TD 6 Dualité

Exercice 1 :

-Donner le dual du primal suivant :

Primal	**Dual**
a) Max Z = 2x1 + 4x2 + 3x3	a) Min w = 60y1 + 40y2 + 80y3
3x1 + 4x2 + 2x3 ≤ 60	3y1 + 2y2 + y3 ≥ 2
2x1 + x2 + 2x3 ≤ 40	4y1 + y2 + 3y3 ≥ 4
x1 + 3x2 + 2x3 ≤ 80	2y1 + 2y2 + 2y3 ≥ 3
x1, x2, x3 ≥ 0	y1≥ 0, y2 ≥0, y3 ≥ 0
b) Min Z = 20x1 + 24x2	b) Max w = 30y1 + 40y2
x1 + x2 ≥ 30	y1 + y2 ≤ 20
x1 + 2x2 ≥ 40	y1 + 2y2 ≤ 24
x1, x2 ≥ 0	y1≥ 0, y2 ≥ 0
c) Max Z = 10x1 + 6x2	c) Min w = 40y1 + 60y2 - 25y3
x1 + 4x2 ≤ 40	y1 + 3y2 - 2y3 ≥ 10
3x1 + 2x2 = 60	4y1 + 2y2 - y3 ≥ 6
2x1 + x2 ≥ 25	y1≥ 0, y3 ≥ 0, y2 quelconque
x1, x2 ≥ 0	

Exercice 2

Max Z = 40x1 + 50x2
5x1 + 4x2 ≤ 80
x1 + 2x2 ≤ 24
3x1 + 2x2 ≤ 36
x1, x2 ≥ 0

1- Donner le dual PL^* de ce primal PL
2- Résoudre le primal PL par le simplexe ou graphiquement
3- Déduire la solution du dual PL^*

<u>Corrigé:</u>

1. Donner le dual PL^* de ce primal PL

Min w=80y1 + 24y2 + 36y3
5y1+y2+3y3 ≥ 40
4y1+2y2+2y3 ≥ 50
y1,y2,y3≥0

2. Résoudre le primal PL par le simplexe

Max Z = 40x1+50x2
Contraintes :
5x1+4x2<=80
x1+2x2<=24
3x1+2x2<=36

V.B	x1	x2	e1	e2	e3	b	Ratio
e1	5	4	1	0	0	80	20
e2	1	2	0	1	0	24	12
e3	3	2	0	0	1	36	18
C.j	40	50	0	0	0	0	0

V.B	x1	x2	e1	e2	e3	b	Ratio
e1	3	0	1	-2	0	32	10.67
x2	0.5	1	0	0.5	0	12	24
e3	2	0	0	-1	1	12	6
C.j	15	0	0	-25	0	600	0

V.B	x1	x2	e1	e2	e3	b
e1	0	0	1	-0.5	-1.5	14
x2	0	1	0	0.75	-0.25	9
x1	1	0	0	-0.5	0.5	6
C.j	0	0	0	-17.5	-7.5	690

La solution est : **x_1 = 6, x_2 = 9, z = 690,**
s_1 =14, s_2 = 0, s_3 = 0,

3. Déduire la solution du dual PL*

A l'optimum, le primal et le dual sont liés par les règles suivantes:

- Les fonctions objectifs z et w ont la même valeur optimale **z=cx* = y*b=w**
- La valeur marginale d'une variable dans un programme est égale à l'opposé de la valeur optimale de la variable associée dans l'autre programme et réciproquement

- Les variables du primal (**x_1, x_2**), étant toutes différentes de 0, alors les contraintes associées du dual sont saturées, d'où pour le dual à résoudre :

5y1+y2+3y3 = 40
4y1+2y2+2y3 = 50

- La première variable d'écart **s_1** est non nulle (La première contrainte du primal n'est pas saturée) donc la première variable de la solution du dual est nulle $y_1 = 0$, d'où le dual à résoudre est :

y2+3y3 = 40
2y2+2y3 = 50

Primal	**z = 690**	**x1**	**x2**	**s1**	**s2**	**s3**
	valeurs optimales	6	9	14	0	0
	valeurs marginales	0	0	0	-17.5	-7.5
Dual	**w = 690**	**t1**	**t2**	**y1**	**y2**	**y3**
	valeurs optimales	0	0	0	17.5	7.5
	valeurs marginales	-6	-9	-14	0	0

Au fait, il n'existe que quatre situations possibles pour une paire de problèmes liés par la dualité :

1. Les deux problèmes possèdent des solutions optimales finies (liées par les relations ci-dessus)
2. Le problème primal est non borné et le problème dual est impossible
3. Le problème primal est impossible et le problème dual est non borné
4. Les deux problèmes sont impossibles

Exercice 3 :

Un fabricant produit 2 variétés de biscuit, l'une à la noix de coco et l'autre au chocolat, selon le schéma suivant :

Biscuit	Ingrédient			Prix de vente
	Farine	Chocolat	Noix de coco	
A	1	0	3	6
B	1	5	0	5
Disponible	8	22	12	

a) Formuler le problème comme un PL et trouver un plan de fabrication qui maximise le profit ;
b) Pour quelle variation du prix de vente du biscuit au chocolat, ce plan de fabrication reste optimal ?
c) On annonce une pénurie de chocolat ; déterminer la quantité minimale de chocolat nécessaire en stock, pour que ce plan de fabrication ne soit pas compromis ;
d) On étudie la production d'un nouveau biscuit à la noix de coco et au chocolat à raison de 1/3 de noix de coco et 2/3 de chocolat. Ce nouveau produit sera vendu à 8F. Quel est le schéma de production optimal ?
e) Déterminer le dual PL^* de ce primal PL
f) En déduire la solution du dual PL^*

Corrigé:

a)

$$\max z = 6x_1 + 5x_2 \qquad\qquad \max z = 6x_1 + 5x_2$$

$$x_1 + x_2 \leq 8 \qquad\qquad x_1 + x_2 + s_1 = 8 \quad \text{(Farine)}$$

$$5x_2 \leq 22 \qquad\qquad 5x_2 + s_2 = 22 \quad \text{(Chocolat)}$$

$$3x_1 \leq 12 \qquad\qquad 3x_1 + s_3 = 12 \quad \text{(Noix de coco)}$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \qquad\qquad x_1, x_2, s_1\ s_2\ s_3 \geq 0$$

Max Z = 6x1+5x2

Contraintes :

x1+x2<=8

5x2<=22

3x1<=12

V.B	x1	x2	e1	e2	e3	b	Ratio
e1	1	1	1	0	0	8	8
e2	0	5	0	1	0	22	0
e3	3	0	0	0	1	12	4
C.j	6	5	0	0	0	0	0

V.B	x1	x2	e1	e2	e3	b	Ratio
e1	0	1	1	0	-0.33	4	4
e2	0	5	0	1	0	22	4.4
x1	1	0	0	0	0.33	4	0
C.j	0	5	0	0	-2	24	0

V.B	x1	x2	e1	e2	e3	b
x2	0	1	1	0	-0.33	4
e2	0	0	-5	1	1.67	2
x1	1	0	0	0	0.33	4
C.j	0	0	-5	0	-0.33	44

b)

max z = $6x_1 + C_2\, x_2$

$\boldsymbol{x_2 = 4 - s_1 + (1/3)\, s_3}$
$\boldsymbol{x_1 = 4 - (1/3)\, s_3}$
avec
$z = 6(4 - (1/3)\, s_3) + C_2\,(4 - s_1 + (1/3)\, s_3)$

$z - (-s_1 C_2) - s_3((1/3)\, C_2 - 2) = 4(6 + C_2)$

$\Rightarrow -C_2 \leq 0$ et $(1/3)\, C_2 - 2 \leq 0$

$\Rightarrow 0 \leq C_2 \leq 6$

On en déduit que $C_2 \in [0, 6]$

c)
D’après les coûts marginaux, il nous reste en stock 2 quantité de chocolat, donc la quantité minimale pour que plan de fabrication optimal ne soit pas compromis, il faut avoir en réserve 22-2 =20 quantités de chocolat

d)
Max z = $6x_1 + 5x_2 + 8x_3$
$x_1 + x_2 \leq 8$
$5x_2 + (1/3)\, x_3 \leq 22$ 3
$x_1 + (2/3)\, x_3 \leq 12$
$x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0$

e) Déterminer le dual PL* de ce primal PL

Max z = $6x_1 + 5x_2$
$x_1 + x_2 <= 8$
$5x_2 <= 22$
$3x_1 <= 12$
$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

$\Rightarrow$

min w = 8y1 + 22y2 + 12y3
y1 + 5y2 + 3y3 ≥ 6
y1 ≥ 5
y1 ≥ 0, y2 ≥ 0, y3 ≥ 0

f) En déduire la solution du dual PL*

z = cx* = y*b = w

Primal	**z = 44**	**x1**	**x2**	**s1**	**s2**	**s3**
	valeurs optimales	4	4	0	2	0
	valeurs marginales	0	0	-5	0	-1/3
Dual	**w = 44**	**t1**	**t2**	**y1**	**y2**	**y3**
	valeurs optimales	0	0	5	0	1/3
	valeurs marginales	-4	-4	0	-2	0