

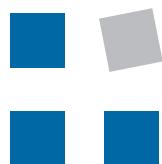
Zusammenfassung Math1I HS2012

# Mathematische Grundlagen der Informatik 1

Emanuel Duss

[emanuel.duss@gmail.com](mailto:emanuel.duss@gmail.com)

11. Dezember 2012



**HSR**

HOCHSCHULE FÜR TECHNIK  
RAPPERSWIL

FHO Fachhochschule Ostschweiz

## Inhaltsverzeichnis

<b>1 Aussagenlogik</b>	<b>4</b>
1.1 Aussage . . . . .	4
1.2 Junktoren . . . . .	4
1.3 Wahrheitstabelle . . . . .	5
1.4 Hinreichend und notwendig . . . . .	5
1.5 Aussagenlogische Formeln . . . . .	5
1.6 Normalform . . . . .	6
1.6.1 Negationsnormalform . . . . .	6
1.6.2 Verallgemeinerte Konjunktion . . . . .	6
1.6.3 Disjunktive Normalform . . . . .	7
1.6.4 Verallgemeinerte Disjunktion . . . . .	7
1.6.5 Konjunktive Normalform . . . . .	7
1.7 Aussageformen und Prädikate . . . . .	7
1.8 Quantoren . . . . .	8
1.9 Natürliche Zahlen . . . . .	8
<b>2 Beweisen</b>	<b>9</b>
2.1 Allgemeine Beweistechniken . . . . .	9
2.1.1 Direkter Beweis . . . . .	9
2.1.2 Indirekter Beweis . . . . .	9
2.2 Vollständige Induktion . . . . .	9
2.2.1 Induktionsanfang / Induktionsverankerung . . . . .	10
2.2.2 Induktionsschritt . . . . .	10
2.3 Rekursionen . . . . .	11
2.3.1 Direkte Angabe . . . . .	11
2.3.2 Rekursive Angabe . . . . .	11
<b>3 Mengen, Relationen, Abbildungen</b>	<b>12</b>
3.1 Mengen, Teilmengen, Potenzmengen . . . . .	12
3.2 Vereinigung und Durchschnitt . . . . .	12
3.2.1 Schreibweise . . . . .	12
3.2.2 Gesetze . . . . .	12
3.3 Komplement und Differenz . . . . .	13
3.4 Kartesische Produkte . . . . .	13
3.5 Relationen . . . . .	14
3.6 Relationen in Datenbanken . . . . .	14
3.7 Entity-Relationship-Models . . . . .	14
3.8 Abbildungen . . . . .	14
3.9 Mächtigkeit von Mengen . . . . .	14

<b>4 Vektoren und Vektorräume</b>	<b>15</b>
4.1 Begriffe . . . . .	15
4.1.1 Vektoren . . . . .	15
4.1.2 Vektoren aus zwei Punkten berechnen . . . . .	15
4.1.3 Matrix, Matritzen . . . . .	15
4.1.4 Rang . . . . .	16
4.1.5 Linearkombination . . . . .	16
4.1.6 Lineare Abhängigkeit . . . . .	17
4.1.7 Erzeugendensystem . . . . .	17
4.1.8 Basis . . . . .	17
4.1.9 Normalbasis / Kanonische Basis . . . . .	18
4.2 Rechnen mit Vektoren . . . . .	18
4.2.1 Weitere Rechenregeln für Vektoren . . . . .	18
4.2.2 Matrix mal Vektor . . . . .	19
4.3 Lineare Gleichungssysteme . . . . .	19
4.3.1 Begriffe . . . . .	19
4.3.2 Erweiterte Koeffizientenmatrix . . . . .	19
4.3.3 Gauss-Algorithmus / Gauss-Elimination . . . . .	20
4.3.4 Lösungsmengen . . . . .	20
4.3.5 Lösen eines inhomogenen Gleichungssystems . . . . .	21
4.4 Geraden und Ebenen . . . . .	22
4.5 Definition . . . . .	22
4.5.1 Punkt auf Gerade . . . . .	23
4.5.2 Schnittpunkt zweier Geraden im $\mathbb{R}^3$ . . . . .	23
4.6 Norm und Skalarprodukt . . . . .	24
4.6.1 Betrag eines Vektors (Länge) . . . . .	24
4.6.2 Normalenvektor . . . . .	24
4.6.3 Skalarprodukt . . . . .	25
4.7 Normalenform der Geraden / Ebenen . . . . .	26
4.7.1 Normalenform im $\mathbb{R}^2$ . . . . .	26
4.7.2 Hessesche Normalenform . . . . .	26
4.8 Basen und Koordinaten . . . . .	27
<b>5 Matrizen</b>	<b>28</b>
5.1 Rechenregeln für Matrizen . . . . .	28
5.1.1 Addition . . . . .	28
5.1.2 Multiplikation mit einem Skalar . . . . .	28
5.1.3 Matrix-Multiplikation . . . . .	28
5.2 Matrizen und ihre Inversen . . . . .	29
<b>6 Lineare Abbildungen</b>	<b>30</b>
6.1 Koordinaten und Transformation . . . . .	30

6.2	Determinanten . . . . .	30
6.2.1	Determinante einer 2x2 Matrix . . . . .	30
6.2.2	Invertierende einer 2x2 Matrix mit der Determinante berechnen	30
6.2.3	Regeln für das Rechnen mit Determinanten . . . . .	30
6.2.4	Determinante einer 3x3 Matrix . . . . .	31
6.2.5	Determinante einer nxm Matrix . . . . .	31
6.3	Eigenwerte und Eigenvektoren . . . . .	31
6.3.1	Berechnung der Eigenvektoren . . . . .	31
<b>7</b>	<b>Begriffe</b>	<b>32</b>
7.1	Ist Teiler von . . . . .	32
7.2	Summenformel . . . . .	32
7.3	Produkteformel . . . . .	32

Diese Zusammenfassung basiert auf der Vorlesung und auf dem Skript von *Mathematische Grundlagen der Informatik 1* der HSR vom Herbstsemester 2012.



CC BY-SA by Emanuel Duss ([emanuel.duss@gmail.com](mailto:emanuel.duss@gmail.com))

# 1 Aussagenlogik

## 1.1 Aussage

Eine Aussage ist ein Satz, welcher entweder falsch oder wahr ist.

## 1.2 Junktoren

- $\neg$  Negation (nicht): Wahr, wenn die Aussage falsch ist.
- $\wedge$  Konjunktion (und): Wahr, wenn beide Aussagen wahr sind.
- $\vee$  Disjunktion (oder): Wahr wenn eine der beiden Aussagen wahr ist.
- $\Rightarrow$  Implikation (wenn ... dann):
  - Beispiel:  $A \Rightarrow B$
  - Wenn Aussage  $A$  wahr, dann gilt Aussage  $B$ .
  - Wenn die Aussage  $A$  falsch ist, nützt uns die Implikation nichts, denn man könnte damit etwas Richtiges, aber auch etwas Falsches herleiten.
  - Das heisst: Nur falsch, wenn  $B$  falsch ist und  $A$  richtig ist.
- $\Leftrightarrow$  Äquivalenz (genau dann, wenn ... )
  - Beispiel:  $A \Leftrightarrow B$
  - Wahr, wenn  $A$  und  $B$  den gleichen Wahrheitswert besitzen.
- $\uparrow$  NAND (Zusammengesetzt aus NOT (nicht,  $\neg$ ) und AND (und  $\wedge$ ))
  - Alle Junktoren können durch das NAND ausgedrückt werden
  - Beispiel:  $A \uparrow B \Leftrightarrow \neg(A \wedge B)$  sowie  $A \uparrow A \Leftrightarrow \neg A$   
sowie  $A \wedge B \Leftrightarrow (A \uparrow B) \uparrow (A \uparrow B)$  sowie  $A \vee B \Leftrightarrow (A \uparrow A) \uparrow (B \uparrow B)$

### 1.3 Wahrheitstabelle

		Nicht		Und	Oder	Implikation	Äquivalenz	NAND
$A$	$B$	$\neg A$	$\neg(\neg A)$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$	$A \uparrow B$
w	w	f	w	w	w	w	w	f
w	f	f	w	f	w	f	f	w
f	w	w	f	f	w	w	f	w
f	f	w	f	f	f	w	w	w

- In der Wahrheitstabelle gilt: w = wahr und f = falsch.
- Eine Aussage, die in jeder Zeile der Wahrheitstafel falsch ist, heisst Kontradiktion.
- Aussagen wie  $A \vee B$  sind Aussagenlogische Formeln.

### 1.4 Hinreichend und notwendig

Die Implikation  $A \Rightarrow B$  bedeutet:

- Wenn A wahr ist, dann ist auch B wahr. A ist eine *hinreichende* Bedingung für B.
- A kann nicht wahr sein, wenn B falsch ist. B ist eine *notwendige* Bedingung für A.

### 1.5 Aussagenlogische Formeln

**Kommutativität**  $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$  und  $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$

**Assoziativität**  $A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$  und  $A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$

**Distributivität**  $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$   
und  $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

**Satz de Morgan**  $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$  und  $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

**Aufeinanderfolgende Implikationen** Wenn  $A \Rightarrow B$  und  $B \Rightarrow C$   
kann man auch schreiben  $(A \Rightarrow B \Rightarrow C) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$ .

Bei der Elimination von Klammern sind dies die Prioritäten:

1. Klammern  $((\dots), [\dots], \{\dots\})$
2. Negation  $(\neg)$
3. Konjunktion  $(\wedge)$  und Disjunktion  $(\vee)$
4. Implikation  $(\Rightarrow)$  und Äquivalenz  $(\Leftrightarrow)$

## 1.6 Normalform

Normalformen braucht man, um Formeln übersichtlicher zu gestalten (diese in eine Normalform bringen). Das wird an folgendem Beispiel gezeigt:

X	Y	Z	C
w	w	w	f
w	w	f	f
w	f	w	w
w	f	f	w
f	w	w	w
f	w	f	w
f	f	w	f
f	f	f	w

### 1.6.1 Negationsnormalform

Bei der Negationsnormalform dürfen Negationen  $(\neg)$  nur direkt vor einer Variable (und nicht vor einer Klammer) stehen:

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$$

### 1.6.2 Verallgemeinerte Konjunktion

Alle Variablen werden mit der Konjunktion  $(\wedge)$  verbunden. Die einzelnen Variablen liegen dabei immer in der Negationsnormalform vor:

$$X \wedge \neg Y \wedge Z$$

### 1.6.3 Disjunktive Normalform

Die disjunktive Normalform ist eine Verbindung der verallgemeinerten Konjunktionen mit einer Disjunktion ( $\vee$ ). Dabei werden die wahren Werte der Wahrheitstabelle ausgewertet.

$$(X \wedge \neg Y \wedge Z) \vee (X \wedge \neg Y \wedge \neg Z) \vee (\neg X \wedge Y \wedge Z) \vee (\neg X \wedge Y \wedge \neg Z) \vee (\neg X \wedge \neg Y \wedge \neg Z)$$

### 1.6.4 Verallgemeinerte Disjunktion

Alle Variablen werden mit der Disjunktion ( $\vee$ ) verbunden. Die einzelnen Variablen liegen dabei immer in der Negationsnormalform vor:

$$X \vee \neg Y \vee Z$$

### 1.6.5 Konjunktive Normalform

Die konjunktive Normalform ist eine Verbindung von verallgemeinerten Disjunktion mit einer Konjunktion ( $\wedge$ ). Dabei werden die falschen Werte der Wahrheitstabelle ausgewertet.

$$A \Leftrightarrow \neg(X \wedge Y \wedge Z) \wedge \neg(X \wedge Y \wedge \neg Z) \wedge \neg(\neg X \wedge \neg Y \wedge Z)$$

Daraus macht man noch die Negationsnormalform (mit dem Satz de Morgan):

$$A \Leftrightarrow (\neg X \vee \neg Y \vee \neg Z) \wedge (\neg X \vee \neg Y \vee Z) \wedge (X \vee Y \vee \neg Z)$$

Jetzt hat man in den Klammern die verallgemeinerte Disjunktion und A liegt in der konjunktiven Normalform vor.

## 1.7 Aussageformen und Prädikate

- Der Wahrheitswert einer Aussageform hängt von einer oder mehreren Variablen ab.
- Aussageformen sind unbestimmt, weil nicht klar ist, welcher Wert für eine Variable eingesetzt wird.
- Der Wert, welcher für eine Aussageform eingesetzt wird, heisst Subjekt.
- Ein Subjekt kann zulässig (Aussage ist wahr oder falsch) oder unzulässig (Aussage ist nicht auswertbar) sein.

- Aussagen und Aussageformen bestehen aus dem Subjekt (Variable) und dem Prädikat (Beschreibung, Eigenschaft).

## 1.8 Quantoren

- Der Allquantor ( $\forall$ ) sagt, dass eine Aussage für alle Elemente gelten soll.
- Der Existenzquantor ( $\exists$ ) sagt, dass eine Aussage für mindestens ein Element gelten soll.
- Gibt es einen Quantor, sind die Variablen nicht mehr frei wählbar, sondern an den Quantor gebunden.

Das wird an folgendem Beispiel erläutert:

$R(x)$  : Der Weg  $x$  aus der Menge  $W$  aller Wege führt nach Rom.

- Alle Wege führen nach Rom:  $\forall x \in W : R(x)$
- Nicht alle Wege führen nach Rom:  $\neg \forall x \in W : R(x) \Leftrightarrow \exists x \in W : \neg R(x)$
- Kein Weg führt nach Rom:  $\neg \exists x \in W : R(x)$
- Alle Wege führen nicht nach Rom:  $\forall x \in W : \neg R(x)$

Wenn nicht alle Wege nach Rom führen, gibt es mindestens einen Weg, der nicht nach Rom führt:

$$\neg(\forall x \in W : R(x)) \Leftrightarrow \exists x \in W : \neg R(x)$$

Man kann aber nichts darüber aussagen, ob überhaupt ein Weg nach Rom führt.

## 1.9 Natürliche Zahlen

Null ist eine natürliche Zahl und jede natürliche Zahl hat einen Nachfolger (ausser der Null). Wir können die Nachfolger von  $n$  mit  $s(n)$  darstellen:

$$0, s(0), s(s(0)), s(s(s(0))), \dots$$

Das kann später noch nützlich sein.

## 2 Beweisen

### 2.1 Allgemeine Beweistechniken

Wir haben folgende Voraussetzung:

$$a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, a > 0, b > 0$$

Folgende Behauptung soll geprüft werden:

$$a^2 < b^2 \Rightarrow a < b$$

Dabei ist

$$A : a^2 < b^2 \text{ und } B : a < b \text{ und } C : (A \Rightarrow B)$$

#### 2.1.1 Direkter Beweis

Behauptung wird anhand allgemein geltenden Grundlagen abgeleitet und man versucht die Aussage  $A(n) \Rightarrow B(n)$  direkt zu zeigen. Ist

$$a^2 < b^2$$

, dann ist

$$0 < b^2 - a^2$$

was

$$0 < (b + a)(b - a) \Rightarrow b > a$$

bedeutet.

#### 2.1.2 Indirekter Beweis

Um zu zeigen 'wenn A, dann B' gilt, können wir auch sagen 'wenn nicht b, dann auch nicht a'.

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

## 2.2 Vollständige Induktion

Folgende Formel ist zu beweisen:

$$S(n) : \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n + 1)$$

### 2.2.1 Induktionsanfang / Induktionsverankerung

Man prüft die Formel für die erste Zahl der Reihe. In unserem Fall ist das  $n = 1$ :

$$n = 1 : \sum_{k=1}^1 k = 1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1 + 1) = 1$$

Die Summenformel gilt also für  $n = 1$ .

### 2.2.2 Induktionsschritt

#### a) Induktionsannahme

Das ist die ursprüngliche Formel:

$$S(n) : \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n + 1)$$

#### b) Induktionsbehauptung

Man geht davon aus, dass die Formel auch für die darauf folgende Zahl gilt. Deshalb erhöht man  $n$  überall um 1:

$$S(n + 1) : \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{1}{2} \cdot (n + 1) \cdot (n + 2)$$

(Quasi s/n/n+1/g)

Die Induktionsbehauptung ist jetzt mit dem Induktionsbeweis zu beweisen.

#### c) Induktionsbeweis

Dann muss man die linke Seite der Induktionsbehauptung nehmen und in zwei Summen Teilen, damit man die Induktionsannahme einsetzen kann:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \left( \sum_{k=1}^n k \right) + n + 1$$

Das  $n + 1$  auf der Rechten Seite kommt vom linken Summenzeichen. Das  $n + 1$ , bedeutet noch ein  $k$  (von der nächsten Zahl) dazu addieren.

Dann setzt man die Induktionsannahme beim Summenzeichen nach dem Gleichheitszeichen ein:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n + 1) + n + 1$$

Multiplizieren und  $\frac{1}{2}$  ausklammern:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{1}{2} \cdot (n^2 + n + 2n + 2) = \frac{1}{2} \cdot (n^2 + 3n + 2)$$

Klammern als Produkt schreiben:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{1}{2} \cdot (n+1) \cdot (n+2)$$

Somit ist man wieder bei der gleichen Formeln der Induktionsbehauptung.

## 2.3 Rekursionen

Eine Reihe ist eine Summe von Folgegliedern ( $1 + 2 + 3 + \dots$ ). Eine Folge ist eine Menge von Zahlen, in spezieller Reihenfolge:

$$(a_k)_{k \dots n} := (a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n)$$

$$\Rightarrow (a_k)_{n \in \mathbb{N}} := (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots)$$

### 2.3.1 Direkte Angabe

Man kann für jedes Folgeglied angeben, wie es berechnet wird:

$$a_n = 2^n$$

$$a_1 = 2; a_2 = 4; a_3 = 8, \dots$$

### 2.3.2 Rekursive Angabe

Man gibt das erste Folgeglied an, sowie eine Rekursionsformel, wie man das nächste Glied berechnet.

$$a_0 = 1 \text{ und } a_n = a_{n-1} \cdot 2$$

$$\Rightarrow a_1 = 2; a_2 = 4; a_3 = 8, \dots$$

## 3 Mengen, Relationen, Abbildungen

### 3.1 Mengen, Teilmengen, Potenzmengen

- Mengen:  $\{5, 23, 42\}$  oder  $\{1, 4, 9, 16, 25, \dots\}$  oder  $\{x \in \mathbb{N} | x^2 = 1\}$
- Teilmenge/Inklusion: A ist Teilmenge von B:  $A \subset B$  (Ganz A ist enthalten in B)
- Leere Menge:  $\emptyset$  oder  $\{\}$  (Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge!)
- Mächtigkeit  $|M|$ : Anzahl der Elemente: Ist  $M = \{a, b, c\}$ , dann ist  $|M| = 3$
- Potenzmenge  $P(M)$ : Menge aller Teilmengen von einer Menge M:  
Ist die Menge  $M = \{a, b\}$ , dann ist die Potenzmenge  $P(M) = \{\{\}, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

### 3.2 Vereinigung und Durchschnitt

#### 3.2.1 Schreibweise

- Vereinigung:  $A \cup B = \{x | x \in A \text{ oder } x \in B\}$
- Durchschnitt:  $A \cap B = \{x | x \in A \text{ und } x \in B\}$
- Differenz:  $A \setminus B = \{x | x \in A \text{ und } x \notin B\} = A \cap \overline{B}$
- Komplement:  $\overline{A} = \{x | x \notin A\}$

#### 3.2.2 Gesetze

- Idempotenzgesetz:  $A \cup A = A$  und  $A \cap A = A$
- Kommutativität:  $A \cup B = B \cup A$  und  $A \cap B = B \cap A$
- Assoziativität:  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$   
und  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$
- Assoziativität:  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$  und  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Zusammenhang der Inklusion/Teilmenge mit der Vereinigung und Durchschnitt:

$$A \subset B \Leftrightarrow (A \cap B) = A \Leftrightarrow (A \cup B) = B$$

### 3.3 Komplement und Differenz

Das Komplement kann man mit der Menge  $A$  und  $B$  und der Obermenge  $M$  beschreiben:

$$\begin{aligned}\overline{A} &= \{x \in M \mid x \notin A\} \\ \overline{A \cup B} &= \overline{A} \cap \overline{B} \\ A \cap \overline{A \cup B \cup C} &= A \cap (\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = (A \cap \overline{A}) \cup (B \cap \overline{C}) = \{\}\end{aligned}$$

Bei der Differenz gilt folgendes:

$$\begin{aligned}A \setminus B &= \{a \in A \mid a \notin B\} \\ A \setminus B &= A \cap \overline{B} \\ A \setminus (A \setminus B) &= A \setminus (A \cap \overline{B}) = A \cap (\overline{A \cap \overline{B}}) = A \cap (\overline{A} \cup B) = (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap B) = \{\}\end{aligned}$$

### 3.4 Kartesische Produkte

Im Gegensatz zu den Mengen spielt bei den Kartesischen Produkten die Reihenfolge der Elemente eine Rolle.

Ein geordnetes Paar nennt sich auch 2-Tupel und ist wie folgt definiert:

$$(a, b) = (a_0, b_0) \Leftrightarrow a = a_0 \text{ und } b = b_0$$

Das Kartesische Produkt von zwei Mengen  $A$  und  $B$  wird definiert als Menge aller geordneten Paare, deren erste Komponente aus der Menge  $A$  stammt und die zweite Komponente aus der Menge  $B$ :

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

Dasselbe gilt auch für Kartesische Produkte mit drei Faktoren:

$$A \times B \times C = \{(a, b, c) \mid a \in A, b \in B, c \in C\}$$

Dasselbe gilt auch für Kartesische Produkte mit beliebig vielen Faktoren:

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i \text{ für } i = 1, \dots, n\}$$

Sind alle Faktoren gleich, kann man die Potenzschreibweise verwenden:

$$A^n = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{n \text{ Faktoren}}$$

### 3.5 Relationen

Eine n-stellige Relation  $R$  zwischen den nichtleeren Mengen  $A_1, A_2, \dots, A_n$  ist eine Teilmenge des kartesischen Produktes  $A$ .

$$\prod_{i=1}^n A_i = A_i \times A_i \times \dots \times A_i$$

$$R \subset A = \prod_{i=1}^n A_i$$

### 3.6 Relationen in Datenbanken

### 3.7 Entity-Relationship-Models

### 3.8 Abbildungen

### 3.9 Mächtigkeit von Mengen

## 4 Vektoren und Vektorräume

### 4.1 Begriffe

#### 4.1.1 Vektoren

Einen n-Tupel  $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$  aus dem  $\mathbb{R}^n$  kann als Vektor dargestellt werden:

$$\vec{x}_n = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

#### 4.1.2 Vektoren aus zwei Punkten berechnen

Der Vektor von Punkt  $Q = (3, 0)$  bis  $P = (-1, 3)$  berechnet sich so:

$$\overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} P_1 - Q_1 \\ P_2 - Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - 3 \\ 0 - (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

#### 4.1.3 Matrix, Matritzen

Eine  $n \times m$  Matrix oder eine Matrix vom Typ  $(n, m)$  hat  $n$  Zeilen und  $m$  Spalten, wird mit einem Grossbuchstaben beschrieben und sieht so aus:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Die Zahlen heissen Koeffizienten und werden mit zwei Indizes geschrieben. Der erste ist der Zeilenindex ( $n$ ), der zweite ist der Spaltenindex ( $m$ ).

**Quadratische Matrix:** Eine Matrix ist quadratisch, wenn  $n = m$  ist. Die quadratische Matrix hat also gleich viele Spalten wie Zeilen:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

**Diagonalmatrix:** Eine Diagonalmatrix ist quadratisch und zudem alle Koeffizienten 0 ausser die Diagonale:

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 23 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 42 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

**Einheitsmatrix:** Eine Einheitsmatrix ist eine Diagonalmatrix, welche aus lauter 1 besteht:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Dreiecksmatrix:** Eine (untere) Dreiecksmatrix ist eine Diagonalmatrix, in welcher oberhalb der Diagonale nicht aus Nullen besteht:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 9 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

#### 4.1.4 Rang

Anzahl Zeilen der Matrix A, die bei der Lösung eines linearen Gleichungssystems mit dem Gauss-Algorithmus nicht zu Nullzeilen werden. Die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 23 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hat also den Rang 2.

#### 4.1.5 Linearkombination

- Alle Linearkombinationen einer Menge von Vektoren bilden einen Vektorraum
- Einige Vektoren lassen sich als Linearkombinationen von anderen Vektoren darstellen
- Aus einem linear unabhängigen Erzeugendensystem lässt sich kein Vektor weglassen, ohne den erzeugten Vektorraum zu verkleinern

### 4.1.6 Lineare Abhängigkeit

Vektoren sind linear unabhängig, wenn keiner der Vektoren sich als Linearkombination der jeweils anderen Vektoren darstellen lässt (sie dürfen also z. B. nicht in die selbe Richtung zeigen.)

Das heisst, dass Vektoren linear unabhängig sind, wenn aus  $\lambda_1 \cdot \vec{v}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{v}_2 + \dots + \lambda_n \cdot \vec{v}_n = \vec{0}$  folgt, dass  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$

Wenn es nach der Gauss-Elimination Nullzeilen gibt, sind die Vektoren linear abhängig (= nicht linear unabhängig). Es gibt nur so viele linear unabhängige Vektoren, wie es keine Nullzeilen gibt (=Rang):

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Die fünf Vektoren (= Spalten der Matrix) sind linear abhängig
- Nur zwei der fünf Vektoren sind linear unabhängig

### 4.1.7 Erzeugendensystem

Ein Erzeugendensystem  $E$  spannt eine Ebene / einen Raum der Dimension  $n$  auf:

$$E = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$$

Die Vektoren  $\vec{v}_1$  bis  $\vec{v}_n$  müssen nicht zwingend linear unabhängig sein.

### 4.1.8 Basis

Eine Basis spannt ebenfalls eine Ebene / einen Raum der Dimension  $n$  auf:

$$B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$$

Die Vektoren  $\vec{v}_1$  bis  $\vec{v}_n$  sind zwingend linear unabhängig. Keiner der Vektoren ist also ein Vielfaches eines anderen Vektoren.

### 4.1.9 Normalbasis / Kanonische Basis

Die Normalbasis / kanonische Basis besteht aus Einheitsvektoren, die linear unabhängig sind:

$$B_E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_m\}$$

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Der Betrag von einem Einheitsvektor der Normalbasis ist 1:  $|\vec{e}_i| = 1$
- Beim Skalarprodukt von zwei Einheitsvektoren der Normalbasis gilt

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \vec{e}_i \neq \vec{e}_j \\ 1 & \text{wenn } \vec{e}_i = \vec{e}_j \end{cases}$$

## 4.2 Rechnen mit Vektoren

Vektoren können addiert werden:

$$\vec{x}_n + \vec{y}_n = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

Vektoren können multipliziert werden:

$$23 \cdot \vec{x} = 23 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \cdot x_1 \\ 23 \cdot x_2 \\ \vdots \\ 23 \cdot x_n \end{pmatrix}$$

Der Definitionsbereich wird mit  $\vec{x}_n \in \mathbb{R}^n$  angegeben.

### 4.2.1 Weitere Rechenregeln für Vektoren

- $\vec{0}$  ist das neutrale Element:  $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$

- $-\vec{v}$  ist das inversive Element:  $\vec{v} + (-\vec{v}) = 0$
- Es gilt die Assoziativität:  $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
- Es gilt die Kommutativität:  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- Man kann Skalarkörper ( $s$ ) ausmultiplizieren oder ausklammern:  $s(\vec{u} + \vec{v}) = s \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$

### 4.2.2 Matrix mal Vektor

Eine Matrix kann mit einem Vektor multipliziert werden (Zeile der Matrix · Spalte vom Vektor):

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Zudem gilt folgendes Gesetz:

$$A \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = A \cdot \vec{v} + A \cdot \vec{w}$$

## 4.3 Lineare Gleichungssysteme

### 4.3.1 Begriffe

- Ein lineares Gleichungssystem ist homogen, wenn die rechte Seite für alle Gleichungen = 0 ist.
- Ein lineares Gleichungssystem ist inhomogen, wenn die rechte Seite nicht immer = 0 ist. Spezielle Lösung = Rückwärts einsetzen; allgemeine Lösung = Rechte Seite gleich Null.

### 4.3.2 Erweiterte Koeffizientenmatrix

Das (inhomogene) Gleichungssystem

$$2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \tag{1}$$

$$-1x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \tag{2}$$

$$3x_1 - x_3 = 3 \tag{3}$$

kann auch als erweiterte Koeffizientenmatrix geschrieben werden:

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{array}$$

### 4.3.3 Gauss-Algorithmus / Gauss-Elimination

Mit der Gauss-Elimination macht man die Zahlen links unter der Diagonale der erweiterten Koeffizientenmatrix zu Nullen. Dabei darf man folgende Aktionen durchführen:

- Zeilen vertauschen: gibt keine Probleme
- Spalten vertauschen: ok, aber beim Lösungsvektor wieder zurücktauschen!
- Multiplikation einer Gleichung mit einem Skalar
- Addition einer Gleichung zu einer anderen Gleichung

Nach den Umformungen kann das so aussehen:

$$\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Durch rückwärts Einsetzen kann man jetzt *eine* Lösung bestimmen:  $x_3$  sieht man in der untersten Zeile, also ist  $x_3 = 0$ . Jetzt setzt man  $x_3$  in der zweiten Zeile ein, das ergibt  $x_2 = 2$ . Dasselbe macht man für  $x_1$  und man erhält folgenden Vektor:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Setzt man diese Lösung ins erste Gleichungssystem ein, sieht man, dass es mit diesen Lösungen funktioniert. Die Lösung ist auch für alle Vielfachen der Lösung gültig.

### 4.3.4 Lösungsmengen

Ein Gleichungssystem kann keine Lösung haben:

$$x_1 + x_2 = 1 \tag{4}$$

$$x_1 + x_2 = 2 \tag{5}$$

Oder unendlich viele:

$$x_1 + x_2 = 2$$

Dabei ist die Lösungsmenge für  $x_1 = t$  und  $x_2 = 2 - t$ .

Ist die letzte Zeile eine Nullzeile, gibt es auch unendlich viele Lösungen:

$$\begin{array}{cccc} 1 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Eine spezielle Lösung gibt es durch Rückwärtseinsetzen mit  $x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = 2 \Rightarrow = 1$ . Das ist der Aufhänger:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die allgemeine Lösung ergibt sich dadurch, dass man die rechte Seite gleich Null setzt:

$$\begin{array}{cccc} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Die dritte Zeile ist eine Nullzeile. Die zweite Zeile heisst  $3x_2 + 4x_3 = 0$ . Das hat unendlich viele Lösungen, z. B.  $x_2 = 4$  und  $x_3 = -3$ . Dann folgt aus der ersten Zeile wegen  $x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0$ , dass  $x_1 = -1$  ist. Eine Lösung des homogenen Systems ist also:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Alle Lösungen des inhomogenen Gleichungssystems ergeben sich als Summe einer speziellen Lösung des inhomogenen Gleichungssystems plus alle Lösungen des homogenen Gleichungssystems:

$$\text{Lösung}(A, \vec{b}) = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{Lösung} = \text{Spezielle Lösung} + \lambda \cdot \text{allgemeine Lösung}, \lambda \in \mathbb{R}$$

#### 4.3.5 Lösen eines inhomogenen Gleichungssystems

Inhomogene Gleichungssysteme haben die Rechte seite immer  $\neq 0$  und besitzen eine spezielle und eine allgemeine Lösung.

Das Gleichungssystem

$$x_1 + x_2 + 3 \cdot x_3 = 4 \quad (6)$$

$$2 \cdot x_1 + x_2 - x_3 = -5 \quad (7)$$

$$3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = -1 \quad (8)$$

ergibt die Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & -5 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Nach der Gauss-Elimination hat man folgende Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -7 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Daher ist  $x_3 = 0$ . Somit ist  $x_2 = 13$  und  $x_1 = 4 - 13 = -9$ . Das ist die spezielle Lösung.

Die allgemeine Lösung erhält man, wenn man  $x_3 = 1$  und die rechte Seite überall auf 0 setzt. Dann bekommt man  $x_2 = -7$  und  $x_3 = 4$ .

Die Lösungsmenge ist schlussendlich:

$$\text{Lösung}(A, \vec{b}) = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \middle| \vec{x} = \begin{pmatrix} -9 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{Lösung} = \text{Spezielle Lösung} + \lambda \cdot \text{allgemeine Lösung}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Wichtig: Hat man mehrere Nullzeilen, so muss für jede Nullzeile das entsprechende  $x_n$  auf 1 (und deas andere auf 0) gesetzt werden und die Lösungsmenge erweitert sich dann um einen Faktor mal die allgemeine Lösung von diesem  $x_n$ .

## 4.4 Geraden und Ebenen

### 4.5 Definition

Die Gerade

$$G : \vec{p} = \vec{a} + s \cdot \vec{r}$$

ist definiert durch den Aufhänger  $\vec{a}$ , den Skalar/Parameter  $s$  und den Richtungsvektor  $\vec{r}$ .

### 4.5.1 Punkt auf Gerade

Um zu prüfen, ob ein Punkt  $B$  auf einer Geraden  $g$  liegt, setzt man die Gerade  $g$  mit dem Punkt  $B$  gleich und löst das Gleichungssystem.

### 4.5.2 Schnittpunkt zweier Geraden im $\mathbb{R}^3$

Um den Schnittpunkt der Geraden  $g_1$  und  $g_2$  im  $\mathbb{R}^3$  festzustellen, setzt man diese gleich. Die Geraden heißen:

$$g_1 : \vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g_2 : \vec{q} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Jetzt setzt man die zwei Geraden gleich:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Die Aufhänger kann man addieren und auf die rechte Seite nehmen. Die Richtungsvektoren kommen auf die linke Seite.

$$s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt das Gleichungssystem (Vorsicht mit den Vorzeichen!), welches man lösen kann:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & -8 \end{pmatrix}$$

Da in der ersten Spalte  $s$  und in der zweiten Spalte  $t$  ist (da das Gleichungssystem so aufgestellt wurde), kommt man auf  $t = 2$  und  $s = -1$ . Jetzt kann man  $s$  oder  $t$  in  $g_1$  bzw.  $g_2$  einsetzen und man erhält den Schnittpunkt  $S = (-4, 3, 1)$ .

Ist das Gleichungssystem nicht lösbar ( $\text{Rang}(A, \vec{b}) > \text{Rang}(A)$ ), gibt es keinen Schnittpunkt. Die Geraden sind dann *windschief*.

## 4.6 Norm und Skalarprodukt

### 4.6.1 Betrag eines Vektors (Länge)

Der Betrag eines Vektors, also die Länge, rechnet sich wie folgt:

$$|\vec{v}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}$$

Der Betrag vom Vektor  $\vec{u}$  aus dem  $\mathbb{R}^3$  ist also:

$$|\vec{u}| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3$$

Der Abstand zweier Vektoren ist der Betrag der Differenz der beiden Vektoren. Der Abstand zwischen

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ ist } |\vec{u} + \vec{v}| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

Bei den Beträgen gelten folgende Rechenregeln:

- Ist der Betrag eines Vektors 0, ist der Vektor der Nullvektor:  $|\vec{v}| = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$
- $|r \cdot \vec{v}| = |r| \cdot |\vec{v}|$
- Dreiecksungleichung:  $|\vec{v}_1 + \vec{v}_2| \leq |\vec{v}_1| + |\vec{v}_2|$

### 4.6.2 Normalenvektor

Der Normalenvektor steht senkrecht zu einem Vektor. Das Skalarprodukt zwischen dem Vektor  $\vec{v}$  und dem Normalenvektor  $\vec{n}$  ist gleich 0.

$$\vec{n} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$$

Daraus folgt die Gleichung:

$$1 \cdot \vec{x}_1 - 2 \cdot \vec{x}_2 + 3 \cdot \vec{x}_3 + 4 \cdot \vec{x}_4 = 0$$

Nach dem Auflösen ergibt sich die Lösung:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

*Trick:*  $x_1$  und  $x_2$  auf vertauschen und eines davon mit  $-1$  multiplizieren. Die restlichen  $x_n$  auf Null setzen!

### 4.6.3 Skalarprodukt

Das Skalarprodukt ist das Produkt der Beträge zweier Vektoren mit dem Kosinus des eingeschlossenen Winkels. Man erhält eine reelle Zahl.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\phi)$$

Das Skalarprodukt im  $\mathbb{R}^n$  kann auch anders berechnet werden (ohne Kosinus):

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^n u_i \cdot v_i$$

Das Skalarprodukt von den beiden Vektoren  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$  aus dem  $\mathbb{R}^3$  mit

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

ist also

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot 3 + 6 \cdot 1 + 3 \cdot (-4) = 0$$

Ist das Skalarprodukt  $= 0$ , stehen die Vektoren senkrecht zueinander!

Der Winkel der beiden Vektoren lässt sich mit folgender Formel berechnen:

$$\phi := \arccos \left( \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \right)$$

Ist  $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$ , so ist  $\cos(\phi) = 1$  und somit der Winkel  $\phi = 0$ . Diese Vektoren nennt man *kollinear*.

Beim Skalarprodukt gelten folgende Rechenregeln:

- Grösser gleich Null:  $\vec{v} \cdot \vec{v} \geq 0$

- Nullvektor: Ist  $\vec{v} \cdot \vec{v} = 0$ , dann ist  $\vec{v} = \vec{0}$
- Assoziativität ( $r \in \mathbb{R}$ ):  $(r \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v} = r \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v})$
- Distributivität:  $(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) \cdot \vec{v} = \vec{u}_1 \cdot \vec{v} + \vec{u}_2 \cdot \vec{v}$
- Kommutativität:  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

## 4.7 Normalenform der Geraden / Ebenen

Der Normalenvektor  $\vec{n}$  steht senkrecht zu einer Gerade  $g$ . Da das Skalarprodukt bei zwei senkrecht stehenden Vektoren 0 ist, kann man die Gerade zu einem Normalenvektor berechnen:

Ist der Normalenvektor

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dann gibt es aus folgender *Normalenform* eine lineare Gleichung:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Normalenform}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{-x_1 + x_2}_{\text{lineareGleichung}} = 0$$

Somit ist die Gerade  $x_1 = x_2$ .

Wir haben eine Gerade  $g$  mit dem Normalenvektor  $\vec{n}$ . Die Lage der Gerade wird mit einem Ortsvektor  $\vec{a}$  („Aufhänger“) festgelegt. Zudem haben wir einen Punkt  $P$  mit dem Ortsvektor  $\vec{r}$ . Es gilt nun:  $\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{a}) = 0$ .

### 4.7.1 Normalenform im $\mathbb{R}^2$

### 4.7.2 Hessesche Normalenform

Die Hessesche Normalenform erhält man, wenn man die Normalengleichung  $\vec{n} \cdot \vec{r} - b = 0$  durch den Betrag des Normalenvektors  $|\vec{n}|$  teilt. Mit den Definitionen  $\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$  und  $b_0 = \frac{b}{|\vec{n}|}$  ergibt sich die Form:

$$\vec{n}_0 \cdot \vec{r} - b_0 = 0$$

Das Skalarprodukt ist

$$\vec{n}_0 \cdot \vec{r} = |\vec{n}_0| \cdot |\vec{r}| \cdot \cos(\phi) = b_0$$

Wegen dem rechten Winkel gilt für den Abstand

$$\frac{x}{|\vec{r}|} = \cos(\phi)$$

## 4.8 Basen und Koordinaten

Im Erzeugendensystem  $\vec{x} = \lambda_1 \cdot \vec{v}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{v}_2 + \dots + \lambda_n \cdot \vec{v}_n$  erzeugen  $\vec{v}_1$  bis  $\vec{v}_n$  ein Vektorraum.

## 5 Matrizen

### 5.1 Rechenregeln für Matrizen

#### 5.1.1 Addition

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} & \dots & a_{1m} + b_{1m} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} & \dots & a_{2m} + b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & a_{n3} + b_{n3} & \dots & a_{nm} + b_{nm} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Beispiel:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

#### 5.1.2 Multiplikation mit einem Skalar

Eine Matrix  $A$  kann mit einem Skalar  $k$  multipliziert werden. Dabei ist  $k \in \mathbb{R}$ .

$$k \cdot A = k \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} & \dots & k \cdot a_{1m} \\ k \cdot a_{21} & k \cdot a_{22} & \dots & k \cdot a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k \cdot a_{n1} & k \cdot a_{n2} & \dots & k \cdot a_{nm} \end{pmatrix}$$

Beispiel (für  $k \in \mathbb{R}$ ):

$$k \cdot A = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

#### 5.1.3 Matrix-Multiplikation

Wir haben die Matrix  $A$  und die Matrix  $B$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Man nimmt die Zeilenvektoren der Matrix  $A$  (Das  $T$  steht für Transformiert)

$$\vec{z}_1 = (1, 2, 4)^T, \vec{z}_2 = (3, 2, 1)^T$$

und die Spaltenvektoren der Matrix  $B$ :

$$\vec{s}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{s}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{s}_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{s}_4 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Das Produkt der Matrix  $A$  mit der Matrix  $B$  ergibt sich aus den Skalarprodukten der Zeilen- und Spaltenvektoren (Zeilen der rechten  $\times$  Spalten der linken Matrix):

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} \vec{z}_1 \cdot \vec{s}_1 & \vec{z}_1 \cdot \vec{s}_2 & \vec{z}_1 \cdot \vec{s}_3 & \vec{z}_1 \cdot \vec{s}_4 & \vec{z}_1 \cdot \vec{s}_2 \\ \vec{z}_2 \cdot \vec{s}_1 & \vec{z}_2 \cdot \vec{s}_2 & \vec{z}_2 \cdot \vec{s}_3 & \vec{z}_2 \cdot \vec{s}_4 & \vec{z}_2 \cdot \vec{s}_2 \end{pmatrix}$$

Das rechnet man am Besten mit einer Tabelle:

		1	1	0	-1
A	·	0	3	1	-1
		2	0	2	-2
1	2	4	9	7	10
3	2	1	5	9	4
					-7

Das Produkt hat immer so viele Zelen wie der erste Faktor. Das heisst jetzt:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 10 & -11 \\ 5 & 9 & 4 & -7 \end{pmatrix}$$

Wichtig:

- Die Faktoren dürfen nicht vertauscht werden:  $A \cdot B \neq B \cdot A$
- Eine  $2 \times 4$  und  $4 \times 4$  Matrix kann auch nicht multipliziert werden.

## 5.2 Matrizen und ihre Inversen

## 6 Lineare Abbildungen

### 6.1 Koordinaten und Transformation

Eine lineare Abbildung beschreibt die Abbildung zwischen zwei Vektorräumen über demselben Körper.

*Spalten der Matrix = die Bilder der Basisvektoren*

$$A \cdot \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_1' = \vec{e}_2$$

### 6.2 Determinanten

#### 6.2.1 Determinante einer 2x2 Matrix

Von der Matrix  $A$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Ist die Determinante

$$\text{Det}(A) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

Produkt der ersten Diagonale minus Produkt der zweiten Diagonale.

#### 6.2.2 Invertierende einer 2x2 Matrix mit der Determinante berechnen

$$A^{-1} = \frac{1}{\text{Det}(A)} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Kehrwert der Determinante multipliziert mit der Matrix von A, in welcher die erste Diagonale vertauscht wurde und die zweite Diagonale mit  $(-1)$  multipliziert wurde.

#### 6.2.3 Regeln für das Rechnen mit Determinanten

Folgende Regeln sind bei Operationen mit Determinanten zu beachten:

- Determinanten können nur bei quadratischen Matrizen berechnet werden.
- Vertauschen von Zeilen oder Spalten ändert das Vorzeichen der Determinante.
- Wenn eine Zeile mit  $c \neq 0$  multipliziert wird, wird die Determinante mit  $c$  multipliziert.
- Die Determinante ist Null, wenn ist eine gesamte Zeile oder eine gesamte Spalte = 0 ist.
- Die Determinante ist Null, wenn zwei Spalten oder zwei Zelen gleich sind.
- Die Determinante ist Null, wenn Zeilen oder Spalten linear abhängig sind.
- Eine obere Dreiecksmatrix hat als Determinante das Produkt der Diagonale.
- $\text{Det}(A \cdot B) = \text{Det}(A) \cdot \text{Det}(B)$
- Ist die Matrize  $A$  invertierbar, dann ist  $\text{Det}(A^{-1}) = \frac{1}{\text{Det}(A)}$

### 6.2.4 Determinante einer 3x3 Matrix

Die Determinante einer 3x3 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Berechnet sich so:

$$\text{Det}(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} - a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12}$$

Man wiederholt die Zahlen der Matrix hinter der Matrix und multipliziert alle 'fallenden' Diagonalprodukte und subtrahiert alle 'steigenden' Diagonalprodukte.

### 6.2.5 Determinante einer nxm Matrix

## 6.3 Eigenwerte und Eigenvektoren

### 6.3.1 Berechnung der Eigenvektoren

## 7 Begriffe

### 7.1 Ist Teiler von

Folgendes heisst  $a$  ist ein Teiler von  $b$ :

$$a|b$$

### 7.2 Summenformel

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \dots + n$$

Man kann sich das wie eine For-Schleife vorstellen:

```
for i in 'seq k n'
do
  SUM=$($SUM + i)
done
```

### 7.3 Produkteformel

$$\prod_{k=1}^n k = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$$