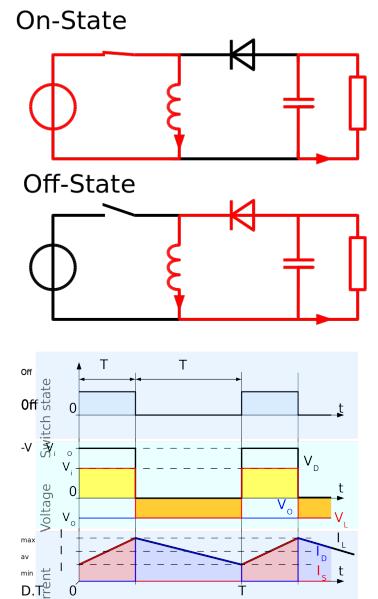
$$V_{Out} = V_{in} \cdot \left(1 + \frac{T_{on}}{T_{off}} \right)$$



6.3 Inverse-Converter

Inverswandler, Umkehrung der Polarität

$$V_{out} = -L \cdot \frac{\Delta I_L}{\Delta t} \xrightarrow{\text{eingeschwungen}} V_L \cdot \frac{T_{on}}{T_{off}}$$



6.4 Gleichstrom-Schalter/Steller

6.4.1 Gleichstrom-Schalter

$$U_1 = (L + L_\sigma) \cdot \frac{di_L}{dt} + R \cdot i_L \quad t_{on} \leq t \leq t_{off}$$

$$0 = L \cdot \frac{di_L}{dt} + R \cdot i_L \quad t_{off} \leq t$$

$$i_L(t) = \frac{U_1}{R} \cdot (1 - e^{-\frac{t-t_{on}}{\tau}}) \quad t_{on} \leq t \leq t_{off}$$

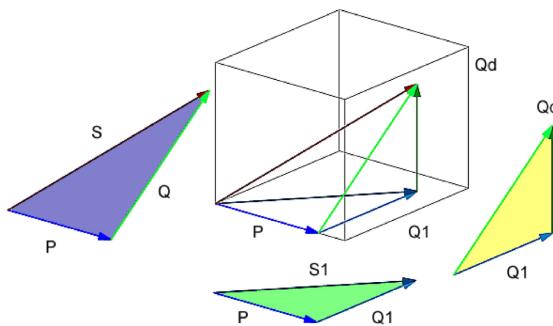
$$i_L(t) = \frac{U_1}{R} \cdot e^{\frac{t-t_{off}}{\tau}} \quad t_{off} \leq t$$

6.4.2 Gleichstrom-Steller

$$U_{2AV} = \frac{1}{t_{on} + t_{off}} \int_0^{t_e} U_1 \cdot dt = \frac{t_{on}}{t_{on} + t_{off}} U_1$$

7 Grundformeln

7.1 Leistungen



Verzerrungsblindleistung entsteht, wenn I_1 und U nicht in Phase sind. Wenn Oberwellen von Spannung und Strom die gleichen Frequenzanteile besitzen entsteht keine Verzerrung.

Scheinleistung	$S = U \cdot I = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{P^2 + Q_1^2 + Q_d^2}$	i konjkolpex???? V5S10 vs V7S14
Wirkleistung	$P = U \cdot I_1 \cdot \cos\varphi_1$	
Blindleistung	$Q = U \cdot I_1 \cdot \sin\varphi_1 = \sqrt{Q_1^2 + Q_d^2}$ $Q_1 = S_1 \cdot \sin\varphi_1$ $Q_d = U \cdot \sqrt{\sum_{m=2}^{\infty} I_m^2} = k \cdot S$	Q_1 = Grundschwingungs-Blindleistung Q_d = Verzerrungsleistung
Grundschwingungs-scheinleistung	$S_1 = U_1 \cdot I_1 = \sqrt{P^2 + Q_1^2}$	S_1 = Grundschwingungs-Scheinleistung
Berechnung des Mittelwertes	$X_{AV} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{min}^{2\pi} \hat{U}_m \cdot \sin(\beta) d\beta$	
Berechnung des Gleichwertes	$\overline{ X } = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$	
Berechnung des Effektivwertes	$X_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt}$	
Effektivwert Oberwellen	$X_{RMS_Oberwellen} = \sqrt{X_{RMS}^2 - X_{AV}^2}$	
Formfaktor	$F = \frac{X_{RMS}}{\overline{ X }}$	
Klirrfaktor	$k = \frac{\sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} I_k^2}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} I_k^2}}$	
Welligkeit	$w = \frac{X_{RMS_Oberwellen}}{ X_{AV} } = \frac{\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} X_k^2}}{ X_{AV} } = \sqrt{F^2 - 1}$	
Leistungsfaktor	$\lambda = \frac{P}{S} = \frac{I_1}{I} \cos\varphi_1$	

7.2 Fourier

7.2.1 Allgemeine Form

Eine periodische Funktion lässt sich durch eine Reihe von Sinus- und Kosinusfunktionen darstellen.

$$f(t) = \underbrace{\frac{a_0}{2}}_{\text{Gleichanteil}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cdot \cos(k\omega t) + b_k \cdot \sin(k\omega t))}_{\text{Wechselanteil}} = f_{AV} + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{c_k}_{\substack{\text{Amplitude der Harmonischen}}} \cdot \sin(k\omega t + \varphi_k)$$

Die Koeffizienten der Entwicklung von $f(t)$ sind:

$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt$
$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \cos(k\omega t) dt \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$
$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \sin(k\omega t) dt \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$
$c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$
$\varphi_k = \arctan\left(\frac{b_k}{a_k}\right)$

7.2.3 Komplexe Darstellung der Fourierreihen

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{jk\omega t}$$

$$c_n = \overline{c_{-n}} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot e^{-jn\omega t} dt$$

7.2.2 Orthogonalitätsbeziehungen

$$\int_0^T \cos(n\omega t) \cdot \cos(m\omega t) dt = \begin{cases} T, & n = m = 0 \\ \frac{T}{2}, & n = m > 0 \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

$$\int_0^T \sin(n\omega t) \cdot \sin(m\omega t) dt = \begin{cases} \frac{T}{2}, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

$$\int_0^T \cos(n\omega t) \cdot \sin(m\omega t) dt = \begin{cases} 0, & n-m = \text{gerade Zahl} \\ \frac{2m}{m^2 - n^2}, & n-m = \text{ungerade Zahl} \end{cases}$$

7.2.4 Umrechnungsformeln

$$c_n = \overline{c_{-n}} = \frac{a_n - jb_n}{2} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots \text{ wobei } b_0 = 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} a_n = 2 \cdot \operatorname{Re}(c_n) \\ b_n = -2 \cdot \operatorname{Im}(c_n) \end{array} \right\} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots, b_0 = 0)$$

7.2.5 Sätze zur Berechnung der Fourierkoeffizienten

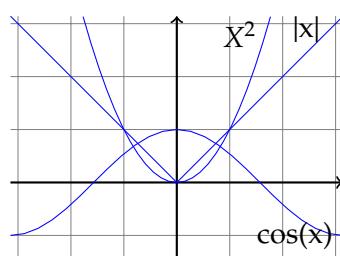
Symmetrie

Gerade

$$f(t) = f(-t)$$

Symmetrisch an Y-Achse

$$b_n = 0, a_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot \cos(n\omega t) dt$$

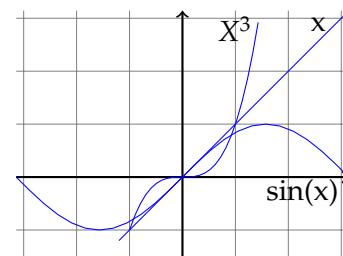


Ungerade

$$f(-t) = -f(t)$$

Punktsymmetrisch am Ursprung

$$a_n = 0, b_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot \sin(n\omega t) dt$$



8 Lösen von Differentialgleichungen

8.1 Allgemeine Vorgehensweisen

8.1.1 Trennung von Variablen / Separation

Form: $y' = f(x)g(y)$

Vorgehen:

1. DGL umstellen: $\frac{y'}{g(y)} = f(x)$
2. Beidseitig nach x integrieren wobei $dx = \frac{dy}{y'}$
3. Grenzen anpassen: $\int_{y_0=y(x_0)}^y \frac{1}{g(y)} dy = \int_x^{x_0} f(x) dx$

8.1.2 Lineartermsubstitution

Form: $y' = f(ax + by + c)$

Vorgehen:

1. Substitution: $z = ax + by + c$
2. Einsetzen in $z' = a + bf(z)$
3. Separation: $\frac{z'}{f(z)} = a + b$ wobei $z_0 = x_0 + y_0$

8.1.3 Gleichgradigkeit

Form: $y' = f(\frac{y}{x})$

Vorgehen:

1. Substitution: $z = \frac{y}{x}$
2. Einsetzen in $z' = \frac{1}{x}(f(z) - z)$
3. Separation: $\frac{z'}{f(z)-z} = \frac{1}{x}$ wobei $z_0 = \frac{y_0}{x_0}$

8.2 Differentialgleichung 1. Ordnung

8.2.1 Konstante Störung $f(x) = A$

1. Homogene Lösung mit $y_h = 0$ berechnen
2. Partikuläre Lösung mit $y_p = B$ (= Konstante) berechnen, indem zeitlich abhängige Terme der DGL ignoriert werden

8.2.2 Sinusförmige Störung $f(x) = (A \cdot \cos \omega x + B \cdot \sin \omega x)$

1. Homogene Lösung mit $y_h = 0$ berechnen
2. Ansatz für Partikuläre Lösung: $y_p = C \cdot \sin(\omega t) + D \cdot \cos(\omega t)$
3. y_p in DGL einsetzen, C und D per Koeffizientenvergleich ermitteln

9 Idiotenseite

9.1 SI-Vorsätze

Symbol	Name	Wert	Binär	Symbol	Name	Wert
da	Deka	10^1		d	Dezi	10^{-1}
h	Hekto	10^2		c	Centi	10^{-2}
k	Kilo	10^3	$2^{10} = 1024$	m	Mili	10^{-3}
M	Mega	10^6	2^{20}	y, μ	Mikro	10^{-6}
G	Giga	10^9	2^{30}	n	Nano	10^{-9}
T	Tera	10^{12}	2^{40}	p	Piko	10^{-12}
P	Peta	10^{15}	2^{50}	f	Femto	10^{-15}

9.2 Funktionswerte für Winkelargumente

deg	rad	sin	cos	tan	deg	rad	sin	cos	deg	rad	sin	cos	deg	rad	sin	cos
0	0	0	1	0	90	$\frac{\pi}{2}$	1	0	180	π	0	-1	270	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0
30	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	120	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	210	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	300	$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
45	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	135	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	225	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	315	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
60	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	150	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	240	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	330	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

9.3 Periodizität

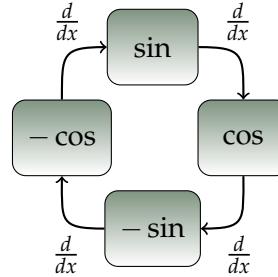
$$\cos(a + k \cdot 2\pi) = \cos(a) \quad \sin(a + k \cdot 2\pi) = \sin(a) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

9.4 Quadrantenbeziehungen

$$\begin{aligned}\sin(-a) &= -\sin(a) \\ \sin(\pi - a) &= \sin(a) \\ \sin(\pi + a) &= -\sin(a) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos(a)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(-a) &= \cos(a) \\ \cos(\pi - a) &= -\cos(a) \\ \cos(\pi + a) &= -\cos(a) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) &= -\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \sin(a)\end{aligned}$$

9.5 Ableitungen



9.6 Additionstheoreme

$$\begin{aligned}\sin(a \pm b) &= \sin(a) \cdot \cos(b) \pm \cos(a) \cdot \sin(b) \\ \cos(a \pm b) &= \cos(a) \cdot \cos(b) \mp \sin(a) \cdot \sin(b) \\ \tan(a \pm b) &= \frac{\tan(a) \pm \tan(b)}{1 \mp \tan(a) \cdot \tan(b)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(a) \sin(b) &= \frac{1}{2}(\cos(a - b) - \cos(a + b)) \\ \cos(a) \cos(b) &= \frac{1}{2}(\cos(a - b) + \cos(a + b)) \\ \sin(a) \cos(b) &= \frac{1}{2}(\sin(a - b) + \sin(a + b))\end{aligned}$$

9.8 Euler-Formeln

$$\begin{aligned}\sin(x) &= \frac{1}{2j}(e^{jx} - e^{-jx}) & \cos(x) &= \frac{1}{2}(e^{jx} + e^{-jx}) \\ e^{x+jy} &= e^x \cdot e^{jy} = e^x \cdot (\cos(y) + j \sin(y)) \\ e^{j\pi} &= e^{-j\pi} = -1\end{aligned}$$

9.7 Doppel- und Halbwinkel

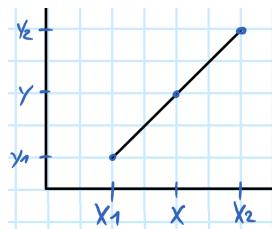
$$\begin{aligned}\sin(2a) &= 2 \sin(a) \cos(a) \\ \cos(2a) &= \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2 \cos^2(a) - 1 = 1 - 2 \sin^2(a) \\ \cos^2\left(\frac{a}{2}\right) &= \frac{1+\cos(a)}{2} \quad \sin^2\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1-\cos(a)}{2}\end{aligned}$$

9.9 Summe und Differenz

$$\begin{aligned}\sin(a) + \sin(b) &= 2 \cdot \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ \sin(a) - \sin(b) &= 2 \cdot \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ \cos(a) + \cos(b) &= 2 \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ \cos(a) - \cos(b) &= -2 \cdot \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ \tan(a) \pm \tan(b) &= \frac{\sin(a \pm b)}{\cos(a) \cos(b)}\end{aligned}$$

9.10 Geradengleichung Interpolieren

$$y(x) = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$



9.11 Grad <-> Rad

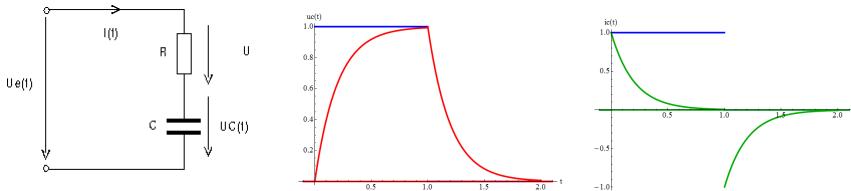
$$\alpha_{rad} = \alpha_{grad} \cdot \frac{\pi}{180}$$

$$\alpha_{grad} = \alpha_{rad} \cdot \frac{180}{\pi}$$

9.12 Einschaltvorgänge

9.12.1 Kondensator

Serieschaltung von Widerstand und Kondensator an einem Rechtecksignal U_e



Ladevorgang:

$$u_C(t) = U_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = U_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{R_C \cdot C}}\right)$$

$$i_C(t) = \frac{U_0}{R_C} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = I_0 \cdot e^{-\frac{t}{R_C \cdot C}}$$

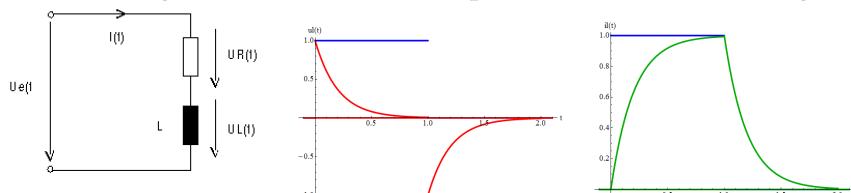
Entladevorgang

$$u_C(t) = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{R_C \cdot C}}$$

$$i_C(t) = -\frac{U_0}{R_C} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = -I_0 \cdot e^{-\frac{t}{R_C \cdot C}}$$

9.12.2 Spule

Serieschaltung von Widerstand und Spule an einem Rechtecksignal U_e



Ladevorgang

$$i_L(t) = I_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = \frac{U_0}{R_L} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t \cdot R_L}{L}}\right)$$

$$u_L(t) = \hat{u} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = \hat{u} \cdot e^{-\frac{t \cdot R_L}{L}}$$

Entladevorgang

$$i_L(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{U_0}{R_L} \cdot e^{-\frac{t \cdot R_L}{L}}$$

$$u_L(t) = -\hat{u} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = -\hat{u} \cdot e^{-\frac{t \cdot R_L}{L}}$$

9.14 Grundelemente

Ohmscher Widerstand R

u und i können sprunghaft ändern

$$u(t) = R \cdot i(t)$$

$$i(t) = \frac{u(t)}{R}$$

$$\underline{Z}_R = R$$

nicht linear: $R_+(u) = \frac{U}{I(u)}$, $r_D = \frac{dU}{dt}|_{U_0}$

$$P = I^2 \cdot R = \frac{U^2}{R}$$

Kapazität C

u kann nicht sprunghaft ändern

$$u(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau + u(0)$$

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$$

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C}$$

$$X_C = -\frac{1}{\omega C}, B_C = \omega C$$

$$Q_C = -U^2 \cdot \omega C = -\frac{I^2}{\omega C}$$

$$W_C = \frac{1}{2} C U_C^2$$

Induktivität L

i kann nicht sprunghaft ändern

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t u(\tau) d\tau + i(0)$$

$$\underline{Z}_L = j\omega L$$

$$X_L = \omega L, B_L = -\frac{1}{\omega L}$$

$$Q_L = I^2 \cdot \omega L = \frac{U^2}{\omega L}$$

$$W_L = \frac{1}{2} L I_L^2$$

9.13 Eigenschaften unterschiedlicher Schwingungsformen