

1 Fluide Einführung

DEFINITION 1.1. **Fluid** Flüssigkeiten und Gase werden unter dem Oberbegriff *Fluide* zusammengefasst.

DEFINITION 1.2. **Druck und Schubspannung** Für einfache Fälle der Cauchy Spannungstensor kann zu zwei Skalare p und τ vereinfacht werden, sie werden Druck bzw. Schubspannung genannt.

$$pA = \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} = F_{\perp} \quad \tau A = \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{T}} = F_{\parallel} \stackrel{\text{statik}}{=} 0$$

$$[p] = \text{N m}^{-2} = \text{Pa}$$

Folgerung 1.2.1. **Gesetz von Pascal** In ruhenden Fluiden $\tau = 0$, somit ist die Kraft immer senkrecht.

Name	Einheit
Kilopond	1 kp = g N ≈ 9.81 N
Technische Atmosphäre	1 at = 1 kp cm ⁻² ≈ 0.98 bar
Physikalische Atmosphäre	1 atm = 101 325 Pa
Torr	1 Torr = 1/760 atm $= \rho_{\text{Hg}} \cdot g \cdot 1 \text{ mm}$
Bar	1 bar = 1×10^5 Pa ≈ 750 Torr

Tabelle 1: Einheiten des Drucks

DEFINITION 1.3. **Dichte** Ist die Masse pro Volumeneinheit.

$$\varrho = \frac{m}{V} \quad [\varrho] = \text{kg m}^{-3}$$

2 Hydrostatik K.1-2

DEFINITION 2.1. **Schweredruck**

$$dp = \varrho \mathbf{g} \cdot d\mathbf{y} = -\varrho g dy \quad (2.1)$$

Folgerung 2.1.1. **Hydrostatischer Druck** Für Flüssigkeiten, da die Dichte konstant ist folgt:

$$p = \varrho gh$$

Folgerung 2.1.2. **Schweredruck eines Gase** Angenommen dass, die Dichte nur von Druck abhängt (barotrop)

$$\varrho(p) = \varrho_0 \frac{p}{p_0}$$

Die Lösung von (2.1) ergibt die *Barometrische Höhenformel* für eine isotherme Atmosphäre.

$$p(h) = p_0 \exp\left(-\frac{\varrho_0}{p_0} gh\right)$$

DEFINITION 2.2. **Gesetz von Boyle-Mariotte** Für ein ideales Gas gilt bei konstanter Temperatur

$$pV = (\text{konstant})$$

Folgerung 2.2.1. Die Dichte ist proportional zum Druck

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{\varrho_1}{\varrho_2}$$

DEFINITION 2.3. **Kompressibilität** Die Druckerhöhung Δp bewirkt in einem Fluid stets eine Volumenabnahme. Die relative Volumenänderung ist proportional zur Druckänderung

$$\Delta V/V = -\kappa \Delta p$$

Bemerkung 2.3.1. Eine ideale Flüssigkeit ist reibungsfrei und inkompressibel.

Bemerkung 2.3.2. In einer idealen Flüssigkeit ist die Dichte konstant.

DEFINITION 2.4. **Statische Auftriebskraft** Auch als Archimedische Prinzip bekannt.

$$F_A = G_f = \varrho_f V_k g \quad \hat{\mathbf{F}}_a = -\hat{\mathbf{g}}$$

Der auftrieb eines in ein Fluid eingetauchten Körper ist gleich dem Gewicht des von ihm verdrängten Fluids.

2.1 Grenzflächeneffekte

DEFINITION 2.5. **Oberflächenspannung** Zwischen zwei Atomen oder Molekülen tritt die *Van der Waals*-Kraft. An der Oberfläche der Flüssigkeit ist der mittlere Abstand der Moleküle etwas grösser als im Innern. Das bewirkt eine Parallel zur Oberfläche gerichtete anziehende Kraft zwischen den Molekülen.

$$\sigma = \frac{F}{\ell} \quad [\sigma] = \text{N m}^{-1}$$

Bemerkung 2.5.1. Die Oberflächenspannung kann auch als *spezifische Oberflächenenergie* bezeichnet werden.

$$\sigma = \frac{\Delta W}{\Delta A} = \frac{F \Delta s}{\ell \Delta s} = \frac{F}{\ell}$$

Die *Oberflächenenergie* ist ein Maß für die Energie, die zum Aufbrechen der chemischen Bindungen notwendig ist, wenn eine neue Oberfläche einer Flüssigkeit oder eines Festkörpers erzeugt wird.

Folgerung 2.5.1. **Grenzflächenspannung** Bei einer Vergrößerung der Grenzfläche muss Arbeit geleistet werden, da die Grenzflächenenergie vergrößert wird. Es gibt dann auch die Grenzflächenspannungen $\sigma_{\text{sl}}, \sigma_{\text{sg}}, \sigma_{\text{lg}}$ (flüssig = liquid, fest = solid, gas) die zwischen Festkörper und Flüssigkeit wirken. φ ist dann der *Kontaktwinkel*, und die Geometrie ergibt die Beziehung

$$\sigma_{\text{sg}} = \sigma_{\text{sl}} + \sigma_{\text{lg}} \cos \varphi$$

Beispiel 2.5.1. Druck in Seifenblase

$$p = \frac{2\sigma}{r}$$

DEFINITION 2.6. **Kapillarität** Allgemein an die Grenze gilt:

$$F_{\text{Oberfläche}} = F_{G, \text{Flüssigkeit}}$$

Folgerung 2.6.1. In einem Rohr (Zylinder)

$$2\pi r\sigma = \rho\pi r^2 h g \implies h = \frac{2\sigma}{\rho g r}$$

3 Hydrodynamik

3.1 Einführung K.3-4

DEFINITION 3.1. **Kontinuitätsgleichung**

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = \oint_{\partial V} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} \quad (3.1)$$

Folgerung 3.1.1. **Ideales Fluid** Da die Dichte konstant ist (inkompressibel), man kann (3.1) durch ρ teilen und folgt:

$$\dot{V} = \int_A \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = vA = \frac{\dot{m}}{\rho} \quad [\dot{V}] = \text{m}^3 \text{s}^{-1}$$

DEFINITION 3.2. **Bernoulli Gleichung** Der Term $\rho v^2/2$ wird *dynamische Druck* genannt.

$$p + \rho gh + \frac{\rho}{2} v^2 = (\text{Konstant})$$

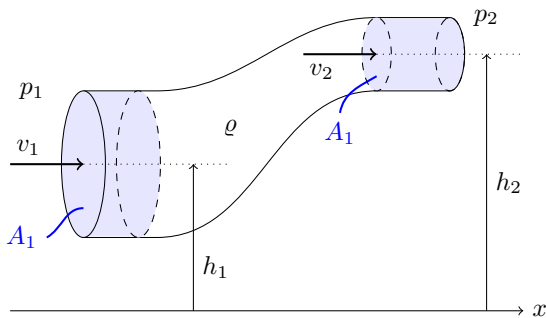


Abbildung 1: Schematische Darstellung für die Bernoulli Gleichung

Bemerkung 3.2.1. Bernoulli gilt für inkompressible Fluide, und genügt für Flüssigkeiten und Gase, sofern $v \ll$ Schallgeschwindigkeit.

Folgerung 3.2.1.

$$p_1 + \rho gh_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 = p_2 + \rho gh_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2$$

oder $-\Delta p = \rho g \Delta h + \frac{\rho}{2} \Delta(v^2)$

Folgerung 3.2.2. Wo die Geschwindigkeit am schnellsten ist, dort ist die Druck am tiefsten.

3.2 Reale Strömungen K.5-6

DEFINITION 3.3. **Newton'sche Reibungsgesetz** Die Proportionalitätskonstante η wird *dynamische Viskosität* oder *Zähigkeit* genannt.

$$\tau = \eta \frac{dv}{dz} \stackrel{!}{=} \frac{F_{\parallel}}{A}$$

$$[\eta] = \text{kg m}^{-1} \text{s} = \text{N s m}^{-1} = \text{Pa s}$$

Folgerung 3.3.1. **Bernoulli Gleichung bei Newton'scher Reibung**

$$p_1 + \rho gh_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 = p_2 + \rho gh_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2 + p_v$$

In der Praxis wird der Druckverlust p_v oft als Verlusthöhe h_v angegeben, d.h. diejenige Höhe, um die der Zufluss angehoben werden muss, um an Ausfluss aus der Stromröhre denselben Druck wie im reibungsfreien Fall zu erzeugen.

$$p_v = \rho gh_v$$

DEFINITION 3.4. **Formel von Stokes** (Stokes'sche Reibung) Reibungskraft einer Kugel im Öl

$$F_R = 6\pi\eta R v_0$$

DEFINITION 3.5. **Laminare Rohrströmung** Lauten die Gleichgewichtsbedingungen für die Kräfte innerhalb des Zylinders.

$$F_{\text{Res, Druck}} - F_{\text{Reib}} = 0$$

$$\pi r^2 (p_1 - p_2) - 2\pi r l \tau = 0$$

Folgerung 3.5.1. **Geschwindigkeitsverteilung** Innerhalb des Zylinders (r von 0 bis R)

$$v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta l} (R^2 - r^2)$$

Folgerung 3.5.2. **Gesetz von Hagen Poiseuille**

$$\dot{V} = \frac{\pi \Delta p R^4}{8\eta l} \quad (3.2)$$

Folgerung 3.5.3. **Druckabfall** Wenn man in (3.2) $\dot{V} = \pi R^2 v$ einsetzt, folgt:

$$\Delta p = 32\eta l \frac{v}{d^2}$$

Bemerkung 3.5.1. Bei einer Zunahme des Rohrradius wird nicht nur die zur Verfügung stehende Querschnittsfläche grösser, sondern zugleich wächst in der Rohrmitte auch die maximale Geschwindigkeit.

DEFINITION 3.6. **Prandtl'sche Grenzschicht** D_1 ist die Dicke der Schicht in unmittelbarer Nähe einer Oberfläche mit Länge ℓ an ein Fluid, der vorbeiströmt, der mitgezogen wird. Siehe Abb. 2.

$$D_1 = \frac{\ell}{\sqrt{R}} = \sqrt{\frac{\eta \ell}{\rho v}}$$

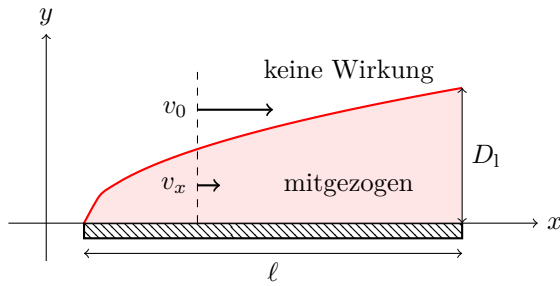


Abbildung 2: Laminare Grenzschicht für eine Platte in einem Strömungsfeld mit Geschwindigkeit v_0 , und $\ell \gg D_1$.

DEFINITION 3.7. Reynolds Zahl Ist ein dimensionslose Koeffizient aus der *Navier-Stokes* Gleichung, der das Verhältnis zwischen kinetischer Energie des Fluides und dessen innerer Reibung (proportional zur Viskosität) beschreibt.

$$\mathcal{R} = \frac{E_k}{E_r} = \frac{\rho}{\eta} v^* \ell^*$$

v^*, ℓ^* sind eine charakteristische Länge bzw. Geschwindigkeit. Sie sind dimensionslose Variablen für geometrische und physikalische Größen.

Folgerung 3.7.1. Rohrströmung Wird bei der Strömung durch ein Rohr mit kreisförmigem Querschnitt der Durchmesser d als charakteristische Abmessung gewählt, somit ist die Reynolds-Zahl

$$\mathcal{R} = \frac{\rho v d}{\eta}$$

DEFINITION 3.8. Kritische Reynoldszahl \mathcal{R}_k

$$\begin{aligned} \mathcal{R} > \mathcal{R}_k &\implies \text{Turbulent} \\ \mathcal{R} \leq \mathcal{R}_k &\implies \text{Laminar} \end{aligned}$$

Folgerung 3.8.1. Kritische Reynoldszahl für die Rohrströmung

$$\mathcal{R}_k = 2320$$

DEFINITION 3.9. Reale Rohrströmung Turbulente Rohrströmung, je nach turbulent oder laminares λ

$$\Delta p = \lambda \frac{\rho \ell}{2d} v^2 \quad (3.3)$$

Beispiel 3.9.1. Turbulente λ nach Blasius

$$\lambda_t = \frac{0.316}{\sqrt[4]{\mathcal{R}}}$$

Beispiel 3.9.2. Laminare λ nach Hagen-Poiseuille Das ist tatsächlich (3.2) umformuliert.

$$\lambda_l = \frac{64}{\mathcal{R}}$$

3.3 Widerstandskräfte

DEFINITION 3.10. Auftriebskraft nach Kutta-Jukowski Dieser Auftrieb ist eine Folgerung vom *Magnus Effekt*.

$$F_A = \rho v \ell \Gamma$$

DEFINITION 3.11. Druckwiderstand

$$F_D = c_W \frac{\rho}{2} v^2 A_{\perp}$$

DEFINITION 3.12. Zirkulation Ist ein Mass für die Wirbelstärke. Die Zirkulation ist eine makroskopische Grösse und hängt vom Weg ab.

$$\Gamma = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}$$

Induzierter Widerstand

$$F_W = c_W^* \frac{\rho}{2} v^2 A_{\parallel}$$

Dynamischer Auftrieb

$$F_A = c_A \frac{\rho}{2} v^2 A_{\perp}$$

Gleitwinkel

$$\tan(\varphi) = \frac{F_W}{F_A} = \frac{c_W}{c_A} = \frac{v_V}{v_H}$$

4 Wärmelehre Einführung

DEFINITION 4.1. Absolute Temperatur

$$T = \vartheta + 273.15 \text{ K} = \vartheta - \vartheta_0$$

DEFINITION 4.2. Stoffmenge Hier *Partikel* steht für Moleküle, Atome oder Ionen.

$$1 \text{ mol} = N_A \text{ Partikeln} = 6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

Der Avogadro-Zahl N_A entspricht Anzahl von Partikeln in eine Mole, und 1 Mol ist als der Anzahl von Atome ^{12}C in 0.012 kg definiert worden.

4.1 Flüssigkeiten und Festkörpern

DEFINITION 4.3. Thermische Ausdehnung

$$\begin{aligned} \Delta \ell &= \alpha \ell \Delta T \\ \Delta A &= \beta A \Delta T & \beta &\approx 2\alpha \\ \Delta V &= \gamma V \Delta T & \gamma &\approx 3\alpha \end{aligned}$$

Bemerkung 4.3.1. Anomalie des Wassers Bei der Temperatur 4°C verschwindet sein Volumenausdehnungskoeffizient. Ebenfalls ungewöhnlich ist, dass die Dichte des festen Zustandes kleiner ist als die des flüssigen Zustandes.

Folgerung 4.3.1. Termische Spannung

$$\sigma = E \varepsilon = E \frac{\Delta \ell}{\ell} = E \alpha \Delta T$$

4.2 Ideale Gase

DEFINITION 4.4. **Universelle Gasgleichung für ideale Gase**

$$pV = nRT = nN_A k_B T = (\text{konstant})$$

$$\text{oder } \frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$$

- $R = N_A k_B = 8.313 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ ist die Universelle Gaskonstante
- $k_B = 1.381 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$ ist die Boltzmann-Konstante.

DEFINITION 4.5. **Molzahl und Molmasse**

$$nM = m = \frac{N}{N_A} M$$

wobei M ist die sogenannte Molmasse in kg mol^{-1} .

Folgerung 4.5.1. **Spezifische Gaskonstante R_s**

$$pV = \frac{m}{M} RT = m R_s T$$

Folgerung 4.5.2. **Dichte eines Gases**

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{M}{V_m} = \frac{pM}{RT}$$

4.3 Gemische idealer Gase

DEFINITION 4.6. **Partialdruck** Der Druck p_i ist der Druck, den die Gaskomponente i hätte, wenn ihr bei der Temperatur T das ganze Volumen V zur Verfügung hätte.

DEFINITION 4.7. **Gesetz von Dalton** In einem Gasgemisch ist die Summe der Partialdrücke gleich dem Gesamtdruck.

$$p = \sum_{i=1}^n p_i$$

DEFINITION 4.8. **Volumen- und Massen-Konzentration**

$$q_i = \frac{V_i}{V} = \frac{n_i}{n} \quad \mu_i = \frac{m_i}{m} = \frac{M_i}{M} q_i$$

DEFINITION 4.9. **Mol-Masse eines Gas-Gemischs**

$$M = \sum_{i=1}^n q_i M_i$$

4.4 Reales Gas K.9

DEFINITION 4.10. **Van der Waals-Korrektur**

$$p' V'_m = nRT \quad p' = p + \frac{a}{V_m^2} \quad V'_m = V_m - b$$

Folgerung 4.10.1. **Van der Waals-Gleichung**

$$\left(p + \frac{n^2 a}{V^2}\right) (V - nb) = nRT$$

Folgerung 4.10.2. **Van der Waals-Parameter**

$$a = \frac{9}{8} RT_k V_{mk} \quad b = \frac{V_{mk}}{3}$$

Folgerung 4.10.3. **Kritische Grössen**

$$V_{mk} = 3b \quad T_k = \frac{8a}{27Rb} \quad p_k = \frac{a}{27b^2}$$

DEFINITION 4.11. **Maxwell-Konstruktion** In der Abb. 3 der bei der Van der Waals-Gleichung beschriebene Bereich A-D ist unrealistisch. Eigentlich sind dazwischen flüssige und gasförmige Phase miteinander im Gleichgewicht, und die Druck p_s bleibt konstant.

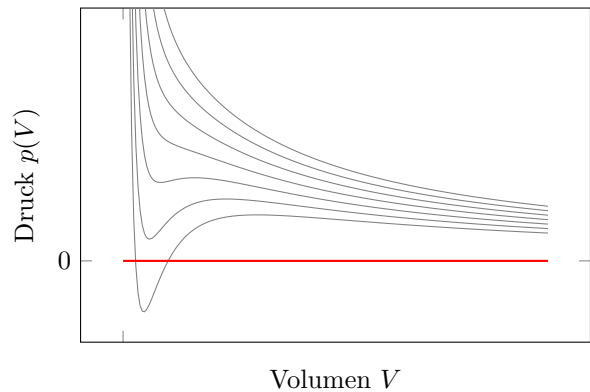


Abbildung 3: Van-Der-Waals Zustandskurven und die Maxwell-Konstruktion

4.5 Kinetische Gastheorie K.10

DEFINITION 4.12. **Erster Hauptsatz der Thermodynamik** Die innere Energie U ist die gesamte in einem System enthaltene Energie.

$$dU = \delta W + \delta Q \quad \Delta U = \Delta W + \Delta Q$$

$$[U] = [E] = \text{J}$$

Bemerkung 4.12.1. δW und δQ sind keine Differentiale von Zustandsgrößen, da Arbeit und Wärme sind keine Zustandsgrößen, sondern Prozessgrößen.

Folgerung 4.12.1. **Es gibt kein Perpetuum mobile erster Art**

$$\oint dU = 0, \text{ aber } \oint \delta W \neq 0 \text{ und } \oint \delta Q \neq 0$$

DEFINITION 4.13. **Spezifische und molare Wärmekapazität** C ist die Wärmekapazität, $c = C/m$ heißt spezifische Wärmekapazität und $C_m = C/n = Mc$ ist die molare Wärmekapazität.

$$\delta Q \propto dT \implies \delta Q = C dT = c m dT = C_m n dT$$

DEFINITION 4.14. **Molare Wärmekapazität von Gasen**

$$F ds = p Ads = p dV \implies \delta W = -p dV$$

4.6 Phasen und Phasenübergänge K.11

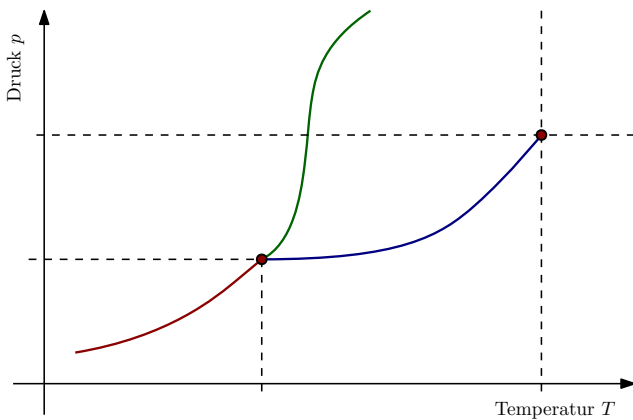


Abbildung 4: FIXME

DEFINITION 4.15. **Clasius-Clapeyron Gleichungen**

$$\frac{dp_s}{dT} = \frac{q_s}{T(\varrho_g^{-1} - \varrho_f^{-1})} \quad \frac{dp_f}{dT} = \frac{q_f}{T(\varrho_f^{-1} - \varrho_s^{-1})}$$

Folgerung 4.15.1. **Dampfdruck und Schmelzdruck**

$$p_s(T) = p_{s_0} \exp \left[\frac{q_s M_w}{R} (T_0^{-1} - T^{-1}) \right]$$

$$p_f(T) = p_{s_0} \exp \left[\frac{q_f M_w}{R} (T_0^{-1} - T^{-1}) \right]$$

Folgerung 4.15.2. **Magnus Dampfdruck** Approximiert die Lösung der Clasius-Clapeyron Differenzialgleichung für Wasser.

$$p_s(\vartheta) = p_{s_0} \exp_{10} \left(\frac{7.5\vartheta}{\vartheta + 265.5} \right)$$

DEFINITION 4.16. **Taupunkt und Taupunktstemperatur** Die Temperatur, bei der beim Abkühlen feuchter Luft Sättigung erreicht wird und Kondensation einsetzt, wird *Taupunkt* genannt.

$$p_D = p_s(\vartheta_d)$$

DEFINITION 4.17. **Luftfeuchtigkeit** m_w ist die Masse des in der Luft enthaltenen Wasserdampfes. m_s ist die maximale Dampfmasse im Sättigungszustand. P_D ist die Partialdruck des Wasserdampfes.

$$\text{Absolute } f = \frac{m_w}{V} \quad [f] = [\varrho]$$

$$\text{Relative } f_r = \frac{m_w}{m_s} = \frac{p_D}{p_s} \leq 1 \quad [f_r] = 1$$

DEFINITION 4.18. **Dichte des feuchten Luft**

$$\varrho_F = \varrho_T + \frac{p_D(M_w - M_L)}{RT} \quad \varrho_F < \varrho_T$$

4.7 Wärmetransport K.13

DEFINITION 4.19. **Fourier'sche Gesetz der Wärmeleitung**

$$j = \frac{\delta Q}{A dt} \propto \frac{dT}{dx} \implies j = -\lambda \frac{dT}{dx}$$

$$[j] = \text{J m}^{-2} \text{s}^{-1} = \text{W m}^{-2} \quad [\lambda] = \text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$$

4.8 Thermodynamische Prozesse K.14

DEFINITION 4.20. **Isobare Zustandsänderungen**

$$\delta Q = n C_{mp} dT \quad \delta W = p dV$$

DEFINITION 4.21. **Isochore Zustandsänderungen**

$$\delta Q = n C_{mv} dT \quad dV = 0 \implies \delta W = 0$$

DEFINITION 4.22. **Isotherme Zustandsänderungen**

$$dT = 0 \implies \delta Q = \delta W$$

$$Q = W = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V} dV = nRT \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)$$

DEFINITION 4.23. **Adiabatische Zustandsänderungen**

Literatur

- [1] HOCHSCHULE FÜR TECHNIK RAPPERSWIL (HSR). *Ph2HAT Vorlesungen und die dazugehörige Unterlagen*, Sourlier David, Frühlingssemester 2020, Rapperswil.
- [2] ARTHUR RUH, BENNO BUCHER. *Physik 1: Mechanik, Fluide, Wärmelehre*. Vol I, HSR, 2014, Rapperswil.
- [3] RICHARD FEYNMAN. *Mainly Mechanics, radiation, and heat. The Feynman Lectures on Physics*, Leighton, Sands, New Millenium Edition, Vol I, Basic Books, California Institute of Technology (Caltech).
- [4] RICHARD FEYNMAN. *Mainly electromagnetism and matter. The Feynman Lectures on Physics*, Leighton, Sands, New Millenium Edition, Vol II, Basic Books, California Institute of Technology (Caltech).

License

Ph2HAT-ZF (c) by Naoki Pross

Ph2HAT-ZF is licensed under a Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 Unported License.

You should have received a copy of the license along with this work. If not, see

<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>