线性代数（3学时）试卷B卷

2005年9月17日

（适用于高教版）

专业________________学号________________姓名________________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

注意：本试卷适用于学习3学时（高教出版社教材）线性代数者，共八大题。

一、（24分）填空题：

1. 设$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，则元素$a_{31}$的代数余子式$A_{31}=$________。

2. 设A是3阶方阵，A^*是A的伴随矩阵，k为非零常数，则$(kA)^*=$____A^*。

3. 设A是n阶可逆阵，B是n阶不可逆阵，则________。

   (A) $|A+B|=0$　　(B) $|A+B|\neq 0$

   (C) $|AB|=0$　　(D) $|AB|\neq 0$

4. 若A,B均为3阶非零方阵，$R(A)=2$，并且$AB=O$，则$R(B)=$________。

5. 设A是n阶方阵，其秩$R(A)=r<n$，那么A的n个列向量中________。

   (A) 必有r个列向量线性无关　　(B) 任意r个列向量线性无关

   (C) 任意r个列向量均为A的列向量组的一个最大无关组

   (D) 任意一个列向量可由其余$r-1$个列向量线性表示

6. 三元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为2，已知a_1,a_2,a_3是它的三个解向量，其中

   $a_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，$a_2+a_3=\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$，则该方程组的通解是________________。

7. 已知可逆阵A的一个特征值是2，则得$B=A+A^{-1}$的一个特征值是____。

8. 设A是3阶方阵，A的特征值是1，-2，4，则下列矩阵________可逆。

   (A) $E-A$　　(B) $A+2E$

   (C) $2E-A$　　(D) $A-4E$

二、(8分) 计算4阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 7 & -5 \\ 16 & 9 & 49 & 25 \\ 64 & 27 & 343 & -125 \end{vmatrix}$。

三、(12分) 求 $\boldsymbol{X}$，使得 $\boldsymbol{AXB}=\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$。

四、（10 分）已知 $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & x\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 0\end{pmatrix}$，$\alpha=\begin{pmatrix}1\\ y\\ -1\end{pmatrix}$，若两个向量 $\alpha, A\alpha$ 线性相关，求 x,y。

五、（10 分）设 V 是由向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 2\\ 4\end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix}0\\ 3\\ 1\\ 2\end{pmatrix}, \alpha_3=\begin{pmatrix}3\\ 0\\ 7\\ 14\end{pmatrix}, \alpha_4=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 2\\ 0\end{pmatrix}, \alpha_5=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 5\\ 6\end{pmatrix}$ 所生成的向量空间，

求 V 的维数与一组基。

六、（12分）已知线性方程组 $Ax=\lambda b_1+b_2$，其中

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & -2 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix},b_1=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix},b_2=\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}$$

求 λ，使上述方程组有解，并求出所有解。

七、（14 分）已知 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$。

1．证明：$\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征向量；

2．求一个正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角阵，并写出该对角阵。

八、(10分)证明题:

1. 若实对称矩阵A的特征值只有0和1，则$A^2=A$。

2. 证明集合$V=\left\{A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \middle| \, a_{11}+a_{22}=0\right\}$对于函数的加法和数乘构成实数域$R$上的线性空间。