回顾：

质点系动力学： 研究质点系**整体**运动特征量（动量、动量矩和动能）的**变化**与作用**力**间的关系。

主要内容

- 质点系的动量定理
- 质点系的动量矩定理
- 质点系的动能定理

质点系的动能定理:从能量的角度来分析质点系的动力学问题。本章主要讨论**质点系（特别是刚体、刚体系统）**作机械运动时动能和力的功之间的关系。

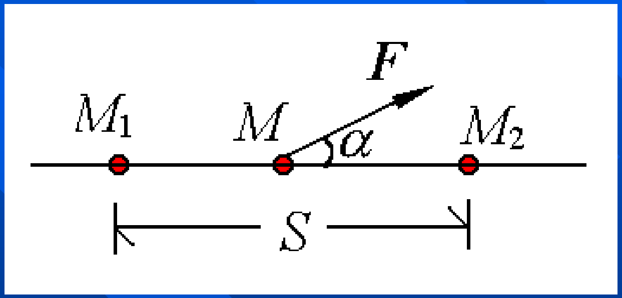
第十二章　动能定理

§12-1　功和功率

功是度量力在一段路程上对物体作用的累积效应，力作功的结果使物体的机械能发生变化。

回顾：常力的功

$$W = \vec{F} \cdot \vec{S} = FS\cos\alpha$$



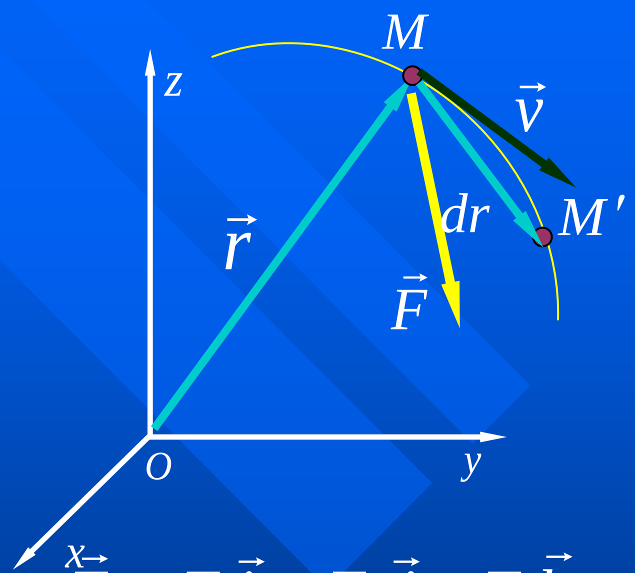
力的功是代数量。$\alpha < \frac{\pi}{2}$ 时,正功;$\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时,功为零;$\alpha > \frac{\pi}{2}$ 时,负功。

单位：焦耳（J）；　　1J=1N·1m

一、功的一般表达式:

元功: $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$

总功: $W = \int_s \vec{F} \cdot d\vec{r}$



1、直角坐标系形式：

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$

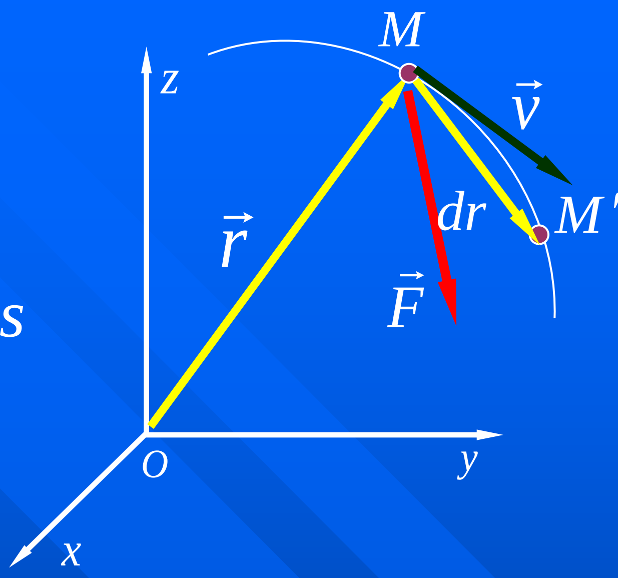
$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

$$W = \int_s (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = \int_s dW$$

2、自然坐标形式：

$$W=\int_{M_1}^{M_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{M_1}^{M_2}F\left|d\vec{r}\right|\cos\left(\vec{F},\vec{v}\right)$$



$$\because\left|d\vec{r}\right|=ds\qquad\therefore W=\int_s F\cos(\vec{F},\vec{v})ds=\int_s F_\tau ds$$

3、合力的功

n个力： $\vec{F}_1,\vec{F}_2,\cdots\cdots,\vec{F}_n$ $\qquad\vec{F}_R=\sum\vec{F}_i$

$$W=\int_s\vec{F}_R\,d\vec{r}=\int_s\vec{F}_1 d\vec{r}+\ldots\ldots=\sum W_i$$

合力在任一段路程上所做的功等于各分力在同一段路程上所做的功之代数和。

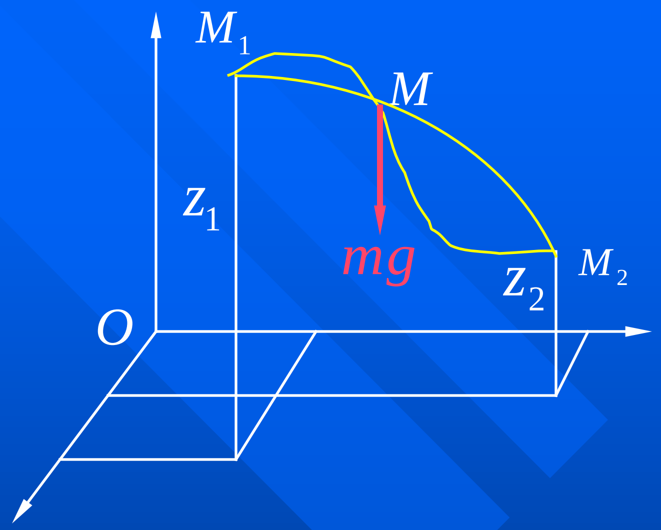
二、 一些常见力所作功的计算

1.重力的功

$$F_x = 0,\ \ F_y = 0,\ \ F_z = -mg$$

代入 $$W = \int_C F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz$$

$$= -\int_{z_1}^{z_2} d(mgz) = mg(z_1 - z_2)$$



重力所作的元功为某一函数的全微分。

结论：重力的功取决于重力大小和过程始末的质点位置，而与质点在其间运动的轨迹无关。

对于质点系

$$W = \sum m_i g(z_{i1} - z_{i2}) = (\sum m_i z_{i1})g - (\sum m_i z_{i2})g$$

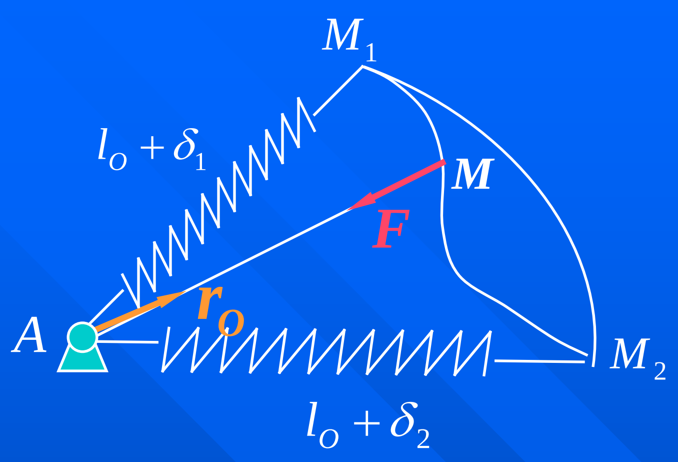
$$\boxed{W = mg(z_{C1} - z_{C2})}$$

其中，Z_{c1}，Z_{c2}分别为质点系在运动始末的重心z轴坐标。

2.弹性力的功

设弹簧原长为l_O，弹簧刚度系数为k，则弹性力（矢量）可表示为

$$\vec{F}=-k(r-l_0)\frac{\vec{r}}{r}$$



$$dW=\vec{F}\cdot d\vec{r}=-k(r-l_O)\frac{\vec{r}}{r}\cdot d\vec{r}$$

$$=-k(r-l_O)\frac{d(\vec{r}\cdot\vec{r})}{2r}=-k(r-l_O)\frac{dr^2}{2r}$$

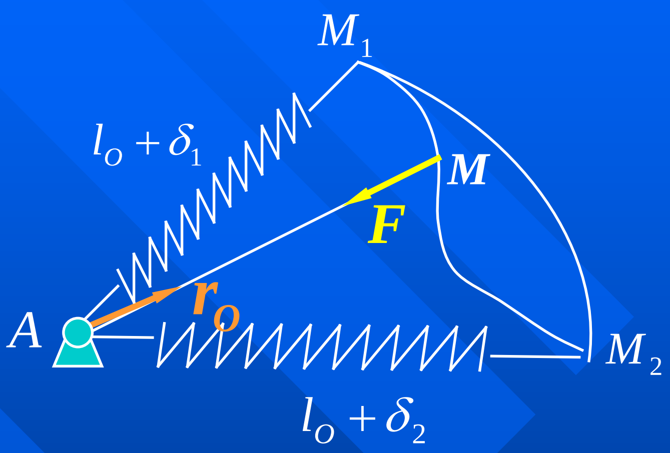
$$=-k(r-l_O)dr$$

$$=d[-\tfrac{1}{2}k(r-l_0)^2+C]$$（也可表示为某个函数的全微分。）

则有 $W=\int_{r_1}^{r_2}-k(r-l_O)\,\mathrm{d}r=\frac{1}{2}k[(r_1-l_O)^2-(r_2-l_O)^2]$

令 $\delta_1=r_1-l_O$ （变形量）

$\delta_2=r_2-l_O$



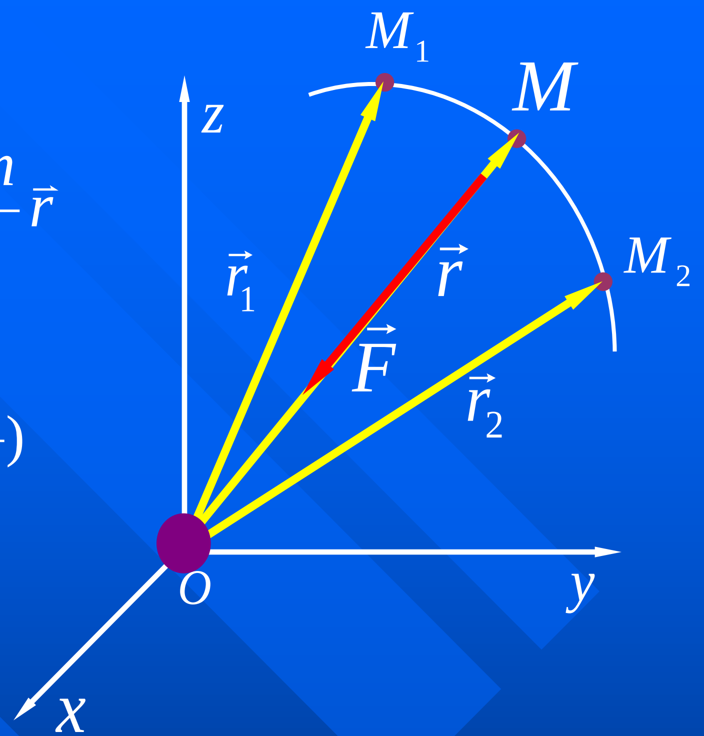
代入后得

$$\boxed{W=\frac{1}{2}k(\delta_1^{\ 2}-\delta_2^{\ 2})}$$

结论：作用在质点上的弹性力的功取决于其大小和过程始末的质点位置，而与质点在其间运动的轨迹无关。

3、万有引力的功

$$F = G\frac{m_0 m}{r^2} \qquad \vec{F} = -\frac{Gm_0 m}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = -\frac{Gm_0 m}{r^3}\vec{r}$$



$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\frac{Gm_0 m}{r^3}\vec{r}\cdot d\vec{r} = -\frac{Gm_0 m}{r^3}d(\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}}{2})$$

$$= -\frac{Gm_0 m}{r^2}dr = Gm_0 md(\frac{1}{r})$$

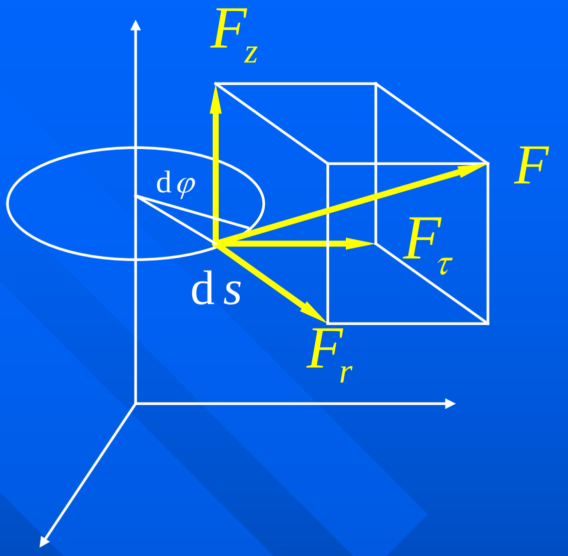
$$W = \int_{M_1}^{M_2}\vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2}Gm_0 md(\frac{1}{r})$$

$$\boxed{W = Gm_0 m(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1})}$$

万有引力力的功只与物体的起始位置与终了位置有关，而与物体运动路径无关。

4.作用在定轴转动刚体上的力的功

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_\tau ds = F_\tau r d\varphi$$



于是 $dW = M_z(\vec{F}) d\varphi$

则有 $W = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z(\vec{F}) d\varphi$

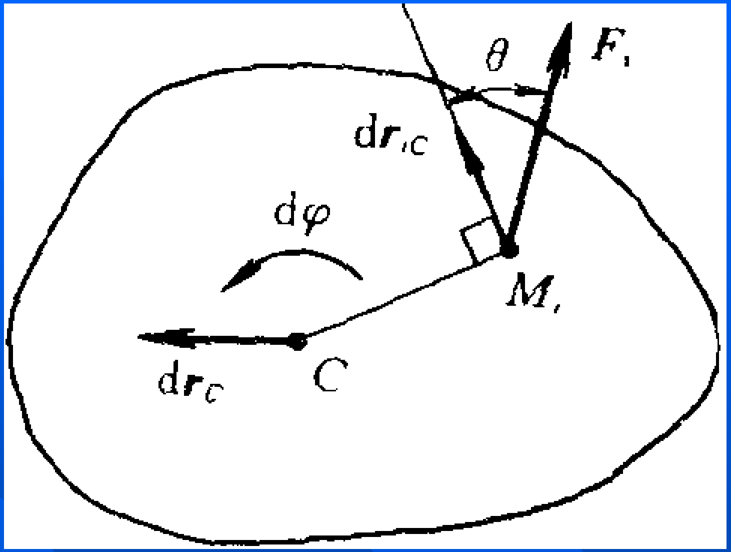
作用于转动刚体上力的功可以通过其对转轴的力矩计算。

如果作用在刚体上的是一个力偶m，力偶作用面垂直z轴，由力偶性质，其在刚体运动过程中所作的功为：

$$W = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} m d\varphi$$

5．平面运动刚体上力系的功

取刚体的质心C为基点，当刚体有无限小位移时，任一力 $\boldsymbol{F}_i$ 作用点 M_i 的位移为



$$d\boldsymbol{r}_i = d\boldsymbol{r}_c + d\boldsymbol{r}_{ic}$$

力 $\boldsymbol{F}_i$ 在点 M_i 的位移上所作元功为

$$dW_i = \boldsymbol{F}_i \cdot d\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{F}_i \cdot d\boldsymbol{r}_c + \boldsymbol{F}_i \cdot d\boldsymbol{r}_{ic}$$

∵ 转动位移

大小 $M_iC \cdot d\varphi$

方向 $d\boldsymbol{r}_{ic} \perp \overline{M_iC}$

$$\therefore \boldsymbol{F}_i \cdot d\boldsymbol{r}_{ic} = F_i \cos\theta \cdot M_iC \cdot d\varphi$$

$$= M_c(\boldsymbol{F}_i) d\varphi$$

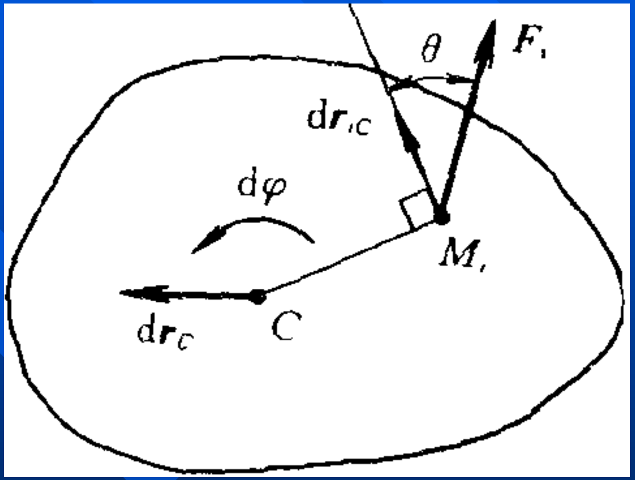
$$dW_i = \boldsymbol{F}_i \cdot d\boldsymbol{r}_c + M_c(\boldsymbol{F}_i)d\varphi$$

力系全部力所作元功之和为

$$dW = \sum dW_i = \sum \boldsymbol{F}_i \cdot d\boldsymbol{r}_c + \sum M_c(\boldsymbol{F}_i)d\varphi = \boldsymbol{F'}_R \cdot d\boldsymbol{r}_c + M_c d\varphi$$

其中$\boldsymbol{F}_R$'为力系主矢，M_c为力系对质心的主矩。

刚体质心C由C_1移到C_2，同时刚体又由φ_1转到φ_2角度时，力系作功



$$W_{12} = \int_{C_1}^{C_2} \boldsymbol{F'}_R \cdot d\boldsymbol{r}_c + \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_c d\varphi$$

平面运动刚体上力系的功就等于力系向质心简化所得的力（主矢）和力偶（主矩）作功之和。

基点也可以是刚体上任意一点。

6．滑动摩擦力的功

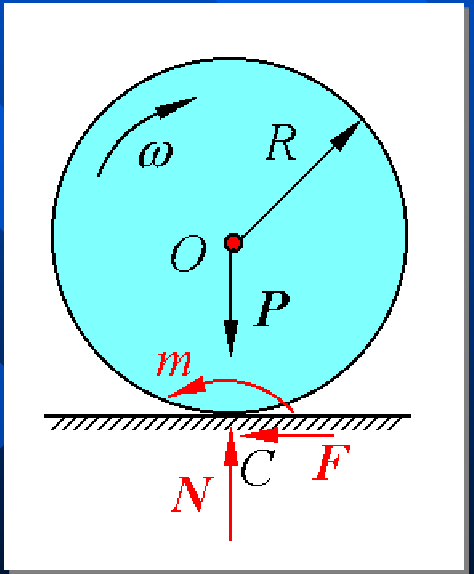
(1) 动滑动摩擦力的功 $W=\int_{\overset{\frown}{M_1M_2}} -F_\tau ds = -\int_{\overset{\frown}{M_1M_2}} f'Nds$

N=常量时, $W=-f'N s$, 与质点的路径有关。

(2) 圆轮沿固定面作纯滚动时，静滑动摩擦力的功

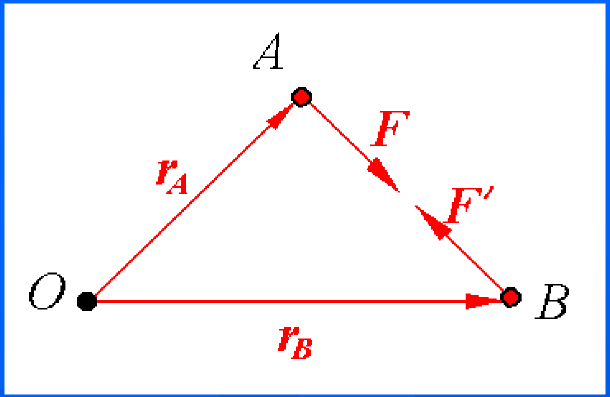
正压力 $\vec{N}$，摩擦力 $\vec{F}$ 作用于瞬心C处，而瞬心在dt时间内的位移

$d\vec{r}=\vec{v}_C dt=0$ $\quad dW=\vec{F}\cdot d\vec{r}=\vec{F}\cdot\vec{v}_C dt=0$



7. 质点系内力的功

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r}_A + \vec{F}'\cdot d\vec{r}_B = \vec{F}\cdot d\vec{r}_A - \vec{F}\cdot d\vec{r}_B$$
$$= \vec{F}\cdot d(\vec{r}_A - \vec{r}_B) = \vec{F}\cdot d(\overrightarrow{BA})$$



一般情况下，质点系内力功之和不等于零。若**A**、**B**两点间距离保持不变,内力的元功和就等于零。刚体的内力功之和等于零。

工程上几种内力作功的情形

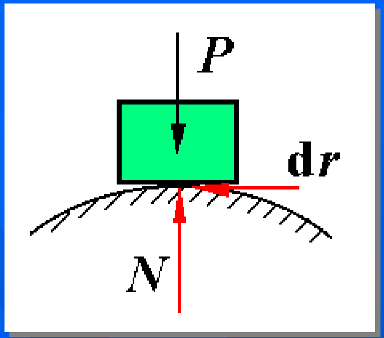
- 有相对滑动的两个物体之间的摩擦力作负功。
- 作为整体考察，所有发动机的内力都是有功力。例如汽车内燃机工作时，气缸内膨胀的气体质点之间的内力；气体质点与活塞之间的内力；气体质点与气缸内壁间的内力；这些内力都要作功。

8．理想约束反力的功

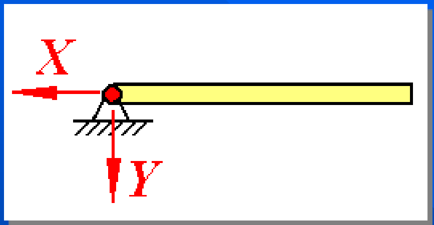
约束反力的元功之和恒等于零的约束称为理想约束。

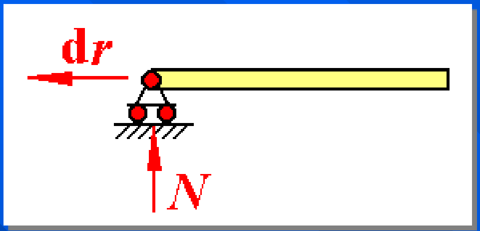
（1）．光滑固定面约束

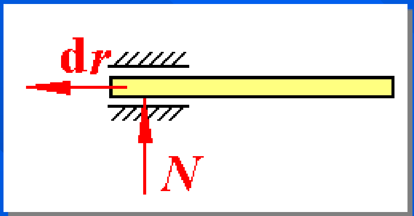
$$dW^{(N)}=\vec{N}\cdot d\vec{r}=0\quad(\vec{N}\perp d\vec{r})$$



（2）．活动铰支座、固定铰支座和向心轴承





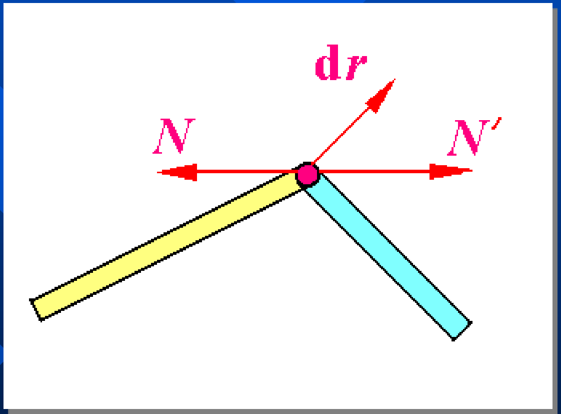


（3）．刚体沿固定面作纯滚动

（4）．联接刚体的光滑铰链（中间铰）

$$\sum dW^{(N)}=\vec{N}\cdot d\vec{r}+\vec{N}'\cdot d\vec{r}$$

$$=\vec{N}\cdot d\vec{r}-\vec{N}\cdot d\vec{r}=0$$



（5）．柔索约束（不可伸长的绳索）

拉紧时，内部拉力的元功之和恒等于零。

理想约束：凡约束力做功之和等于零的约束称理想约束。包括：光滑面约束；固定铰支座；不可伸长的绳索；刚体纯滚动（不计滚动摩阻情况下）；刚性连接约束等。

一般情况下，常见非理想约束力：

动滑动摩擦力等

三、功率（反映作功快慢、效率）

功率——力在单位时间内所作的功称为功率。

定义：平均功率

$$P^* = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

瞬时功率（简称功率）

$$P = \frac{dW}{\mathrm{d}t}$$

$$dW = \vec{\mathbf{F}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{r}},$$

$$\boldsymbol{P = F\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = Fv\cos(\vec{\mathbf{F}}, \vec{\mathbf{v}}) = F_v \cdot v$$

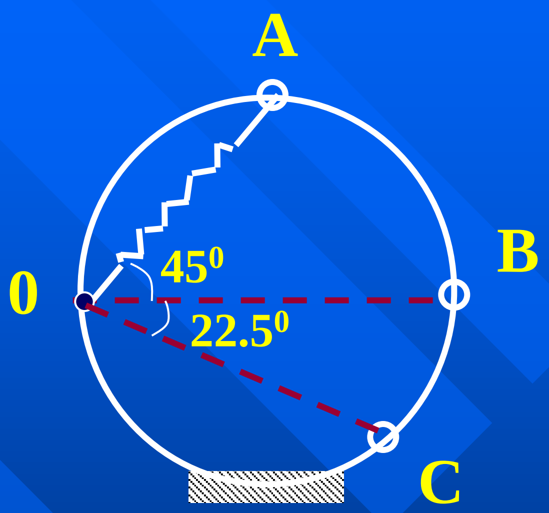
$$P = \frac{dW}{\mathrm{d}t} = M_z \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = M_z\omega$$

$$[P] = \frac{[W]}{[t]} = [\text{力}][\text{速度}] = N \cdot \frac{m}{s} = \frac{J}{s} = W \text{ 瓦特}$$

例　半经R圆环被固定着，一个小球套在圆环上，并被原长为$l=\sqrt{2}R$的弹簧约束在O点。求：小球从A到B的功，又从B到C的功。

解:

$$W=\frac{k}{2}(\delta_1^{\ 2}-\delta_2^{\ 2})$$



从A到B的功:

$\delta_1=0,\qquad \delta_2=(2R-\sqrt{2}R)$

$$W=\frac{k}{2}(\delta_1^{\ 2}-\delta_2^{\ 2})=-\frac{k}{2}(2-\sqrt{2})^2R=-0.171kR^2,$$

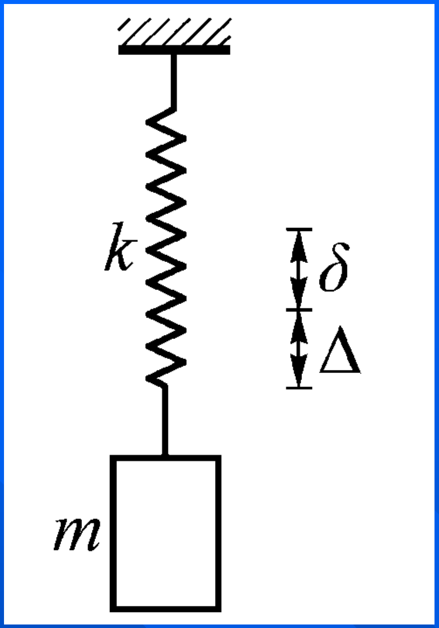
从B到C的功:

$\delta_1=(2R-\sqrt{2}R)\qquad \delta_2=(r_2-\sqrt{2}R)$

$r_2=2R\cos 22.5°=1.84776R,$

$$W=\frac{k}{2}(\delta_1^{\ 2}-\delta_2^{\ 2})=0.077kR^2$$

一弹簧常数为k的弹簧下挂一质量为m的物体，若物体从静平衡位置（设静伸长为δ）下降Δ距离，则弹性力所作的功为________。



（1） $\dfrac{k}{2}\Delta^2$　　（2） $\dfrac{k}{2}(\delta+\Delta)^2$

（3） $\dfrac{k}{2}[(\Delta+\delta)^2-\delta^2]$　　（4） $\dfrac{k}{2}[\delta^2-(\delta+\Delta)^2]$

答：（4）

§ 12-2 动能定理

物体的动能是由于物体运动而具有的能量，是机械运动强弱的又一种度量。

一．质点的动能

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

瞬时量,与速度方向无关的正标量,具有与功相同的量纲,单位也是J。

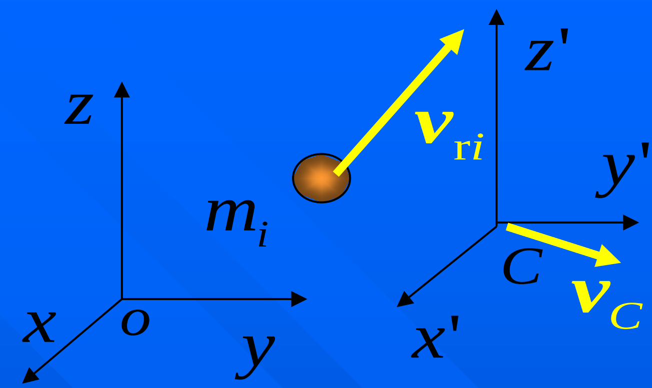
二．质点系的动能

$$T = \sum \frac{1}{2} m_i {v_i}^2$$

动能表达式中的速度v_i为绝对速度。

三、柯尼希定理

设动参考系Cx'y'z'作平移



由速度合成定理： $\vec{v}_i = \vec{v}_C + \vec{v}_{ri}$

$$v_i^2 = \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = (\vec{v}_C + \vec{v}_{ri}) \cdot (\vec{v}_C + \vec{v}_{ri}) = v_C^2 + 2 \cdot \vec{v}_C \cdot \vec{v}_{ri} + v_{ri}^2$$

$$T = \Sigma \frac{1}{2} m_i v_i^{\ 2} = \frac{1}{2} \Sigma m_i v_C^{\ 2} + \frac{1}{2} \Sigma m_i v_{ri}^2 + \Sigma m_i \vec{v}_C \cdot \vec{v}_{ri}$$

$$= \frac{1}{2} m v_C^{\ 2} + \frac{1}{2} \Sigma m_i v_{ri}^2 + \vec{v}_C \cdot \Sigma m_i \vec{v}_{ri}$$

根据质点系动量的表达式：

$$m\vec{v}_C = \Sigma m_i \vec{v}_i$$

$$\because \vec{v}_C \cdot \Sigma m_i \vec{v}_{ri} = \vec{v}_C \cdot m\vec{v}_{rC}$$

因为质心相对于其本身的速度v_{rC}为零

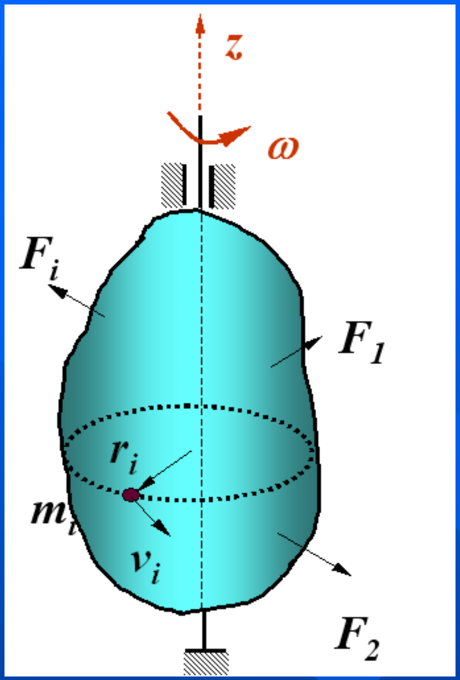
$$\therefore \vec{v}_C \cdot \Sigma m_i \vec{v}_{ri} = \vec{v}_C \cdot m\vec{v}_{rC} = 0 \qquad \therefore T = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} \Sigma m_i v_{ri}^2$$

柯尼希定理：质点系的动能等于随同其质心平动的动能与相对其质心运动的动能之和。

三、刚体的动能

1.刚体作平动

$$T=\sum\frac{1}{2}m_iv_i{}^2=\sum\frac{1}{2}m_iv_c{}^2=\frac{1}{2}v_c{}^2\sum m_i=\frac{1}{2}mv_c{}^2$$



2.刚体作定轴转动

$$T=\frac{1}{2}\sum m_i\upsilon_i^2=\frac{1}{2}(\sum m_ir_i{}^2)\omega^2$$

$$(\upsilon_i=\omega r_i)$$

$$\boxed{T=\frac{1}{2}J_z\omega^2}$$

3.刚体作平面运动

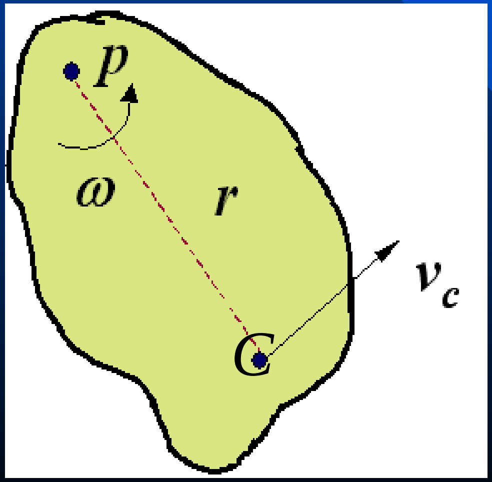
设刚体上任一质点到瞬心的垂直距离为ρ_i，则该点的速度为$\upsilon_i = \rho_i \omega$

$$T = \frac{1}{2}\sum m_i \upsilon_i^2 = \frac{1}{2}\left(\sum m_i \rho_i^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2}J_P \omega^2 \Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{2}J_P \omega^2}$$

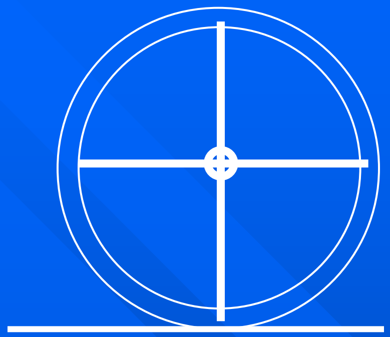
或 $J_P = J_C + m\rho_C^2$

$$\Downarrow$$

$$T = \frac{1}{2}(J_C + m\rho_C^2)\omega^2 = \frac{1}{2}J_c\omega^2 + \frac{1}{2}m(\omega\rho_c)^2 \Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{2}m\upsilon_C^2 + \frac{1}{2}J_C\omega^2}$$

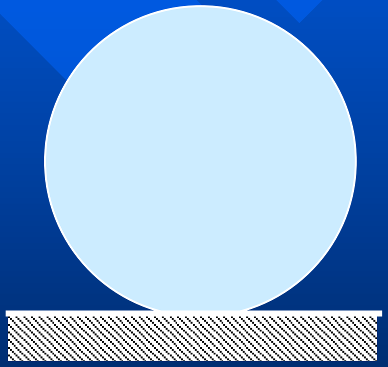


例　空心轮重为P，半径为R，轮心速度为v_c，写出空心轮的动能。如为实心轮，写出实心轮的动能。



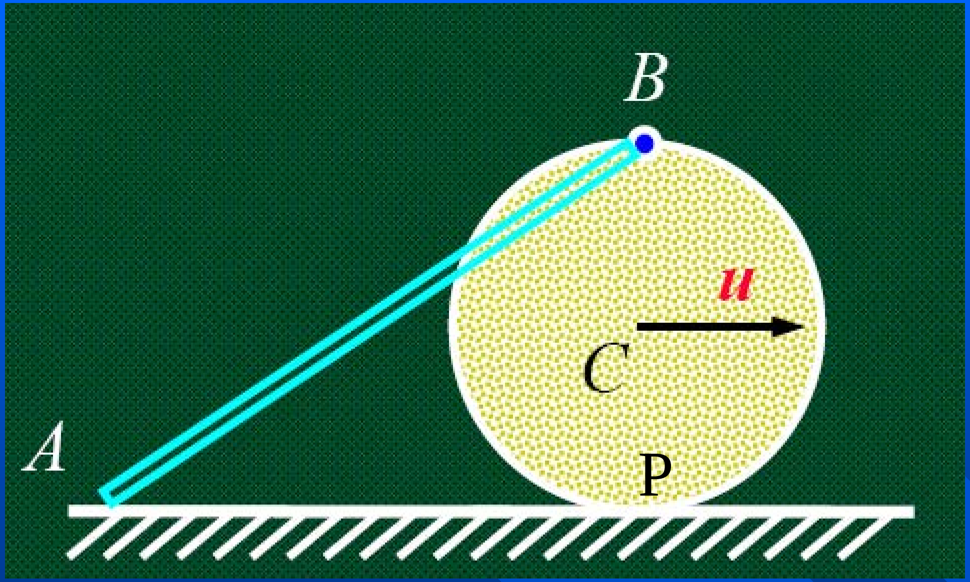
解:

$$T=\frac{1}{2}m\upsilon_C^2+\frac{1}{2}J_C\omega^2=\frac{P}{2g}v_c^2+\frac{1}{2}\frac{P}{g}R^2\frac{v_c{}^2}{R^2}=\frac{P}{g}v_c{}^2$$



$$T=\frac{1}{2}m\upsilon_C^2+\frac{1}{2}J_C\omega^2=\frac{P}{2g}v_c{}^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{P}{2g}R^2\frac{v_c{}^2}{R^2}=\frac{3}{4}\frac{P}{g}v_c{}^2$$

例　己知长l的杆和半径为r的均质圆盘质量均为m,均质圆盘沿水平面纯滚,质心速度为u,试求系统的动能。



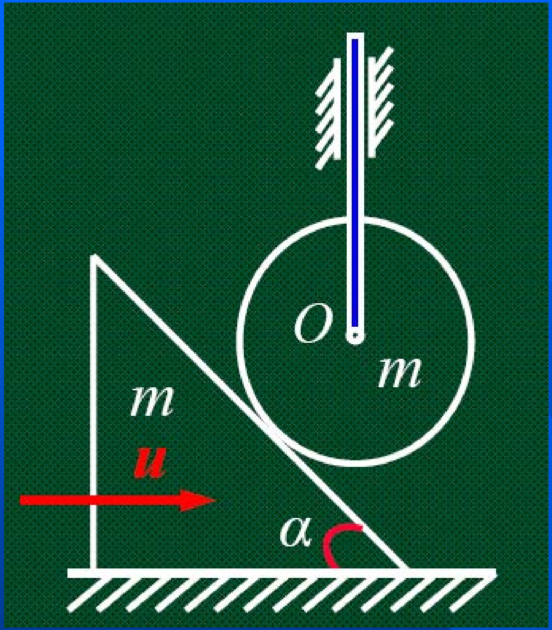
答案: $\frac{11}{4}mu^2$

$$T=\frac{1}{2}J_P\omega^2+\frac{1}{2}m_{AB}v^2$$

$$=\frac{1}{2}(J_C+mr^2)(\frac{u}{r})^2+\frac{1}{2}m(2u)^2$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}mr^2+mr^2)(\frac{u}{r})^2+\frac{1}{2}m(2u)^2$$

例　已知m、u, $\alpha = 45°$, 杆重不计,均质圆盘沿斜面纯滚动,试求系统的动能。



假设圆盘半径为r

答案: $\dfrac{3}{2}mu^2$

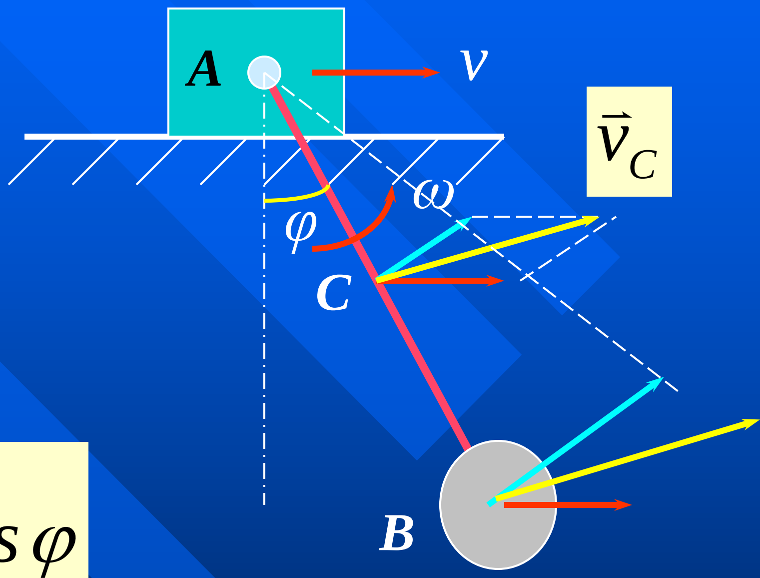
$$T = \frac{1}{2}J_P\omega^2 + \frac{1}{2}mu^2$$

$$= \frac{1}{2}\left[J_O + m\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2\right]\left(\frac{u}{\frac{r}{\sqrt{2}}}\right)^2 + \frac{1}{2}mu^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{2}mr^2\right)\left(\sqrt{2}\frac{u}{r}\right)^2 + \frac{1}{2}mu^2$$

例： 质量为 m_1 的滑块，沿水平直线运动，通过铰链A，用长为 l、质量为 m_2 的刚性杆固结一垂球B，球质量为 m_3， 设图示瞬时，滑块速度为 v，杆绕 A 点的角速度为 ω。求系统动能

运动分析：



滑块看成质点　　速度为 v

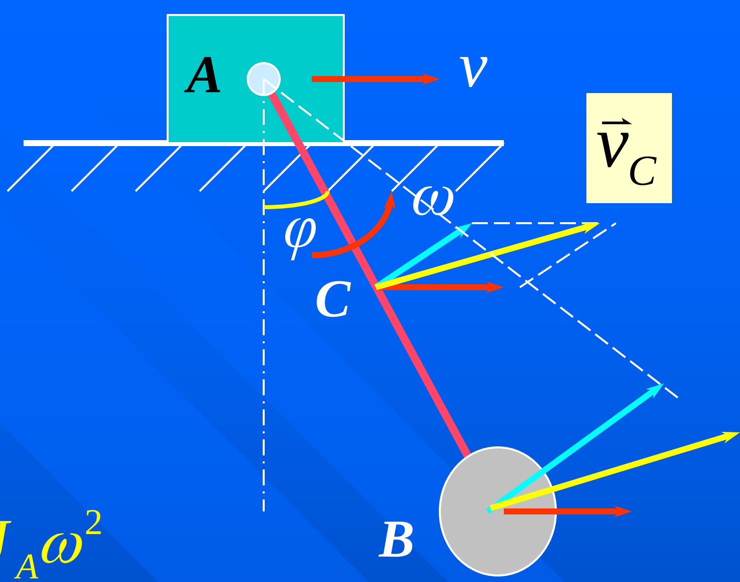
刚性杆作平面运动　　角速度为 ω

质心速度由基点法得到

$$v_C^2 = v^2 + \frac{1}{4} l^2 \omega^2 + v l \omega \cos\varphi$$

球看成质点　　其速度同样由基点法得到

$$v_B^2 = v^2 + l^2 \omega^2 + 2 v l \omega \cos\varphi$$



滑块动能

$$T_1=\frac{1}{2}m_1v^2$$

刚性杆动能

$$T_2=\frac{1}{2}m_2v_C^2+\frac{1}{2}J_C\omega^2\neq\frac{1}{2}J_A\omega^2$$

$$=\frac{m_2}{2}\left(v^2+\frac{1}{4}l^2\omega^2+l\omega v\cos\varphi\right)+\frac{1}{24}m_2l^2\omega^2$$

球的动能

$$T_3=\frac{1}{2}m_3v_B^2=\frac{1}{2}m_3\left(v^2+l^2\omega^2+2vl\omega\cos\varphi\right)$$

系统总动能

$$T=T_1+T_2+T_3$$

$$=\frac{1}{2}\left[(m_1+m_2+m_3)v^2+\frac{1}{3}(3m_3+m_2)l^2\omega^2+(2m_3+m_2)lv\omega\cos\varphi\right]$$

四、 动能定理

1.质点的动能定理

设质量为m的质点，在力F的作用下从M_1运动到M_2，在任一瞬时，有

$$\mathrm{m}\vec{a}=\vec{F}$$

将上式两边同乘dr，得

$$\mathrm{m}\frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

因

$$\vec{\upsilon}\cdot\mathrm{d}\vec{\upsilon}=\frac{1}{2}\mathrm{d}(\vec{\upsilon}\cdot\vec{\upsilon})=\frac{1}{2}\mathrm{d}\upsilon^2$$

所以

$$\mathrm{d}(\frac{1}{2}\mathrm{m}\upsilon^2)=\mathrm{d}W$$

——质点动能定理的微分形式

$$\mathrm{d}(\frac{1}{2}m\upsilon^2) = \mathrm{d}W$$

——质点动能定理的微分形式

积分上式

$$\frac{1}{2}m\upsilon_2^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 = W$$

——质点动能定理的积分形式

2.质点系的动能定理

* 将作用在每一质点上的力所做的功分为：

主动力的功 $\mathrm{d}W_{Fi}$ 和约束反力的功 $\mathrm{d}W_{Fi}^*$

则对质点系中每一质点可写出：

$$\mathrm{d}(\frac{1}{2}m_i\upsilon_i^2) = \mathrm{d}W_{Fi}^* + \mathrm{d}W_{Fi} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

$$\mathrm{d}(\frac{1}{2}m_i\upsilon_i^2)=\mathrm{d}W_{Fi}^*+\mathrm{d}W_{Fi} \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

将以上n个方程相加

$$\sum\mathrm{d}(\frac{1}{2}m_i\upsilon_i^2)=\sum\mathrm{d}W_{Fi}^*+\sum\mathrm{d}W_{Fi}$$

若加在质点系上的约束为理想约束

$$\mathrm{d}(\sum\frac{1}{2}m_i\upsilon_i^2)=\sum\mathrm{d}W_{Fi}$$

即

$$\mathrm{d}T=\sum\mathrm{d}W_{Fi}$$

——质点系动能定理的微分形式

具有理想约束的质点系动能的增量，等于作用于质点系全部主动力所作的元功的和。

积分上式

$$T_2-T_1=\sum W^A{}_{Fi}$$

——质点系动能定理的积分形式

具有理想约束的质点系在某一段运动过程中动能的改变量，等于作用于质点系全部主动力所作功之和。

1. 动能定理是代数量表达式，和动量定理相比更容易应用，但由于一个方程只能求解一个未知量，因此常常需要应用运动学等原理建立补充方程。

2. 在应用动能定理时，当约束中包含非理想约束（粗糙面上的滑动等）和弹簧时，只需解除该约束，将其转化为主动力即可。

五、 功率方程

质点系动能定理的微分形式 $dT = \sum dW_i$

其中， $\sum dW_i = \sum \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = \sum \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i \cdot dt$

等式两边同除 dt ，则有 $\dfrac{dT}{dt} = \sum \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = \sum P_i$

质点系动能对时间的一阶导数等于作用于质点系上所有力的功率的代数和，这称为功率方程。

对机器而言，功率是反映其工作能力的一个重要指标，所有力的功率之和由输入功率P_1，输出功率（有用功率）P_2，损耗功率（无用功率）P_3三部分组成，即

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = P_1 - P_2 - P_3$$

此外，在工程实际中，我们定义输出功率与输入功率之比为机器的机械效率。

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} \times 100\%$$

显然，其恒小于等于1。

解：车床正常工作时，工件匀速旋转，动能无变化

$$\frac{dT}{dt}=0 \quad \Rightarrow \quad P_{有用}=P_{输入}-P_{无用} \qquad \frac{dT}{dt}=P_1-P_2-P_3$$

其中

$$P_{输入}=5.4\text{kW} \qquad P_{无用}=P_{输入}\times 30\%=1.62\text{kW}$$

$$P_{有用}=P_{输入}-P_{无用}=3.78\text{kW}$$

切削力F 与工件在切削力作用点的速度v 同向

$$P_{有用}=\vec{F}\cdot\vec{v}=Fv=F\times\frac{d}{2}\times\frac{\pi n}{30} \qquad F=\frac{60}{\pi\ dn}P_{有用}$$

例 题

车床电动机的功率$P_{输入}$＝5.4 kW 。传动零件之间的磨擦损耗功率为输入功率的30％ 。工件的直径d＝100 mm。

求：转速n=42 r/min 和 n =112 r/min 的允许最大切削力。

当 n = 42 r/min 时

$$F=\frac{60}{\pi\times0.1\times42}\times3.78=17.19\text{kN}$$

当 n = 112 r/min 时

$$F=\frac{60}{\pi\times0.1\times112}\times3.78=6.45\text{kN}$$

切削力F 与工件在切削力作用点的速度v 同向

$$P_{有用}=\vec{F}\cdot\vec{v}=Fv=F\times\frac{d}{2}\times\frac{\pi n}{30}$$

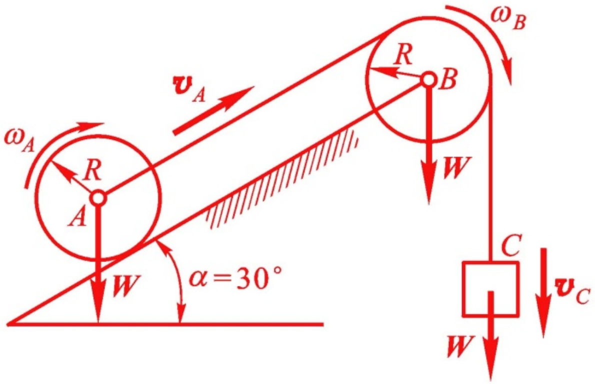
$$F=\frac{60}{\pi dn}P_{有用}$$

例 题

车床电动机的功率$P_{输入}$＝5.4 kW 。传动零件之间的磨擦损耗功率为输入功率的30％ 。工件的直径d＝100 mm。

求：转速n=42 r/min 和 n =112 r/min 的允许最大切削力。

例 题



均质圆轮A、B的质量均为m，半径均为R，轮A沿斜面作纯滚动，轮B作定轴转动，B处摩擦不计。物块C的质量也为m。A、B、C用无质量的绳相联，绳相对B轮无滑动。系统初始为静止状态。

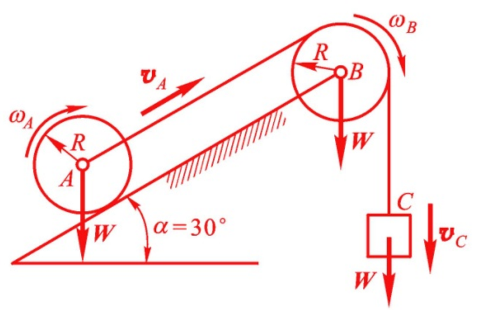
试求：

1．当物块C下降高度为h时，轮A质心的速度以及轮B的角速度。

2．系统运动时，物块C的加速度。

□ 动能定理及其应用

动能定理的应用举例



解： 以整个系统为研究对象。画出系统中作功的力（理想约束：主动力）。

$$T_2 - T_1 = W_{12}$$

1．分析运动 确定各部分的速度、角速度。

写出系统的动能表达式：

注意到轮A作平面运动；轮B作定轴转动；物块C作平移。于是，系统的动能：

$$T_1 = 0, \qquad T_2 = \left(\frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}J_A\omega_A^2\right) + \frac{1}{2}J_B\omega_B^2 + \frac{1}{2}mv_C^2$$

根据运动学分析，得到

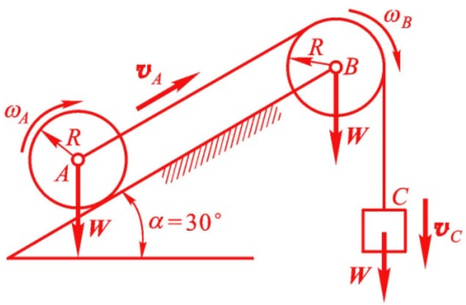
$$\omega_A = \frac{v_A}{R} \qquad \omega_B = \frac{v_C}{R} = \frac{v_A}{R} \qquad v_C = v_A$$

$$T_1 = 0, \qquad T_2 = \frac{3}{2}mv_A^2$$

□ 动能定理及其应用

动能定理的应用举例

$$T_1 = 0, \qquad T_2 = \frac{3}{2} m v_A^2$$



解：2. 确定外力的功:

系统具有理想约束，轮A的重力和物块的重力分别作正功和负功。于是，系统外力的总功为

$$W_{12} = mgh - mgh\cos 60^\circ = \frac{1}{2} mgh$$

3．应用动能定理的积分形式:

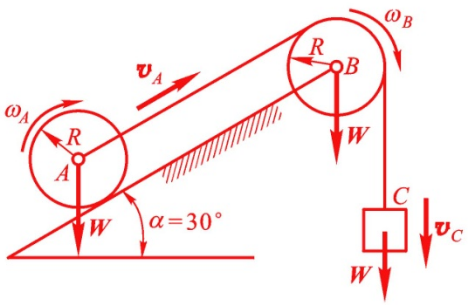
$$T_2 - T_1 = W_{12} \qquad \boxed{\frac{3}{2} m v_A^2 - 0 = \frac{1}{2} mgh}$$

由此解出

$$v_A^2 = \frac{gh}{3} \qquad v_A = \sqrt{\frac{gh}{3}} \qquad \omega_B = \frac{v_A}{R} = \sqrt{\frac{gh}{3R^2}}$$

□ 动能定理及其应用

动能定理的应用举例



$$v_A=\sqrt{\frac{gh}{3}} \qquad \omega_B=\frac{v_A}{R}=\sqrt{\frac{gh}{3R^2}}$$

解：4．确定系统运动时物块C的加速度：

将下降高度h视为变量，其对时间的一阶导数即为物块C的速度因为物块C作直线平移，故有

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=v_C$$

$$\boxed{\frac{3}{2}mv_A^2-0=\frac{1}{2}mgh} \qquad 3mv_A\cdot a_A=\frac{1}{2}mgv_C=\frac{1}{2}mgv_A$$

物块的加速度为

$$a_A=\frac{g}{6}=a_C$$

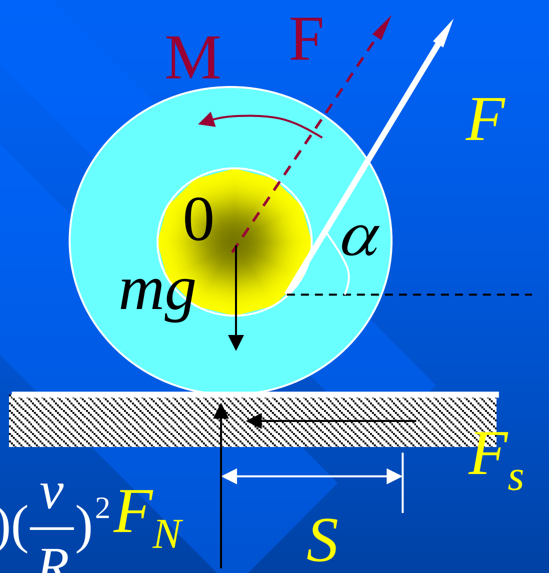
如果初始系统不是静止的，对结果有什么影响？

例　纺织线轮如图示，线锤半径为r,轮半径为R,回转半径ρ，质量为m，初始静止。求：线以α角度被F力拉伸时轮心的加速度。

解:刚体作纯滚动，具有理想约束。

$$T_2 - T_1 = \sum W^A_{Fi}$$

将力F向轮心O平移。



功: $$\sum W_i^A = FS\cos\alpha - M\varphi = FS\cos\alpha - Fr\frac{S}{R}$$

动能 $T_1=0$

$$T_2 = \frac{1}{2}J_O\omega^2 + \frac{1}{2}mv_C{}^2 = \frac{1}{2}\rho^2 m\omega^2 + \frac{1}{2}R^2 m\omega^2 = \frac{1}{2}m(R^2+\rho^2)(\frac{v}{R})^2$$

$$\frac{mv^2}{2}(\frac{\rho^2}{R^2}+1) = FS(\cos\alpha - \frac{r}{R})$$

$$a = \frac{F(\cos\alpha - \frac{r}{R})}{m(\frac{\rho^2}{R^2}+1)}$$

等式两边对时间t求导

讨论：

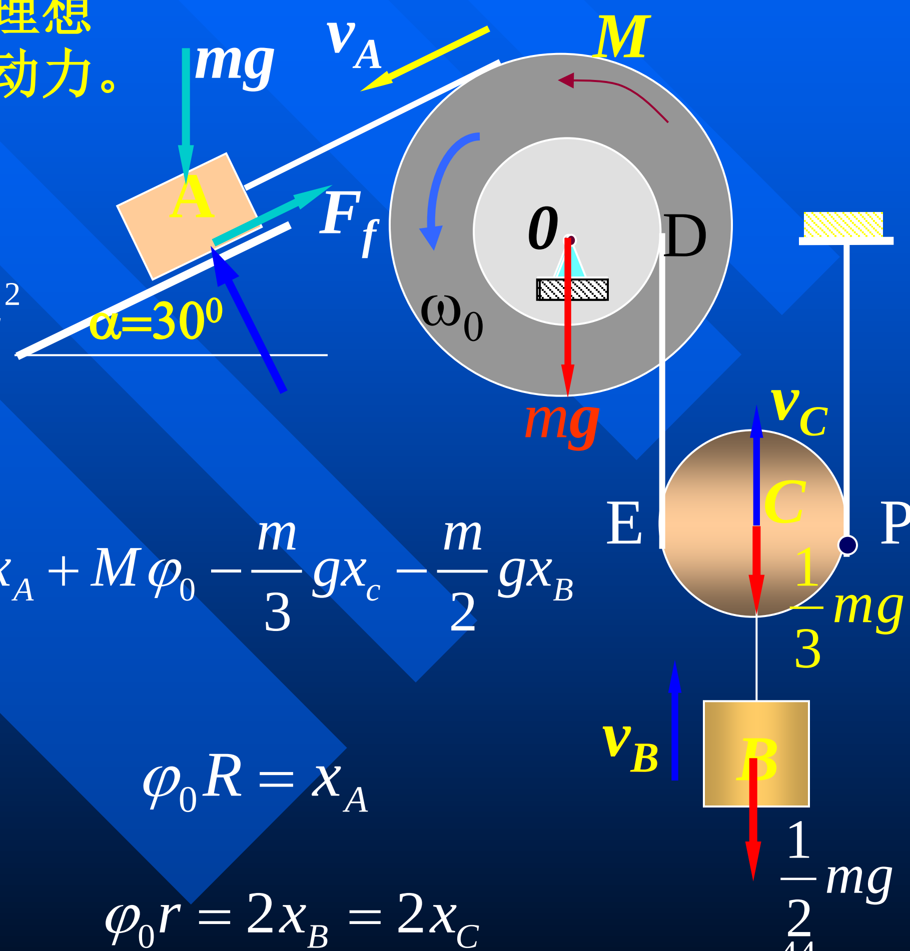
$a>0$,向前 $\cos\alpha - \frac{r}{R} > 0,$

$a<0$,向后 $\cos\alpha < \frac{r}{R}$

$a=0,$ $\cos\alpha = \frac{r}{R},$ F过瞬心.

例： 已知：$m_A=m$，$m_B=m/2$，$m_C=m/3$，鼓轮的回转半径为ρ，质量为m，鼓轮小半径为r，大半径为R，外力偶M，C轮的半径为r，物体A接触的摩擦系数为f_d，系统初始静止，求物体A下滑的速度（表示成物体A位移x_A的函数）。

解： 系统具有非理想约束，解除非理想约束，将动滑动摩擦力作为主动力。



$$T_2-T_1=\sum W^A_{Fi}$$

$$T_2=\frac{m}{2}v_A^2+\frac{1}{2}m\rho^2\omega_0^2+\frac{1}{2}\frac{m}{3}v_c^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{m}{3}r^2\right)\omega_c^2+\frac{1}{2}\frac{m}{2}v_B^2$$

$$T_1=0$$

$$\sum W^A_{Fi}=mg\sin 30^\circ x_A-mg\cos 30^\circ f_d x_A+M\varphi_0-\frac{m}{3}gx_c-\frac{m}{2}gx_B$$

运动学补充方程：

$$\omega_0 R=v_A=\dot{x}_A \qquad \varphi_0 R=x_A$$

$$\omega_0 r=2v_C=2\omega_C r=2v_B \qquad \varphi_0 r=2x_B=2x_C$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m \dot{x}_A{}^2 (1 + \frac{\rho^2}{R^2} + \frac{r^2}{4R^2}) \qquad \sum W^A{}_{Fi} = x_A \left[\frac{M}{R} + mg(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} f_d - \frac{5r}{12R}) \right]$$

$$T_2 - T_1 = \sum W^A{}_{Fi}$$

$$\frac{1}{2} m \dot{x}_A{}^2 (1 + \frac{\rho^2}{R^2} + \frac{r^2}{4R^2}) = \quad x_A \left[\frac{M}{R} + mg(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} f_d - \frac{5r}{12R}) \right]$$

$$v_A = \dot{x}_A = \sqrt{\frac{\left[\frac{2M}{Rm} + g(1 - \sqrt{3} f_d - \frac{5r}{6R}) \right]}{1 + \frac{\rho^2}{R^2} + \frac{r^2}{4R^2}} x_A}$$

如果需要求解a_A?