

1オクターブに12音
あるのはなぜ？

ピタゴラスの方法を算数、
プログラミング、工作で実験する

三年一組

金今木帆奈

日 次

1. はじめに 1
 1.1 この自由研究を始めた理由 1
 1.2 この自由研究でやること 3

2. 弦楽器を工作する 4
 2.1 モノコード 4
 2.2 コムハーモニカ 5

3. 弦楽器の音の高さを調べる 7
 3.1 モノコードの音の高さ 7
 3.2 コムハーモニカの音の高さ 10

4. オクターブづつはなれた音の高さを
 調べる 14

5. ピタゴラスの方法を計算する 18

6. ピタゴラスの方法をプログラミングする 24
 6.1 13番目までの音を調べる 24
 6.2 100番目までの音を調べる 27

7. ピタゴラスの方法を使ってギターを作る 30

1.はじめに

1.1 この自由研究を始めた理由

私は、三歳の時から五年間ピアノを習っています。

毎日練習していく中で、ふしきに思うことがあります。

それは、ド・ド♯・レ・レ♯...というふうに、1オクターブの中に音が12個あるのはなぜか、ということです。

5、10、15、20など、きりのいい数ではなく、なぜ12なのか？

もし、1オクターブに音が5つしかなかったら、楽ふを言えんたり、ピアノをひくのがとてもかんたんになります。でも、音の数が少ないので、かんたんな曲しか作れません。

もし、1オクターブに20音あったら、作れる曲のしゅるいが多くなります。でも、楽ふを言えんたり、ピアノをひくのはむずかしくなります。

このように、1オクターブの中の音が少なすぎてもこまると、多すぎてもこまります（表1）。

1オクターブの音の数を12に決めたのは**ヒタコラス**という人です。2500年くらい前に、ギリシャで算数を使って

No. 2

Date

決めたそうです。

この自由研究では、弦楽器の工作、算数の計算、プログラミングをして、ピタゴラスの方法を実験します。さらに、ピタゴラスの方法を使ってギターを作り、その音の高さを言葉でます。

表1: 1オクターブの音が少ないとよりこと、こまること。1オクターブの音が多いとよりこと、こまること。

	よりこと うれしいこと	こまること
1オクターブに 12より少ない 音しかなかった ら...	楽譜を読むのが かんたん。 たれでもピアノが ひけるようになる。	かんたんな曲しか作れ ない。 作れる音楽のしゅるいが 少なくなる。
1オクターブに 12より多い 音があったら...	むずかしい曲を 作れる。 作れる音楽のしゅるい が多くなる。	楽譜を読むのが むずかしくなる。 ピアノをひける人が へる。

1.2 この自由研究ごやること

- ① 弦楽器を2つ作る(モノコードとコムハーモニカ)。
- ② 自分で作った弦楽器を使って、音の高さの実験をする。弦の長さをかえると音の高さがどうかえるかを調べる。また、弦の太さをかえると音の高さがどうかわるかを調べる。
- ③ 家のピアノを使って、音の高さの実験をする。オクターブはなれた音の高さを調べる。
- ④ 1オクターブに12音ある理由(ピタゴラスの方法)を、算数を使って計算する。
- ⑤ ピタゴラスの方法を、プロクラシックでたしかめる。1オクターブの音の数が本当に12であるのか調べる。
- ⑥ ピタゴラスの方法を使ってギターを作る。そのギターを使って、音の高さの実験をする。

No. 4

Date

2. 弦楽器を工作する

弦楽器は、弦をふるわせて音を出す樂器です。弦をふるわせるには、はじいたり、こすったり、たたりたりする方法があります。

たとえば、ギターやウクレレは、弦をはじいて音を出します。バイオリンやチロは、弦をこすって音を出します。ピアノは、弦をたたいて音を出します。ピアノのけんばんを指でおすと、ピアノの中ではハンマーが弦をたたいています。

この自由研究では、モノコードとコムハーモニカを工作しました。

2.1 モノコード

モノコードは、1本の弦をはって作った弦楽器です。弦を指ではじいて音を出します。

この自由研究では、うすい木の板で台を作って、その上にピアノ線をはりました(写真1)。太さのちがう2本の弦をはってあります。太さは0.4mmと0.2mmです。弦の下に丸いぼうをおりて、音を出すときの弦の

長さを加えます。

感想・気づいたこと：ピアノ線はとてもかたい。はさみでは切れなかった。むめるのがむずかしかった。指にささるといたい。

2.2 コムハーモニカ

コムハーモニカは、わコムを1本はって作った弦楽器です。弦を息でふるわせて音を出します。

うすい木の板を2枚重ねて、ストローですき間を作りそこにわコムを通して(写真2)。ストローの場所を加えて、音を出す時の弦の長さを加えます。

感想・気づいたこと：コムを息でふくと楽器になるのかおもしろかった。板と板の間のすき間が広いと音が出ない。ふつうのハーモニカは弦楽器ではないけど、コムハーモニカは弦楽器。

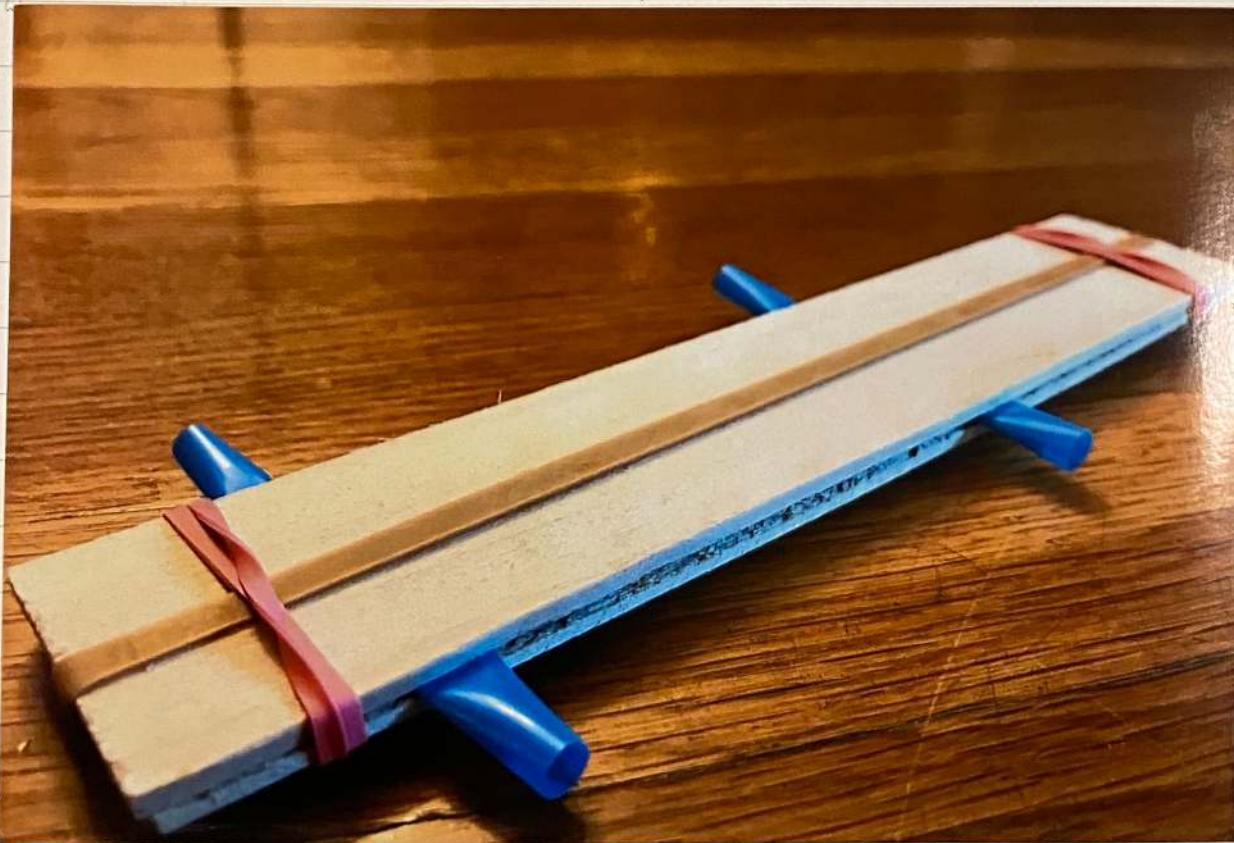
No. 6

Date

写真1：モノユード



写真2：ゴムハーモニカ



3. 弦楽器の音の高さを 調べる

2章で作った弦楽器を使って実験しました。
弦の長さをかえると音の高さがどうかわるか調べ
ました。

音の高さを計るのに、Spectrum Analyze という
アプリを使いました。タブレットを楽器のそばに
おいて、楽器を鳴らすと、このアプリが音の高さを
計ってくれます(写真3)。音の高さの単位はヘルツ
(Hz)です。

3.1 モノコードの音の高さ

弦の長さは 24.8cm、12.4cm、6.2cm を
ためしました。弦の太さは、0.4mm と 0.2mm を
使いました。

さいしょに、太い弦を使って、音の高さを調べました。
調べたけかを表2にまとめました。そして、表2を使って
図1を作りました。たてじくは音の高さを表しています。
横じくは弦の長さを表しています。

No. 8

Date

表2：太い弦を使った時の音の高さ

弦の長さ	音の高さ
24.8 cm	403 Hz
12.4 cm	855 Hz
6.2 cm	1798 Hz

表3：細い弦を使った時の音の高さ

弦の長さ	音の高さ
24.8 cm	608 Hz
12.4 cm	1243 Hz
6.2 cm	2433 Hz

次に、細い弦を使って、音の高さを調べました。音周波たけかを表3にまとめました。そして、表3を使って図2を作りました。

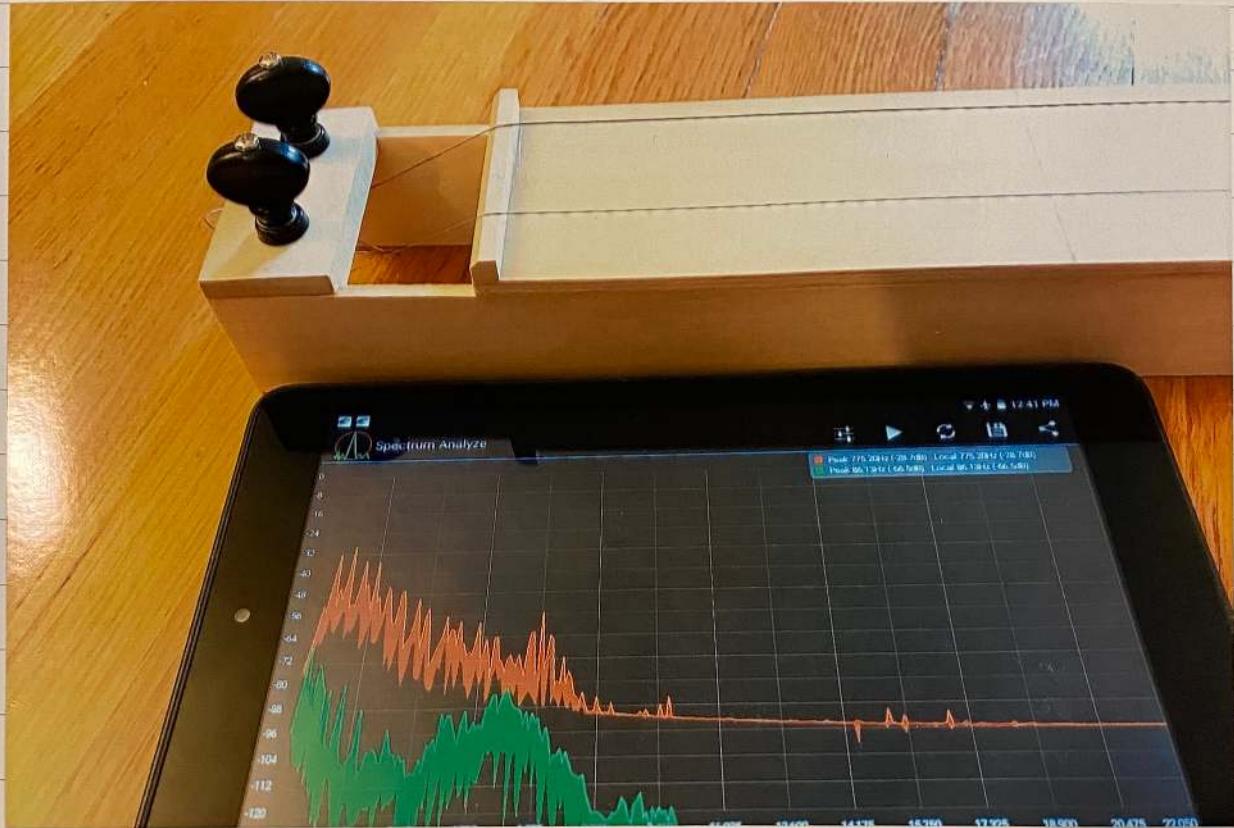
この実験で分かったこと

- 弦が太りと、音がひくくなる。
- 弦が細田りと、音が高くなる。
- 弦が短豆りと、音が高くなる。弦の長さが $\frac{1}{2}$ になると、音の高さはやく2倍になる。弦の長さが $\frac{1}{4}$ になると、音の高さはやく4倍になる。
- 弦が長いと、音がひくくなる。弦の長さが2倍になると、音の高さはやく $\frac{1}{2}$ になる。弦の長さが4倍になると、音の高さはやく $\frac{1}{4}$ になる。

No. 10

Date

写真3：音の高さを計るアプリ「Spectrum Analyze」



3.2 コマハーモニカの音の高さ

弦の長さは14cmと7cmをためしました。言調べた
けかを表4にまとめました。そして表4を使って、
図3を作りました。

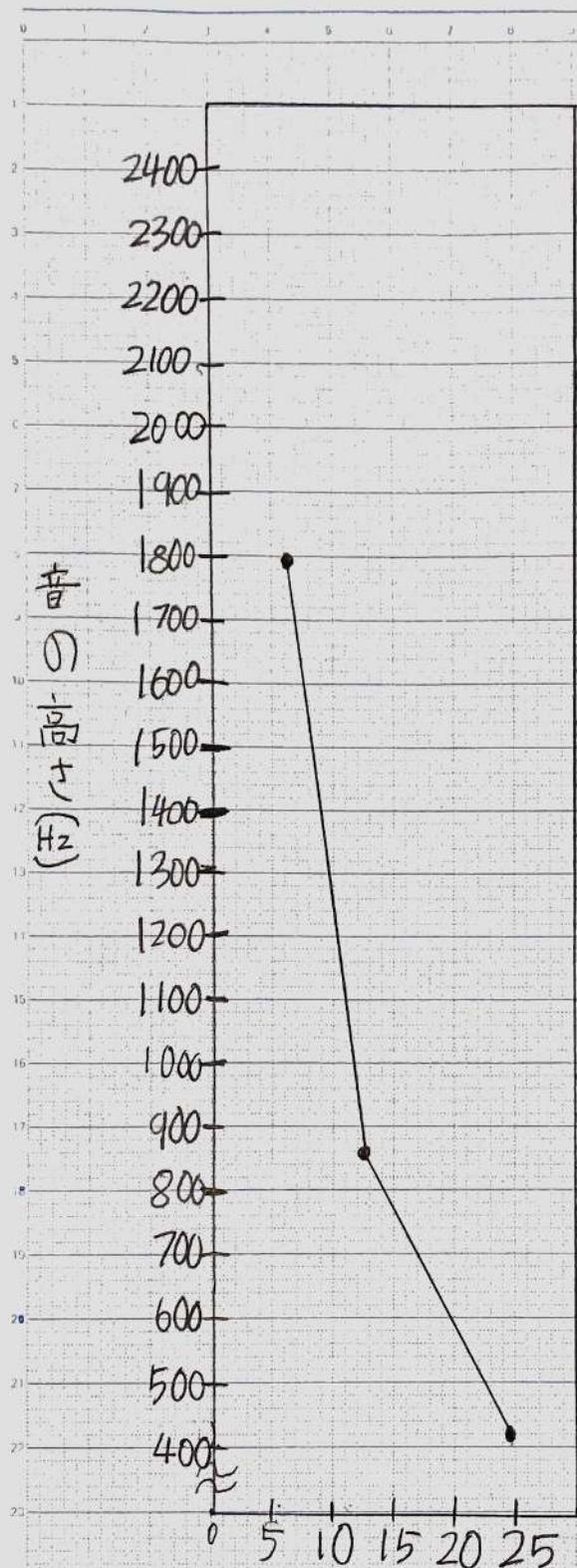


図1：太い弦を使った
時の音の高さ

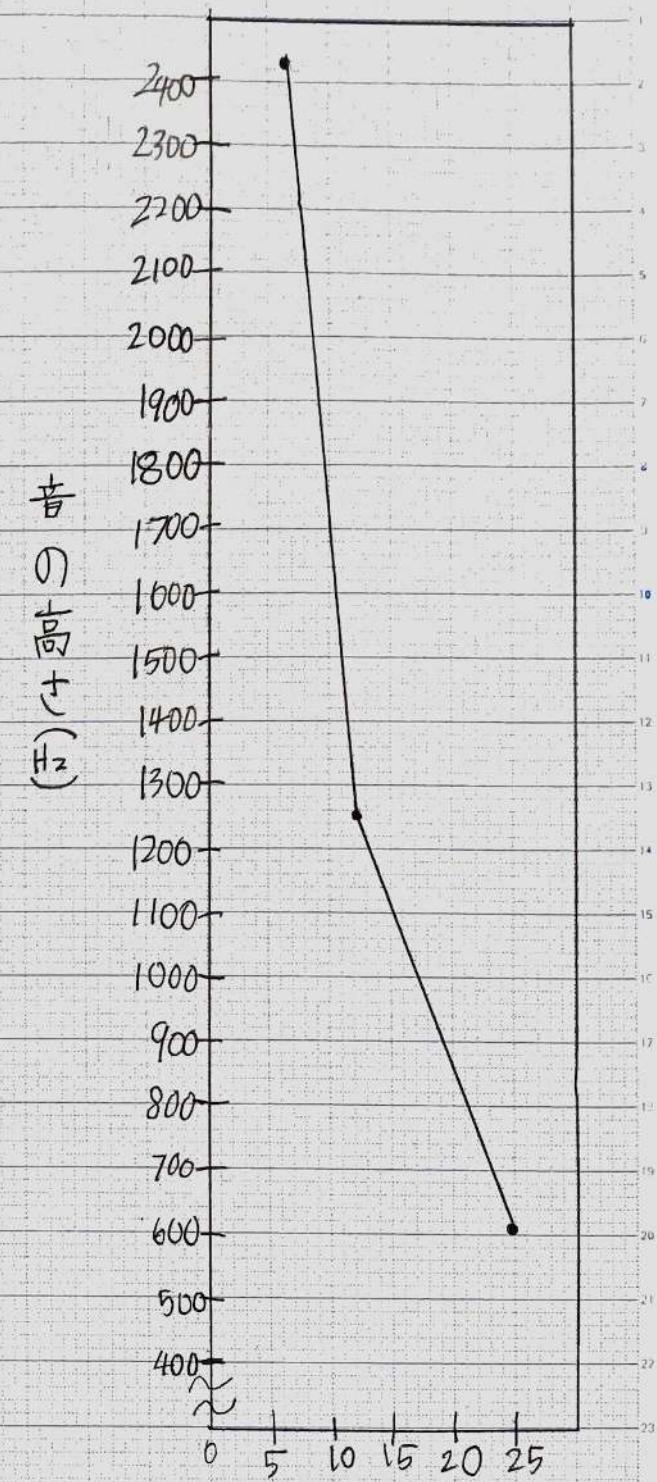


図2：細い弦を使つ
た時の音の高さ

No. 12

Date

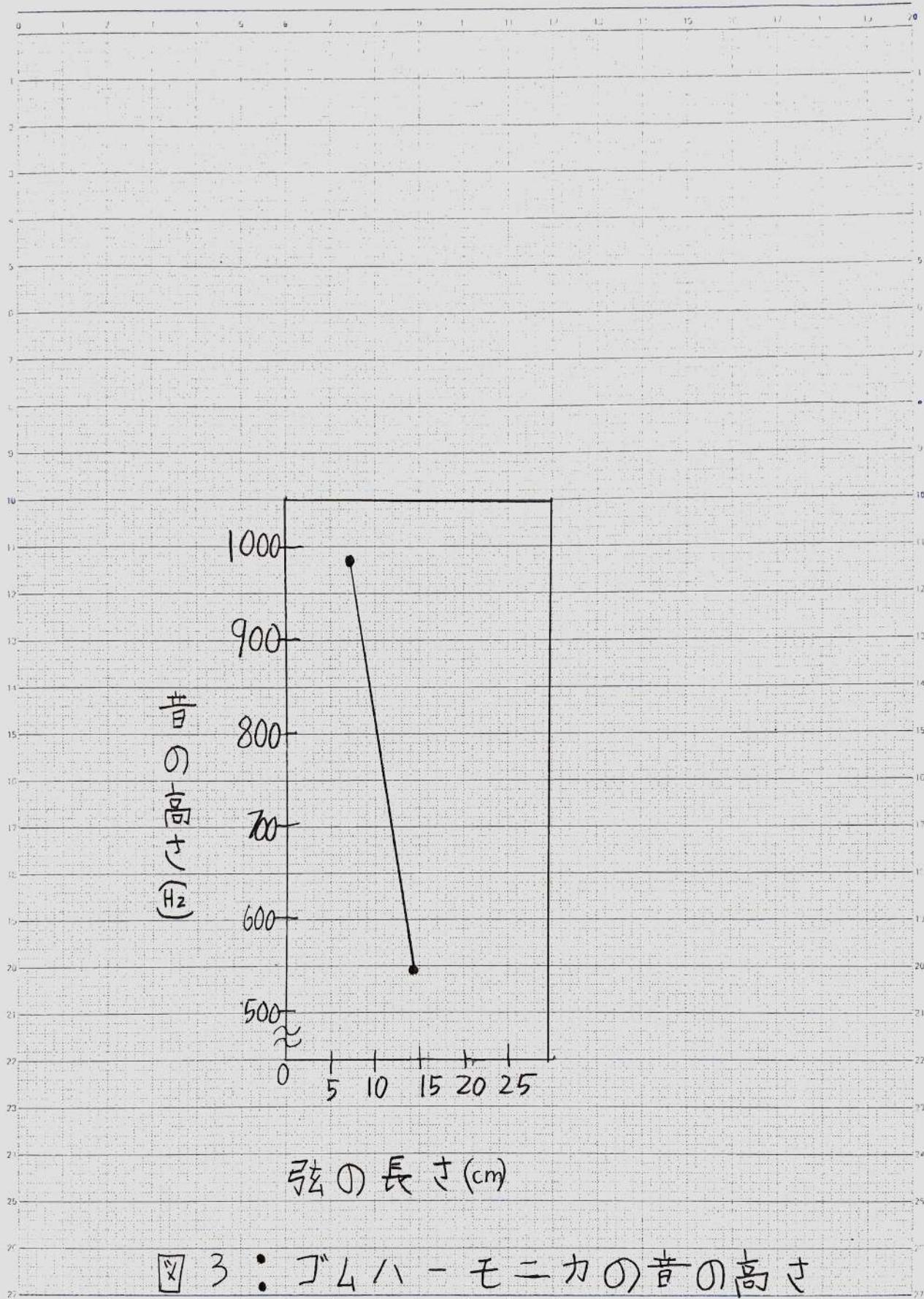


表4：ゴムハーモニカの音の高さ

弦の長さ	音の高さ
14 cm	549 Hz
7 cm	985 Hz

この実験で分かったこと。

- 弦が短くなると、音の高さは高くなる。弦の長さが $\frac{1}{2}$ になると、音の高さは2倍になる。

- 弦が長くなると、音はひくくなる。弦の長さが2倍になると、音の高さは $\frac{1}{2}$ になる。

- ★ 弦の長さのかわり方と音の高さのかわり方は、ぎやく数になる。

No. 14

Date

4. オクターブづつはなれ た音の高さを調べる

何千年前から、人間の耳は、高さが2倍の音を同じような音と感じるのであります。むかしの音楽家は、この音の高さのちがい(音程)を「オクターブ」とよびました。そして、オクターブはなれた音に同じ名前をつけました。

たとえば、ピアノのけんばくんの中央にあるド(C4)から1オクターブ高い音もド(C5)とよびます。C5の高さはC4の高さの2倍になります。C5からさらに1オクターブ高い音をC6、C7、C8...とよびます。

この自由研究では、家にあるピアノを使って、1オクターブづつはなれたドの高さを調べました。調べた結果を表5にまとめました。そして表5を使って図4を作りました。

表5：1オクターブづつはなれた
ドの高さ

音	音の高さ
C3	129 Hz
C4	263 Hz
C5	522 Hz
C6	1044 Hz
C7	2099 Hz
C8	4252 Hz

No. 16

Date

この実験から分かったこと

- 1オクターブ上がると音の高さは2倍になる。
2オクターブ上がると音の高さは4倍になる。
3オクターブ上がると音の高さは8倍になる。
4オクターブ上がると音の高さは16倍になる。
5オクターブ上がると音の高さは32倍になる。
- 1オクターブ下がると音の高さは $\frac{1}{2}$ になる。
2オクターブ下がると音の高さは $\frac{1}{4}$ になる。
3オクターブ下がると音の高さは $\frac{1}{8}$ になる。
4オクターブ下がると音の高さは $\frac{1}{16}$ になる。
5オクターブ下がると音の高さは $\frac{1}{32}$ になる。
- 次々にオクターブが上がると、1オクターブの音量がどんどん大きくなる。だから、図4のあれ線グラフは曲がっている。

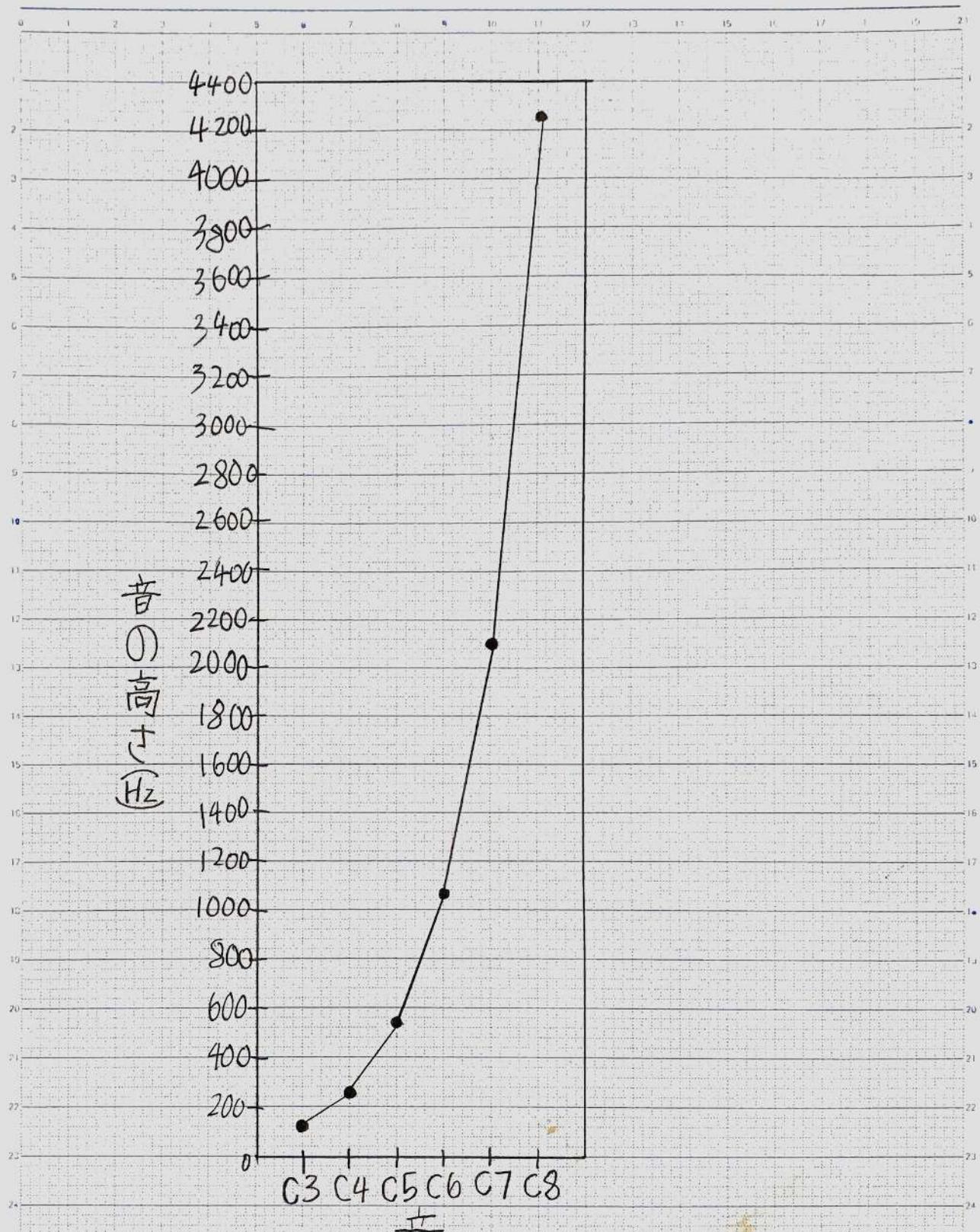
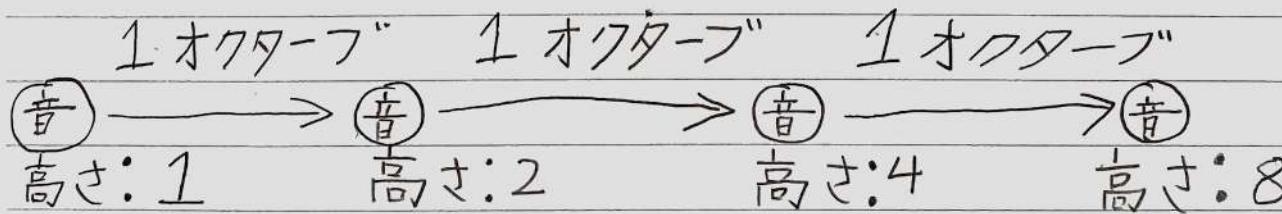


図4：1オクターブずつはなれたドの高さ

5. ピタゴラスの方法 を計算する

1オクターブに12音ある理由(ピタゴラスの方法)を、算数を使って計算しました。

まず、さいしょの音の高さを1とします(たとえば“ド”)。だから、1オクターブ高い音(たとえば“1オクターブ上のド”)の音の高さは2になります。2オクターブ高い音の高さは4で、3オクターブ高い音の高さは8になります。



そして、次の二つのことを守って計算します。

No. 19

Date

• 人間の耳には、オクターブづつはなれた音が同じような音に聞こえる。

• どんな音でも、三倍の高さの音といっしょに聞くと、人間の耳には気持ちよくひびいて聞こえる。

1つめの音

高さ = 1

2つめの音

1つめの音と気持ちよくひびく音を2つめの音にします。

$$\text{高さ} = 1 \times 3 = 3$$

この音の高さは、2と4の間にあるので、第2オクターブにあります。この音と同じように聞こえる音が第1オクターブにあります。その音の高さは、3の $\frac{1}{2}$ になります。

$$3 \div 2 = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$$

この音は、高さが1と2の間にあるので、第1オクターブの中にあります。だから、この音が2つ目の音です。

3つ目の音

2つ目の音と気持ちよくひびく音を3つ目の音にします。

$$\text{高さ} = \frac{3}{2} \times 3 = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$$

この音は4と8の間にあるので“第3オクターブ”になります。この音と同じように聞こえる第1オクターブの音を計算をします。

$$\frac{9}{2} \div 4 = \frac{9}{8} = 1\frac{1}{8}$$

この計算を何度もくり返して、高さが1の音がでてくるまで(1番目の音と同じ音がでてくるまで)つづけます。

4つ目の音

$$\text{高さ} = \frac{9}{8} \times 3 = \frac{27}{8} = 3\frac{3}{8}$$

$$\frac{27}{8} \div 2 = \frac{27}{16} = 1\frac{11}{16}$$

5つ目の音

$$\text{高さ} = \frac{27}{16} \times 3 = \frac{81}{16} = 5\frac{1}{16}$$

$$\frac{81}{16} \div 4 = \frac{81}{64} = 1\frac{17}{64}$$

No. 21

Date

6つめの音

$$\text{高さ} = \frac{81}{64} \times 3 = \frac{243}{64} = 3\frac{51}{64}$$

$$\frac{243}{64} \div 2 = \frac{243}{128} = 1\frac{115}{128}$$

7つめの音

$$\text{高さ} = \frac{243}{128} \times 3 = \frac{729}{128} = 5\frac{120}{128}$$

$$\frac{729}{128} \div 4 = \frac{729}{512} = 1\frac{217}{512}$$

8つめの音

$$\text{高さ} = \frac{729}{512} \times 3 = \frac{2187}{512} = 4\frac{139}{512}$$

$$\frac{2187}{512} \div 4 = \frac{2187}{2048} = 1\frac{139}{2048}$$

9つめの音

$$\text{高さ} = \frac{2187}{2048} \times 3 = \frac{6561}{2048} = 3\frac{437}{2048}$$

$$\frac{6561}{2048} \div 2 = \frac{6561}{4096} = 1\frac{2465}{4096}$$

10つめの音

$$\text{高さ} = \frac{6561}{4096} \times 3 = \frac{19683}{4096} = 4\frac{3299}{4096}$$

$$\frac{19683}{4096} \div 4 = \frac{19683}{16384} = 1\frac{3299}{16384}$$

[11二めの音]

$$\text{高さ} = \frac{19683}{16384} \times 3 = \frac{59049}{16384} = 3\frac{9897}{16384}$$

$$\frac{59049}{16384} \div 2 = \frac{59049}{32768} = 1\frac{26281}{32768}$$

[12二めの音]

$$\text{高さ} = \frac{59049}{32768} \times 3 = \frac{177147}{32768} = 5\frac{13607}{32768}$$

$$\frac{177147}{32768} \div 4 = \frac{177147}{131072} = 1\frac{46075}{131072}$$

[13二めの音]

$$\text{高さ} = \frac{177147}{131072} \times 3 = \frac{531441}{131072} = 4\frac{7153}{131072}$$

$$\frac{531441}{131072} \div 4 = \frac{531441}{524288} = 1\frac{7153}{524288}$$

この分数を、計算きを使って小数にすると
1.01になります。これはほぼ"1"なので、1番目の
音と同じ音だと考えて、計算を終わりにします。

13番目の者が1番目の音と同じなので、1オクターブ
の中の音は12二めになります。

ピタゴラスの方法を使つて言調べた音は、高さの
ひくい音からじゅんぱんにならなくていいません。たと
えば、2番めの音は3番めの音より高い音です。
だから、ド・ド♯・レ・レ♯...、といふ音の名前をつけるに

No. 23

Date

は、音の高さのじゅんばんに気をつけないといけません。これを表6にまとめました。

表6：ピタゴラスの方法で計算した音の高さと、その名前

ピタゴラスの 方法で見つ けた音の じゅんばん	音の名前	音の高さ	
		分数	小数
1	ド	1	1
2	ソ	$1\frac{1}{2}$	1.5
3	レ	$1\frac{1}{8}$	1.12
4	ラ	$1\frac{11}{16}$	1.68
5	ミ	$1\frac{17}{64}$	1.26
6	シ	$1\frac{115}{128}$	1.89
7	ファ [#]	$1\frac{217}{512}$	1.42
8	ド [#]	$1\frac{139}{2048}$	1.06
9	ソ [#]	$1\frac{2465}{4096}$	1.60
10	レ [#]	$1\frac{3299}{16384}$	1.20
11	ラ [#]	$1\frac{26281}{32768}$	1.80
12	ファ	$1\frac{46075}{131072}$	1.35
13	ド"	$1\frac{7153}{524288}$	1.01

家のピアノで、1番目の音(ド)と2番目の音(ソ)、
2番目の音(ソ)と3番目の音(レ)、をいっしに
ひいてみて、気持ちよくひくことをためました。

6. ピタゴラスの方法を プログラミングする

ピタゴラスの方法を、Scratchを使って"プログラミング"しました。

6.1 13番目までの音を調べる

まず、五章で"計算したけかが正しいのかを調べ
ました(写真4)。このプログラムを動かしたけか
は写真5です。表6とくらべると、五章の計算が
正しいと分かります。

写真4：13番目の音まで“言周べる
プログラム

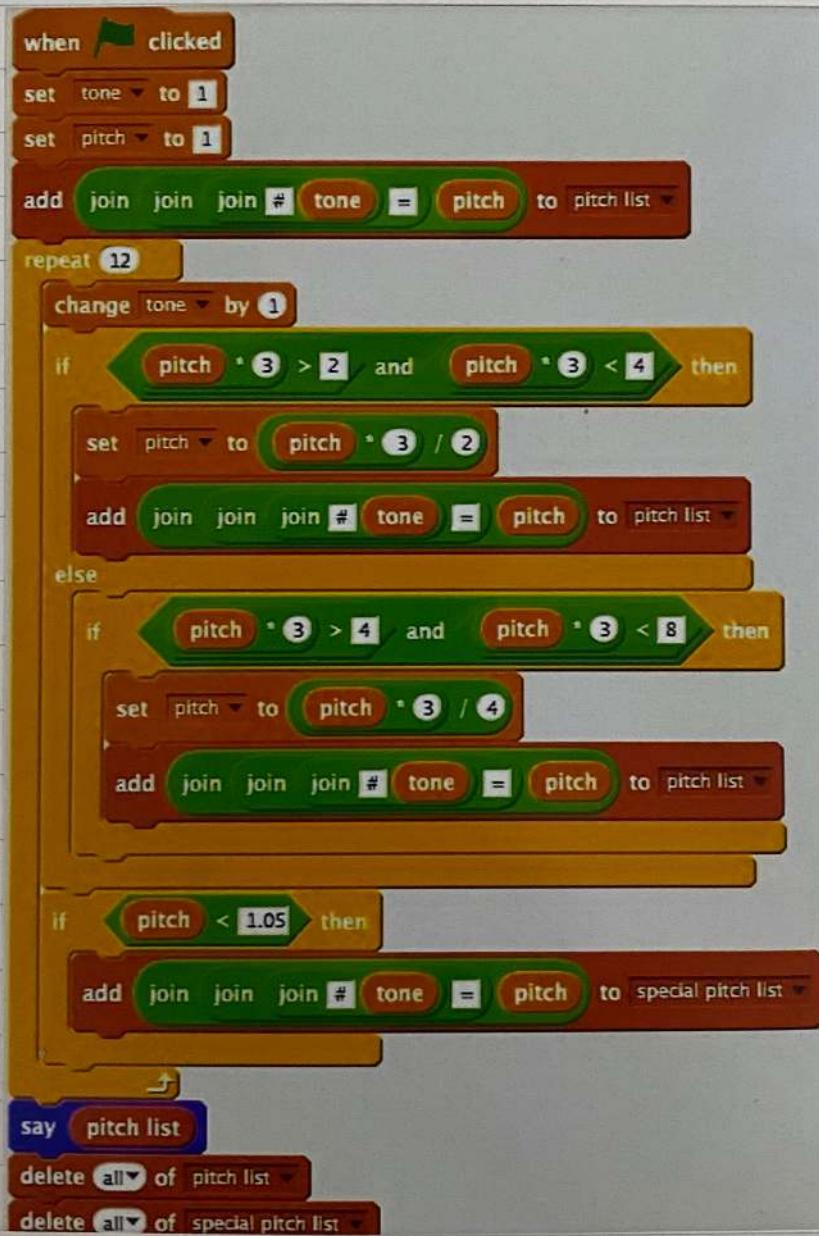


写真5：13番目までの音の高さ

#1=1 #2=1.5
#3=1.125 #4=1.6875
#5=1.265625
#6=1.8984375
#7=1.423828125
#8=1.06787109375
#9=1.601806640625
#10=1.20135498046
875
#11=1.80203247070
3125
#12=1.35152435302
73438
#13=1.01364326477
05078



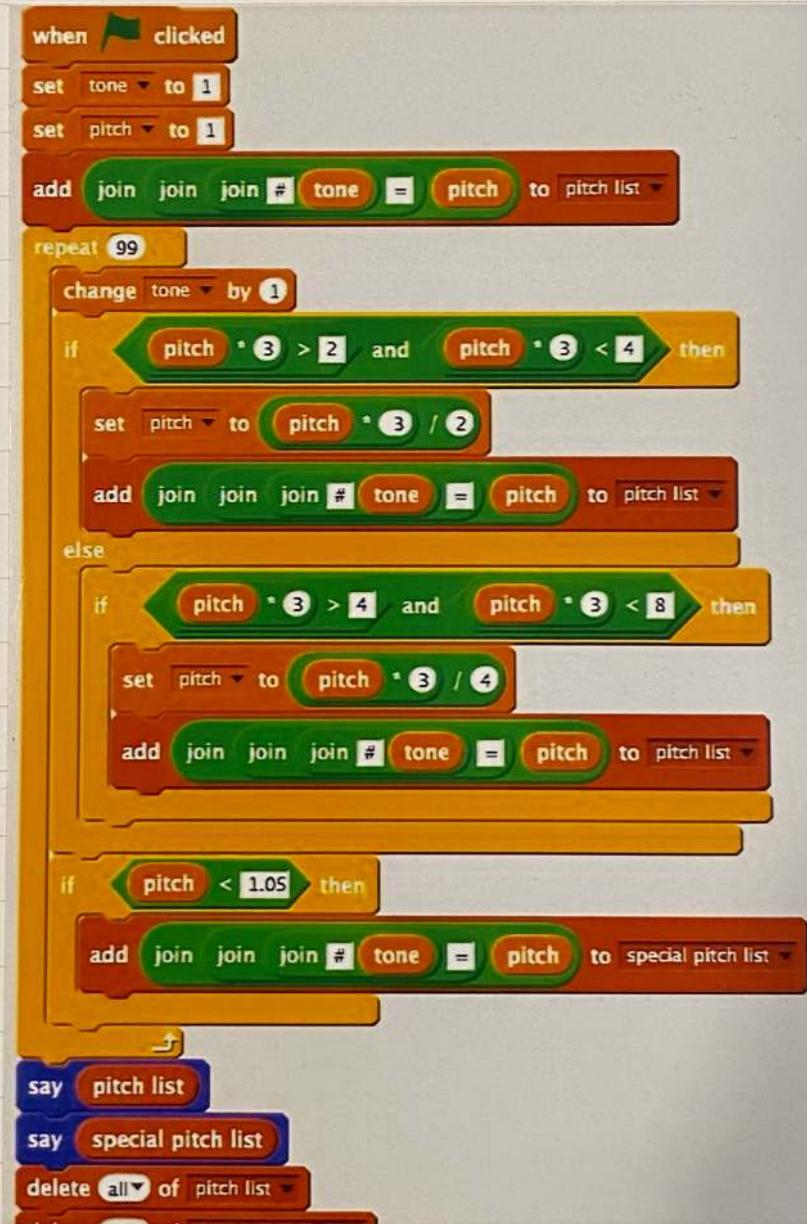
6.2 100番目までの音を調べる

次に、写真4のプログラムを少しかえて、13よりも多くの音を言調べるようにしてしまった(写真5)。そして、高さが1に近い音が見つかるのか調べました。このプログラムでは、1.05よりひくい音をえ込んでいます。そのためかが写真7です。

このように、100番目までに1回1.05よりひくい音が見つかりました。1番1に近いのは、54番目の音です。この音は、13番目の音よりやく0.01ひくい音です。

ピタゴラスカラフ500年前に何番目の音まで計算したのかは分かりません。もしかしたら、20番目くらいまで計算して、13番目から1番ひくいと思ったのかもしれません。もしかしたら、100番目くらいまで計算して、54番目から13番目よりひくい音だと知っていたのかもしれません。でも、1オクターブに53音があるから、1章に書いたように、音楽を作ったり、ひいたりするのかとてもむずかしくなります。だから、ピタゴラスは、1オクターブに53音あるより12音ある方がよいと思ったのかもしれません。

写真6: 100番目の音まで"言用べて、高さが
1.05よりひくい音を見つけるプログラム。



No. 29

Date

写真7: 100番目まで"高さが1.05より
大きい音

#13=1.01364326477

05078

#25=1.02747266821

46138

#37=1.04149074987

15258

#54=1.00209031404

10862

#66=1.01576209751

95103

#78=1.02962040875

98153

#90=1.04366779260

96438



7. ピタゴラスの方法を
使ってギターを作る