1 Lineare Gleichungssysteme

1.1 mehere Gleichungssysteme simultan lösen

Wenn bei unterschiedlichen Lösungen immer das Gleiche auf der linken Seite steht, kann man mehrere LGS simultan lösen. Beim Lösen der Gleichungssysteme findet immer der gleiche Vorgang statt.
Daher können alle Lösungen bzw. Spalten gleich in die Gauss-Tableau mit integriert werden.

Vorgehen:

- Für jede Gleichung die Lösungen bzw. Spalten auf der rechten Seite einfügen.
  - Zum Beispiel 3x3 Matrix links und 3 Spalten.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \rightarrow^{Gauss} \rightarrow \begin{array}{|ccc|ccc|} \hline x_1 & x_2 & x_3 & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline 1 & 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 1 & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & 1 & b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ \hline \end{array}$$

1.2 lineare Abhängigkeit

Koeffizienten: $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \left.\vphantom{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}\right\} \begin{array}{l} l_1 = x + 4y \\ l_2 = 2x + 8y \end{array}$

Bestimmung λ_i: $\lambda_1 l_1 = \lambda_1(x+4y) = \lambda_1 x + \lambda_1 4y$
$\lambda_2 l_2 = \lambda_2(2x+8y) = \lambda_2 2x + \lambda_2 8y$

Def.: Wenn $\lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2 = 0$, alle $\lambda_i = 0$ dann ist es linear **unabhängig** (= regulär).

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{array}{|cc|c|} \hline 1 & 2 & 0 \\ 4 & 8 & 0 \\ \hline \end{array} \rightarrow^{Gauss} \rightarrow \begin{array}{|cc|c|} \hline 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

somit ist $\lambda_1 = -2\lambda_2 \rightarrow$ nicht alle $\lambda_i = 0 \Rightarrow$ lin. abhängig.

Falls A lin. unabhängig

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{array}{|cc|c|} \hline 3 & 2 & 0 \\ -6 & 4 & 0 \\ \hline \end{array} \rightarrow^{Gauss} \rightarrow \begin{array}{|cc|c|} \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

somit ist $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0 \Rightarrow$ lin. unabhängig.

Die Linieare Abhängigkeit kann geprüft werden, indem man bei einer Matrix den Gauss durchführt. Entsteht dabei eine **leer Zeile** so ist es **linear abhängig** (= singulär).
Sind **zwei gleiche** Zeilen- bzw. Spaltenvektoren in einer Matrix, so ist sie ebenfalls **linear abhängig**.
Für eine linear abhänige Matrix gilt: **det(A)=0**

1.3 Bezeichnung von Matrizen und Vektoren

1.3.1 Vektoren

Zeilenvektor: $v = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$

Spaltenvektor: $v = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

Nullvektor: $v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

Einheitsvektor: $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ $\quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

1.3.2 Matrizen

Einheitsmatrix: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Inverse Matrix: A^{-1} $\quad \begin{array}{|c|c|} \hline A & E \\ \hline \end{array} \rightarrow^{Gauss} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline E & A^{-1} \\ \hline \end{array}$

Transponierte Matrix: A^T $\quad$ Zeilen und Spalten von A vertauschen

1.4 Rang

Maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilen (oder linear unabhängige Spalten).

1.5 Homogen, Inhomogen

$Ax = b$ inhomogen $\quad Ax = 0$ homogen $\rightarrow b = 0$

$$\text{regulär} \begin{cases} \text{homogen} \rightarrow \text{Nulllösung } x = 0 \\ \text{inhomogen} \rightarrow \text{genau } \underline{\text{eine}} \text{ Lösung} \end{cases}$$

$$\text{singulär} \begin{cases} \text{homogen } Ax = 0, b_1 = 0, b_2 = 0 \rightarrow \infty - \text{viele Lösungen} \\ \text{inhomogen } Ax = b \begin{cases} b_1 \neq 0, b_2 \neq 0 \rightarrow \text{ keine Lösung} \\ b_1 \neq 0, b_2 = 0 \rightarrow \infty - \text{viele Lösungen} \end{cases} \end{cases}$$

E	$*$	b_1
0	0	b_2

Lösungsmenge eines inhomogenen Gleichungssystems mit ∞-vielen Lösungen

$$\mathbb{L} = \{ \begin{pmatrix} 1+5z \\ 2-3z \\ z \end{pmatrix} \backslash z \in \mathbb{R} \}$$

$$\rightarrow^{Gauss} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} x = 1 + 5z \\ y = 2 - 3z \\ z = z \end{array} \Rightarrow \mathbb{L} = \{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{x_p} \underbrace{+ z \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbb{L}_h} \backslash z \in \mathbb{R} \}$$

$$\mathbb{L} = \{x_p + x_h \backslash x_h \in \mathbb{L}_h\}$$

$\mathbb{L}_h$ ist eine Gerade, Ebene... durch den Nullpunkt.

2 Determinante

2.1 Definition einer Determinante

1. $det(A)$ ändert sich nicht unter der Operation E bzw. *blauen* Operation.
2. Wird eine Zeile von A mit λ multipliziert, wird auch $det(A)$ mit λ multipliziert: $det(\lambda A) = \lambda^{AnzahlZeilen/Spalten} det(A)$
3. $det(E) = 1$

2.2 Eigenschaften der Determinante

- Hat A eine Nullzeile/Nullspalte, dann ist $det(A) = 0$
- Hat A <u>zwei gleiche</u> Zeilen/Spalten, dann ist $det(A) = 0$
- Ist A regulär $\Leftrightarrow det(A) \neq 0$
  Ist A singulär $\Leftrightarrow det(A) = 0$
- Vertauscht man zwei Zeilen/Spalten, dann ändert sich das Vorzeichen der Determinante.
- Beschreibt eine Fläche eines Parallelogrammes (2D) bzw. ein Volumen eines Parallelepipeds (3D).
- Kann nur ermittelt werden, wenn die Matrix exkl. Lösungen quadratisch ist.

2.3 Gauss-Verfahren

Um die Determinante mit dem Gauss-Verfahren zu bestimmen werden die rot umkreiste Pivot-Elemente herausgenommen und miteinander multipliziert.

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 5 \end{vmatrix} \rightarrow 2 * \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 5 \end{vmatrix} \rightarrow 2 * \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -9 \end{vmatrix} \rightarrow 2 * 1 * \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -7 \end{vmatrix} \rightarrow 2 * 1 * (-7) * 1 * 1 = -14$$

2.4 Entwicklungssatz

1. Zeile/Spalte auswählen (mit möglichst vielen Nullen)
2. 1 Element herausnehmen
3. Zeile und Spalte des herausgenommenen Elements abdecken
4. Element mit der Determinante der nicht abgedeckten Elemente multiplizieren
5. Schritt 2-4 wiederholen und zum 1. Element addieren/subtrahieren (→ siehe Vorzeichen Matrix)

Vorzeichenmatrix:

+	−	+	−
−	+	−	+
+	−	+	−
−	+	−	+

Beispiel: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$

2.5 Wichtige Determinanten

$$det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc \qquad det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \underbrace{aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi}_{Sarrus'scheFormel}$$

2.6 Cramsche Regel

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{det(A)}; \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{det(A)}$$

Inverse Matrix mit Cramer (Minoren): $A^{-1} = C : c_{ik} = \frac{(-1)^{k+i} \cdot det(A_{ki})}{det(A)} \longrightarrow$ 1. Index = Zeile; 2.Index = Spalte

Beispiel 3x3 Matrix: $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \begin{pmatrix} +\underbrace{\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}}_{det(A_{11})} & -\underbrace{\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix}}_{det(A_{21})} & +\underbrace{\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}}_{det(A_{31})} \\ -\underbrace{\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}}_{det(A_{12})} & +\underbrace{\begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix}}_{det(A_{22})} & -\underbrace{\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}}_{det(A_{32})} \\ +\underbrace{\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}}_{det(A_{13})} & -\underbrace{\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix}}_{det(A_{23})} & +\underbrace{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}}_{det(A_{33})} \end{pmatrix}$$

2.7 Spezielle Fälle

$det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = det(A)det(B)$ wobei A und B Matrizen von Grösse $n * n$ sind.

2.8 Produktsatz

$det(C \cdot D) = det(C) \cdot det(D)$

3 Inverse

3.1 Definition einer Inverse

1. Genau wie bei Determinanten gelten die Regeln hier auch.

3.2 Eigenschaften der Inversen

- Genau wie bei Determinanten besitzen Inversen die selben Eigenschaften, wobei einige Ausnahmen bestehen.
- Kann nur ermittelt werden, wenn das gilt: $det(A) \neq 0$.

3.3 Gauss-Verfahren

- Mit dem Gauss-Verfahren kann das Ganze gelöst werden. Dazu schreibt man die Einheitsmatrix rechts neben der Matrix. Nach dem Gausse erhält man links die Einheitsmatrix und rechts die Inverse der Matrix.

$$\underbrace{\begin{array}{|ccc|}\hline 2 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 5 \\ \hline\end{array}}_{A}\underbrace{\begin{array}{ccc|}\hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline\end{array}}_{E} \rightarrow^{Gauss}\rightarrow \underbrace{\begin{array}{|ccc|}\hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline\end{array}}_{E}\underbrace{\begin{array}{ccc|}\hline \frac{23}{14} & \frac{-11}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{-11}{7} & \frac{9}{7} & \frac{-2}{7} \\ \frac{3}{14} & \frac{1}{7} & \frac{-1}{7} \\ \hline\end{array}}_{A^{-1}}$$

3.4 Formeln für 2x2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

4 Vektorgeometrie

4.1 Gerade

Parametergleichung: $g = \{\vec{p_0} + t\vec{r} | t \in \mathbb{R}\}$ $\quad$ $\vec{p_0}$ = Stützvektor, $\vec{r}$ = Richtungsvektor, t = Paramter

4.1.1 Punkt auf Geraden

$$\vec{q} = \vec{p_0} + t\vec{r} \Longrightarrow \begin{array}{|c|c|}\hline r_1 & q_1 - p_{01} \\ \hline r_2 & q_2 - p_{02} \\ \hline\end{array} \rightarrow^{Gauss} \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & * \\ \hline 0 & * \\ \hline\end{array}$$

$* \neq 0 \Rightarrow$ keine Lösung
$* = 0 \Rightarrow t$ eindeutig; t durch erste Gleichung ausrechnen

4.1.2 Schnittgerade

Beide Geraden gleichsetzen und nach t auflösen $\begin{cases} \text{regulär: } t \text{ ist eindeutig} \\ \text{singulär: } \begin{cases} \infty \text{ Lösungen} \rightarrow \text{ Geraden liegen aufeinander} \\ 0 \text{ Lösungen} \rightarrow \text{ Geraden sind parallel} \end{cases} \end{cases}$

4.2 Ebene

Parametergleichung: $\tau = \{\vec{p_0} + t_1\vec{r_1} + t_2\vec{r_2} | t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}$ $\quad$ $\vec{p_0}$ = Stützvektor, $\vec{r_1}, \vec{r_2}$ = Spannvektoren, t_1, t_2 = Paramter

4.2.1 Hessche Normalform

$ax + by + cz - d = 0$ Koordinatengleichung
$\vec{n_0} \bullet (\vec{p} - d) = 0$ $\quad$ $\vec{p}$ = Stützvektor $\quad$ $\vec{p_0}$ = Ortsvektor von Punkt für Abstand
$d = \vec{p_0} \bullet \vec{n_0} = \vec{p_0} \bullet \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$ $\quad$ d = Abstand von Nullpunkt zu Ebene wenn $|\vec{n_o}| = 1$ (Länge/Betrag) ansonsten $\vec{n}$ Normieren $\left(\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}\right)$

4.2.2 Speziallfälle der Koordinatengleichung

$a = 0 \Rightarrow by + cz = d$	Ebene ist parallel zur x-Achse (äguivalent bei b und c)
$a = b = 0 \Rightarrow cz = d$	Ebene ist parallel zur x und y- Koordinatenebene
$d = 0 \Rightarrow ax + by + cz = 0$	Ebene enthält Ursprung 0 des Koordinatensystems

4.2.3 Achsenabschnittgleichung der Ebene

Beispiel: $\tau = 3x + 6y + 4z = 18 \Leftrightarrow \frac{3a+6y+4z}{18} = 1 \Leftrightarrow \frac{3}{18}x + \frac{6}{18}y + \frac{4}{18}z = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{6} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4.5} = 1$
Die Achsenabschnitte der Ebene τ liegen nun bei $x = 6, y = 3, z = 4.5$.
Allgemeine Achsenabschnittgleichung:

$$\frac{x}{p_x} + \frac{y}{p_y} + \frac{z}{p_z} = 1$$

4.3 Kreis und Kugel

Parametergleichung: $K(M, r) = \{(\vec{p} - \vec{m}) \bullet (\vec{p} - \vec{m}) = r^2\}$

$\vec{m}$ = Mittelpunkt
$\vec{p}$ = Punkt am äusseren Rand
r = Radius

$$(\vec{p} - \vec{m})^2 = r^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad (p_1 - m_1)^2 + (p_2 - m_2)^2 + (p_3 - m_3)^2 = r^2$$

Gerade durch den Mittelpunkt: $n_{x0}x + n_{y0}y + e = 0$
Um e zu bestimmen, muss der Mittelpunkt des Kreises in x und y eingesetzt werden. Die Normale wird aus der Geraden gebildet.

4.3.1 Tangentialebene/Tangente

$(\vec{p_0} - \vec{m})(\vec{p} - \vec{p_0}) = 0$	$\vec{p_0}$ = Berührpunkt
$r \cdot (\vec{p} - \vec{p_0}) = 0$	$\vec{p}$ = Punkt auf der Tangente
	$\vec{m}$ = Mittelpunkt des Kreises/Kugel

4.3.2 Schnittprobleme

Durch Einsetzen von $x_1 := b - x_2$ in die Kreisgleichung ergibt sich eine quadratische Gleichung. Eine Gerade bzw. ein Kreis $\left\{\begin{array}{l}\text{meidet}\\ \text{berührt}\\ \text{schneidet}\end{array}\right\}$ einen anderen Kreis, wenn diese Gleichung $\left\{\begin{array}{c}0\\ 1\\ 2\end{array}\right\}$ Lösungen hat. Die Gerade heisst dann $\left\{\begin{array}{l}\text{Passante}\\ \text{Tangente}\\ \text{Sekante}\end{array}\right\}$.
Beim Schneiden zweier Kugeln ergibt sich eine *Potenzebene*, bei zwei Kreisen eine *Potenzgerade* oder *Chordale*.

4.4 Einheitsvektor

Der Einheitsvektor von $\vec{a} \neq 0$ hat die gleiche Richtung wie $\vec{a}$ und den Betrag 1:

$$\vec{a_0} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

4.5 Skalarprodukt

$$\vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$$

4.5.1 Algebraische Eigenschaften des Skalarproduktes

$\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{b} \bullet \vec{a}$	(Kommutativgesetz)
$(\lambda \cdot \vec{a}) \bullet \vec{b} = \lambda \cdot (\vec{a} \bullet \vec{b}) = \vec{a} \bullet (\lambda \cdot \vec{b})$	(gemischtes Assoziativgesetz)
$(\vec{a} + \vec{b}) \bullet \vec{c} = \vec{a} \bullet \vec{c} + \vec{b} \bullet \vec{c}$	(Distributivgesetz)

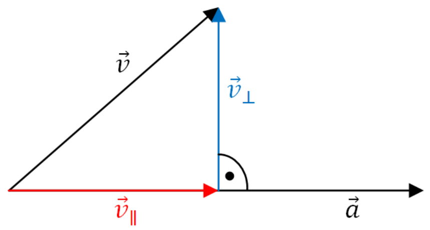
4.5.2 Eigenschafen des Skalarproduktes

1. Länge: $\vec{a} \bullet \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0 = |\vec{a}|^2$

2. Winkel zwischen zwei Vektoren: $\vec{a} \bullet \vec{v} = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} \cdot \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} \cdot \cos\alpha$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \bullet \vec{v}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{\vec{a} \bullet \vec{v}}{\sqrt{\vec{a}^2} \cdot \sqrt{\vec{v}^2}}$$

3. Orthogonalität:



$$P\vec{a}(\vec{v}) = |\vec{v}| \cdot \cos\alpha = \frac{\vec{a} \bullet \vec{v}}{|\vec{a}|}$$

$$v_\parallel = \frac{\vec{a} \bullet \vec{v}}{\vec{a} \cdot \vec{a}} \cdot \vec{a}$$

$$v_\perp = \vec{v} - \frac{\vec{a} \bullet \vec{v}}{\vec{a} \cdot \vec{a}} \cdot \vec{a}$$

4.5.3 Normalengleichung

$$\vec{n} \cdot (\vec{a} - \vec{p}) = 0$$

Der Normalenvektor $\vec{n}$ steht senkrecht zur Geraden oder zur Ebene. Mit seiner Hilfe und einem Punkt P ($0\vec{P} = \vec{p}$) lässt sich die Koordinatengleichung direkt hinschreiben:

$$n_1 x + n_2 y + n_3 z = \vec{n_0} \cdot \vec{p}$$

Umgekehrt lässt sich aus der Koordinatengleichung die Normalengleichung herauslesen.

Beispiel 1: Gegebene Punkte: $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$)

Normale kann mithilfe des Skalarprodukts gefunden werden:

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2n_1 + 2n_2 - 2n_3 \text{ und } \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = 3n_1 - 3n_2 - n_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & -1 & 0 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{-2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{3} & 0 \end{array}\right] \to \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ für } n_3 = 3 \ (n_3 \text{ ist frei wählbar})$$

Beispiel 2: $3x - 2y - z = -4 \to \vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

4.6 Verhalten zweier Objekte

4.6.1 Schnittwinkel

Es wird der spitze Winkel zwischen ... berechnet (g, h sind Geraden; E, F Ebenen; m und n Normalen):

g ∧ h:	$g : \vec{x} = \vec{p} + r\vec{v}$	$h : \vec{x} = \vec{q} + s\vec{w}$	$\alpha = \arccos \frac{\lvert v \bullet w \rvert}{\lvert \vec{v} \rvert \cdot \lvert \vec{w} \rvert}$
g ∧ h:	$g : m_1 x + m_2 y = b$	$h : n_1 x + n_2 y = c$	$\alpha = \arccos \frac{\lvert m \bullet n \rvert}{\lvert \vec{m} \rvert \cdot \lvert \vec{n} \rvert}$
g ∧ E:	$g : \vec{x} = \vec{p} + r\vec{v}$	$E : n_1 x + n_2 y + n_3 z = b$	$\alpha = \arcsin \frac{\lvert v \bullet n \rvert}{\lvert \vec{v} \rvert \cdot \lvert \vec{n} \rvert}$
E ∧ F:	$E : m_1 x + m_2 y + m_3 z = b$	$F : n_1 x + n_2 y + n_3 z = c$	$\alpha = \arccos \frac{\lvert m \bullet n \rvert}{\lvert \vec{m} \rvert \cdot \lvert \vec{n} \rvert}$

4.6.2 Gegenseitige Lage

Es werden jeweils zwei Objekte gleichgesetzt (g, h sind Geraden; E, F Ebenen).

		$g = h$	$g = E$	$E = F$
Keine Lösung	⇒	kollinear oder windschief	parallel	parallel
1 Lösung	⇒	1 Schnittpunkt	1 Schnittpunkt	-
∞ Lösungen (1 Parameter frei wählbar)	⇒	g und h sind identisch	g liegt in E	1 Schnittgerade ($\vec{n}_E \times \vec{n}_F$)
∞ Lösungen (2 Parameter frei wählbar)	⇒	-	-	E und F sind identisch

4.6.3 Lage von Geraden

Es wird das Vektorprodukt von zwei Geraden gebildet (g und h sind Geraden).
Wenn $\vec{g} \times \vec{h} = 0$ dann sind die Geraden parallel, ansonsten sind sie windschief.

4.7 Orthonormalisierung

$\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}$ sind linear unabhängig $\longrightarrow \vec{b_1} \perp \vec{b_2} \perp \vec{b_3}$

$$\vec{b_1} = \frac{\vec{a_1}}{\lvert \vec{a_1} \rvert} \qquad \vec{b_2} = \frac{\vec{a_2} - (\vec{a_2} \bullet \vec{b_1})\vec{b_1}}{\lvert \vec{a_2} - (\vec{a_2} \bullet \vec{b_1})\vec{b_1} \rvert} \qquad \vec{b_3} = \frac{\vec{a_3} - (\vec{a_3} \bullet \vec{b_1})\vec{b_1} - (\vec{a_3} \bullet \vec{b_2})\vec{b_2}}{\lvert \vec{a_3} - (\vec{a_3} \bullet \vec{b_1})\vec{b_1} - (\vec{a_3} \bullet \vec{b_2})\vec{b_2} \rvert}$$

Beispiel: $\vec{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \vec{a_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \vec{a_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\vec{b_1} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right|} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b_2} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right|} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b_3} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4.8 Mittelsenkrechte

$$\vec{M_{AB}} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$$

4.9 Least Squares

$A^tAv = A^tb \longrightarrow$ nach v auflösen und um den kleinsten Abstand zu bekommen. $(Av = b)$
$v = (A^tA)^{-1}A^tb$

4.10 Vektorprodukt/Kreuzprodukt

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Zwischenwinkel: $\sin\alpha = \dfrac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

Mit Hilfe des Vektorproduktes lässt sich der **Normalenvektor** zweier Vektoren bestimmen. Ausserdem entspricht der Betrag des Vektorproduktes dem **Flächeninhalt** des von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms. Somit sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ also kollinear, wenn $\vec{a} \times \vec{b} = 0$. Das Vektorprodukt ist ein **Rechtssystem** ($\vec{a} \Leftrightarrow$ Daumen; $\vec{b} \Leftrightarrow$ Zeigefinger; $\vec{c} \Leftrightarrow$ Mittelfinger). Das Vektorprodukt gilt nur in 3D (im Falle eines 2 dimensionalen Systems gilt einfach $a_3 = b_3 = 0$).

4.10.1 Algebraische Eigenschaften des Vektorproduktes

$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}) = -\vec{b} \times \vec{a}$ (Anti-Kommutativgesetz)
$(r \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = r(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (r \cdot \vec{b})$ (gemischtes Assoziationsgesetz)
$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$
$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ (Distributivgesetz)

4.10.2 Volumen eines Parallelpipeds

$$det(A) = |\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}| = (\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{c} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - c_1b_2a_3 - c_2b_3a_1 - c_3b_1a_2$$

$|\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}| = 0 \Leftrightarrow \vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$ komplanar $|\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}| > 0 \Leftrightarrow \vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$ bilden Rechtssystem $|\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}| < 0 \Leftrightarrow \vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$ bilden Linkssystem

4.10.3 Flächeninhalt eines Dreiecks

$A = \frac{1}{2}|\vec{AB} \times \vec{AC}|$ wobei $\vec{AB}$ und $\vec{AC}$ Richtungsvektoren sind.

4.11 Flächeninhalt Polygon

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & & y_1 \\ & \text{X} & \\ x_2 & & y_2 \\ & \text{X} & \\ x_3 & & y_3 \\ & \text{X} & \\ x_n & & y_n \\ & \text{X} & \\ x_1 & & y_1 \end{vmatrix} \quad \rightarrow \quad A = \frac{1}{2}(x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2 + ... + x_{n-1} \cdot y_n - x_n \cdot y_{n-1} + x_n \cdot y_1 - x_1 \cdot y_n)$$

4.11.1 Anwendung

Abstand Punkt/Ebene, Gerade/Gerade (windschief):

$$d = (\vec{p_1} - \vec{p_2}) \bullet \vec{n_0} = (\vec{p_1} - \vec{p_2}) \bullet \frac{\vec{r_1} \times \vec{r_2}}{|\vec{r_1} \times \vec{r_2}|}$$

Abstand Punkt/Gerade oder Gerade/Gerade (parallel):

$$d = \frac{|\vec{r} \times (\vec{p} - \vec{p_0})|}{|\vec{r}|}$$

5 Vektorräume

5.1 Rechenregeln und Definition

v0:	$a+b=b+a$ $a+(b+c)=(a+b)+c$
v1:	$0\in\mathbb{R}, 0=(0,\dots,0)\qquad v+0=v\qquad \forall v$
v2:	zu $v\in\mathbb{R}^n$ gibt es ein $-v=(-v_1,\dots,-v_n)\qquad$ mit $v+(-v)=0$
v3:	$0\cdot v=0\qquad 1\cdot v=v$
v4:	$\lambda(u+v)=\lambda u+\lambda v$ $(\lambda+\mu)\cdot u=\lambda u+\mu u$ $(\lambda\mu)u=\lambda(\mu u)$

Def.: Eine Menge V mit den Rechenregeln v0-v4 heisst Vektorraum, $v\in V$ heissen Vektoren.

5.2 lineare Approximation

$$\begin{pmatrix} a_0+a_1x_0+a_2{x_0}^2+\ldots+a_n{x_0}^n \\ a_0+a_1x_1+a_2{x_1}^2+\ldots+a_n{x_1}^n \\ \vdots \\ a_0+a_1x_n+a_2{x_n}^2+\ldots+a_n{x_n}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & x_0 & {x_0}^2 & \ldots & {x_0}^n \\ 1 & x_1 & {x_1}^2 & \ldots & {x_1}^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 1 & x_n & {x_n}^2 & \ldots & {x_n}^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

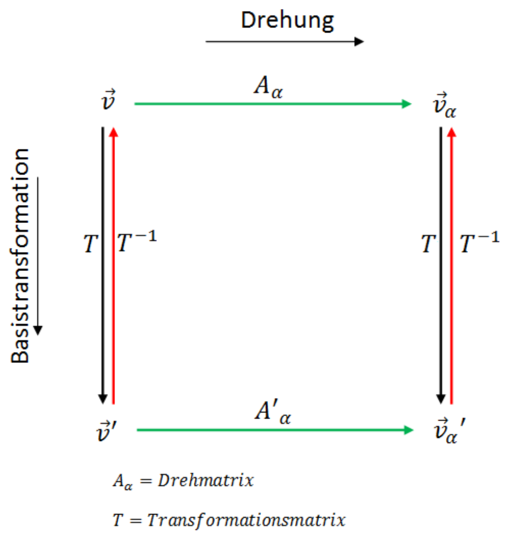
5.3 Spur

Die Spur ist die Summe der Diagonalelemente einer Matrix $Spur(A)=\Sigma a_{ii}$
$Spur(ABC)=Spur(CAB)=Spur(BCA)\rightarrow$ zyklisch vertauschbar

5.4 Basis

Def.: Sei also V ein Vektorraum. Eine Menge $B=\{b_1,b_2,\ldots\}$ linear unabhängiger Vektoren ist eine Basis, wenn jeder Vektor von V als Linearkombination von Vektoren aus B dargestellt werden kann. Ein Vektorraum heisst endlichdimensional, wenn er eine endliche Basis hat.

5.5 Basistransformation



$A'=TAT^{-1}$

$\xi'=T\xi$

$A=$ Matrix in alter Basis
$A'=$ Matrix in neuer Basis
$T=$ Transformationsmatrix
$\xi=$ Vektor in der alten Basis
$\xi'=$ Vektor in der neuen Basis

5.5.1 Bestimmen der Transformationsmatrix T

$B=\underbrace{\{b_j\}}_{alteBasis}\qquad B'=\underbrace{\{b'_j\}}_{neueBasis}$

Variante 1 (mit β):
Mit Gleichungssystem herausfinden, wie viele von der neuen Basis gebraucht wird um die alte darzustellen.
$b_j = \beta_{j1}b'_1 + \beta_{j2}b'_2 + \ldots + \beta_{jn}b'_n \rightarrow$ daraus folgt β

$$\mathbf{T} = \beta^{\mathbf{t}}$$

Variante 2:
Oftmals ist b'_j mit den Koordinaten von der alten Basis angegeben
$b'_j = \beta_{j1}b_1 + \beta_{j2}b_2 + \ldots + \beta_{jn}b_n$
$\Rightarrow$ Koordinaten in der alten Basis von b'_j in die Spalten der Matrix einfüllen, welches gleich $\mathbf{T^{-1}}$ ist.

$$\mathbf{T} = (\mathbf{T^{-1}})^{\mathbf{-1}}$$

5.5.2 Eigenschaften einer Basistransformation

Ein Basiswechsel ändert die Spur und die Determinante nicht!

$$Spur(TAT^{-1}) = Spur(T^{-1}TA) = Spur(A)$$
$$det(TAT^{-1}) = det(T^{-1}) \cdot det(A) \cdot det(T) = det(A)$$

5.6 Lineare Abbildungen

$T \cdot \vec{v} = \vec{v'}$ oder $T \cdot A = A' \rightarrow T = A' \cdot A^{-1}$

5.6.1 Orientierung

$GL_n(\mathbb{R}) = \{A | det(A) \neq 0\}$ ”general linear group” enthält alle lineare Abbildungen
$det(A) \begin{cases} > 0 & \text{Rechtssystem} \\ < 0 & \text{Linkssystem} \end{cases}$

$SL_n(\mathbb{R}) = \{A | det(A) = 1\}$ ”special linear group” enthält alle volumen- und orientierungstreue Matrizen
$det(A) =$ Volumenänderungsfaktor

$O(n) = \{A | A^t A = E\}$ enthält alle orthogonalen Matrizen, die Längen und Winkel bleiben erhalten.
Die Detereminante ist dabei $det(A) = \pm 1$ (Zeilen-/Spaltenvektoren sind orthogonal)
$(OO^t = E)$

$SO(n) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) | det(A) = 1, A^t A = E\}$ Drehmatrizen, Volumen, Längen und Winkel bleiben erhalten.

5.6.2 Drehwinkel

in $SO(2)$ $\qquad \cos\alpha = \dfrac{Spur(D_\alpha)}{2}$

in $SO(3)$ ohne Spiegelung $\qquad \cos\alpha = \dfrac{Spur(D_\alpha) - 1}{2}$

in $SO(3)$ mit Spiegelung $\qquad \cos\alpha = \dfrac{Spur(D_\alpha) + 1}{2}$

5.6.3 einige Lineare Abbildungen

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ Spiegelung an Geraden $x_2 = x_1$

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ Drehung um $\vec{O}$ mit $+90°$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ Scherung $\parallel$ zur x_1-Achse um 45°

$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ Drehung um $\vec{O}$ mit α

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ Spiegelung x_1x_2 -Ebene

$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ Punktspiegelung an $\vec{O}$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ Streckung von $\vec{O}$ aus mit Faktor 2

$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ Drehung des Raumes um die x_3-Achse mit α

5.6.4 Projektionsmatrix bzw. Kameraprojektionsmatrix

Eine Kameraprojektionsmatrix beschreibt die Abbildung eines Bildpunkt von einem 3D-Objekt auf eine Kamera.

- Eine Kameraprojektionsmatrix hat diese Form.

$$P = KD(E - \vec{c}) \qquad (E - \vec{c}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -c_x \\ 0 & 1 & 0 & -c_y \\ 0 & 0 & 1 & -c_z \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{lcl} \vec{c} & \hat{=} & \text{Kameraposition} \\ D & \hat{=} & \text{Drehmatrix} \end{array}$$

- Bildpunkte berechnen

$$\tilde{b} = P\tilde{q}$$

Um nun $\vec{b}$ zu berechnen muss man $\tilde{b}$ mit der dritten Komponenten dividieren.

- Eine Kameraabbildungsmatrix hat diese Form.

$$\text{K} = \begin{bmatrix} f & 0 & mx \\ 0 & f & my \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} qx \\ qy \\ qz \end{bmatrix} \quad \text{mit f = Brennweite, mx} = \tfrac{1}{2} \text{ Anzahl Pixel auf x, my} = \tfrac{1}{2} \text{ Anzahl Pixel auf y}$$

- Eine Gerade, die durch den Bildpunkt und durch das 3D-Objekt geht, wird in dieser Form beschrieben.

$$\vec{p} = \vec{c} + s\vec{r}$$

  - Der Richtungsvektor $\vec{r}$ wird so berechnet $\vec{r} = (KD)^{-1}\tilde{b}$

- Schnittpunkt zweier Geraden wird in dieser Form beschrieben.

$$A\vec{x} = \vec{b} \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} E & -\vec{r_1} & \begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix} \\ E & \begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix} & -\vec{r_2} \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x\\y\\z\\t\\s \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \vec{c_1} \\ \\ \vec{c_2} \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

Da dieses System überbestimmt ist gibt es im Normalfall keine Lösung (Geraden Schneiden sich nicht). Um aber trotzdem einen Punkt zu finden muss man das Least-Square Verfahren durchführen.

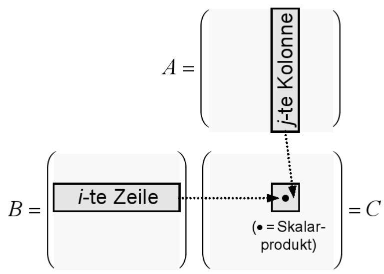
$A^t \cdot A \cdot \vec{x} = A^t \cdot \vec{b} \quad \rightarrow \quad \vec{x} = (A^t \cdot A)^{-1} \cdot A^t \cdot \vec{b}$

5.6.5 Algebraische Eigenschaften von linearen Abbildungen

$A \cdot B \neq B \cdot A$	(Anti-Kommunitativgesetz)
$(A \cdot B)C = A(B \cdot C) = A \cdot B \cdot C$	(Assoziativgesetz)

Verkettung von lin. Abbildungen
→ Zeile mal Spalte

$$C = B \circ A = B(A(\vec{x}))$$



5.7 Allgemeines Skalarprodukt

$\xi \bullet \gamma = \xi^t G \gamma$	ξ, γ sind Vektoren
$\xi' \bullet \gamma' = \xi'^t G' \gamma' = \xi^t T^t G' T \gamma$	G = Symmetrische Matrix
$G = T^t G' T$	G in Standartbasis = Einheitsmatrix (E)
$G' = T^{-1^t} G T^{-1}$	

6 Zerlegungen

6.1 L-U-Zerlegung

A = LU
(A gegeben)

1. Gauss (Vorwärtsreduktion)
2. L → Pivospalten (rot und blau), U → "Rest"(grün)

$$\boxed{\begin{matrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{matrix}} \rightarrow \boxed{\begin{matrix} 1 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{matrix}} \rightarrow^{\cdots} \rightarrow \boxed{\begin{matrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{matrix}} \rightarrow \boxed{\begin{matrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}} \quad L = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\begin{matrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & 1 \end{matrix}} \rightarrow \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & -1 \end{matrix}} \rightarrow \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 4 \end{matrix}} \rightarrow \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}} \quad L = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6.2 L-R-Zerlegung

1. L-U-Zerlegung machen gemäss 6.1
2. Matrix D berechnen (Diagonalelemente von L)
   $D = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ 0 & l_{22} & 0 \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix}$
3. L' und R berechnen
   $L' = LD^{-1}$
   $R = DU$
   Beispiel gem. 6.1:

$$L = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$L' = LD^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = DU = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

6.3 Q-R-Zerlegung / Gram-Schmidt-Zerlegung

A = QR
(A gegeben)

1. Q → A orthonormalisieren
2. R → Q^tA

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow^{orthonorm.} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \mathrm{Q}$

$$\mathrm{R} = Q^t\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

6.4 Cholesky-Zerlegung

A = LL^t
(A gegeben)

$$A = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ l_{12} & l_{22} & l_{32} \\ l_{13} & l_{23} & l_{33} \end{pmatrix} = LL^t = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ x_2 & x_4 & 0 \\ x_3 & x_5 & x_6 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & x_4 & x_5 \\ 0 & 0 & x_6 \end{pmatrix}$$

(1): $x_1 * x_1 + 0 * 0 + 0 * 0 = x_1^2 = l_{11} \rightarrow x_1$ berechnen
(2): $x_2 * x_1 + x_4 * 0 + 0 * 0 = x_2 * x_1 = l_{12} \rightarrow x_2$ berechnen
(3): $x_3 * x_1 + x_5 * 0 + x_6 * 0 = x_3 * x_1 = l_{13} \rightarrow x_3$ berechnen
(4): $x_2 * x_2 + x_4 * x_4 + 0 * 0 = x_2^2 + x_4^2 = l_{22} \rightarrow x_4$ berechnen
(5): $x_3 * x_2 + x_5 * x_4 + x_6 * 0 = x_3 * x_2 + x_5 * x_4 = l_{23} \rightarrow x_5$ berechnen
(6): $x_3 * x_3 + x_5 * x_5 + x_6 * x_6 = x_3^2 + x_5^2 + x_6^2 = l_{33} \rightarrow x_6$ berechnen

7 Eigenwerte und Eigenvektoren

Wenn eine Abbildung auf denselben Punkt fällt ($\vec{v} = \vec{v}'$), nennt man dies Eigenfixpunkt. Der Eigenvektor $\vec{v}$ zeigt nun in diese Richtung (als Gerade) und der Eigenwert λ gibt den Faktor an, mit der in diese Richtung gezeigt wird. D.h. es gilt

$$Av = \lambda v$$

Def.: Eine Matrix heisst diagonalisierbar, wenn es eine Basis aus den Eigenvektoren gibt.

Def.: Symmetrische Matrizen sind diagonalisierbar (die Eigenwerte stehen in der Diagonalen). Es gibt eine orthonormierte Eigenvektorbasis.

7.1 Berechnen der Eigenwerte

1. Determintante ausrechnen
2. Gleichung lösen (Lösungen = Eigenwerte)

$$det(A - \lambda E) = 0$$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \implies \begin{vmatrix} a_1 - \lambda & b_1 \\ a_2 & b_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \implies \lambda^2 - \lambda(a_1 + b_2) + a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$$

Def.: $det(A - \lambda E)$ heisst charakteristisches Polynom χ_A

7.2 Berechnen der Eigenvektoren

Für jeden Eigenwert λ_i Gleichungssystem aufstellen und mit Gauss auflösen $\Rightarrow$ eine Zeile verschwindet $\Rightarrow \infty$ Lösungen $\Rightarrow$ Wert von verschwundener Zeile frei wählbar.

$$(A - \lambda_i E)\vec{v_i} = 0$$

Beispiel:

$$\left| \begin{array}{ccc} v_1 - 2v_2 & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad v_2 \text{ ist frei wählbar} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} v_1 = 2v_2 \\ v_2 = x \end{array} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2v_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ x \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eigenvektoren von symmetrischen Matrizen sind immer senkrecht zueinander.

7.3 Potenzrechen von Matrizen

$$A^k = T^{-1} {A'}^k T = T^{-1} \begin{pmatrix} {\lambda_1}^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & {\lambda_n}^k \end{pmatrix} T$$

$$A' = \begin{pmatrix} {\lambda_1}^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & {\lambda_n}^k \end{pmatrix} A' \text{ in Eigenvektoren-Basis}$$

$$T = (Ev_1, Ev_2, \ldots, Ev_n)^{-1}$$

7.3.1 Eingenschaften von A'

- $det(A') = det(A)$
- $det(A') = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$
- $det(T \cdot A \cdot T^{-1}) = det(A) \cdot det(T) \cdot det(T^{-1}) = det(A)$
- $A' = T \cdot A \cdot T^{-1}$

7.4 Rekursionsformel

$x_{n+3} = 4x_n - 11x_{n+1} + 6x_{n+2}$

1. Matrix/Vektor Schreibweise : $\begin{pmatrix} x_{n+3} \\ x_{n+2} \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{n+2} \\ x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 6 & -11 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
2. $\vec{u}$ ein Eigenvektor von $A \qquad A^n u = \lambda^n u$
   $$\begin{pmatrix} x_{n+2} \\ x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix} = a_1 {\lambda_1}^n \vec{u_1} + a_2 {\lambda_2}^n \vec{u_2} + a_3 {\lambda_3}^n \vec{u_3} = a_1 {\lambda_1}^n \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{13} \end{pmatrix} + a_2 {\lambda_2}^n \begin{pmatrix} u_{21} \\ u_{22} \\ u_{23} \end{pmatrix} + a_3 {\lambda_3}^n \begin{pmatrix} u_{31} \\ u_{32} \\ u_{33} \end{pmatrix}$$
   $x_n = a_1 {\lambda_1}^n u_{13} + a_2 {\lambda_2}^n u_{23} + a_3 {\lambda_3}^n u_{33}$

8 Rezepte

8.1 Potenzrechnen

Kurzanleitung:

1. Gleichung aufschreiben $A^k = T^{-1} \cdot {A'}^k \cdot T$
2. Eigenbasis aus n linear unabhängigen Eigenvektoren finden.
3. Basis-Transformationsmatrix T berechnen.
4. Diagonalisierte Matrix A' berechnen.
5. A^k berechnen.

Schritt für Schritt Anleitung:

1. Gleichung aufschreiben:
   $A^k = T^{-1} \cdot {A'}^k \cdot T \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
2. Basis aus Eigenvektoren finden
   (a) Eigenwerte berechnen: $det(A - \lambda E) = 0 \qquad \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda) - 1 \cdot 2 = 0$
   $= \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0 \rightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 4) = 0 \rightarrow \lambda_1 = 1 \rightarrow \lambda_2 = 4$
   (b) Eigenvektoren finden:
   $(A - \lambda_1 E) \cdot \vec{v_1} = 0$
   $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \rightarrow 2x_1 + 2y_1 = 0 \\ \rightarrow 1x_1 + 1y_1 = 0 \end{array} \rightarrow \vec{v_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
   $(A - \lambda_2 E) \cdot \vec{v_2} = 0$
   $\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \rightarrow -1x_2 + 2y_2 = 0 \\ \rightarrow 1x_2 - 2y_1 = 0 \end{array} \quad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
3. T und T^{-1} berechnen:
   $T^{-1} = (\vec{v_1} \quad \vec{v_2}) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
   $T = T^{-1^{-1}} = (\vec{v_1} \quad \vec{v_2})^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
4. Diagonal Matrix A' berechnen:
   $A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$
5. A^k berechnen:
   $A^k = T^{-1} \cdot {A'}^k \cdot T = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & 4^k \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

8.2 Kameraabbildungen

8.2.1 Bildpunkt zum 3D Punkt

Gegeben:

Brennweite:	$f = 100\text{pixel}$	Bild grösse:	$m_x \cdot m_y = 120 \cdot 90$
Position Kameras:	$C_1 = (100; 0; 0)$ $C_2 = (0; 100; 0)$	Bildpunkte:	$B_1 = (36; 40)$ $B_2 = (65; 58)$
Drehmatrix D_1:	$D_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	Drehmatrix D_2:	$D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Gesucht: Punkt Q welche auf den Bildpunkten B_1 & B_2 dargestellt ist.

1. Kameramatrix aufstellen
   $$K = \begin{pmatrix} f & 0 & mx/2 \\ 0 & f & my/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 60 \\ 0 & 100 & 45 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
2. Eine Gerade pro Kamera berechnen mit je einem $\vec{c_i}$ = Stützvektor und einem Richtungsvektor
   $$\vec{r_i} = (KD_i)^{-1} \cdot \vec{\vec{b_i}} \to \vec{\vec{b_i}} = \begin{pmatrix} b_{ix} \\ b_{iy} \\ 1 \end{pmatrix}$$
   $$\vec{r_1} = (KD_1)^{-1} \cdot \vec{\vec{b_1}} = \left[\begin{pmatrix} 100 & 0 & 60 \\ 0 & 100 & 45 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 36 \\ 60 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.00 \\ 0.24 \\ -0.05 \end{pmatrix}$$
   $$\vec{r_2} = (KD_2)^{-1} \cdot \vec{\vec{b_2}} = \left[\begin{pmatrix} 100 & 0 & 60 \\ 0 & 100 & 45 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right]^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 65 \\ 58 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.13 \\ -1.00 \\ -0.05 \end{pmatrix}$$
   $$\vec{p_1} = \vec{c_1} + t \cdot \vec{r_1} = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1.00 \\ 0.24 \\ -0.05 \end{pmatrix} \qquad \vec{p_2} = \vec{c_2} + s \cdot \vec{r_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0.13 \\ -1.00 \\ -0.05 \end{pmatrix}$$
3. Matrix Gleichung aufstellen
   $$\underbrace{\begin{pmatrix} & & 0 \\ E & -\vec{r_1} & 0 \\ & & 0 \\ & 0 & \\ E & 0 & -\vec{r_2} \\ & 0 & \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ s \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \vec{c_1} \\ \\ \vec{c_2} \end{pmatrix}}_{\vec{b}} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1.00 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -0.24 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.05 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -0.13 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1.00 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0.05 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix}$$
4. Least-Square verfahren
   $A^t \cdot A \cdot \vec{x} = A^t \cdot \vec{b}$
   $\vec{x} = (A^t \cdot A)^{-1} \cdot A^t \cdot \vec{b} \to$ In TR eingeben $\to \underline{\underline{Q = (x; y; z)}}$

8.2.2 3D-Punkt zu Bildpunkt

Gegeben:

Brennweite:	$f = 500\text{pixel}$	Bild grösse:	$m_x \cdot m_y = 640 \cdot 480$
Position Kamera:	$C = (-300; 0; 200)$	Punkt im Raum:	$Q = (50; 100; 450)$
Drehmatrix:	$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$		

Gesucht:
Bildpunkt B auf welchem sich der Punkt Q befindet.

1. Kameraprojektionsmatrix berechnen:

$$P = KD(E - \vec{x}) = \begin{pmatrix} 500 & 0 & 320 \\ 0 & 500 & 240 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 300 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 527.128 & 0 & -273.013 & 212741 \\ 207.846 & 500 & 120 & 38353.8 \\ 0.866025 & 0 & 0.5 & 159.808 \end{pmatrix}$$

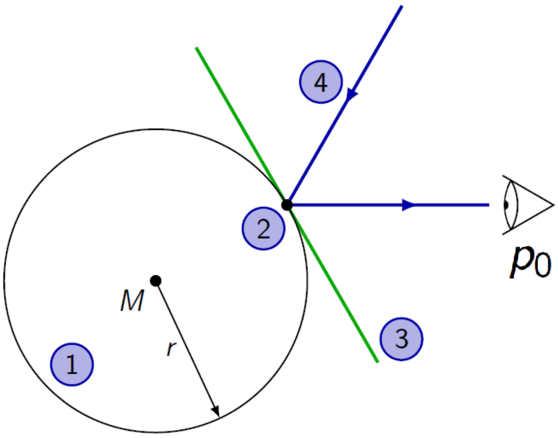
2. Homogener Bildpunkt berechnen

$$\tilde{b} = P \cdot \tilde{q} = \begin{pmatrix} 527.128 & 0 & -273.013 & 212741 \\ 207.846 & 500 & 120 & 38353.8 \\ 0.866025 & 0 & 0.5 & 159.808 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ 100 \\ 450 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 116242 \\ 152746 \\ 428.109 \end{pmatrix}$$

3. Bildpunkt berechnen
   Durch den dritten Komponenten Teilen

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} \frac{116242}{428.109} \\ \frac{152746}{428.109} \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 271.524 \\ 356.793 \end{pmatrix}}}$$

8.3 Kugelprojektionen



1. Gleichung für Kugel
2. Durchstosspunkt
3. Tangentialebene (Falls relevant)
4. Reflektierter Strahl

1. Kugelgleichung:

$$(\vec{p} - \vec{m}) \bullet (\vec{p} - \vec{m}) = r^2$$

2. Durchstosspunkt berechnen:
Geradengleichung $\vec{p} = \vec{p_0} + s \cdot \vec{r}$ in Kugelgleichung einsetzen:
p_0 = Ortsvektor von Punkt P_0 $\quad \vec{r}$ = Richtungsvektor

$$(\vec{p_0} + s \cdot \vec{r} - \vec{m}) \bullet (\vec{p_0} + s \cdot \vec{r} - \vec{m}) = r^2$$

$$((\vec{p_0} - \vec{m}) + s \cdot \vec{r}) \bullet ((\vec{p_0} - \vec{m}) + s \cdot \vec{r}) = r^2$$

$$s^2 \cdot (\vec{r} \bullet \vec{r}) + s \cdot (2 \cdot (\vec{p_0} - \vec{m}) \bullet \vec{r}) + (\vec{p_0} - \vec{m}) \bullet (\vec{p_0} - \vec{m}) - r^2 = 0 \qquad \rightarrow \qquad s_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Es muss nun das kleinere s gewählt werden da mit diesem s der Durchstosspunkt welcher näher bei P_0 liegt gefunden wird.
Nun muss der Punkt P_1 berechnet werden dazu muss s in die Geradengleichung eingesetzt werden.

$$\vec{p_1} = \vec{p_0} + s_1 \cdot \vec{r}$$

3. Reflektierter Strahl berechnen
Zuerst muss der Normalenvektor der Tangentialebene bestimmt werden. Dieser geht von P_1 nach M und hat die Länge r:

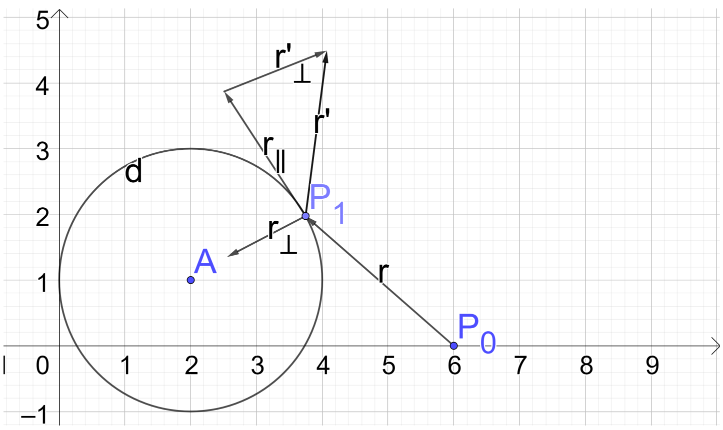
$$\vec{n} = \vec{m} - \vec{p_1}$$

Nun muss der Richtungsvektor $\vec{r}$ in $\vec{r_\perp}$ und in $\vec{r_\parallel}$ aufgeteilt werden:

$$\vec{r_\perp} = \frac{\vec{r} \bullet \vec{n}}{|\vec{n}|} \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{\vec{r} \bullet \vec{n}}{r^2} \cdot \vec{n}$$

$$\vec{r_\parallel} = \vec{r} - \vec{r_\perp}$$

$$\vec{r'} = \vec{r_\parallel} - \vec{r_\perp} = \vec{r} - 2 \cdot \vec{r_\perp} = \vec{r} - 2 \cdot \frac{\vec{r} \bullet \vec{n}}{r^2} \cdot \vec{n}$$



4. Tangentialebene Wenn nun doch die Tangentialebene berechnet werden muss kann dies mit einer der folgenden Formeln gemacht werden

- $(\vec{p} - \vec{p_1}) \bullet (\vec{p_1} - \vec{m}) = 0$ $\qquad \vec{p}$ = Punkt auf Ebene
- $(\vec{p} - \vec{m}) \bullet (\vec{p_1} - \vec{m}) = r^2$

Bester Schnittpunkt von zwei Geraden die sich nicht schneiden

$$\vec{p}_1 + t_1\vec{r}_1 = \begin{pmatrix}-5\\0\\0\end{pmatrix} + t_1\begin{pmatrix}5\\5\\1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{p}_2 + t_2\vec{r}_2 = \begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix} + t_2\begin{pmatrix}-5\\6\\1\end{pmatrix}.$$

Auf folgende Form bringen $A * \vec{x} = \vec{b}$

$$A\begin{pmatrix}t_1\\t_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 & 5\\5 & -6\\1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t_1\\t_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\0\\0\end{pmatrix} = b.$$

Gemäss Least Squares lösen:

$\vec{x} = (A^tA)^{-1}A^t\vec{b}$ t1 und t2 berechnen $t_1 = 1.08765, \qquad t_2 = 0.91171.$

Die beiden Werte t_i gehören zu den Punkten

$$\vec{p}_1 + t_1\vec{r}_1 = \begin{pmatrix}0.43826\\5.43826\\1.08765\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{p}_2 + t_2\vec{r}_2 = \begin{pmatrix}0.44146\\5.47025\\0.91171\end{pmatrix}.$$

Die Mitte der Beiden Punkte mit dem Mittelwert finden.

Drehmatrix eines Objekts finden

3 Punkte beobachten, die nicht in einer Ebene sind, keine singuläre Matrix ergeben.

$$A = (\ 1, -1,\ 1) \qquad A' = (\ 1, -1, -1)$$
$$B = (\ 1,\ 1,\ 1) \qquad B' = (-1, -1, -1)$$

$$D = (1, -1, -1) \quad \mapsto \quad D' = (1, -1, 1).$$

$$R\underbrace{\begin{array}{ccc} A & B & D \\ \hline 1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\end{array}}_{=B_1} = \underbrace{\begin{array}{ccc} A' & B' & D' \\ \hline 1 & -1 & 1\\ -1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{array}}_{=B_2} \quad \Rightarrow \quad R = B_2B_1^{-1}.$$

Für Drehwinkel siehe Formelblatt S. 10.

Abstand zwischen 2 windschiefen Geraden (p → Stützvektor, r → Richtungsvektor)

$$d = (\vec{p}_1 - \vec{p}_0)\cdot\frac{\vec{r}_0 \times \vec{r}_1}{|\vec{r}_0 \times \vec{r}_1|}$$

Abstand Gerade und Punkt

$$\vec{p} = \underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}_{\vec{p}_0} + s\underbrace{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}}_{\vec{r}} \qquad \vec{q} = \begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\vec{a} = \vec{q} - \vec{p}_0} = \begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$$

Abstand $|\vec{a}_{\parallel}| = \boxed{\frac{\vec{a}\cdot\vec{r}}{|\vec{r}|}} = \frac{5\cdot 2 + 0\cdot 1}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}}$

Ebenengleichung aufstellen

Normale der Ebene finden	$\vec{n} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -9 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ → Häufig mit Vektorprodukt
Punkt auf der Ebene finden	$S = \left(\frac{11}{2}, \frac{7}{2}, -7\right)$
Gleichung aufstellen	$0 = \vec{n} \cdot (\vec{p} - \vec{s}) = \begin{pmatrix} -9 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - \frac{11}{2} \\ y - \frac{7}{2} \\ z + 7 \end{pmatrix} = -9x - 3y + \frac{99}{2} + \frac{21}{2} = -9x - 3y + 60.$

Punkt auf einer Geraden, welcher von 2 Punkten gleich weit entfernt ist

$$\vec{p} = \vec{p}_0 + t\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$A = (10, 5, -7)$ und $B = (1, 2, -7)$.

$$|\vec{a} - \vec{p}(t)|^2 = |\vec{b} - \vec{p}(t)|^2$$

$$\left|\begin{pmatrix} 8 - 3t \\ t - 1 \\ -10 - 2t \end{pmatrix}\right|^2 = \left|\begin{pmatrix} -1 - 3t \\ -4 + t \\ -10 - 2t \end{pmatrix}\right|^2$$

$$(8 - 3t)^2 + (t - 1)^2 + (10 + 2t)^2 = (1 + 3t)^2 + (t - 4)^2 + (10 + 2t)^2$$

$$14t^2 - 10t + 165 = 14t^2 + 38t + 117$$

$$28 = 28t \qquad \Rightarrow \qquad t = 1$$

Setze man dies in die Geradengleichung ein, findet man wieder den Punkt $P = (5, 5, 5)$.

Zwischenwinkel von 2 Vektoren bestimmen

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BP}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BP}|}$$

oder

$$\sin\alpha = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

Drehung eines Vektor mit Drehmatrix

Drehung 2	Drehung 1	Ausgangslage (Vektor)
Drehung um x Achse	Drehung um y Achse	e3
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}$	(0 / 0 / 1)

x

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin\beta \\ 0 \\ \cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\beta \\ -\sin\alpha\cos\beta \\ \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix}$$

Von 2 Punkten zu Gerade in Parameterform

Gerade durch die Punkte (1, 1, 1) und (−1, −1, 1)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Normalenform einer Ebene

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \vec{p}\right) \bullet \vec{n}$$

n → Normale der Ebene

p → Punkt auf Ebene (Stützvektor)

Abstand Punkt Ebene

$$d = \frac{(\vec{q} - \vec{p}) \bullet \vec{n}}{|\vec{n}|} = \boxed{\frac{n_1}{|\vec{n}|}x + \frac{n_2}{|\vec{n}|}y + \frac{n_3}{|\vec{n}|}z - \frac{\vec{n} \bullet \vec{p}}{|\vec{n}|}}$$

x, y, z → Koordinaten des Punktes

p → Punkt auf Ebene (Stützvektor)

Aufgabe 3D Drucker

x [mm]	y [mm]	z [mm]
10	10	0.015
10	−10	0.022
−10	10	0.017
−10	−10	0.022

a) Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, mit dem man die bestmögliche Schätzung von z als lineare Funktion von x und y finden kann.

$$z = ax + by + c, \qquad \begin{aligned} 10a + 10b + c &= 0.015 \\ 10a - 10b + c &= 0.022 \\ -10a + 10b + c &= 0.017 \\ -10a - 10b + c &= 0.022 \end{aligned} \qquad A = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 1 \\ 10 & -10 & 1 \\ -10 & 10 & 1 \\ -10 & -10 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung nach Least Squares: $\vec{x} = (A^t A)^{-1} A^t \vec{b}$

$a = -0.00005, \qquad b = -0.00030, \qquad c = 0.019.$

9 Tabelle spezieller Matrizen

Name	Matrix	Spur	det	Eigenwert(e) (EW(A))	Charakteristisches Polynom	Inverse (A^{-1})	Orthogonalit.
Einheitsmatrix	$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	n (2)	1	1	$\lambda^2 - 2\lambda + 1$	$E^{-1} = E$	Orthogonal
Punktspiegelung	$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	n (-2)	1	-1	$\lambda^2 + 2\lambda + 1$	$P^{-1} = P$	Orthogonal
Streckung am Ursprung um Faktor 1	$Z_\lambda = Z_3 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$	$\lambda n(2 \cdot 3)$	$\lambda^n(3^2)$	λ	$\lambda \neq \lambda$ $\lambda^2 - 2\lambda a + a^2$ $a = \lambda$ von vorher = Streckung!	$Z_a^{-1} = \frac{1}{a}E$	Nicht orthogonal
Projektion auf X-Achse	$P_X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	1	0	0 & 1	$\lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1)$	Keine!	Nicht orthogonal
Projektion auf Y-Achse	$P_Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	1	0	0 & 1	$\lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1)$	Keine!	Nicht orthogonal
Spiegelung an X-Achse	$S_X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	0	-1	1 & 1	$\lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1)$	$S_X = S_X^{-1}$	Orthogonal
Spiegelung an X-Achse	$S_Y = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	0	-1	-1 & 1	$\lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1)$	$S_Y = S_Y^{-1}$	Orthogonal
Drehmatrix allgemein!	$R_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$	$2\cos\alpha$	1	0 = Keine reelle Lösung!	$\lambda^2 + -2\lambda\cos\alpha + 1$	$R_\alpha^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$	Orthogonal
Drehung um X-Achse!	$R_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$	$1 + 2\cos\alpha$	1	0	$(\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda\cos\alpha + 1)$	$R_x(\alpha)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$	Orthogonal
Drehung um Y-Achse!	$R_y(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}$	$1 + 2\cos\alpha$	1	0	$(\lambda - 1)(-\lambda^2 + 2\lambda\cos\alpha - 1)$	$R_y(\alpha)^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}$	Orthogonal
Drehung um Z-Achse!	$R_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$1 + 2\cos\alpha$	1	0	$(\lambda - 1)(-\lambda^2 + 2\lambda\cos\alpha - 1)$	$R_z(\alpha)^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	Orthogonal
Drehung um $\frac{\pi}{2}$ von Ursprung im GU8!	$R_{\frac{\pi}{2}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	0	1	0	$\lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda + 1)$	$R_{\frac{\pi}{2}}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$	Orthogonal
Drehung um $-\frac{\pi}{2}$ von Ursprung im GUS!	$R_{-\frac{\pi}{2}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$	0	1	0	$\lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda + 1)$	$R_{-\frac{\pi}{2}}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	Orthogonal
Drehung um $\frac{\pi}{4}$	$R_{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\sqrt{2}$	1	0	$\lambda^2 - \sqrt{2}\lambda + 1$	$R_{\frac{\pi}{4}}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$	Orthogonal
Nullmatrix	$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	0	0	0	λ^n	Keine!	Nicht orthogonal

10 TR-Bedienung

Diese Anleitung ist für den **TI-Nspire CX CAS** Rechner.

Matrizen & Vektoren einfügen:	 → gewünschtes Element auswählen
Zeile an Matrix hinzufügen:	↵
Spalte an Matrix hinzufügen:	⇧shift → ↵
Determinante:	det([...]) → enter oder menu → 7 → 3 → enter
Inverse:	$[...]^{-1}$ → enter
Transponieren	[...] menu → 7 → 2 → enter
Gauss ohne rückw. einsetzen:	ref([...]) → enter
Gauss:	rref([...]) → enter
Gauss Schritte ohne Rückw.[1]:	linalgcas\gausstep([...]) → enter
Inverse Schritte[1]:	linalgcas\inversestep([...]) → enter
Kreuzprodukt:	crossP([X,Y,Z],[X,Y,Z])
Skalarprodukt:	dotP([X,Y,Z],[X,Y,Z])
Betrag:	norm([X, Y, Z])
Eigenwerte:	cPolyRoots($r^2 + 2r + 1,\ r$)

[1] Nur wenn LinAlgCAS Library vorhanden ist.

