1 Fluide Einführung

Definition 1.1. Fluid Flüssigkeiten und Gase werden under dem Oberbegriff *Fluide* zusammengefasst.

Definition 1.2. Druck und Schubspannung Für einfache Fälle der Cauchy Spannugstensor kann zu zwei Skalare p und τ vereinfacht werden, sie werden Drück bzw. Schubspannung genannt.

$$pA = \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} = F_\perp \qquad \tau A = \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{T}} = F_\parallel \overset{\text{statik}}{=} 0$$
$$[\,p\,] = \mathrm{N\,m^{-2}} = \mathrm{Pa}$$

Folgerung 1.2.1. Gesetzt von Pascal In ruhenden Fluiden $\tau = 0$, somit ist die Kraft immer senkrecht.

Name	Einheit
Kilopond	$1\,\mathrm{kp} = g\,\mathrm{N} \approx 9.81\,\mathrm{N}$
Technische Atmosphäre	$1\,\mathrm{at} = 1\,\mathrm{kp\,cm^{-2}} \approx 0.98\,\mathrm{bar}$
Physikalische Atmosphäre	$1\,\mathrm{atm} = 101\,325\,\mathrm{Pa}$
Torr	$1\,\mathrm{Torr} = 1/760\,\mathrm{atm} = \varrho_{\mathrm{Hg}} \cdot g \cdot 1\,\mathrm{mm}$
Bar	$1\,\mathrm{bar} = 1 \times 10^5\,\mathrm{Pa} \approx 750\,\mathrm{Torr}$

Tabelle 1: Einheiten des Drucks

Definition 1.3. Dichte Ist die Masse pro Volumeneinheit.

$$\varrho = \frac{m}{V} \qquad [\,\varrho\,] = \mathrm{kg\,m^{-3}}$$

2 Hydrostatik K.1-2

Definition 2.1. Schweredruck

$$\mathrm{d}p = \varrho \mathbf{g} \cdot \mathrm{d}\mathbf{y} = -\varrho g \mathrm{d}y \tag{2.1}$$

Folgerung 2.1.1. Hydrostatischer Druck Für Flüssigkeiten, da die Dichte konstant ist folgt:

$$p = \varrho g h$$

Folgerung 2.1.2. Schweredruck eines Gase Angenommen dass, die Dichte nur von Druck abhängt (barotrop)

$$\varrho(p) = \varrho_0 \frac{p}{p_0}$$

Die Lösung von (2.1) ergibt die *Barometrische Höhenformel* für eine isotherme Atmospäre.

$$p(h) = p_0 \exp\left(-\frac{\varrho_0}{p_0} g h\right)$$

Definition 2.2. Gesetz von Boyle-Mariotte Für ein ideales Gas gilt bei konstanter Temperatur

$$pV = (\text{konstant})$$

Folgerung 2.2.1. Die Dichte ist proportional zum Druck

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{\varrho_1}{\varrho_2}$$

Definition 2.3. Kompressibilität Die Druckerhöhung Δp bewirkt in einem Fluid stets eine Volumenabname. Die relative Volumenänderung ist proportional zur Druckänderung

$$\Delta V / V = -\kappa \Delta p$$

Bemerkung 2.3.1. Eine ideale Flüssigkeit ist reibungsfrei und inkompressibel.

Bemerkung 2.3.2. In einer idealen Flüssigkeit ist die Dichte konstant.

Definition 2.4. Statische Auftriebskraft Auch als Archimedische Prinzip bekannt.

$$F_A = G_f = \varrho_f V_k g \qquad \hat{\mathbf{F}}_a = -\hat{\mathbf{g}}$$

Der auftrieb eines in ein Fluid eingetauchen Körper ist gleich dem Gewicht des von ihm verdrängten Fluids.

2.1 Grenzflächeneffekte

Definition 2.5. Oberflächenspannung Zwischen zwei Atomen oder Molekülen tritt die *Van der Waals*-Kraft. An der Oberfläche der Flüssigkeit ist der mittlere Abstand der Moleküle etwas grösser als im Innern. Das bewirkt eine Parallel zur Oberfläche gerichtete anzihende Kraft zwischen den Molekülen.

$$\sigma = \frac{F}{\ell} \qquad [\,\sigma\,] = \mathrm{N\,m^{-1}}$$

Bemerkung 2.5.1. Die Oberflächenspannung kann auch als *spezifische Oberfächenenergie* bezeichnet werden.

$$\sigma = \frac{\Delta W}{\Delta A} = \frac{F \Delta s}{\ell \Delta s} = \frac{F}{\ell}$$

Die *Oberflächenenergie* ist ein Maß für die Energie, die zum Aufbrechen der chemischen Bindungen notwendig ist, wenn eine neue Oberfläche einer Flüssigkeit oder eines Festkörpers erzeugt wird.

Folgerung 2.5.1. Grenzflächenspannung Bei einer Vergrösserung der Grenzfläche muss Arbeit geleistet werden, da die Grenzflächenenergie vergrössert wird. Es gibt dann auch die Grenzflächenspannungen $\sigma_{\mathrm{sl}}, \sigma_{\mathrm{sg}}, \sigma_{\mathrm{lg}}$ (flüssig = liquid, fest = solid, gas) die zwischen Festkörper und Flüssigkeit wirken. φ ist dann der *Kontaktwinkel*, und die Geometrie ergibt die Beziehung

$$\sigma_{\mathrm{sg}} = \sigma_{\mathrm{sl}} + \sigma_{\mathrm{lg}} \cos\varphi$$

Beispiel 2.5.1. Druck in Seifenblase

$$p = \frac{2\sigma}{r}$$

Definition 2.6. Kapillarität Allgemein an die Grenze gilt:

$$F_{\text{Oberfläche}} = F_{G,\text{Flüssigkeit}}$$

Folgerung 2.6.1. In einem Rohr (Zylinder)

$$2\pi r\sigma = \varrho\pi r^2 hg \implies h = \frac{2\sigma}{\varrho g r}$$

3 Hydrodynamik

3.1 Einführung K.3-4

Definition 3.1. Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \varrho \,\mathrm{d}V = \oint_{\partial V} \varrho \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} \tag{3.1}$$

Folgerung 3.1.1. Ideales Fluid Da die Dichte konstant ist (inkompressibel), man kann (3.1) durch ϱ teilen und folgt:

$$\dot{V} = \int_A \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = vA = \frac{\dot{m}}{\varrho} \qquad \left[\dot{V}\right] = \mathrm{m^3\,s^{-1}}$$

Definition 3.2. Bernoulli Gleichung Der Term $\varrho v^2/2$ wird *dynamische Druck* genannt.

$$p + \varrho g h + \frac{\varrho}{2}v^2 = (\text{Konstant})$$

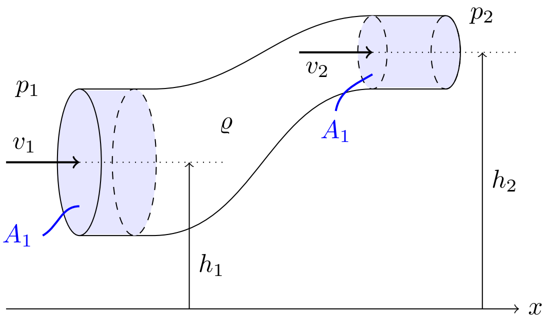

Abbildung 1: Schematische Darstellung für die Bernoulli Gleichung

Bemerkung 3.2.1. Bernoulli gilt für inkompressible Fluide, und genügt für Flüssigkeite und Gase, sofern $v \ll$ Schallgeschwidigkeit.

Folgerung 3.2.1.

$$p_1 + \varrho g h_1 + \frac{\varrho}{2}v_1^2 = p_2 + \varrho g h_2 + \frac{\varrho}{2}v_1^2$$
$$\text{oder} \quad -\Delta p = \varrho g \Delta h + \frac{\varrho}{2}\Delta\left(v^2\right)$$

Folgerung 3.2.2. Wo die Geschwindigkeit am schnellsten ist, dort ist die Druck am tiefsten.

3.2 Reale Strömungen K.5-6

Definition 3.3. Newton'sche Reibungsgesetz Die Proportionalitätskonstante η wird *dynamische Viskosität* oder *Zähingkeit* genannt.

$$\tau = \eta\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z} \stackrel{!}{=} \frac{F_\parallel}{A}$$
$$[\,\eta\,] = \mathrm{kg\,m^{-1}\,s} = \mathrm{N\,s\,m^{-1}} = \mathrm{Pa\,s}$$

Folgerung 3.3.1. Bernoulli Gleichung bei Newton'scher Reibung

$$p_1 + \varrho g h_1 + \frac{\varrho}{2}v_1^2 = p_2 + \varrho g h_2 + \frac{\varrho}{2}v_1^2 + p_\mathrm{v}$$

In der Praxis wird der Druckverlust p_v oft als Verlusthöhe h_v angegeben, d.h. diejenige Höhe, um die der Zufluss angehoben werden muss, um an Ausfluss aus der Stromröhre denselben Druck wie im reibungsfreien Fall zu erzeugen.

$$p_\mathrm{v} = \varrho g h_\mathrm{v}$$

Definition 3.4. Formel von Stokes (Stokes'sche Reibung) Reibungskraft einer Kugel im Öl

$$F_R = 6\pi\eta R v_0$$

Definition 3.5. Laminare Rohrströmung Lauten die Gleichgewichtsbedingungen für die Kräfte innerhalb des Zylinders.

$$F_{\text{Res,Druck}} - F_{\text{Reib}} = 0$$
$$\pi r^2(p_1 - p_2) - 2\pi r l\tau = 0$$

Folgerung 3.5.1. Geschwindigkeitsverteilung Innerhalb des Zylinders (r von 0 bis R)

$$v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta\ell}\left(R^2 - r^2\right)$$

Folgerung 3.5.2. Gesetz von Hagen Poiseuille

$$\dot{V} = \frac{\pi\Delta p R^4}{8\eta\ell} \tag{3.2}$$

Folgerung 3.5.3. Druckabfall Wenn man in (3.2) $\dot{V} = \pi R^2 v$ einsetzt, folgt:

$$\Delta p = 32\eta\ell\frac{v}{d^2}$$

Bemerkung 3.5.1. Bei einer Zunahme des Rohrradius wird nicht nur die zur Verfügung stehende Querschnittsfläche grösser, sondern zugleich wächst in der Rohrmitte auch die maximale Geschwindigkeit.

Definition 3.6. Prandtl'sche Grenzschicht D_l ist die Dicke der Schicht in unmittelbarer Nähe einer Oberfläche mit Länge ℓ an ein Fluid, der vorbeiströmt, der mitgezogen wird. Siehe Abb. 2.

$$D_l = \frac{\ell}{\sqrt{\mathcal{R}}} = \sqrt{\frac{\eta\ell}{\varrho v}}$$

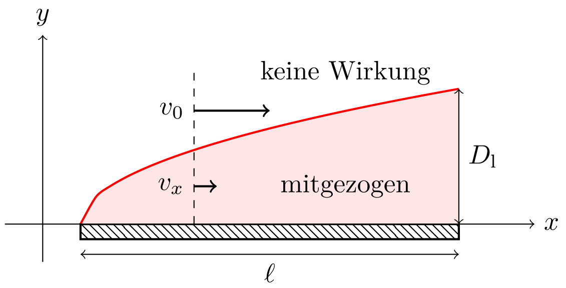

Abbildung 2: Laminare Grenzschicht für eine Platte in einem Strömungsfeld mit Geschwindigkeit v_0, und $\ell \gg D_l$.

Definition 3.7. REYNOLDS ZAHL Ist ein dimensionslose Koeffizient aus der *Navier-Stokes* Gleichung, der das Verhältnis zwischen kinetischer Energie des Fluides und dessen innerer Reibung (proportional zur Viskosität) beschreibt.

$$\mathcal{R} = \frac{E_k}{E_r} = \frac{\varrho}{\eta} v^* \ell^*$$

v^*, ℓ^* sind eine charakteristische Länge bzw. Geschwindigkeit. Sie sind dimensionslose Variablen für geometrische und physikalische Grössen.

Folgerung 3.7.1. ROHRSTRÖMUNG Wird bei der Strömung durch ein Rohr mit kreisförmigem Querschnitt der Durchmesser d als charakteristische Abmessung gewählt, somit ist die Reynolds-Zahl

$$\mathcal{R} = \frac{\varrho v d}{\eta}$$

Definition 3.8. KRITISCHE REYNOLDSZAHL $\mathcal{R}_k$

$$\begin{aligned} \mathcal{R} > \mathcal{R}_k &\quad\Longrightarrow\quad \text{Turbulent} \\ \mathcal{R} \leq \mathcal{R}_k &\quad\Longrightarrow\quad \text{Laminar} \end{aligned}$$

Folgerung 3.8.1. KRITISCHE REYNOLDSZAHL FÜR DIE ROHRSTRÖMUNG

$$\mathcal{R}_k = 2320$$

Definition 3.9. REALE ROHRSTRÖMUNG Turbulente Rohrstömung, je nach turbulent oder laminares λ

$$\Delta p = \lambda \frac{\varrho \ell}{2d} v^2 \tag{3.3}$$

Beispiel 3.9.1. TURBULENTE λ NACH BLASIUS

$$\lambda_t = \frac{0.316}{\sqrt[4]{\mathcal{R}}}$$

Beispiel 3.9.2. LAMINARE λ NACH HAGEN-POISEUILLE Das ist tatsächlich (3.2) umformuliert.

$$\lambda_l = \frac{64}{\mathcal{R}}$$

3.3 Wiederstandkräfte

Definition 3.10. AUFTRIEBSKRAFT NACH KUTTA--JUKOWSKI Dieser Auftrieb ist eine Folgerung vom *Magnus Effekt*.

$$F_A = \varrho v \ell \Gamma$$

Definition 3.11. DRUCKWIEDERSTAND

$$F_D = c_W \frac{\varrho}{2} v^2 A_\perp$$

Definition 3.12. ZIRKULATION Ist ein Mass für die Wirbelstärke. Die Zirkulation ist eine makroskopische Grösse und häng vom Weg ab.

$$\Gamma = \oint \mathbf{v}\, \mathrm{d}\mathbf{l}$$

Definition 3.13. INDUZIERTER WIDERSTAND

$$F_W = c_W^* \frac{\varrho}{2} v^2 A_\parallel$$

Definition 3.14. DYNAMISCHER AUFTRIEB

$$F_A = c_A \frac{\varrho}{2} v^2 A_\perp$$

Definition 3.15. GLEITWINKEL

$$\tan(\varphi) = \frac{F_W}{F_A} = \frac{c_W}{c_A} = \frac{v_V}{v_H}$$

4 Wärmelehre Einführung

Definition 4.1. ABSOLUTE TEMPERATUR

$$T = \vartheta + 273.15\,\mathrm{K} = \vartheta - \vartheta_0$$

Definition 4.2. STOFFMENGE Hier *Partikel* steht für Moleküle, Atome oder Ionen.

$$1\,\mathrm{mol} = N_A \text{ Partikeln} = 6.022 \times 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}$$

Der Avogadro-Zahl N_A entspricht Anzahl von Partikeln in eine Mole, und 1 Mol ist als der Anzahl von Atome ^{12}C in 0.012 kg definiert worden.

4.1 Flüssgkeiten und Festkörpern

Definition 4.3. THERMISCHE AUSDEHNUNG

$$\begin{aligned} \Delta\ell &= \alpha \ell \Delta T & & \\ \Delta A &= \beta A \Delta T & \qquad \beta &\approx 2\alpha \\ \Delta V &= \gamma V \Delta T & \qquad \gamma &\approx 3\alpha \end{aligned}$$

Bemerkung 4.3.1. ANOMALIE DES WASSERS Bei der Temperatur 4 °C verschwindet sein Volumenausdehnungskoeffizient. Ebenfalls ungewöhnlich ist, dass die Dichte des festen Zustandes kleiner ist als die des flüssigen Zustanges.

Folgerung 4.3.1. TERMISCHE SPANNUNG

$$\sigma = E\varepsilon = E\frac{\Delta \ell}{\ell} = E\alpha\Delta T$$

4.2 Ideale Gase

Definition 4.4. Universelle Gasgleichung für ideale Gase

$$pV = nRT = nN_Ak_BT = \text{(konstant)}$$
$$\text{oder} \quad \frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}$$

- $R = N_Ak_B = 8.313\,\mathrm{J\,mol^{-1}\,K^{-1}}$ ist die Universelle Gaskonstante
- $k_B = 1.381 \times 10^{-23}\,\mathrm{J\,K^{-1}}$ ist die Boltzmann-Konstante.

Definition 4.5. Molzahl und Molmasse

$$nM = m = \frac{N}{N_A}M$$

wobei M ist die sogenannte Molmasse in $\mathrm{kg\,mol^{-1}}$.

Folgerung 4.5.1. Spezifische Gaskonstante R_s

$$pV = \frac{m}{M}RT = mR_sT$$

Folgerung 4.5.2. Dichte eines Gases

$$\varrho = \frac{m}{V} = \frac{M}{V_m} = \frac{pM}{RT}$$

4.3 Gemissche idealer Gase

Definition 4.6. Partialdruck Der Druck p_i ist der Druck, den die Gaskomponente i hätte, wenn ihr bei der Temperatur T das ganze Volumen V zur Verfügung hätte.

Definition 4.7. Gesetz von Dalton In einem Gasgemisch ist die Summe der Partialdrücke gleich dem Gesamtdruck.

$$p = \sum_{i=1}^{n} p_i$$

Definition 4.8. Volumen- und Massen-Konzentration

$$q_i = \frac{V_i}{V} = \frac{n_i}{n} \qquad \mu_i = \frac{m_i}{m} = \frac{M_i}{M}q_i$$

Definition 4.9. Mol-Masse eines Gas-Gemischs

$$M = \sum_{i=1}^{n} q_iM_i$$

4.4 Reales Gas K.9

Definition 4.10. Van der Waals-Korrektur

$$p'V'_m = RT \qquad p' = p + \frac{a}{V_m^2}$$
$$V'_m = V_m - b \qquad V = nV_m$$

Folgerung 4.10.1. Van der Waals-Gleichung

$$\left(p + \frac{n^2a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

Folgerung 4.10.2. Van der Waals-Parameter

$$a = \frac{9}{8}RT_kV_{mk} \qquad b = \frac{V_{mk}}{3}$$

Folgerung 4.10.3. Kritische Grössen

$$V_{mk} = 3b \qquad T_k = \frac{8a}{27Rb} \qquad p_k = \frac{a}{27b^2}$$

Definition 4.11. Maxwell-Konstruction In der Abb. 3 der bei der Van der Waals-Gleichung beschrebte Brereich A–D ist unrealistisch. Eigentlich sind dazwischen flüssige und gasförmige Phase mieinander im Gleichgewicht, und die Druck p_s bleibt konstant.

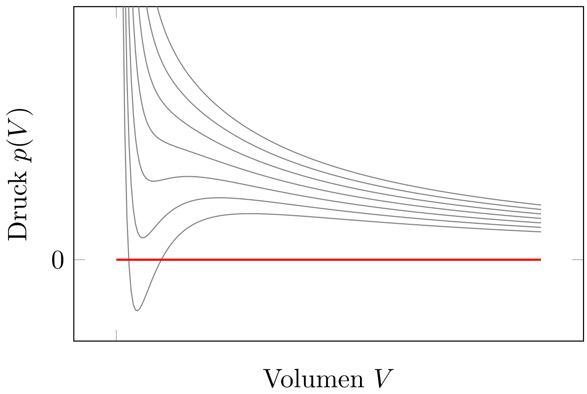

Abbildung 3: Van-Der-Waals Zustandskurven und die Maxwell-Konstruction

4.5 Kinetische Gastheorie K.10

Definition 4.12. Erster Hauptsatz der Thermodynamik Die innere Energie U ist die gesamte in einem System enthaltene Energie.

$$\mathrm{d}U = \delta W + \delta Q \qquad \Delta U = \Delta W + \Delta Q$$
$$[\,U\,] = [\,E\,] = \mathrm{J}$$

Bemerkung 4.12.1. δW und δQ sind keine Differentiale von Zustandgrössen, da Arbeit und Wärme sind keine Zustandgrössen, sondern Prozessgrössen.

Folgerung 4.12.1. Es gibt kein Perpetuum mobile erster Art

$$\oint \mathrm{d}U = 0, \text{ aber } \oint \delta W \neq 0 \text{ und } \oint \delta Q \neq 0$$

Definition 4.13. Wärmekapazität

$$\delta Q \propto \mathrm{d}T \implies \delta Q = C\mathrm{d}T = cm\mathrm{d}T = C_mn\mathrm{d}T$$

C	Wärmekapazität
$c = C/m$	*spezifische* Wärmekapazität
$C_m = C_n = Mc$	*molare* Wärmekapazität

Definition 4.14. Molare Wärmekapazität von Gasen

$$F\mathrm{d}s = pA\mathrm{d}s = p\,\mathrm{d}V \implies \delta W = -p\,\mathrm{d}V$$

4.6 Phasen und Phasenübergänge K.11

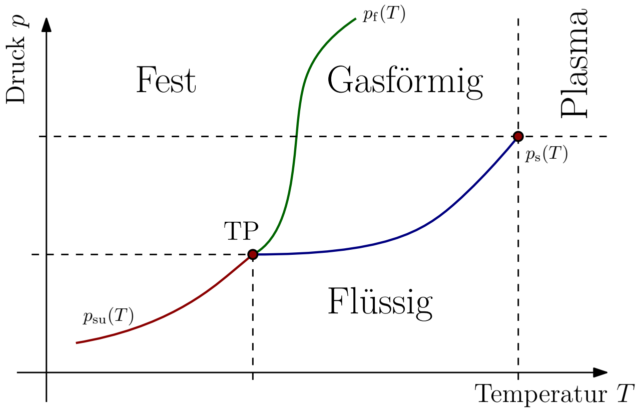

Abbildung 4: `FIXME`

Definition 4.15. Clasius-Clapeyron Gleichungen

$$\frac{\mathrm{d}p_{\mathrm{s}}}{\mathrm{d}T} = \frac{q_{\mathrm{s}}}{T\left(\varrho_g^{-1} - \varrho_f^{-1}\right)} \qquad \frac{\mathrm{d}p_{\mathrm{f}}}{\mathrm{d}T} = \frac{q_{\mathrm{f}}}{T\left(\varrho_f^{-1} - \varrho_s^{-1}\right)}$$

Folgerung 4.15.1. Dampfdruck und Schmelzdruck

$$p_s(T) = p_{s_0} \exp\left[\frac{q_s M_w}{R}\left(T_0^{-1} - T^{-1}\right)\right]$$
$$p_f(T) = p_{s_0} \exp\left[\frac{q_f M_w}{R}\left(T_0^{-1} - T^{-1}\right)\right]$$

Folgerung 4.15.2. Magnus Dampfdruck Approximiert die Lösung der Clasius-Clapeyron Differenzialgleichung für Wasser.

$$p_s(\vartheta) = p_{s_0} \exp_{10}\left(\frac{7.5\vartheta}{\vartheta + 265.5}\right)$$

Definition 4.16. Taupunkt und Taupunktstemperatur Die Temperatur, bei der beim Abkühlen feuchter Luft Sättigungs erreicht wird und Kondensation einsetzt, wird *Taupunkt* genannt.

$$p_D = p_s(\vartheta_d)$$

Definition 4.17. Luftfeuchtigkeit m_w ist die Masse des *in der Luft enthaltenen* Wasserdampfes. m_s ist die maximale Dampfmasse im Sättigungszustand. P_D ist die Partialdruck des Wassedampfes.

$$\text{Absolute} \quad f = \frac{m_w}{V} \qquad [\,f\,] = [\,\varrho\,]$$
$$\text{Relative} \quad f_r = \frac{m_w}{m_s} = \frac{p_D}{p_s} \leq 1 \qquad [\,f_r\,] = 1$$

Definition 4.18. Dichte des feuchten Luft

$$\varrho_F = \varrho_T + \frac{p_D(M_w - M_L)}{RT} \qquad \varrho_F < \varrho_T$$

4.7 Wärmetransport K.13

Definition 4.19. Fourier'sche Gesetz der Wärmeleitung

$$j = \frac{\delta Q}{A\,\mathrm{d}t} \propto \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} \implies j = -\lambda\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}$$
$$[\,j\,] = \mathrm{J\,m^{-2}\,s^{-1}} = \mathrm{W\,m^{-2}} \qquad [\,\lambda\,] = \mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}}$$

4.8 Thermodynamische Prozesse K.14

4.9 Zustandänderungen

Definition 4.20. Isobare $p =$ (konstant), folgt:

$$\delta Q = nC_{mp}\,\mathrm{d}T \qquad \delta W = p\,\mathrm{d}V$$
$$Q = nC_{mp}\Delta T \qquad W = p\Delta V = nR\Delta T$$

Definition 4.21. Isochore $V =$ (konstant) $\iff$ $\mathrm{d}V = 0$, folgt:

$$\delta Q = nC_{mv}\,\mathrm{d}T \qquad \delta W = p\,\mathrm{d}V = 0$$
$$Q = nC_{mv}\Delta T \qquad W = 0$$

Definition 4.22. Isotherme $T =$ (konstant) $\iff$ $\mathrm{d}T = 0$, folgt:

$$\delta Q = nC_{mv}\,\mathrm{d}T = 0 \qquad \delta W = p\,\mathrm{d}V$$
$$Q = 0 \qquad W = nRT\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

$$\text{Weil: } W = \int \delta W = \int_{V_1}^{V_2} p\,\mathrm{d}V = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V}\,\mathrm{d}V$$

Definition 4.23. Adiabatische Zustandänderungen D.h. *kein* Wärmeaustauch zwischen dem betrachteten System und seiner Umgebung stattfindet.

Literatur

[1] Hochschule für Technik Rapperswil (HSR). ***Ph2HAT** Vorlesungen und die dazugehörige Unterlagen,* Sourlier David, Frühlingssemester 2020, Rapperswil.

[2] Arthur Ruh, Benno Bucher. *Physik 1: Mechanik, Fluide, Wärmelehre.* Vol I, HSR, 2014, Rapperswil.

[3] Richard Feynman. *Mainly Mechanics, radiation, and heat. The Feynman Lectures on Physics*, Leighton, Sands, New Millenium Edition, Vol I, Basic Books, California Institute of Technology (Caltech).

[4] Richard Feynman. *Mainly electromagnetism and matter. The Feynman Lectures on Physics*, Leighton, Sands, New Millenium Edition, Vol II, Basic Books, California Institute of Technology (Caltech).

License