一、填空题与选择题

1、方程$\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 \end{vmatrix}=0$的根的个数是__________个.

2、设3阶矩阵$\boldsymbol{A}$满足$|\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=0$，$\boldsymbol{A}^*$为$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵，则

$\left|\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^*-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\right|=$____________.

3、设矩阵$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$均为三阶方阵，交换矩阵$\boldsymbol{A}$的第一、二两行得到矩阵$\boldsymbol{A}_1$，将矩阵$\boldsymbol{B}$的第一列乘以数2加到第三列得到矩阵$\boldsymbol{B}_1$，若$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$，则$\boldsymbol{AB}=$____________.

4、设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是向量空间$\mathbb{R}^3$的一组基，则由基$\boldsymbol{\alpha}_1,\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2,\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_3$到基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_2$的过渡矩阵为____________.

5、设矩阵$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$相似，则矩阵$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$的秩$R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=$________.

6、若二次型$f=x_1^2+3x_2^2+6x_3^2+2tx_1x_2+4x_1x_3$为正定二次型，则$t$的取值范围是______________.

7、若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$线性相关，则_____________.

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1$必可由$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性表示　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_2$必不可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性表示

(C) $\boldsymbol{\alpha}_4$必可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_4$必不可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示

8、(1)如果矩阵$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$满足$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，则矩阵$\boldsymbol{A}$可逆，且$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}$；

(2) 如果n阶矩阵$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$满足$(\boldsymbol{AB})^2=\boldsymbol{E}$，则$(\boldsymbol{BA})^2=\boldsymbol{E}$；

(3) 如果n阶矩阵$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$均不可逆，则矩阵$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$不可逆；

(4) 如果n阶矩阵$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$均不可逆，则矩阵$\boldsymbol{AB}$不可逆

上述命题正确的是______________.

(A) (1),(2)　　(B) (1),(3)　　(C) (2),(3)　　(D) (2),(4)

二、计算行列式$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & 4 \\ -1 & \lambda & 0 & 3 \\ 0 & -1 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda+1 \end{vmatrix}$.

三、设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}(1,1,1)$，矩阵$\boldsymbol{X}$满足$\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{X}$，求矩阵$\boldsymbol{X}^{10}$.

四、　设向量组(I)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，向量组(II)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性相关，向量组(III)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$线性无关，证明：向量组(IV)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关.

五、已知非齐次线性方程组(I)$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3= \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3= \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3= \end{cases}$有惟一解$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$，且方程组(II)$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 \quad a= \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3 \quad a= \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3 \quad a= \end{cases}$有解$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. 将方程组(I)记为$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，方程组(II)记为$\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{b}$，（1）求方程组(II)的系数矩阵的秩$R(\boldsymbol{B})$；（2）求齐次线性方程组$\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$的基础解系；（3）求方程组$\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{b}$的通解.

六、已知次数不超过n的多项式的全体构成的集合

$$\mathrm{P}[x]_n=\left\{ f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0 \mid a_n,a_{n-1},\cdots,a_1,a_0\in\mathbb{R} \right\}$$

对于通常的多项式加法和数乘运算构成线性空间. 在$\mathrm{P}[x]_n$中定义映射T如下：对任意$f(x)\in\mathrm{P}[x]_n$，$T(f(x))=xf'(x)$，其中$f'(x)$为$f(x)$的一阶导函数。（1）验证T是$\mathrm{P}[x]_n$上的线性变换；（2）当$n=3$，求T在$\mathrm{P}[x]_3$的基$1+x,x+x^2,x^2+x^3,x^3$下的矩阵.

七、设3阶实对称矩阵$\boldsymbol{A}$的对角线上元素之和为2，且满足$\boldsymbol{A\alpha}_1=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{A\alpha}_2=\boldsymbol{0}$，其中$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$.

（1）求矩阵$\boldsymbol{A}$的全部特征值与特征向量；（2）求正交变换

$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$，将二次型$f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$化为标准形，其中$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$.

八、设$\boldsymbol{A}$为2阶实方阵，且$|\boldsymbol{A}|<0$，证明：$\boldsymbol{A}$可对角化.