

Leistungselektronik - Formelsammlung

L. Mazzoleni

Inhaltsverzeichnis

29. Dezember 2016

1 Halbleiter	2
1.1 Eigenleitung	2
1.2 Dotierung	2
1.3 pn-Übergang	2
2 Diode	3
2.1 Ersatzschaltbild	3
2.2 Grundformeln	3
2.3 Schaltverhalten und Schaltverluste	3
3 Transistor	4
3.1 Bipolarer Transistor	4
3.2 Darlington-Transistoren	5
3.3 MOSFET	5
3.4 IGBT	5
3.5 Transistoren im Vergleich	6
4 Thyristoren	7
4.1 Thermische Ersatzschaltung	7
4.2 Abschaltbarer Thyristor	7
4.3 IGCT	7
5 Stromrichterschaltung	8
5.1 Gruppierung	8
5.2 Kennzeichnung	8
6 Ungesteuerter Gleichrichter	9
6.1 M1U	9
6.2 B2U	10
6.3 B6U	10
7 Gesteuerter Gleichrichter	11
7.1 M1C	11
7.2 B2C	11
7.3 B6C	11
7.4 Wechselstromschalter/Wechselstromsteller	12
8 Gleichstromumrichter	13
8.1 Buck-Converter	13
8.2 Boost-Converter	14
8.3 Inverse-Converter	14
8.4 Gleichstromschalter/Gleichstromsteller	16
9 Wechselrichter	17
9.1 Einphasig	17
10 Grundformeln	18
10.1 Leistungen	18
10.2 Fourier	19
11 Lösen von Differentialgleichungen	20
11.1 Allgemeine Vorgehensweisen	20
11.2 Differentialgleichung 1. Ordnung	20
12 Idiotenseite	21

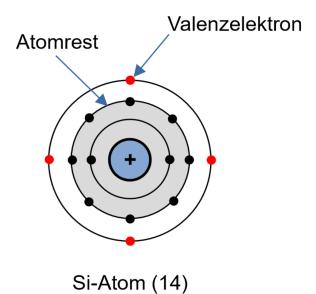
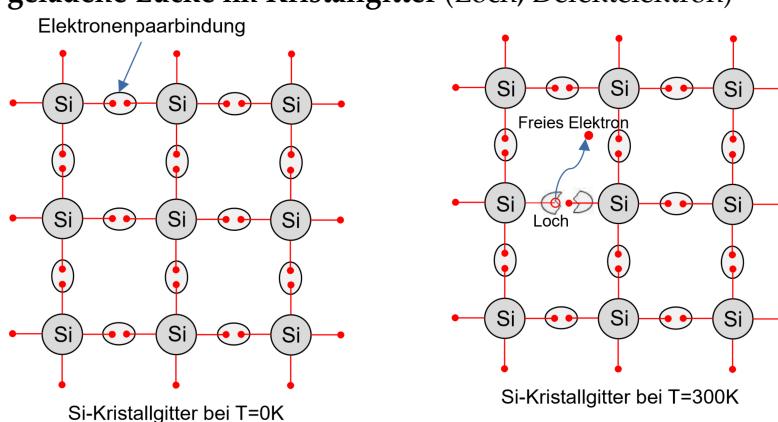
1 Halbleiter

- **Metallische Leiter:** der Stromtransport wird durch Elektronen erzeugt.
- **Isolatoren:** der Stromtransport wird durch Ionen erzeugt.
- **Halbleiter:** die Leitfähigkeit liegt irgendwo zwischen Metallen und Isolatoren.
Die wichtigsten Halbleiter sind Si, Ge, CuO₂ und GaAs
- **Dotierte Halbleiter:** Durch kontrollierte Verunreinigung (Dotierung) der reinen Halbleiterwerkstoffe kann die Leitfähigkeit wesentlich verändert werden.

1.1 Eigenleitung

Durch die thermische Bewegung der Atomem um ihre Ruhelage im Kristallgitter ist es möglich einige **Elektronenpaarbindungen** aufzubrechen.

Auf diese Weise bewegt sich ein gelöstes Elektron frei im Kristallgitter und hinterlässt eine **positiv geladene Lücke im Kristallgitter** (Loch, Defektelektron)



1.2 Dotierung

Durch eine Dotierung des Halbleitermaterials mit Fremdatomen ist es möglich die Ladungsträgerdichte effizient zu kontrollieren:

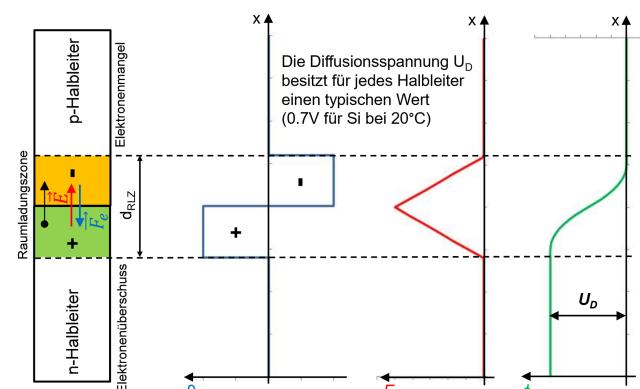
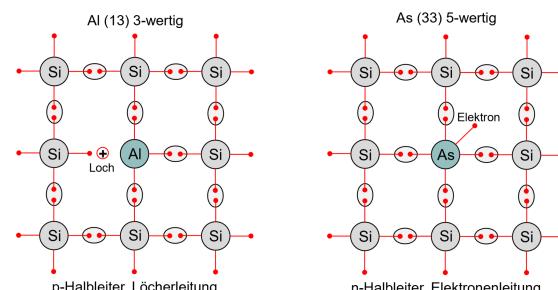
1.3 pn-Übergang

1.3.1 Diffusionsstrom

Der Diffusionsstrom wird durch den Ladungsträgeraustausch zwischen beiden Halbleitergebieten erzeugt und dadurch verschwinden in der Grenzschicht alle freien Ladungsträger.

Durch die Elektronenwanderung entsteht im n-Teil des Grenzgebiets die **ortsfeste** positive Ladung (+). Die ein-diffundierten Elektronen erzeugen im p-Teil des Grenzgebiets die **ortsfeste** negative Ladung (-). Die ortsfesten Ladungen erzeugen das elektrische Feld in der Raumladungszone und damit auch den Driftstrom.

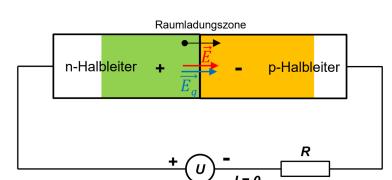
Der Driftstrom ist gegen den Diffusionsstrom gerichtet. Sobald die Ströme gleich sind, ist eine stabile Raumladungszone etabliert.



1.3.2 pn-Übergang mit äusserer Spannung

Die Spannungsquelle ist an den pn-Übergang in **Sperrrichtung** geschalten.

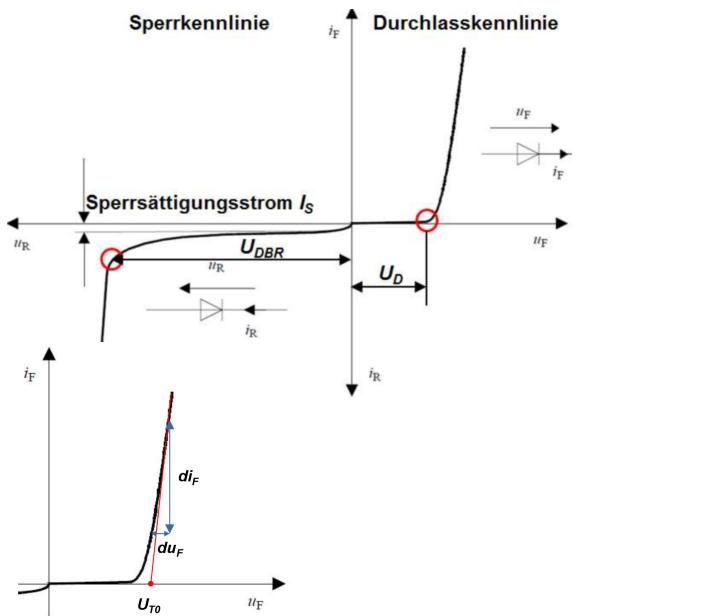
Die Spannung U vergrössert die Breite der Raumladungszone. Der Strom kann nicht über den pn-Übergang fliessen.



2 Diode

Eine Diode besteht aus pn-Übergängen und ist deswegen ein nichtlineares Element:

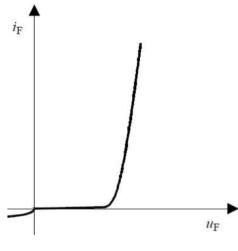
U_{DBR}	Durchbruchspannung
U_D	Diffusionsspannung (0.7V, Si)
U_F	Flussspannung
U_R	Sperrspannung
i_F	Diffusionsstrom, Strom in Durchlassrichtung
i_R	Leckstrom, Strom in Sperrichtung



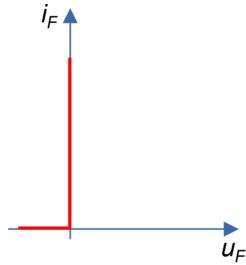
i_F, u_F	Durchlassrichtung
U_{T0}	Schwellenspannung
$r_F = \frac{du_F}{di_F}$	Differenzialer Durchlasswiderstand

2.1 Ersatzschaltbild

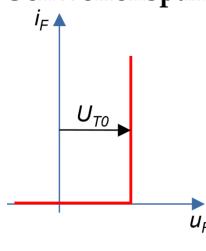
Reale Diode



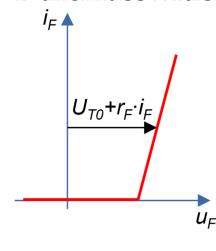
Ideale Diode (D_1)



Diode D_1 mit der Schwellenspannung (D_2)



Diode D_2 mit dem Durchlasswiderstand (D_3)



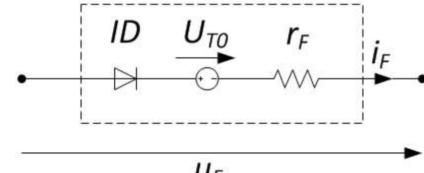
2.2 Grundformeln

Flussspannung

$$u_F = U_{T0} + i_F \cdot r_F$$

Momentanleistung

$$p(t) = u_F(t) \cdot i_F(t)$$



Verlustleistung

$$P_v = \frac{1}{T} \int_0^T u_F(t) \cdot i_F(t) dt = U_{T0} \cdot \int_0^T i_F(t) dt + r_F \cdot \frac{1}{T} \int_0^T i_F^2(t) dt = U_{T0} \cdot I_{FAV} + r_F \cdot I_{FRMS}^2$$

I_{FAV}
 I_{FRMS}

arithmetische Mittelwert von i_F
Effektivwert von i_F

2.3 Schaltverhalten und Schaltverluste

Durchlassverzug:

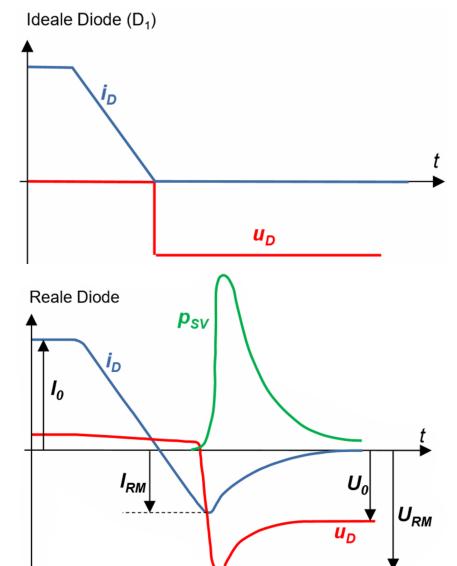
freie Ladungsträger müssen zuerst die ladungsfreie Zone "füllen"

Sperrverzug

freie Ladungsträger müssen zuerst das Gebiet des pn-Überganges freiräumen

Diese Erscheinungen sind wichtig bei $\frac{du}{dt} > 100V/\mu s$ und $\frac{di}{dt} > 10A/\mu s$

I_{RM} Maximalwert des Rückstromes
 U_{RM} Maximalwert der Rückspannung



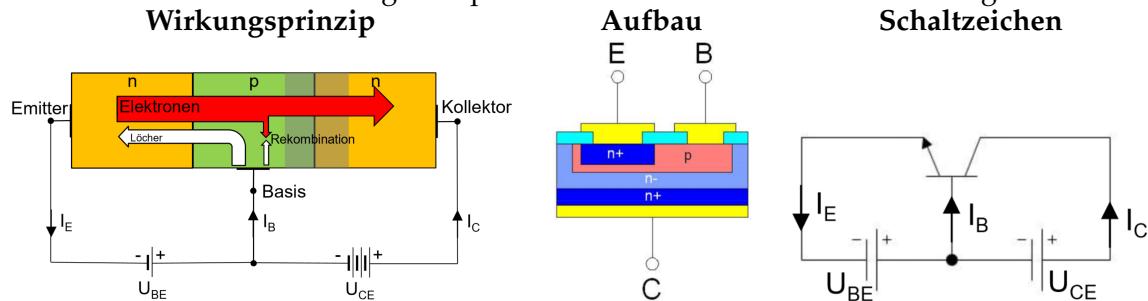
3 Transistor

3.1 Bipolarer Transistor

3.1.1 Wirkungsprinzip

Ein Bipolartransistor besteht aus drei dünnen dotierten Halbleiterschichten, d.h. aus zwei pn-Übergängen. Gemäss der Reihenfolge und dem Dotierungstyp der Schichtung werden Bipolartransistoren in npn- und pnp-Typen unterteilt.

Als Leistungstransistoren werden überwiegend npn-Transistoren in der Emitter-Schaltung verwendet



3.1.2 Schaltverhalten

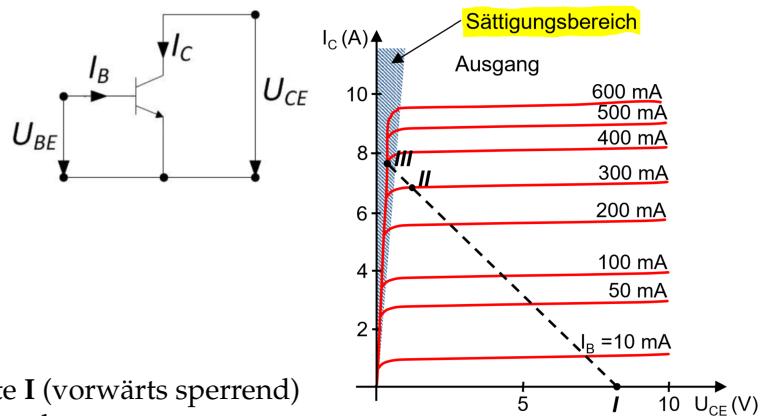
Im Sättigungsbereich ist

der Basisstrom so gross, dass sich in der Basiszone mehr Ladungsträger befinden als für den Kollektorstrom nötig ist.

Die beiden pn-Übergänge sind in die Durchlassrichtung polarisiert.
 $U_{BE} > U_{CE}$ und $U_{BC} > 0$

$$\text{Im Verstärkungsbereich gilt: } \beta = \frac{I_C}{I_B}$$

Im Schaltbetrieb werden die Arbeitspunkte I (vorwärts sperrend) und III (Durchlassbetrieb -Sättigung) verwendet.



3.1.3 Kennwerte

U_{CES} Kollektor-Emitter-Sperrspannung

Der höchstzulässige Wert der U_{CES} bei Ansteuerung mit einer negativen U_{BE}

U_{CEO} Kollektor-Emitter-Sperrspannung

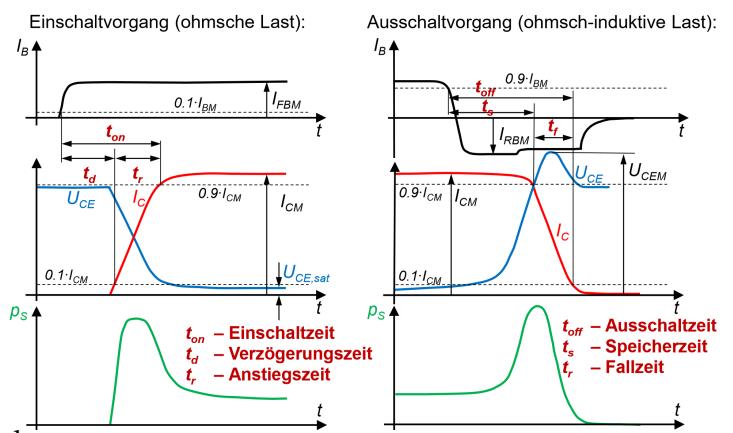
Der höchstzulässige Wert der U_{CE} bei offenem Basisanschluss

I_{CAVM} Kollektor-Dauergrenzstrom

Der höchstzulässige Wert des Gleichstrom-Mittelwerts bei vorgegebener Temperatur

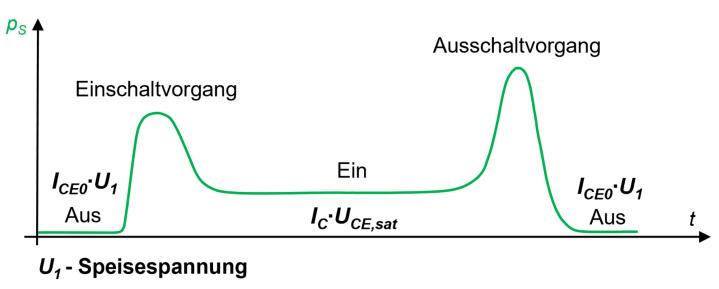
I_{CRM} periodischer Kollektor-Spitzenstrom

Der höchstzulässige Wert eines Pulssstromes mit angegebener Periodendauer und Einschaltzeitdauer



3.1.4 Verluste

- Einschaltverluste
- Ausschaltverluste
- Durchlassverluste
- Sperrverluste



3.2 Darlington-Transistoren

Der Stromverstärkungsfaktor der Leistungstransistoren ist relativ klein. Deswegen ist ein starker Basisstrom für diese Transistoren notwendig. Ein Darlington-Transistor löst dieses Problem.

3.2.1 Formeln

β = Kleinsignalverstärkung

B = Grosssignalverstärkung

$$\beta_1 = \frac{i_{C1}}{i_{B1}}, \quad \beta_2 = \frac{i_{C2}}{i_{B2}}$$

$$i_{E1} = i_{C1} + i_{B1} = (1 + \beta_1)i_{B1} = i_{B2}$$

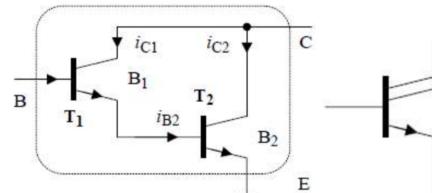
$$i_{C2} = \beta_2 i_{B2} = \beta_2 i_{E1} = \beta_2(1 + \beta_1)i_{B1} = \beta_{ges}i_{B1}$$

$$\beta_{ges} = \beta_2(1 + \beta_1) \approx \beta_1\beta_2$$

3.2.3 Vor und Nachteile

+ Gleichbleibender Platzbedarf

3.2.2 Aufbau



+ höhere Stromverstärkung

+ $B \approx B_1 \cdot B_2$ im Bereich <1000

+ $\beta \approx \beta_1 \cdot \beta_2$ im Bereich <50'000

- grosse Phasenverschiebung

- für Hochfrequenzanwendungen ungeeignet

- langsame Schaltzeiten

- doppelte Basis-Emitter-Spannung

Für effiziente Schaltanwendungen eignen sich Darlingtontransistoren wegen diesen Nachteilen kaum.

3.3 MOSFET

Die elektrische Leitfähigkeit des Substrats ist durch ein el. Feld gesteuert. Das el. Feld ruft im Substrat eine Influenzladung hervor.

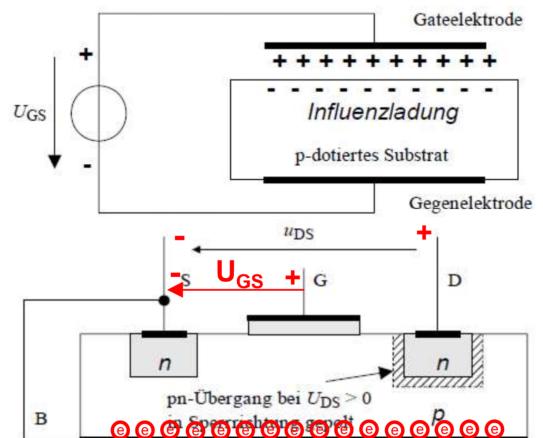
Die Gate-Elektrode ist durch ein Metalloxid vom Substrat isoliert.

S = Source D = Drain
G = Gate B = Bulk (Substrat)

U_{DS} ist positiv damit ist der rechte pn-Übergang in Sperrrichtung gepolt. Deswegen kann kein Strom in beide Richtungen fliessen.

→ Der Transistor ist selbstsperrend.

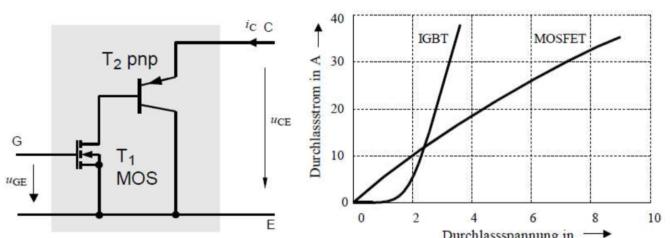
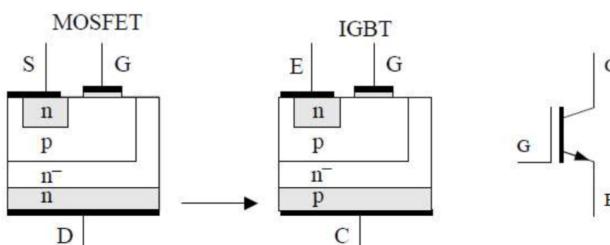
⚠ Sobald eine positive Spannung zwischen G und S angelegt ist, entsteht ein leitfähiger n-Kanal und damit auch ein Strom vom D- zum S-Anschluss.



3.4 IGBT

Der IGBT setzt sich aus einem Bipolartransistor T_2 und einem MOSFET T_1 zusammen.

n- ist eine schwach dotierte Zone, welche zur Erhöhung der Spannungsfestigkeit verwendet wird.

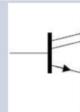
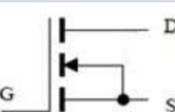
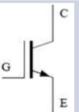
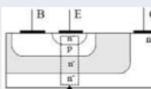


3.4.1 Eigenschaften

- Über die Kollektor-Emitter-Strecke fällt mindestens die Schleusenspannung ab
- Kleine Durchlassverluste bei hohen Strömen

- In Rückwärtsrichtung nur begrenzt sperrfähig
- Grosse Sperrverluste vor allem beim Abschalten

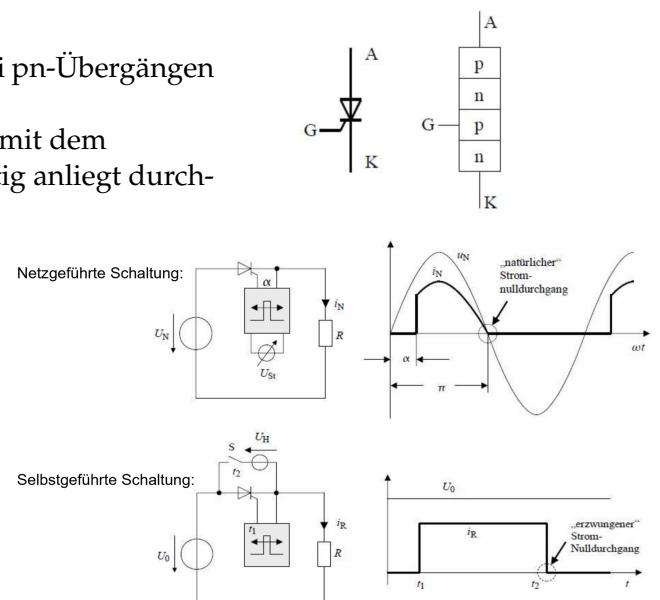
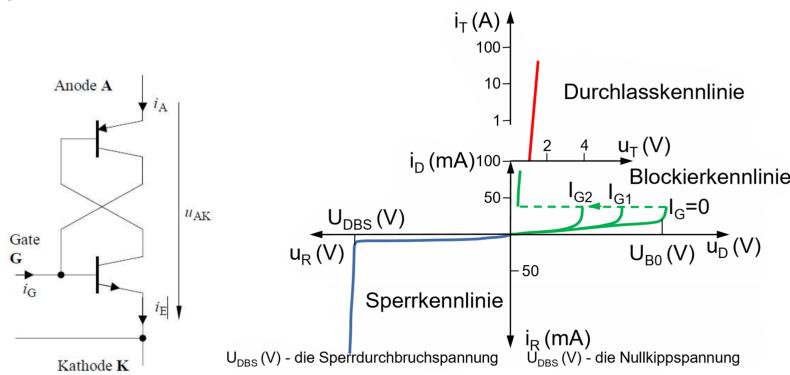
3.5 Transistoren im Vergleich

	Darlington-Transistor	MOSFET	IGBT
Schalsymbol			
Schichtaufbau			
Sperrverhalten- Obergrenze	mittel	niedrig	hoch
Steuergenerator - Aufwand - Leistung	mittel hoch	gering niedrig	gering niedrig
Schaltverhalten - Einschaltzeit - Abschaltzeit - Verlustleistung	mittel lang hoch	kurz kurz niedrig	mittel kurz niedrig
Durchlassverhalten - Stromtragfähigkeit - Verlustleistung	hoch niedrig	niedrig hoch	hoch niedrig
Pulsfrequenz	4kHz	250kHz	20kHz

4 Thyristoren

Ein Thyristor besteht aus vier Halbleiterschichten d.h. aus drei pn-Übergängen
Thyristoren sind einschaltbare Bauelemente.

Thyristoren sind „einschaltbare Dioden“. Thyristoren werden mit dem Zündimpuls der zwischen Gate (G) und Kathode (K) kurzzeitig anliegt durchgeschaltet.



4.1 Thermische Ersatzschaltung

Thermische Kenngrößen
Wärmeleistung P [W]

Temperaturunterschied ϑ [K]
Wärmewiderstand R_{th} [K/W]

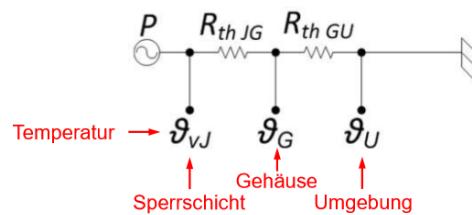
Elektrische Kenngrößen

Strom I [A]

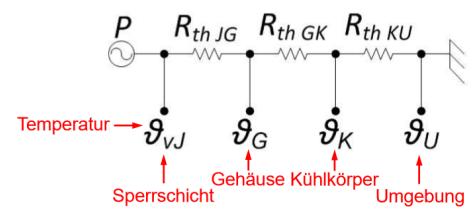
Spannung [V]

Widerstand [$V/A, \Omega$]

4.1.1 Thyristor ohne Kühlung



4.1.2 Thyristor mit Kühlung



$$\vartheta_{VJ} - \vartheta_U = P \cdot (R_{th\,JG} + R_{th\,GU})$$

$$\vartheta_{VJ} - \vartheta_U = P \cdot (R_{th\,JG} + R_{th\,GK} + R_{th\,KU})$$

Beispiel Schaltverluste bei B2C

$$\text{Spitzenwert des Thyristorstromes } \hat{I}_R = \frac{\hat{U}_2}{R}$$

$$R_{th\,KU} = \frac{\Delta \vartheta}{P}$$

$$\text{Mittelwert des Thyristorstromes } I_{TAV} = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\pi} I_{Rm} \cdot \sin(\beta) d\beta = \frac{\hat{I}_R}{2\pi} \cdot (1 + \cos(\alpha))$$

$$\text{Effektivwert des Thyristorstromes } I_{TRMS} = \sqrt{\frac{I_{Rm}^2}{2\pi} \int_{\alpha}^{\pi} \sin^2(\beta) d\beta} = \frac{\hat{I}_R}{2} \sqrt{\frac{\pi-\alpha}{\pi} + \frac{\sin(2\alpha)}{2\pi}}$$

$$\text{momentane Verlustleistung: } p(t) = u_T(t) \cdot i_T(t)$$

$$\text{Mittelwert der Verlustleistung: } P_T = \frac{1}{T} \int_0^T u_T(t) \cdot i_T(t) dt = U_{T0} \cdot \frac{1}{T} \int_0^T i_T(t) dt + r_T \cdot \frac{1}{T} \int_0^T i_T^2(t) dt$$

$$P_T = U_{T0} \cdot I_{TAV} + r_T \cdot I_{TRMS}^2$$

I_{TAV} ist der Mittelwert und I_{TRMS} der Effektivwert des Thyristorstroms

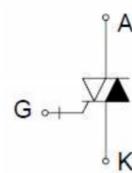
Der Wert für U_{T0} kann aus dem Datenblatt des Thyristors herausgelesen werden.

4.2 Abschaltbarer Thyristor

GTO = Gate-Turn-Off

Der GTO schaltet aus, wenn ein ausreichend hoher negativer Gate-Strom auftritt.

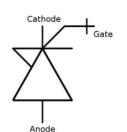
Amplitude des Gate-Stromes muss 20% bis 30% des abzuschaltenden GTO-Stromes betragen.



4.3 IGCT

Integrated Gate-Commuted Thyristor

IGCT sind die Weiterentwicklung der GTO. Sie werden hauptsächlich für Mittelspannungsumrichter eingesetzt.



5 Stromrichterschaltung

5.1 Gruppierung

5.1.1 nach Steuerung

- Ungesteuerte Stromrichter:

Das Verhältnis von Eingangs- zu Ausgangsspannung wird durch die Stromrichterschaltung festgesetzt

- Gesteuerte Stromrichter

Das Verhältnis von Eingangs- zu Ausgangsspannung wird durch Steuereingriff am Halbleiterschalter verändert.

5.1.2 nach Führung

Link: Kommutierung WIKI

Kommutierung bedeutet die Wechselung des Stromflusses von einem HL-Ventil auf ein Anderes.

- Netzgeführte Schaltung

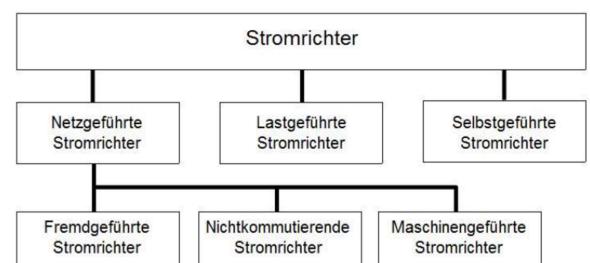
Kommutierungsspannung vom Netzwerk

- Lastgeführte Schaltung

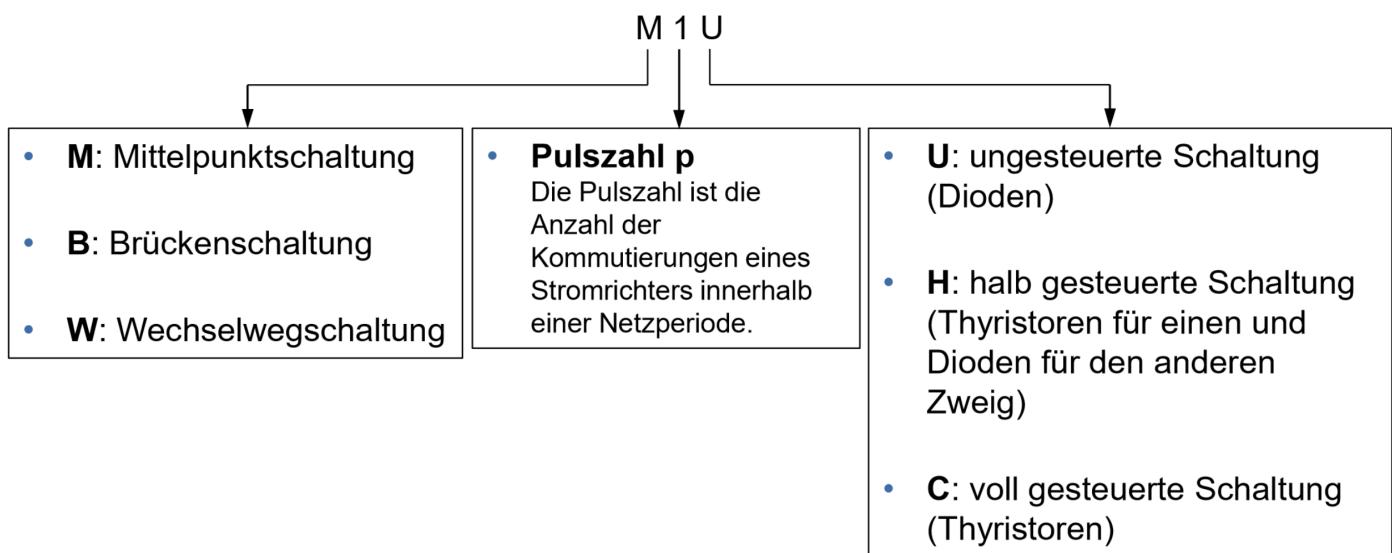
Kommutierungsspannung wird durch Lastkreis (z.B. Synchronmotor) gesteuert

- Selbstgeführte Schaltung

Kommutierungsspannung wird selbst erzeugt



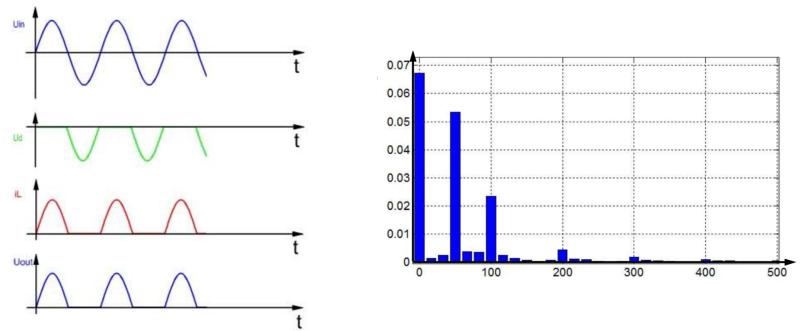
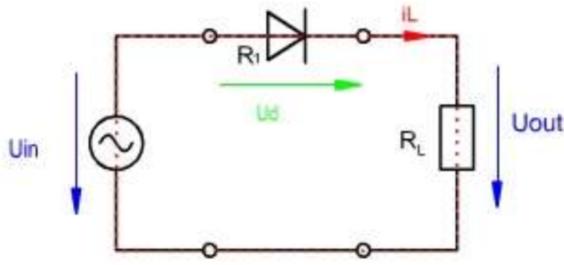
5.2 Kennzeichnung



Gleichrichter WIKI

6 Ungesteuerter Gleichrichter

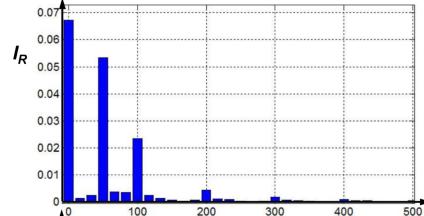
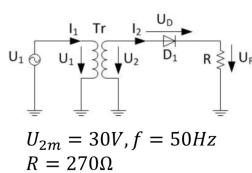
6.1 M1U



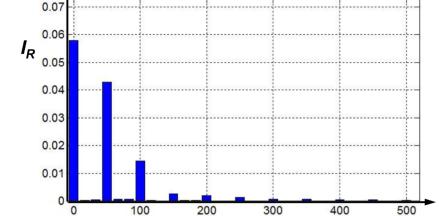
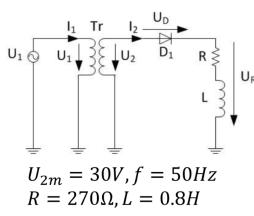
Die Diode wird als ideal betrachtet → keine Schwellenspannung oder Innenwiderstand

Grundgleichungen	$U_2 = U_D + U_R$ $U_R = I_2 \cdot R$ $U_{OUT} = \frac{\hat{U}}{\pi}$	Durchlassrichtung $0 < \omega t < \pi$ $U_2 = U_R \quad U_D = 0$ Sperrichtung $\pi < \omega t < 2\pi$ $U_2 = U_D \quad U_R = 0$
Wirkleistung der Last R	$P = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\alpha) d\alpha = \frac{U_{R RMS}^2}{R}$	

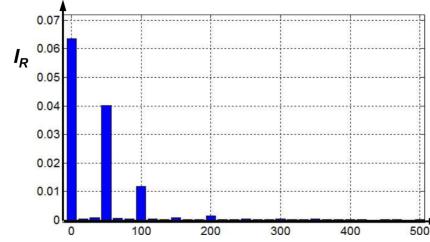
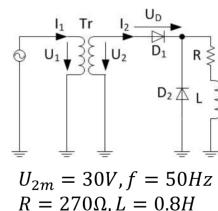
Oberwellen



(a) R



(b) R + L



(c) R + L+ Freilaufdiode

6.1.1 Rechnungsbeispiel

Übung 2 - Gleichrichter M1U

Ausgangslage:

$$U_2 = U_{2m} \cdot \sin(2\pi f t)$$

Mittelwert Spannung:

$$U_{R AV} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} U_{2m} \cdot \sin(\alpha) d\alpha = \frac{U_{2m}}{\pi} \quad \alpha = \omega t$$

Effektivwert Spannung:

$$U_{R RMS} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} U_{2m}^2 \cdot \sin(\alpha)^2 d\alpha} = \frac{U_{2m}}{2}$$

Mittelwert Strom:

$$I_{R AV} = \frac{U_{R AV}}{R_L} = \frac{1}{\pi} \frac{U_{2m}}{R} = \frac{1}{\pi} I_{2m}$$

Effektivwert Strom:

$$I_{R RMS} = \frac{U_{R RMS}}{R} = \frac{U_{2m}}{2R} = \frac{I_{2m}}{2}$$

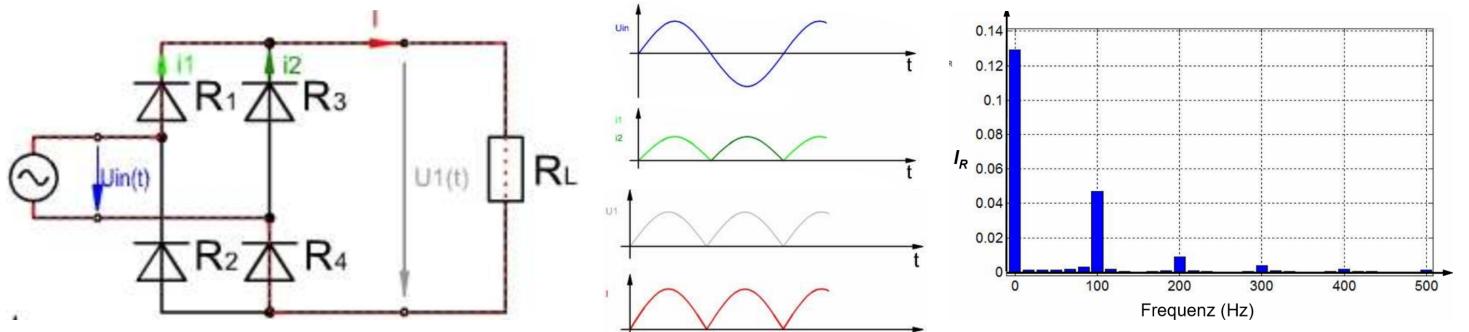
Wirkleistung R:

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{u_R^2(\alpha)}{R} d\alpha = \frac{U_{R RMS}^2}{R} = \frac{1}{R} \frac{U_{2m}^2}{4}$$

Wirkleistung Sekundärseite:

$$P_2 = U_2 \cdot (I_2)_1 \cdot \cos(\varphi)_1 = \frac{U_{2m}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{b_1}{\sqrt{2} \cdot R}$$

6.2 B2U



Im Gegensatz zur M1U-Schaltung wird hier die negative Netzspannung zur Gleichrichtung genutzt.
Die Schaltung wird oft mit Glättungskondensatoren betrieben.

Grundgleichungen

$$\bar{U}_{OUT} = \frac{2\hat{U}}{\pi}$$

6.2.1 Rechnungsbeispiel

Übung 3 - Gleichrichter B2U

Ausgangslage:

$$U_2 = U_{2m} \cdot \sin(2\pi ft)$$

Mittelwert Spannung:

$$U_{R\text{ AV}} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} U_{2m} \cdot \sin(\alpha) d\alpha = \frac{2 \cdot U_{2m}}{\pi} \quad \alpha = \omega t$$

Effektivwert Spannung:

$$U_{R\text{ RMS}} = \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} U_{2m}^2 \cdot \sin(\alpha)^2 d\alpha} = \frac{U_{2m}}{\sqrt{2}}$$

Mittelwert Strom:

$$I_{R\text{ AV}} = \frac{U_{R\text{ AV}}}{R_L} = \frac{2}{\pi} \frac{U_{2m}}{R} = \frac{2}{\pi} I_{2m}$$

Effektivwert Strom:

$$I_{R\text{ RMS}} = \frac{U_{R\text{ RMS}}}{R} = \frac{U_{2m}}{\sqrt{2} \cdot R} = \frac{I_{2m}}{\sqrt{2}}$$

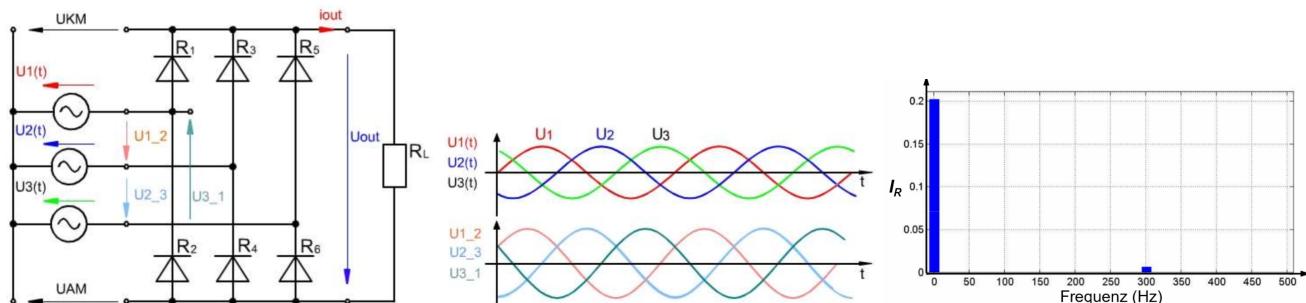
Wirkleistung R:

$$P = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{U_R^2(\alpha)}{R} d\alpha = \frac{U_{R\text{ RMS}}^2}{R} = \frac{1}{R} \frac{U_{2m}^2}{2}$$

Wirkleistung Sekundärseite:

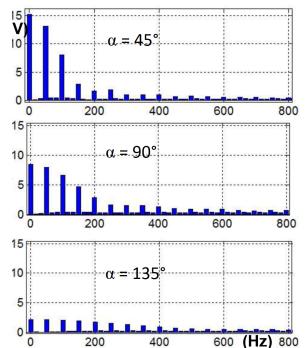
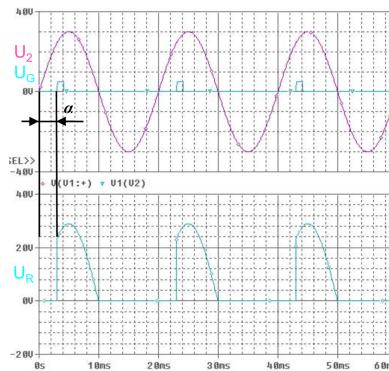
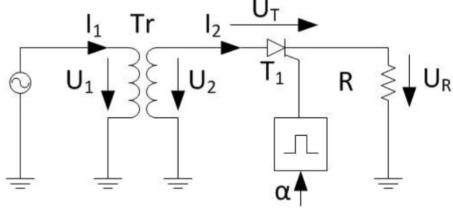
$$P_2 = U_2 \cdot I_2 = U_2 \cdot \frac{U_2}{R} = U_2 \cdot \frac{U_{2m}}{\sqrt{2}R}$$

6.3 B6U



7 Gesteuerter Gleichrichter

7.1 M1C



Mittelwert

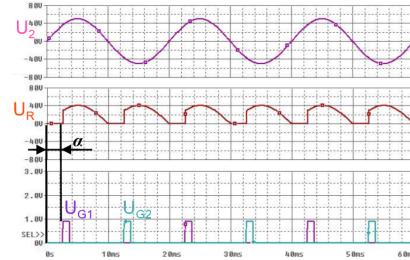
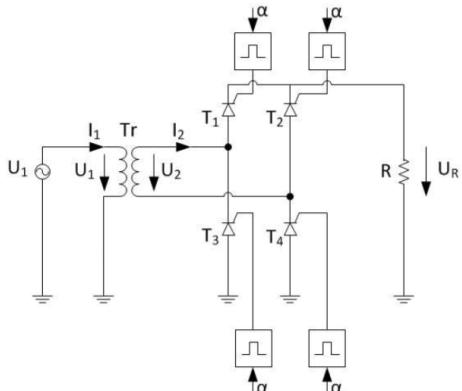
$$\bar{U}_{OUT} = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\pi} \hat{U}_2 \cdot \sin(\beta) d\beta = \frac{\hat{U}_2}{2\pi} (1 + \cos(\alpha))$$

$$\beta = \omega t$$

Effektivwert

$$U_{R RMS} = \sqrt{\frac{U_{2m}^2}{2\pi} \cdot \int_{\alpha}^{\pi} \sin(\beta)^2 d\beta} = U_{2m} \cdot \sqrt{\frac{\pi-\alpha}{4\pi} + \frac{\sin(2\alpha)}{8\pi}}$$

7.2 B2C



7.2.1 Rechnungsbeispiel

Mittelwert:

$$U_{R AV} = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\pi} U_{2m} \cdot \sin(\beta) d\beta = \frac{U_{2m}}{\pi} (1 + \cos(\alpha))$$

$$\beta = \omega t$$

Effektivwert:

$$U_{R RMS} = \sqrt{\frac{2U_{2m}^2}{T} \cdot \int_{\alpha}^{T/2} \sin^2(\frac{2\pi}{T}t) dt} \\ = \sqrt{\frac{U_{2m}^2}{\pi} \cdot \int_{\alpha}^{\pi} \sin(\beta)^2 d\beta} = U_{2m} \cdot \sqrt{\frac{\pi-\alpha}{2\pi} + \frac{\sin(2\alpha)}{4\pi}}$$

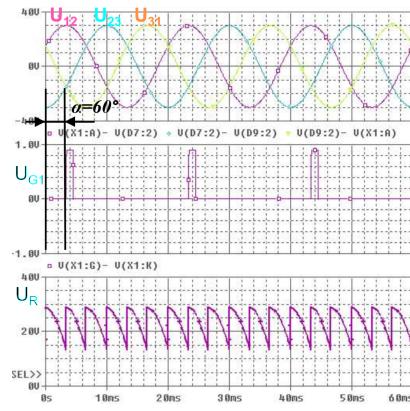
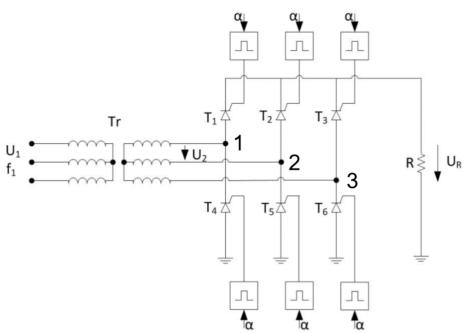
$$\beta = X \cdot t \rightarrow d\beta = X \cdot dt$$

Übung 5 - Gesteuerte Gleichrichter B2C mit Fremderregte GSM Siehe FS ElMasch

α = Anschnitt-Winkel

β = Abschnitt-Winkel durch Induzierte Spg.

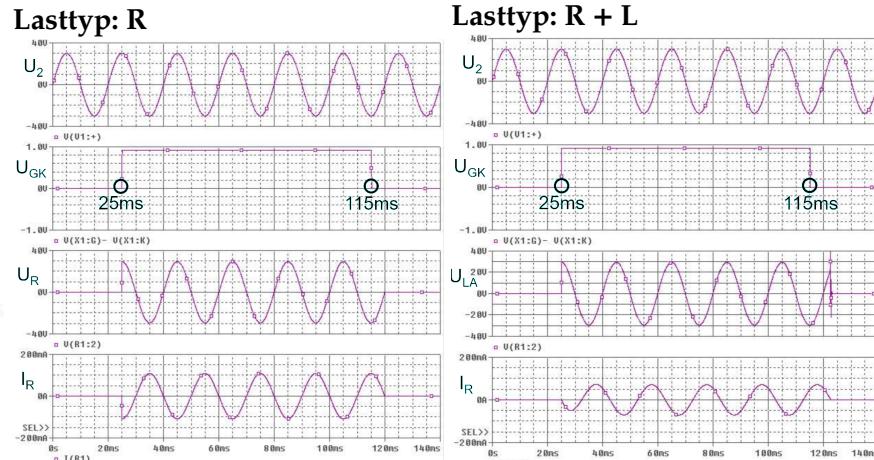
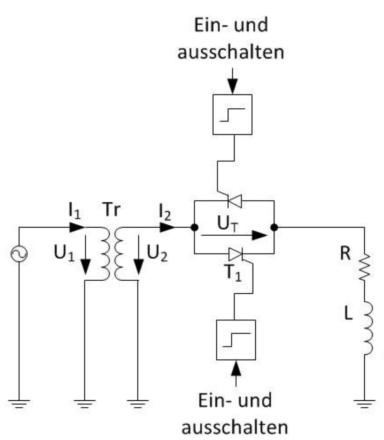
7.3 B6C



7.4 Wechselstromschalter/Wechselstromsteller

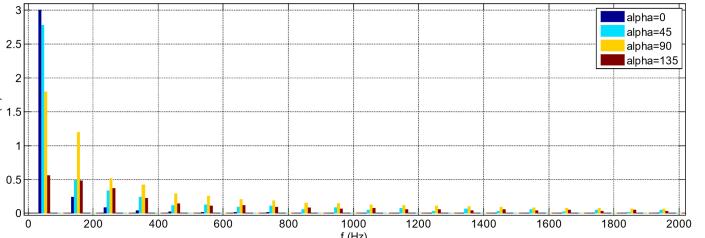
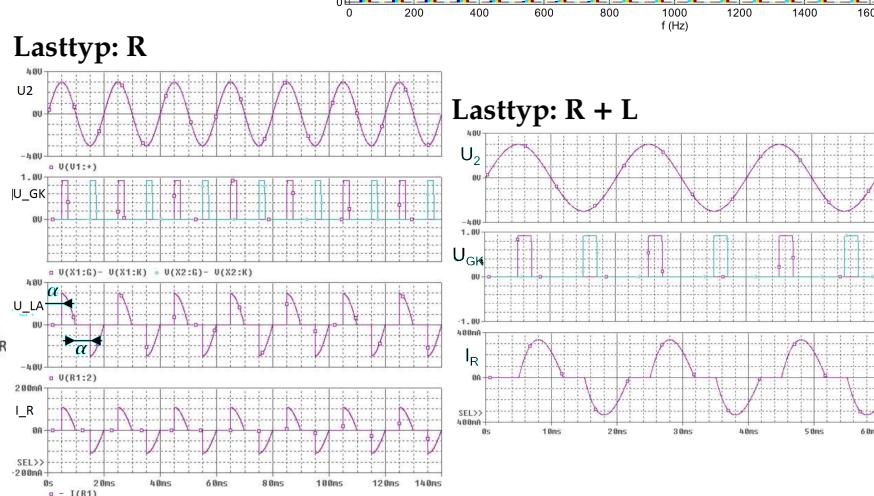
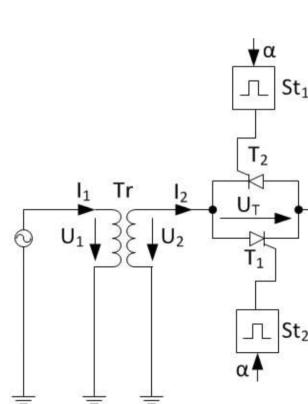
7.4.1 Wechselstromschalter

Wegen dem Polaritätswechsel besteht der Wechselstromschalter aus zwei antiparallelen Thyristoren, welche die Stromhalbschwingung abwechselnd ausführen.



7.4.2 Wechselstromsteller

Im Vergleich mit den Wechselstromschaltern, welche einmaliges Ein- oder Ausschalten von Wechselstromkreisen ermöglichen, erlaubt der Wechselstromsteller in jeder Halbperiode wiederholtes Einschalten, wobei der Strom vom Zündzeitpunkt bis zum Nulldurchgang fließt.



7.4.3 Rechnungsbsp

Übung 4 Wechselstromsteller mit ohmscher Last

Mittelwert

$$U_{R\text{RAV}} = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\pi} U_{2m} \cdot \sin(\beta) d\beta + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi+\alpha}^{2\pi} U_{2m} \cdot \sin(\beta) d\beta = 0 \quad \beta = \omega t$$

Effektivwert

$$U_{R\text{RMS}} = \sqrt{\frac{U_{2m}^2}{2\pi} \left(\int_{\alpha}^{\pi} \sin^2(\beta) d\beta + \int_{\pi+\alpha}^{2\pi} \sin^2(\beta) d\beta \right)} = \sqrt{\frac{U_{2m}^2}{\pi} \int_{\alpha}^{2\pi} \sin^2(\beta) d\beta} = U_{2m} \sqrt{\frac{\pi-\alpha}{2\pi} + \frac{\sin(2\alpha)}{4\pi}} = \frac{U_{2m}}{\sqrt{2}}$$

Wirkleistung

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_R(\beta) \cdot i_2(\beta) d\beta = \frac{U_{R\text{RMS}}^2}{R}$$

$$= \frac{U_{2m}^2}{2\pi R} (\pi - \alpha + \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha))$$

8 Gleichstromumrichter

Ein Gleichstromumrichter dient zur Änderung von: **Polarität, Spannung, Strom.**

$$\tau = \frac{L_1}{R_1} \quad T_s = T_{on} + T_{off}$$

8.1 Buck-Converter

Tiefsetzsteller (Buck-Converter) $U_a < U_e$

Übung 6 Gleichstrom Umrichter → Buck-Converter

$$\text{DutyCycle } D = \frac{V_{out}}{V_1} \quad T_{on} = DT_s \quad T_{off} = (1 - D)T_s$$

$$V_1 = i_L \cdot R_1 + L_1 \cdot \frac{di_L}{dt}$$

$$0 < t < T_{on}$$

$$0 = i_L \cdot R_1 + L_1 \cdot \frac{di_L}{dt}$$

$$T_{on} < t < T_s$$

$$i_L = \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_1}{R_1} \cdot \frac{e^{-\frac{T_{off}}{\tau}} - 1}{1 - e^{-\frac{T_s}{\tau}}} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$0 < t < T_{on}$$

$$i_L = \frac{V_1}{R_1} \cdot \frac{1 - e^{-\frac{T_{on}}{\tau}}}{1 - e^{-\frac{T_s}{\tau}}} \cdot e^{-\frac{t - T_{on}}{\tau}}$$

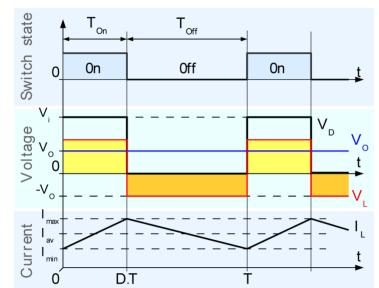
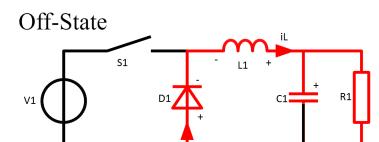
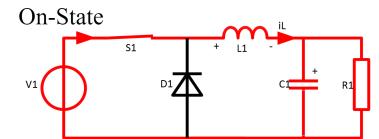
$$T_{on} \leq t \leq T_s$$

$$i_{Lmax} = i_L(T_{on}) \quad i_{Lmin} = i_L(0) = i_L(T_s)$$

$$T_{off} = -\tau \cdot \ln \frac{i_{Lmin}}{i_{Lmax}} = -\frac{L_1}{R_1} \cdot \ln \frac{i_{Lmin}}{i_{Lmax}}$$

$$T_{on} = -\tau \cdot \ln \left(\frac{\frac{1}{i_{Lmax}} \cdot \frac{V_1}{R_1} - 1}{\frac{1}{i_{Lmax}} \cdot \frac{V_1}{R_1} - e^{-\frac{T_{off}}{\tau}}} \right)$$

$$V_{out} = V_{in} \cdot \frac{T_{on}}{T_{on} + T_{off}} - V_D \cdot \frac{T_{off}}{T_{on} + T_{off}} \approx V_{in} \cdot \frac{T_{on}}{T_s}$$



8.1.1 Lückbetrieb

Wenn der Rippel der Amplitude zu hoch ist, wird die Spule komplett entladen bevor die Periode zu Ende ist.

$$T_{off} = T_\delta + T_{off2}$$

$$a' = a(U - \frac{V_1}{V_{out}} - 1)$$

$$\Delta i_2 = \frac{V_1 - V_{out}}{L} \cdot a \cdot T_s$$

$$\Delta i_2 = \frac{V_{out}}{L} \cdot a' \cdot T_s$$

$$\Delta i_{2max} = \frac{T_s \cdot V_1}{4L}$$

$$\bar{i}_2 = \frac{\Delta i_2}{2} a \frac{V_1}{V_{out}} = a^2 \frac{T_s V_1}{2L} \frac{V_1 - V_{out}}{V_{out}}$$

$$V_{out} = V_1 \frac{1}{\frac{2L \cdot I_0}{D^2 \cdot V_1 \cdot T_s} + 1}$$

$$T_\delta = \text{Diode leitet}$$

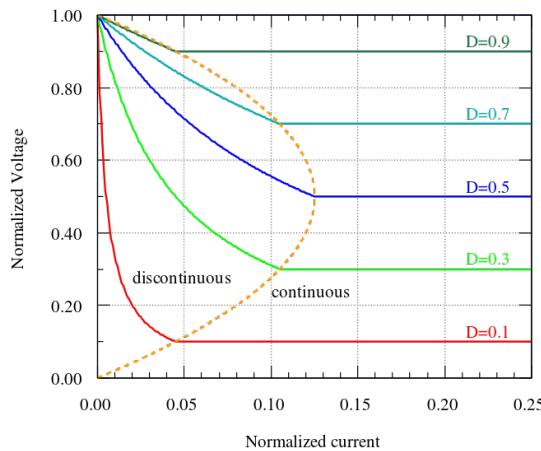
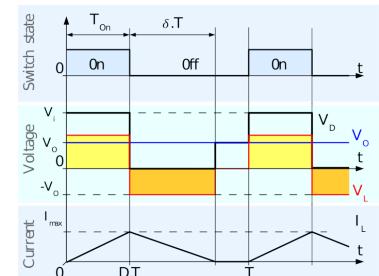
$$T_{off2} = \text{Diode sperrt}$$

$$a = \frac{T_{on}}{T_s} \quad a' = \frac{T_\delta}{T_s}$$

$$0 < t < T_{on} \text{ steigend}$$

$$T_{on} < t < T_\delta \text{ fallend}$$

$$\text{für } a = \frac{1}{2}$$



ohne Lücken

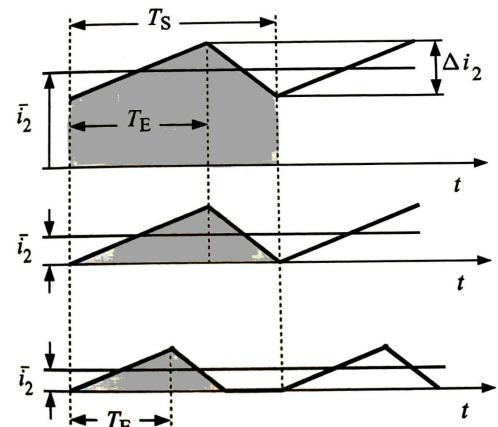
$$\bar{i}_2 > \frac{\Delta i_2}{2}$$

Lückgrenze

$$\bar{i}_2 = \frac{\Delta i_2}{2}$$

Lückbetrieb, T_E für U_2 angepasst

$$\bar{i}_2 < \frac{\Delta i_2}{2}$$



8.2 Boost-Converter

Hochsetzsteller (Boost-Converter) $U_a > U_e$
 $D = 1 - \frac{V_1}{V_{out}}$

$$V_{Out} = V_{in} \cdot \left(1 + \frac{T_{on}}{T_{off}}\right)$$

$$\Delta i_L = \frac{U_0}{L} \cdot T_E = -\frac{U_0 U_d}{L} \cdot (T - T_E)$$

$$u_L = U_0 - R_L i_L$$

$$0 < t < T_{on}$$

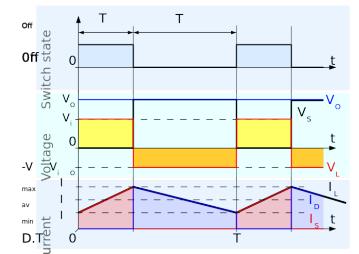
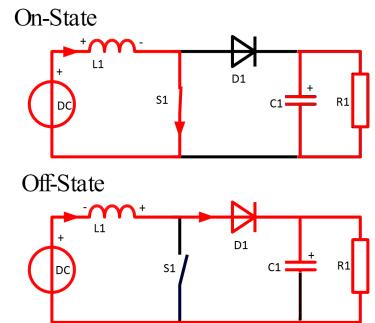
$$u_L = U_0 - R_L i_L - V_{out}$$

$$T_{on} < t < T_s$$

$$\bar{u}_L = \frac{1}{T_s} \int_0^{T_{on}} (U_0 - R_L i_L) dt + \frac{1}{T_s} \int_{T_{on}}^{T_s} (U_0 - R_L i_L) dt$$

$$a = \frac{T_{on}}{T_s}$$

$$\eta(a) = \frac{1}{1 + \frac{R_L}{R_1} \frac{1}{(1-a)^2}}$$



8.2.1 Lückbetrieb

todo

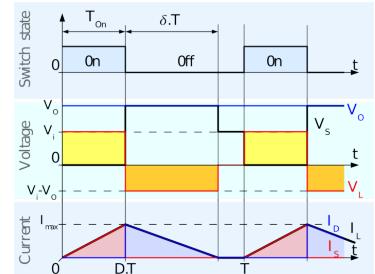
$$I_{L Max} = \frac{V_{in} \cdot T_s \cdot D}{L}$$

$$I_{L Max} + \frac{V_{in} - V_{out} \cdot T_\delta}{L} = 0$$

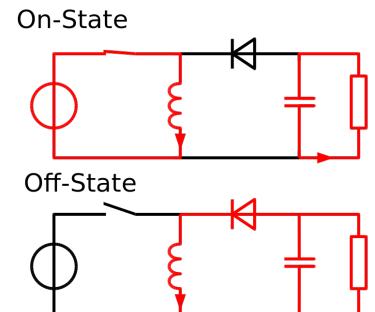
$$I_{out} = \frac{V_{in}^2 \cdot D^2 \cdot T_s}{2L(V_{out} - V_{in})}$$

$$0 < t < T_{on}$$

$$T_{on} < t < T_\delta$$

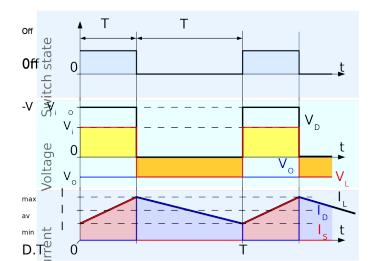


8.3 Inverse-Converter



Inverswandler, Umkehrung der Polarität

$$V_{out} = -L \cdot \frac{\Delta I_L}{\Delta t} \stackrel{\text{eingeschwungen}}{\approx} V_L \cdot \frac{T_{on}}{T_{off}}$$

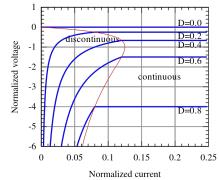


8.3.1 Lückbetrieb

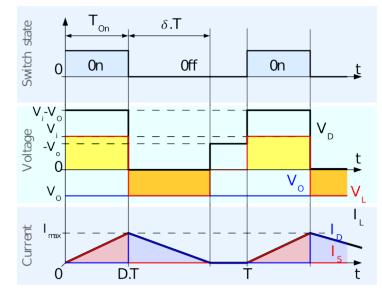
$$D = \frac{V_{off}}{V_{off} + V_{on}}$$

todo

$$I_{L Max} = \frac{V_{in} \cdot T_s \cdot D}{L}$$



$$0 < t < T_{on}$$



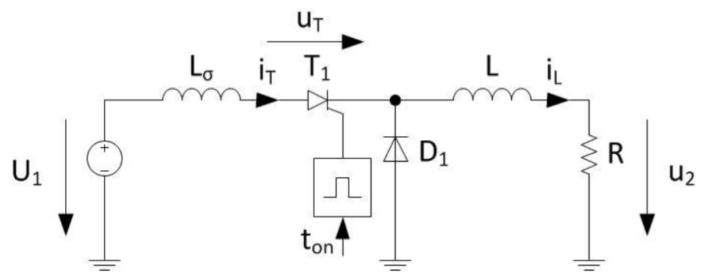
8.4 Gleichstromschalter/Gleichstromsteller

8.4.1 Gleichstromschalter

Nur Einschalten

$$U_1 = (L + L_\sigma) \cdot \frac{di_L}{dt} + R \cdot i_L$$

$$i_L(t) = \frac{U_1}{R} \cdot (1 - e^{-\frac{t-t_{on}}{\tau}})$$



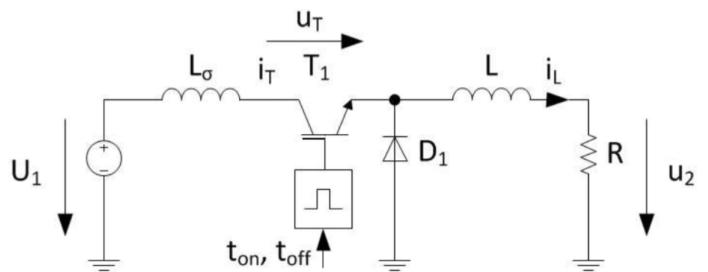
Ein- und Ausschalten

$$U_1 = (L + L_\sigma) \cdot \frac{di_L}{dt} + R \cdot i_L \quad t_{on} \leq t \leq t_{off}$$

$$0 = L \cdot \frac{di_L}{dt} + R \cdot i_L \quad t_{off} \leq t$$

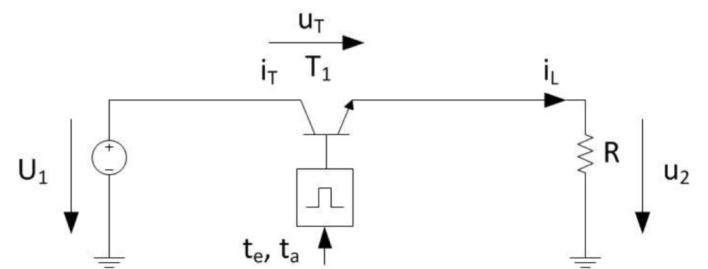
$$i_L(t) = \frac{U_1}{R} \cdot (1 - e^{-\frac{t-t_{on}}{\tau}}) \quad t_{on} \leq t \leq t_{off}$$

$$i_L(t) = \frac{U_1}{R} \cdot e^{-\frac{t-t_{off}}{\tau}} \quad t_{off} \leq t$$

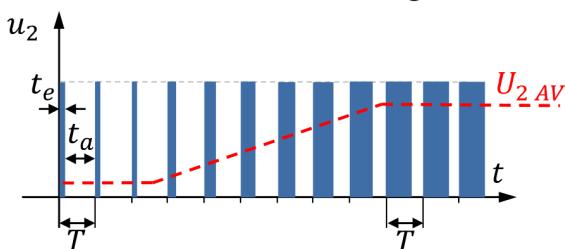


8.4.2 Gleichstromsteller

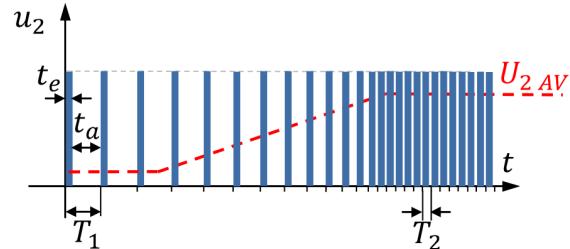
$$U_{2AV} = \frac{1}{t_{on} + t_{off}} \int_0^{t_e} U_1 \cdot dt = \frac{t_{on}}{t_{on} + t_{off}} U_1$$



Pulsbreitensteuerung:



Frequenzsteuerung:



Ein-Quadranten-Betrieb

$$U_{m2} = \frac{T_E}{T} \cdot U_D = F_p \cdot T_E \cdot U_D$$

$$\Delta i_2 = 2\alpha \frac{U_D}{L} T_E \left(1 - \frac{T_E}{T}\right)$$

$$P = U_D I_{m2} \frac{T_E}{T}$$

$$U_{ac2} = \sqrt{U_2^2 - U_{m2}^2} = U_D \sqrt{\frac{T_E}{T} \left(1 - \frac{T_E}{T}\right)}$$

U_{m2} = Mittelwert Ausgangsspg.

T_E = Einschaltzeit

T = Periodendauer

U_D = Zwischenkreisspg.

f_q = Freq

$\alpha = 0.5$ 1Q-Betrieb

$\alpha = 1$ MehrQ-Betrieb

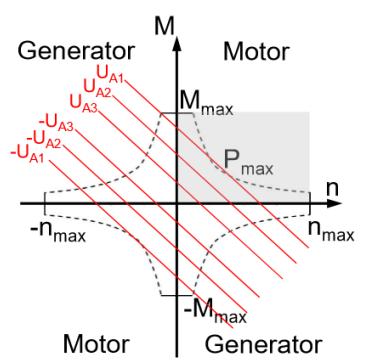
i_2 = Ausgangstrom

i_{m2} = Mittelwert Ausgangsstr.

L = ind. der Last

P = Ausgangsleistung

U_{ac2} = Wechselstromkomponente von U ist maximal bei Tastgrad 50%



9 Wechselrichter

9.1 Einphasig

Amplitudenmodulation

Um die Amplitude der Ausgangsspannung stufenlos zu verstetigen, verwendet man die **Pulsbreitenmodulation PWM**.

Ist die Taktzahl ein ganzzahliges Vielfaches der Grundfrequenz, so spricht man von einer synchronen Taktung, ansonsten von einer asynchronen. Bei asynchroner Taktung treten Schwebungen der Grundfrequenz auf $f_s = f_1 \pm f_T$, welche zusätzliche Verluste erzeugen. Spätestens wenn die Taktfrequenz nur noch 10 mal höher als die Grundfrequenz ist muss auf synchrone Taktung umgestellt werden.

Schalt- oder Taktzahl

$$q = \frac{f_s}{f_1}$$

Schwebefrequenz

$$f_s = f_1 \pm f_T$$

Signalmodulation

Durch die PWM sind die Ausgangssignale rechteckförmig. Um Motoren optimal anzusteueren braucht es sinusförmige Signale.

Modulation

$$m = M \cdot \sin(\omega_1 \cdot t_1 \cdot \varphi_m)$$

m = Modulationsfunktion

M = Modulationsgrad

φ_m = Phasenverschiebung der Grundfreq.

ω_1 = Kreisfreq der Grundfreq f_1

$$M = \frac{\hat{u}_{U0,1}}{\frac{U_D}{2}} = \frac{\hat{u}_{U0,1}}{u_{U0,1}}$$

Aussteuerungsgrad

$$A = \frac{\hat{u}_{U0,1}}{\frac{2}{\pi} U_D \sqrt{3}}$$

$$0 \leq A \leq 1$$

$$A_{max} = \frac{\pi}{4}$$

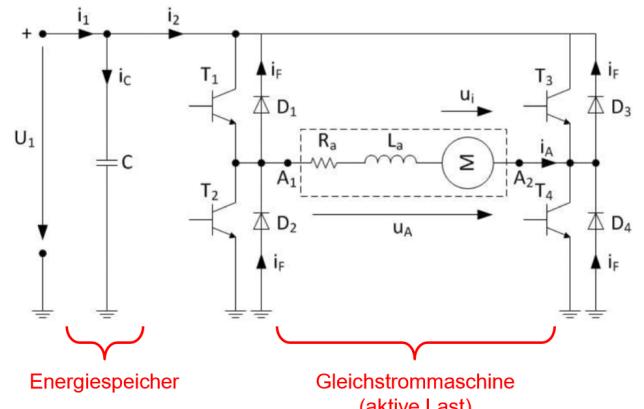
Übung 7 Einphasiger Wechselrichter

$$\tau = \frac{L}{R} \quad T = \frac{1}{f} \quad dt = \frac{T}{N-1}$$

Schaltzeitpunkte

$$t_e(i) = (i-1) \cdot dt$$

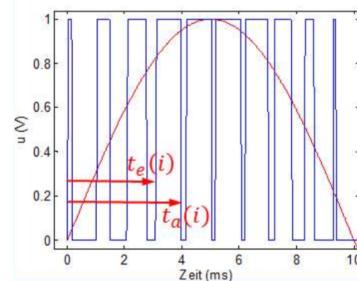
$$t_a(i) = t_e(i) + k \cdot dt \cdot |\sin(\omega \cdot t_e(i))|$$



Laststrom

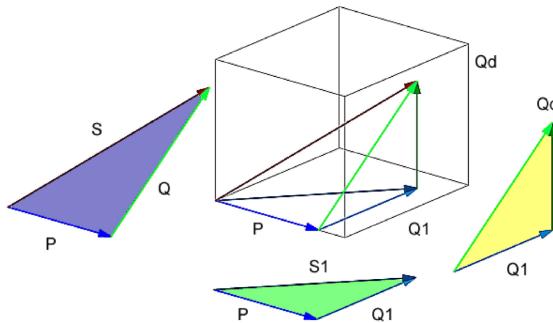
$$i_L(t) = \frac{U_1}{R} \cdot \left(1 - e^{\frac{t-t_e}{\tau}}\right) + i_L(t_{ei}) \cdot e^{\frac{t-t_e}{\tau}} \quad t \in [t_{ei}, t_{ai}]$$

$$i_L(t) = i_L(t_{ai}) \cdot e^{\frac{t-t_{ai}}{\tau}} \quad t \in [t_{ai}, t_{ei+1}]$$



10 Grundformeln

10.1 Leistungen



Verzerrungsblindleistung entsteht, wenn I_1 und U_1 nicht in Phase sind. Wenn Oberwellen von Spannung und Strom die gleichen Frequenzanteile besitzen entsteht keine Verzerrung.

Scheinleistung	$S = U \cdot I = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{P^2 + Q_1^2 + Q_d^2}$	i konjkolpex???? V5S10 vs V7S14
Wirkleistung	$P = U \cdot I_1 \cdot \cos\varphi_1$	
Wirkleistung (Trafoseitig)	$P = U_{RMS} \cdot I_{1 RMS} \cdot \sin(\varphi_1)$	I_1 = erste harmonische Komponente φ_1 = Phasenverschiebung
Blindleistung	$Q = U \cdot I_1 \cdot \sin\varphi_1 = \sqrt{Q_1^2 + Q_d^2}$ $Q_1 = S_1 \cdot \sin\varphi_1$ $Q_d = U \cdot \sqrt{\sum_{m=2}^{\infty} I_m^2} = k \cdot S$	Q_1 = Grundschwingungs-Blindleistung Q_d = Verzerrungsleistung
Grundschwingungs-scheinleistung	$S_1 = U_1 \cdot I_1 = \sqrt{P^2 + Q_1^2}$	S_1 = Grundschwingungs-Scheinleistung
Berechnung des Mittelwertes	$X_{AV} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{min}^{2\pi} \hat{X}_m \cdot \sin(\beta) d\beta$	
Berechnung des Gleichwertes	$ X = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$	
Berechnung des Effektivwertes	$X_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt}$	
Effektivwert Oberwellen	$X_{RMS_Oberwellen} = \sqrt{X_{RMS}^2 - X_{AV}^2}$	
Formfaktor	$F = \frac{X_{RMS}}{ X }$	
Klirrfaktor	$k = \frac{\sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} I_k^2}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} I_k^2}}$	
Welligkeit	$w = \frac{X_{RMS_Oberwellen}}{ X_{AV} } = \frac{\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} X_k^2}}{ X_{AV} } = \sqrt{F^2 - 1}$	
Leistungsfaktor	$\lambda = \frac{P}{S} = \frac{I_1}{I} \cos\varphi_1$	

10.2 Fourier

10.2.1 Allgemeine Form

Eine periodische Funktion lässt sich durch eine Reihe von Sinus- und Kosinusfunktionen darstellen.

$$f(t) = \underbrace{\frac{a_0}{2}}_{\text{Gleichanteil}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cdot \cos(k\omega t) + b_k \cdot \sin(k\omega t))}_{\text{Wechselanteil}} = f_{AV} + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{c_k}_{\text{Amplitude der Harmonischen}} \cdot \sin(k\omega t + \varphi_k)$$

Die Koeffizienten der Entwicklung von $f(t)$ sind:

$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt$
$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \cos(k\omega t) dt \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$
$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \sin(k\omega t) dt \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$
$c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$
$\varphi_k = \arctan(\frac{b_k}{a_k})$

10.2.3 Komplexe Darstellung der Fourierreihen

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{jk\omega t}$$

$$c_n = \overline{c_{-n}} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot e^{-jn\omega t} dt$$

10.2.2 Orthogonalitätsbeziehungen

$$\int_0^T \cos(n\omega t) \cdot \cos(m\omega t) dt = \begin{cases} T, & n = m = 0 \\ \frac{T}{2}, & n = m > 0 \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

$$\int_0^T \sin(n\omega t) \cdot \sin(m\omega t) dt = \begin{cases} \frac{T}{2}, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

$$\int_0^T \cos(n\omega t) \cdot \sin(m\omega t) dt = \begin{cases} 0, & n-m = \text{gerade Zahl} \\ \frac{2m}{m^2 - n^2}, & n-m = \text{ungerade Zahl} \end{cases}$$

10.2.4 Umrechnungsformeln

$$c_n = \overline{c_{-n}} = \frac{a_n - jb_n}{2} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots \text{ wobei } b_0 = 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} a_n = 2 \cdot \operatorname{Re}(c_n) \\ b_n = -2 \cdot \operatorname{Im}(c_n) \end{array} \right\} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots, b_0 = 0)$$

10.2.5 Fourierreihe für beliebige Periode

Gegeben: Periodische Funktion f mit Periode L

Reelle Fourierreihe

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos\left(\frac{2\pi}{L}kt\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi}{L}kt\right) \right]$$

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(\alpha) d\alpha$$

$$a_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(\alpha) \cos\left(\frac{2\pi}{L}k\alpha\right) d\alpha$$

$$b_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(\alpha) \sin\left(\frac{2\pi}{L}k\alpha\right) d\alpha$$

10.2.6 Sätze zur Berechnung der Fourerkoeffizienten

Symmetrie

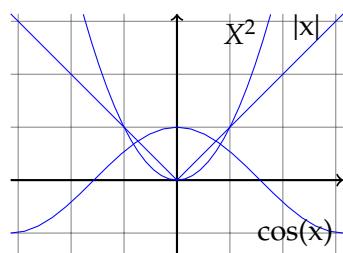
Gerade $f(t) = f(-t)$

Symmetrisch an Y-Achse

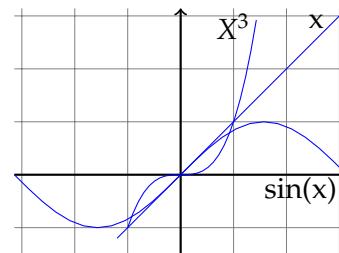
Ungerade $f(-t) = -f(t)$

Punktsymmetrisch am Ursprung

$$b_n = 0, a_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot \cos(n\omega t) dt$$



$$a_n = 0, b_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot \sin(n\omega t) dt$$



11 Lösen von Differentialgleichungen

11.1 Allgemeine Vorgehensweisen

11.1.1 Trennung von Variablen / Separation

Form: $y' = f(x)g(y)$

Vorgehen:

1. DGL umstellen: $\frac{y'}{g(y)} = f(x)$
2. Beidseitig nach x integrieren wobei $dx = \frac{dy}{y'}$
3. Grenzen anpassen: $\int_{y_0=y(x_0)}^y \frac{1}{g(y)} dy = \int_x^{x_0} f(x) dx$

11.1.2 Lineartermsubstitution

Form: $y' = f(ax + by + c)$

Vorgehen:

1. Substitution: $z = ax + by + c$
2. Einsetzen in $z' = a + bf(z)$
3. Separation: $\frac{z'}{f(z)} = a + b$ wobei $z_0 = x_0 + y_0$

11.1.3 Gleichgradigkeit

Form: $y' = f(\frac{y}{x})$

Vorgehen:

1. Substitution: $z = \frac{y}{x}$
2. Einsetzen in $z' = \frac{1}{x}(f(z) - z)$
3. Separation: $\frac{z'}{f(z)-z} = \frac{1}{x}$ wobei $z_0 = \frac{y_0}{x_0}$

11.2 Differentialgleichung 1. Ordnung

11.2.1 Konstante Störung $f(x) = A$

1. Homogene Lösung mit $y_h = 0$ berechnen
2. Partikuläre Lösung mit $y_p = B$ (= Konstante) berechnen, indem zeitlich abhängige Terme der DGL ignoriert werden

11.2.2 Sinusförmige Störung $f(x) = (A \cdot \cos \omega x + B \cdot \sin \omega x)$

1. Homogene Lösung mit $y_h = 0$ berechnen
2. Ansatz für Partikuläre Lösung: $y_p = C \cdot \sin(\omega t) + D \cdot \cos(\omega t)$
3. y_p in DGL einsetzen, C und D per Koeffizientenvergleich ermitteln

12 Idiotenseite

12.1 SI-Vorsätze

Symbol	Name	Wert	Binär	Symbol	Name	Wert
da	Deka	10^1		d	Dezi	10^{-1}
h	Hekto	10^2		c	Centi	10^{-2}
k	Kilo	10^3	$2^{10} = 1024$	m	Mili	10^{-3}
M	Mega	10^6	2^{20}	y, μ	Mikro	10^{-6}
G	Giga	10^9	2^{30}	n	Nano	10^{-9}
T	Tera	10^{12}	2^{40}	p	Piko	10^{-12}
P	Peta	10^{15}	2^{50}	f	Femto	10^{-15}

12.2 Funktionswerte für Winkelargumente

deg	rad	sin	cos	tan
0	0	0	1	0
30	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

deg	rad	sin	cos
90	$\frac{\pi}{2}$	1	0
120	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
135	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
150	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

deg	rad	sin	cos
180	π	0	-1
210	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
225	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
240	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$

deg	rad	sin	cos
270	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0
300	$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
315	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
330	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

12.3 Periodizität

$$\cos(a + k \cdot 2\pi) = \cos(a) \quad \sin(a + k \cdot 2\pi) = \sin(a) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

12.4 Quadrantenbeziehungen

$$\sin(-a) = -\sin(a)$$

$$\cos(-a) = \cos(a)$$

$$\sin(\pi - a) = \sin(a)$$

$$\cos(\pi - a) = -\cos(a)$$

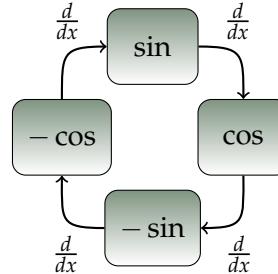
$$\sin(\pi + a) = -\sin(a)$$

$$\cos(\pi + a) = -\cos(a)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos(a)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \sin(a)$$

12.5 Ableitungen



12.6 Additionstheoreme

$$\sin(a \pm b) = \sin(a) \cdot \cos(b) \pm \cos(a) \cdot \sin(b)$$

$$\cos(a \pm b) = \cos(a) \cdot \cos(b) \mp \sin(a) \cdot \sin(b)$$

$$\tan(a \pm b) = \frac{\tan(a) \pm \tan(b)}{1 \mp \tan(a) \cdot \tan(b)}$$

12.7 Doppel- und Halbwinkel

$$\sin(2a) = 2 \sin(a) \cos(a)$$

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2 \cos^2(a) - 1 = 1 - 2 \sin^2(a)$$

$$\cos^2\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1+\cos(a)}{2} \quad \sin^2\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1-\cos(a)}{2}$$

$$\sin(a) \sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a - b) - \cos(a + b))$$

$$\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a - b) + \cos(a + b))$$

$$\sin(a) \cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a - b) + \sin(a + b))$$

12.9 Summe und Differenz

$$\sin(a) + \sin(b) = 2 \cdot \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\sin(a) - \sin(b) = 2 \cdot \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\cos(a) + \cos(b) = 2 \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\cos(a) - \cos(b) = -2 \cdot \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\tan(a) \pm \tan(b) = \frac{\sin(a \pm b)}{\cos(a) \cos(b)}$$

12.8 Euler-Formeln

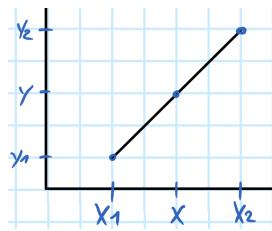
$$\sin(x) = \frac{1}{2j}(e^{jx} - e^{-jx}) \quad \cos(x) = \frac{1}{2}(e^{jx} + e^{-jx})$$

$$e^{x+jy} = e^x \cdot e^{jy} = e^x \cdot (\cos(y) + j \sin(y))$$

$$e^{j\pi} = e^{-j\pi} = -1$$

12.10 Geradengleichung Interpolieren

$$y(x) = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$



12.11 Grad <-> Rad

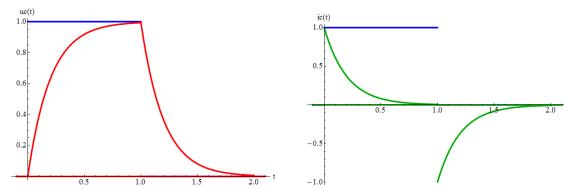
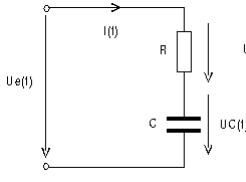
$$\alpha_{rad} = \alpha_{grad} \cdot \frac{\pi}{180}$$

$$\alpha_{grad} = \alpha_{rad} \cdot \frac{180}{\pi}$$

12.12 Einschaltvorgänge

12.12.1 Kondensator

Serieschaltung von Widerstand und Kondensator an einem Rechtecksignal U_e



Ladevorgang:

$$u_C(t) = U_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = U_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{R_C \cdot C}}\right)$$

$$i_C(t) = \frac{U_0}{R_C} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = I_0 \cdot e^{-\frac{t}{R_C \cdot C}}$$

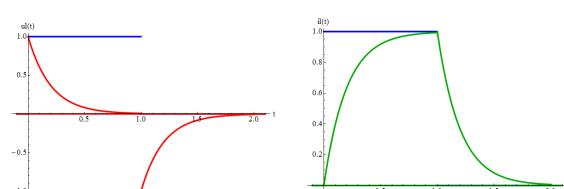
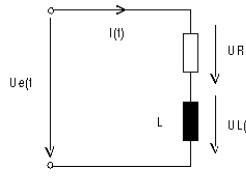
Entladevorgang

$$u_C(t) = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{R_C \cdot C}}$$

$$i_C(t) = -\frac{U_0}{R_C} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = -I_0 \cdot e^{-\frac{t}{R_C \cdot C}}$$

12.12.2 Spule

Serieschaltung von Widerstand und Spule an einem Rechtecksignal U_e



Ladevorgang

$$i_L(t) = I_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = \frac{U_0}{R_L} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t \cdot R_L}{L}}\right)$$

$$u_L(t) = \hat{u} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = \hat{u} \cdot e^{-\frac{t \cdot R_L}{L}}$$

Entladevorgang

$$i_L(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{U_0}{R_L} \cdot e^{-\frac{t \cdot R_L}{L}}$$

$$u_L(t) = -\hat{u} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = -\hat{u} \cdot e^{-\frac{t \cdot R_L}{L}}$$

12.14 Grundelemente

Ohmscher Widerstand R

u und i können sprunghaft ändern

$$u(t) = R \cdot i(t)$$

$$i(t) = \frac{u(t)}{R}$$

$$\underline{Z}_R = R$$

$$P = I^2 \cdot R = \frac{U^2}{R}$$

Kapazität C

u kann nicht sprunghaft ändern

$$u(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau + u(0)$$

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$$

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C}$$

$$X_C = -\frac{1}{\omega C} \quad B_C = \omega C$$

$$Q_C = -U^2 \cdot \omega C = -\frac{I^2}{\omega C}$$

$$W_C = \frac{1}{2} C U_C^2$$

Induktivität L

i kann nicht sprunghaft ändern

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t u(\tau) d\tau + i(0)$$

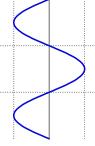
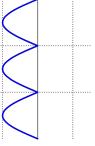
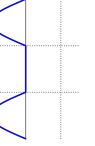
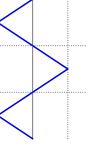
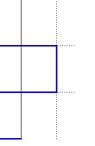
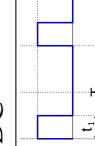
$$\underline{Z}_L = j\omega L$$

$$X_L = \omega L \quad B_L = -\frac{1}{\omega L}$$

$$Q_L = I^2 \cdot \omega L = \frac{U^2}{\omega L}$$

$$W_L = \frac{1}{2} L I_L^2$$

12.13 Eigenschaften unterschiedlicher Schwingungsformen

Schwingungsform	Funktion	Gleichrichtwert	Formfaktor	Effektivwert	Scheitelfaktor	X_0	X^2	$\text{var}(X)$
Formel	$\overline{ x } = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$	$\frac{\overline{X}}{ x }$	$X = \sqrt{\overline{X^2}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x^2(t) dt}$	$k_s = \frac{X_{\max}}{\overline{X}_{\text{eff}}}$				
	$A \cdot \sin(t)$	$\frac{2}{\pi} \approx 0.637$	$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1.11$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$	$\sqrt{2} \approx 1.414$	0	$\frac{A^2}{2}$	$\frac{A^2}{2}$
	$A \cdot \sin(t) $	$\frac{2}{\pi} \approx 0.637$	$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1.11$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$	$\sqrt{2} \approx 1.414$	$\frac{2A}{\pi}$	$\frac{A^2}{2}$	$\frac{A^2}{2} - \frac{4A^2}{\pi^2}$
	$\begin{cases} A \cdot \sin(t) & 0 < t < \pi \\ 0 & \text{True} \end{cases}$	$\frac{1}{\pi} \approx 0.318$	$\frac{\pi}{2} \approx 1.571$	$\frac{1}{2} = 0.5$	2	$\frac{A}{\pi}$	$\frac{A^2}{4}$	$\frac{A^2}{4} - \frac{A^2}{\pi^2}$
	$A \cdot \Lambda(t)$	$\frac{1}{2} = 0.5$	$\frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1.155$	$\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.557$	$\sqrt{3} \approx 1.732$	0	$\frac{A^2}{3}$	$\frac{A^2}{3}$
	$\begin{cases} A & 0 < x < t \\ 0 & \text{True} \end{cases}$	1	1	1	1	0	A^2	A^2
DC	1	1	1	1	1	-	-	-
		$\frac{t_1}{T}$	$\sqrt{\frac{T}{t_1}}$	$\sqrt{\frac{t_1}{T}}$	$A \frac{t}{T}$	$A^2 \frac{t}{T}$	$\frac{A^2 t^2}{T} - \frac{A^2 t^2}{T^2}$	