第二篇 运动学

运动学：研究物体运动几何特征的科学。它从几何学的观点研究物体的运动，包括物体的运动轨迹、速度、加速度等，而不涉及到力（引起运动的原因）。

运动学所涉及的研究内容包括：

（1）建立物体的运动方程
（2）分析物体运动的速度、加速度、角速度、角加速度等
（3）研究物体运动的分解与合成规律

运动学中两种力学模型：点和刚体。

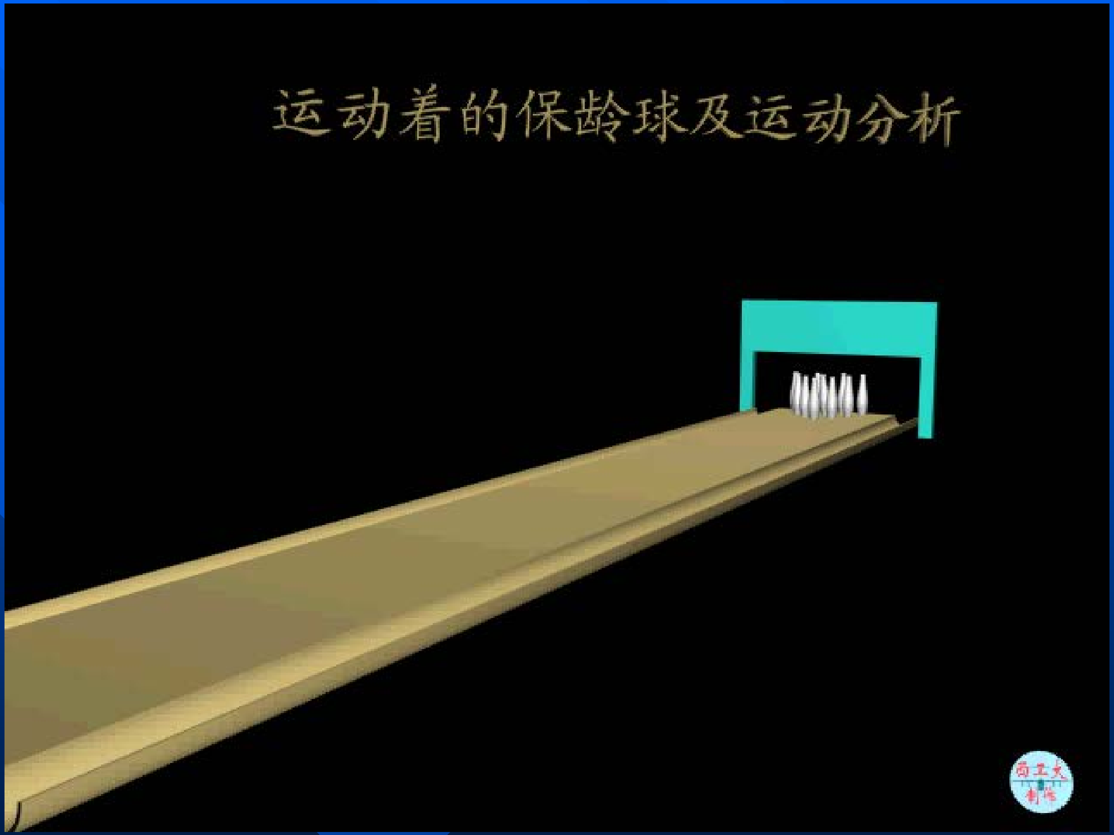
点：没有大小、尺寸，在空间占有一定位置的几何点。

刚体：由无数个点组成的不变形的系统。

质点和刚体的实例

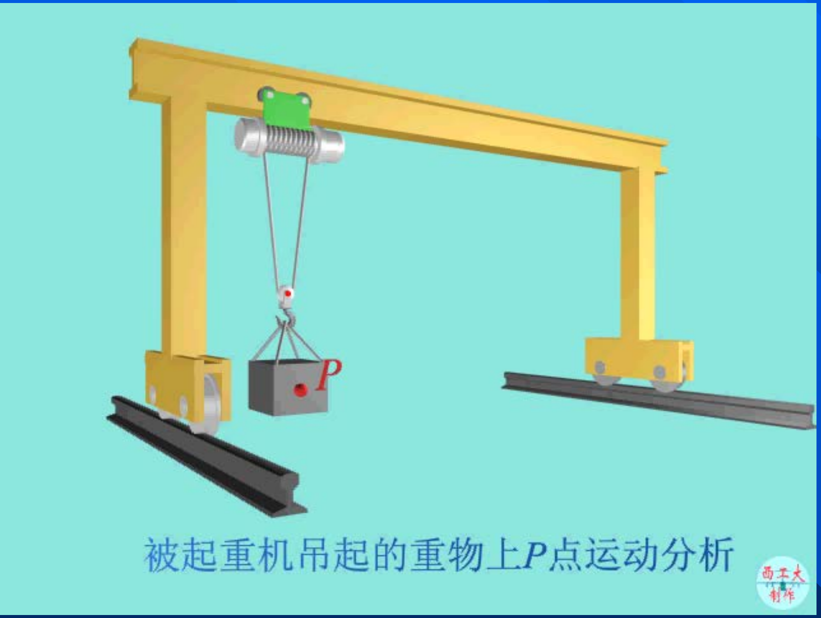
- 接触轨道之前，保龄球可以看作一个点；

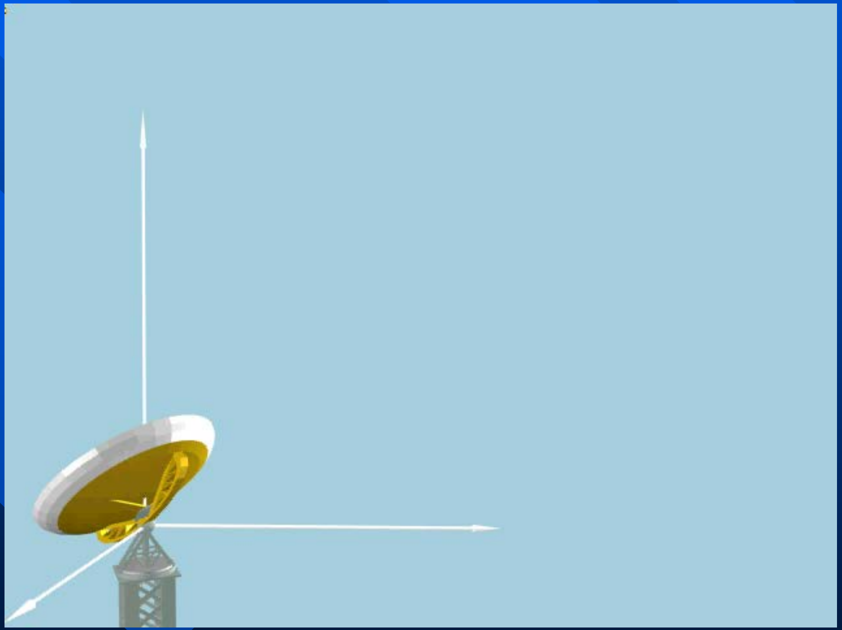
- 接触轨道之后，保龄球在摩擦力作用下发生滚动，这时保龄球不再是一点，而必须看作刚体。



运动形式包括：

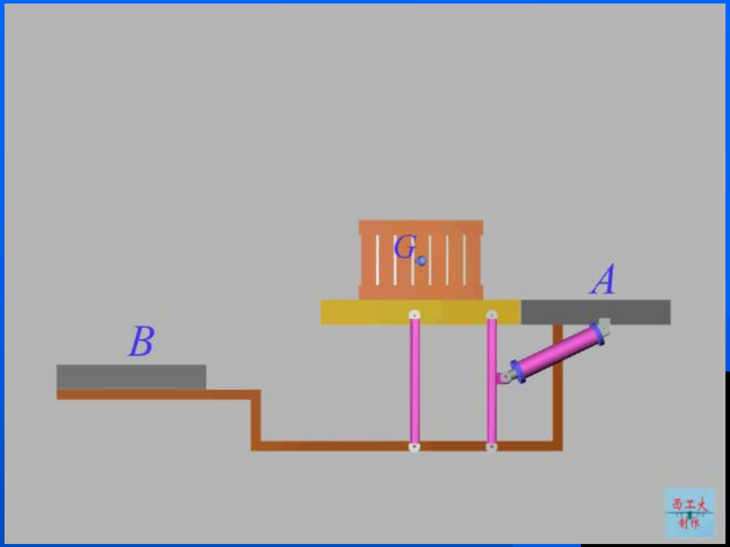
质点 ✓ 直线运动 ✓ 曲线运动





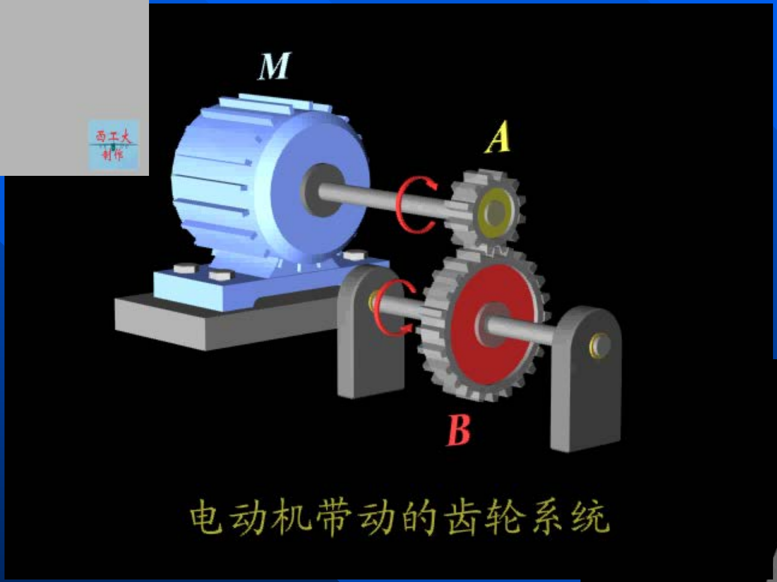
最一般的情形为三维变速曲线运动

刚体



✓ 平行移动

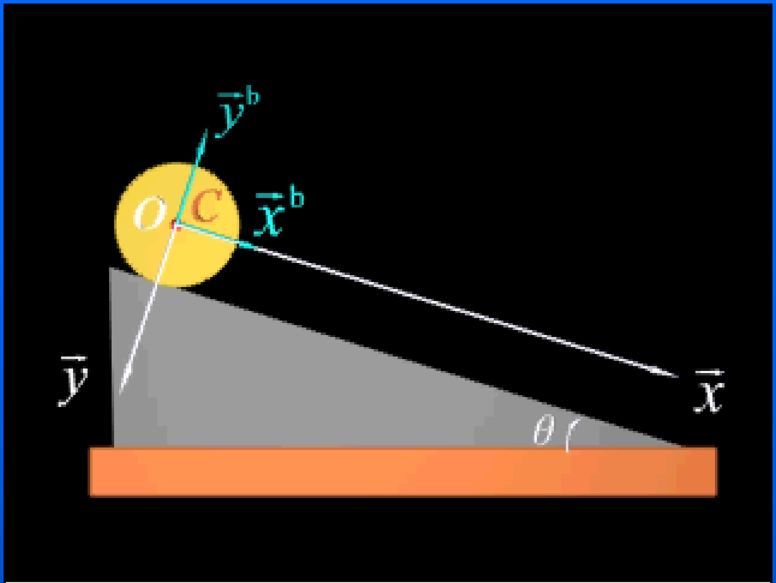
✓ 定轴转动



✓ 平面运动

圆盘作滚动

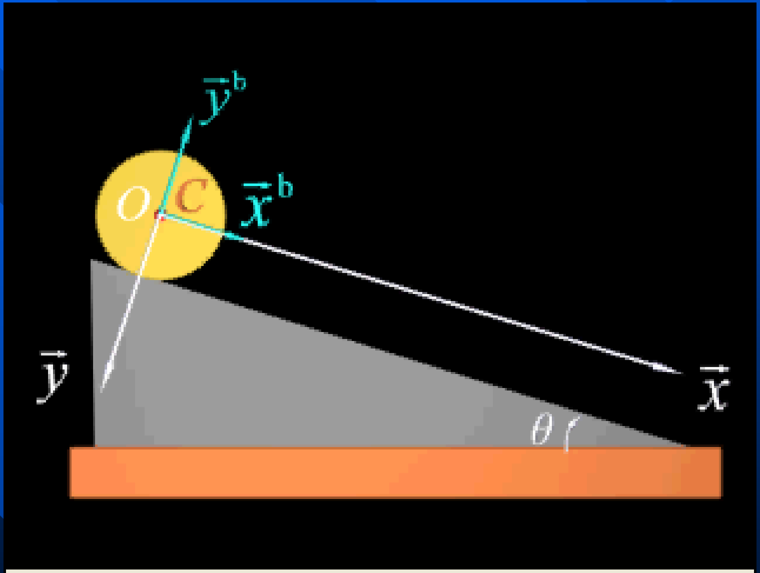
——刚体*平面运动*



圆柱体在斜面上纯滚动动.AVI

圆盘作滑动

——刚体*平行移动*（*平动*）



圆柱体在斜面上滑动.AVI

参考系

参考体（reference body)

参考系（reference system)

在研究某一物体的运动时，必须选择另一作为参考的物体来描述该物体的运动，这个作为参考的物体称为参考体，在参考体上固连的坐标系称为参考系（或参考坐标系）。

由于同一物体相对不同的参考系的运动是不同的，故不明确指出指出参考系，论及物体的运动是毫无意义的。工程上通常以大地为参考系。

所谓相对于参考系的运动，即是在参考系上的观察者所观察到的运动，或者说是将参考系当作“静止的”，来研究物体的运动。

第五章　点的运动学

运动方程、速度和加速度的表示方法

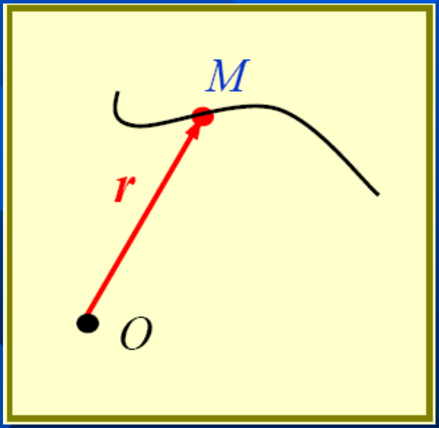
（1）矢量法

（2）直角坐标法

（3）自然法

第一节　矢量法

动点：M　固定点：O



点的运动方程的矢量形式：

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

$r(t)$为时间t 的单值连续函数。

轨迹：点在空间运动时所经过的路线称为该点的轨迹。

动点M的位移：

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$$

当$\Delta t \to 0$时，$\Delta r \to dr$

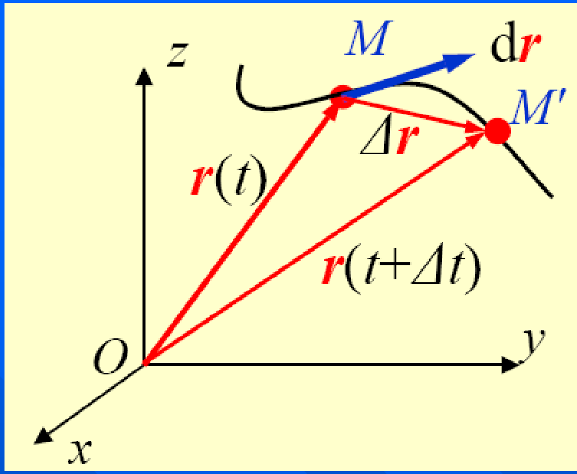
动点的瞬时速度

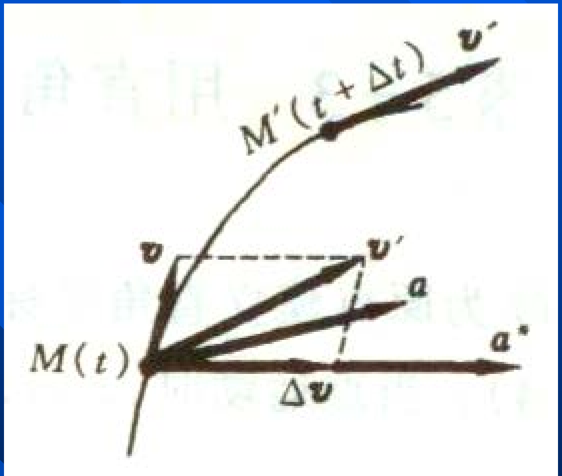
$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

时刻t动点的加速度定义为：

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$$

即动点的瞬时加速度等于它的速度对时间的一阶导数，或其矢径对时间的二阶导数。



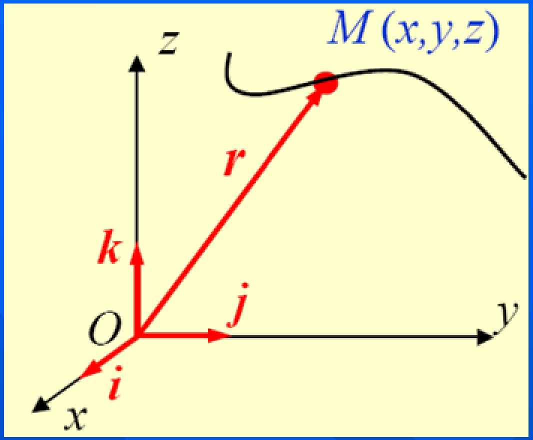


加速度a恒指向轨迹凹的一侧

第二节　　直角坐标法

1．运动方程

动点***M***的矢径***r***在空间固定直角坐标系*Oxyz*上的投影表达式为



$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

点的运动方程的直角坐标形式为

$$x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad z = z(t)$$

$x(t)$、$y(t)$、$z(t)$为时间t的单值连续函数。

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r}; \cos\beta = \frac{y}{r}; \quad \cos\gamma = \frac{z}{r}。$$

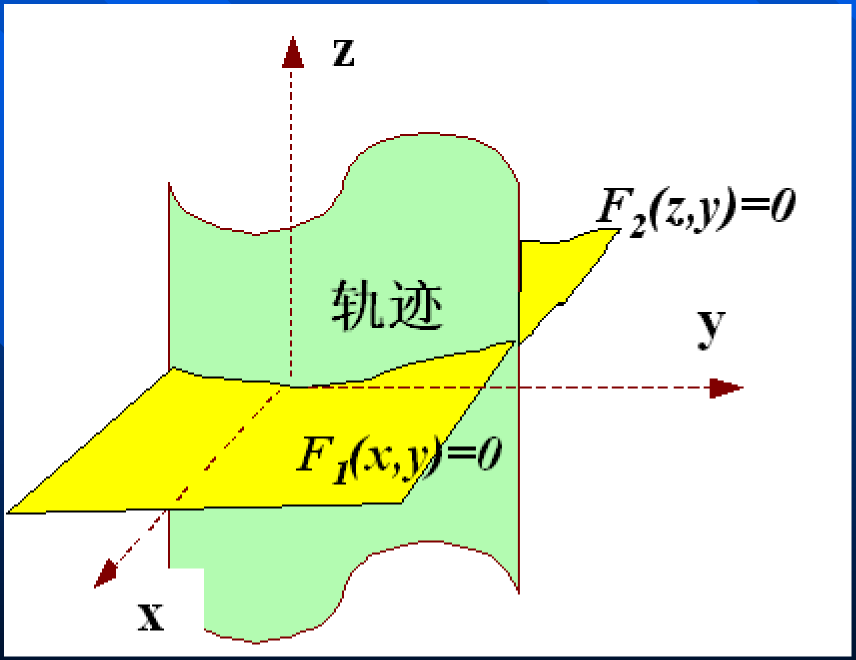
直角坐标法的运动方程：

$$x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad z = z(t)$$

上述方程也是以t为参数的参数形式的轨迹方程，消去时间t，即可得到以直角坐标表示的轨迹方程。

$$\begin{cases} F_1(x,y)=0; \\ F_2(z,y)=0; \end{cases}$$

轨迹方程



2. 点的速度

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} \qquad \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

动点的速度在各坐标轴上的投影分别为

$$v_x = \dot{x} \quad v_y = \dot{y} \quad v_z = \dot{z}$$

由此即可确定速度矢量的大小和方向。

速度在直角坐标轴上的投影为点的坐标对时间 t 的一阶导数。

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \qquad \cos\alpha' = \frac{v_x}{v}; \cos\beta' = \frac{v_y}{v}; \cos\gamma' = \frac{v_z}{v}$$

3．点的加速度

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$$

$$\Rightarrow a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} \qquad a_y = \dot{v}_y = \ddot{y} \qquad a_z = \dot{v}_z = \ddot{z}$$

$$\boldsymbol{a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2};} \qquad \cos\alpha'' = \frac{a_x}{a}; \cos\beta'' = \frac{a_y}{a}; \cos\gamma'' = \frac{a_z}{a}$$

例 6-1　椭圆规的曲柄OC 可绕定轴O 转动，其端点C 与规尺AB 的中点以铰链相连接，而规尺A，B 两端分别在相互垂直的滑槽中运动。

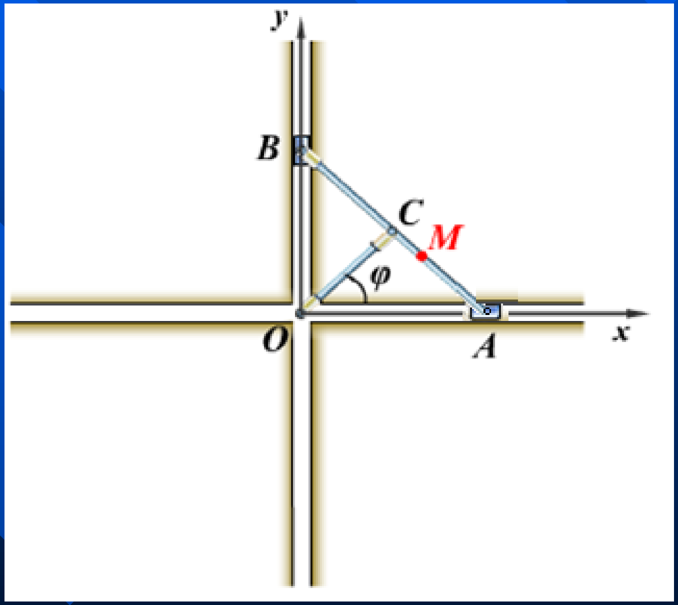
已知：$OC = AC = BC = l\,,\, MC = a\,,\, \varphi = \omega t$。

求：① M 点的运动方程；

② 轨迹；

③ 速度；

④ 加速度。



已知：$OC = AC = BC = l\ , MC = a\ , \varphi = \omega t$。

求：运动方程、轨迹方程、速度和加速度。

解：点M作曲线运动，取坐标系Oxy如图所示。

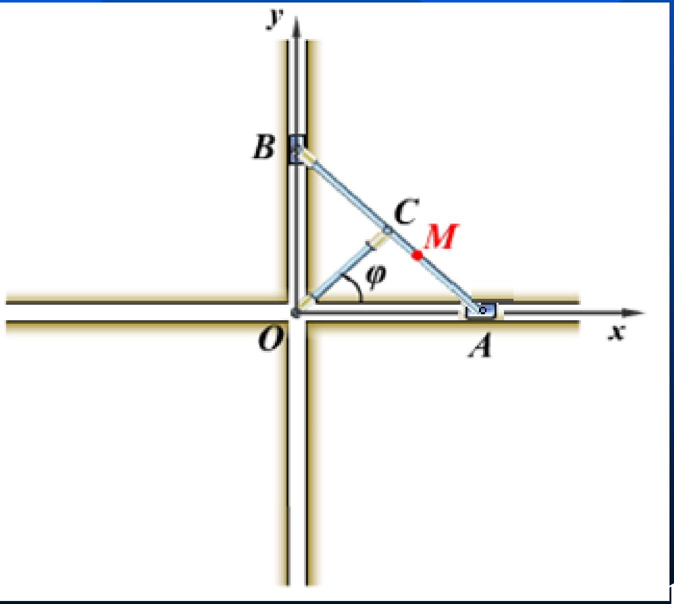
运动方程（**考虑任意时刻t时**）

$$x = (OC + CM)\cos\varphi = (l + a)\cos\omega t$$

$$y = AM\sin\varphi = (l - a)\sin\omega t$$

消去t，得轨迹方程

$$\frac{x^2}{(l+a)^2} + \frac{y^2}{(l-a)^2} = 1$$



已知： $OC = AC = BC = l\,,\; MC = a\,,\; \varphi = \omega t$。

求：运动方程、轨迹、速度和加速度。

速度

$$v_x = \dot{x} = -\left(l + a\right)\omega \sin \omega t$$

$$v_y = \dot{y} = (l - a)\omega \cos \omega t$$

$$v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = \sqrt{(l+a)^2\omega^2\sin^2\omega t + (l-a)^2\omega^2\cos^2\omega t}$$

$$= \omega\sqrt{l^2 + a^2 - 2al\cos 2\omega t}$$

$$\cos(\vec{v}, \vec{i}\,) = \frac{v_x}{v} = -\frac{(l+a)\sin\omega t}{\sqrt{l^2 + a^2 - 2al\cos 2\omega t}}$$

$$\cos(\vec{v}, \vec{j}\,) = \frac{v_y}{v} = \frac{(l-a)\cos\omega t}{\sqrt{l^2 + a^2 - 2al\cos 2\omega t}}$$

已知：$OC = AC = BC = l$, $MC = a$, $\varphi = \omega t$。

求：运动方程、轨迹、速度和加速度。

加速度

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} = -(l+a)\omega^2 \cos \omega t$$

$$a_y = \dot{v}_y = \ddot{y} = -(l-a)\omega^2 \sin \omega t$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(l+a)^2 \omega^4 \cos^2 \omega t + (l-a)^2 \omega^4 \sin^2 \omega t}$$

$$= \omega^2 \sqrt{l^2 + a^2 + 2al \cos 2\omega t}$$

$$\cos(\vec{a}, \vec{i}) = \frac{a_x}{a} = -\frac{(l+a)\cos \omega t}{\sqrt{l^2 + a^2 + 2al \cos 2\omega t}}$$

$$\cos(\vec{a}, \vec{j}) = \frac{a_y}{a} = -\frac{(l-a)\sin \omega t}{\sqrt{l^2 + a^2 + 2al \cos 2\omega t}}$$

第三节　　　　自然法

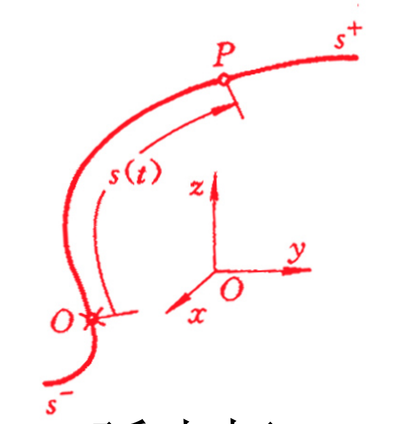
利用已知的动点轨迹以及动点沿此轨迹的运动方程，以确定动点在任一瞬时位置的方法，称为自然法。

前提：在工程实际中，动点往往轨迹已知。

列车沿铁路行驶

若将列车视为质点其运动轨迹已知。

自然轴系



弧坐标：s

$s = s(t)$

- 弧坐标

  1）已知点的运动轨迹；

  2）在轨迹上任选一参考点作为坐标原点；

  3）一般可以以点的运动方向作为正向。

点的运动方程的自然坐标形式：

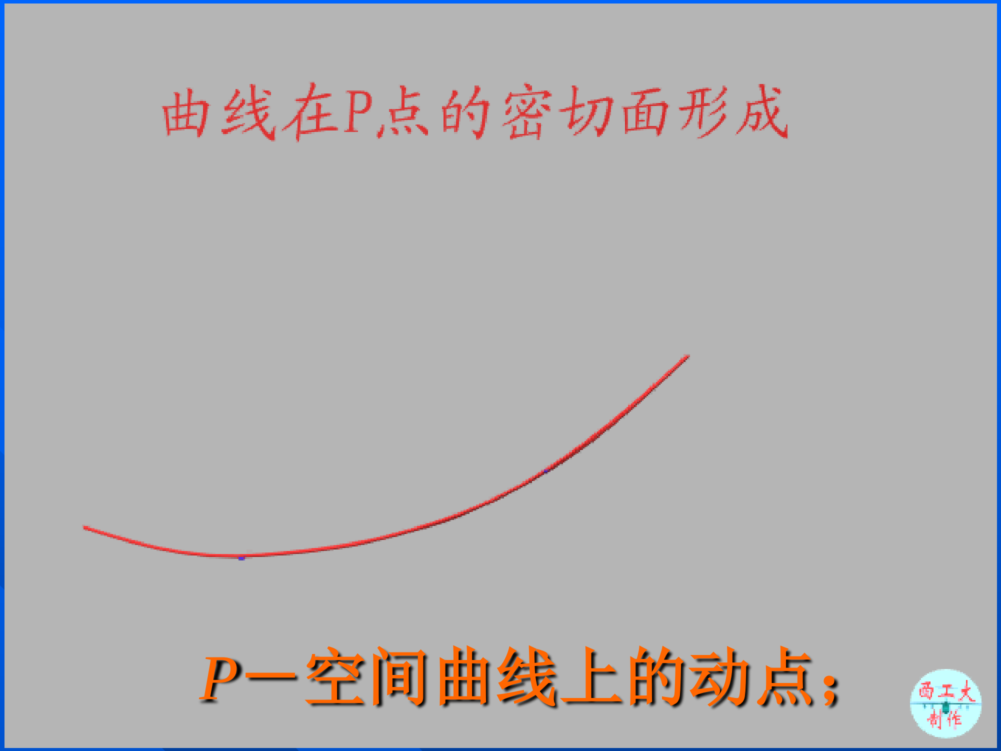
$$s = s(t)$$

自然轴系

密切面

当P'点无限接近于P点时，过这两点的切线所组成的平面，称为P点的密切面。

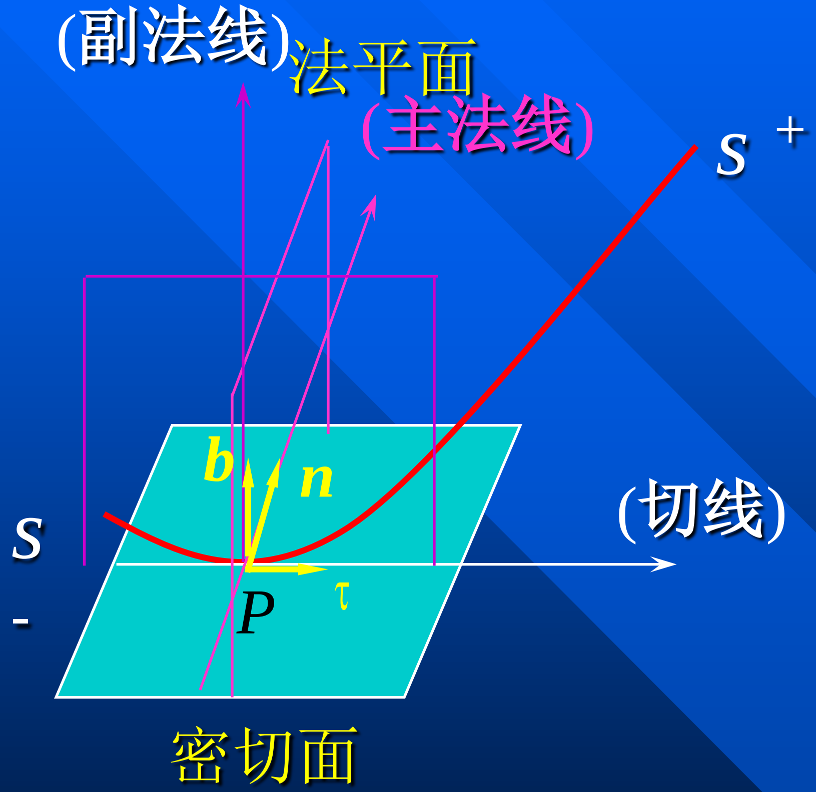
$$\lim_{P'\to P} \alpha' = \alpha$$



由密切面得到的几点结论：

- 空间曲线上的任意点无穷小邻域内的一段弧长，可以看作是位于密切面内的平面曲线。
- 曲线在密切面内的弯曲程度，称为曲线的曲率，用$1/\rho$ 表示。

- **法平面**　　通过P点与切线T垂直的平面



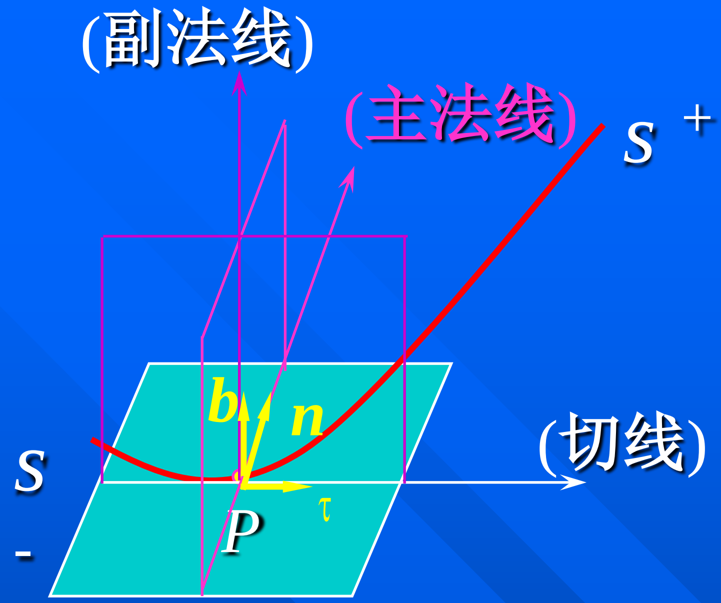
- 法线——通过P点在法面内的直线（无数条）
- 主法线——法平面内与密切面的交线（一条）
- 副法线——法面内与主法线垂直的法线

τ　b　n　——构成了自然坐标系的单位矢量

τ — 正向指向弧坐标正向；

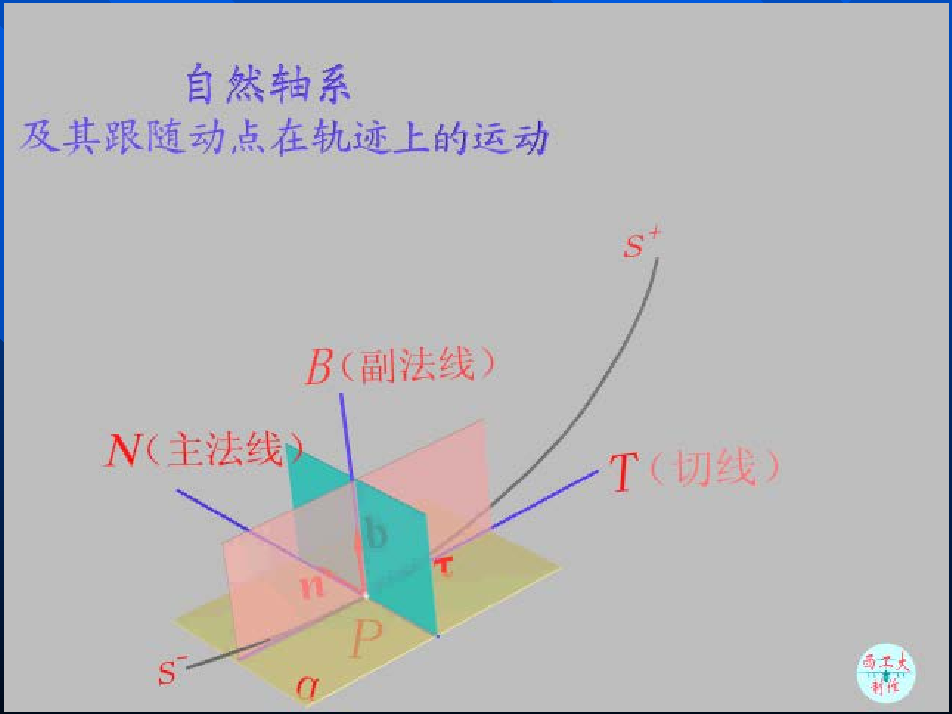
n— 正向指向曲线内凹的一边，曲率中心在主法线上；

b— 正向由$\boldsymbol{b} = \tau \times \boldsymbol{n}$ 确定。



自然轴系的特点:

跟随动点在轨迹上作空间曲线运动，是个动坐标系。



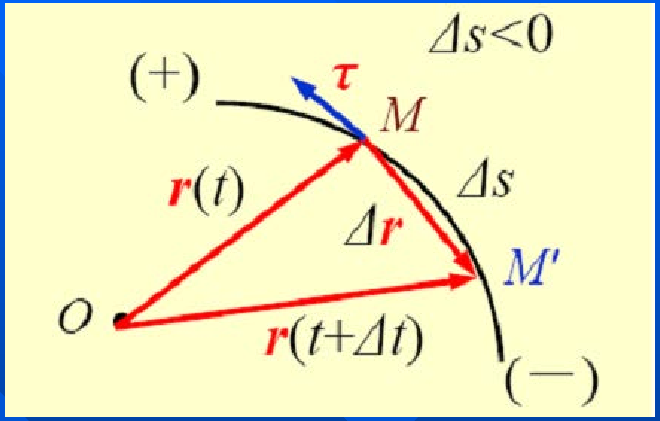
点的速度和加速度在自然轴上的投影

速度

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d\vec{r}}{ds}\cdot\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}\cdot\dot{s}=\dot{s}\vec{\tau}$$

$$\frac{d\vec{r}}{ds}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}=\vec{\tau}$$

$$\text{令}v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\dot{s},\quad \text{则}\vec{v}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}=v\vec{\tau}$$



速度大小：弧坐标对时间的一阶导数；

速度方向：沿运动轨迹的切线方向指向运动方向。

$$\vec{\upsilon} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{\tau} = v \cdot \vec{\tau}$$

- 加速度

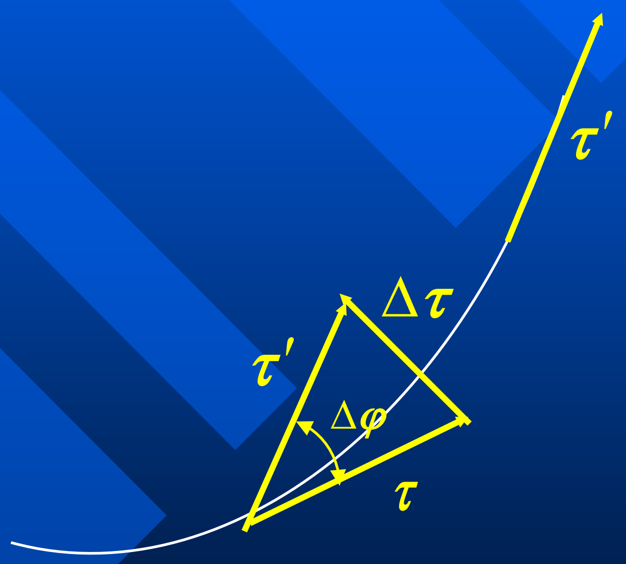
$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v \cdot \vec{\tau}) = \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}\vec{\tau} + v \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t}$$

其中

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\tau}}{\Delta t}$$

$$\Delta \vec{\tau} = \vec{\tau}' - \vec{\tau}$$

$$|\Delta \boldsymbol{\tau}| = 2 \times 1 \times \sin \frac{\Delta \varphi}{2}$$



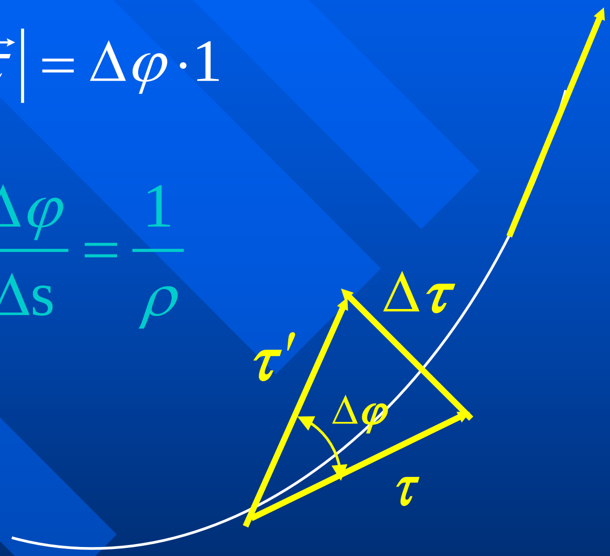
- 加速度 $\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v\cdot\vec{\tau})=\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}+v\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t}$

其中 $\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta t}$ $\quad \Delta\vec{\tau}=\vec{\tau}'-\vec{\tau}$ $\quad |\Delta\boldsymbol{\tau}|=2\times 1\times\sin\frac{\Delta\varphi}{2}$

当$\Delta\varphi$很小时， $\sin\frac{\Delta\varphi}{2}\approx\frac{\Delta\varphi}{2}$ 所以 $|\Delta\vec{\tau}|=\Delta\varphi\cdot 1$

$$\left|\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t}\right|=\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta t}\right|=\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right|=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\cdot\left|\frac{\Delta s}{\Delta t}\right|=\frac{|\upsilon|}{\rho}$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}=\frac{1}{\rho}$$



$$\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t}=\frac{|\upsilon|}{\rho}\vec{n}$$

$\Delta\boldsymbol{\tau}$在密切面内，且垂直于$\boldsymbol{\tau}$，即主法线方向。

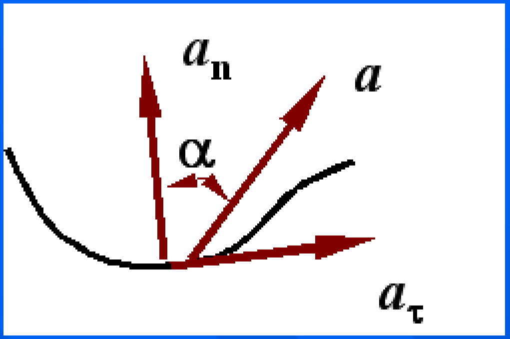
$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}+\frac{\upsilon^2}{\rho}\vec{n}$$

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}+v\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\vec{\tau}+\frac{v^2}{\rho}\vec{n}=\vec{a}_\tau+\vec{a}_n$$

$$a_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \qquad a_n=\frac{\upsilon^2}{\rho}$$

a_τ和 a_n分别称为动点M 的切向加速度和法向加速度。a_τ 沿M点处轨迹的切线方向，反映了速度大小随时间的变化率。a_n 的方向永远指向曲率中心，反映了速度方向随时间的变化率，恒为正值。

全加速度$\vec{a}=\vec{a}_\tau+\vec{a}_n=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}+\dfrac{v^2}{\rho}\vec{n}$



$$a=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}\qquad \tan\alpha=\left|\frac{a_\tau}{a_n}\right|$$

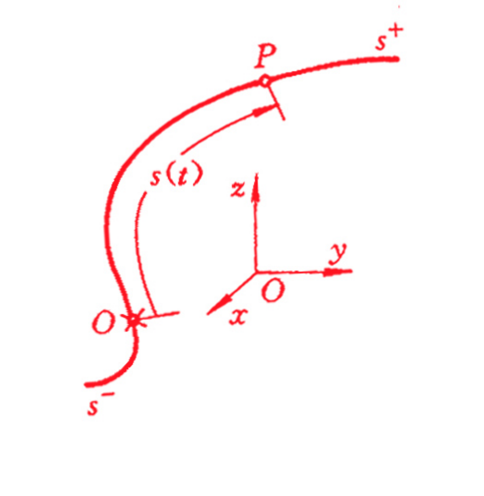
因此，加速度a恒指向轨迹凹的一侧

点的直线运动：曲率半径趋于无穷大，法向加速度为零，此时加速度即为切向加速度。

点的运动方程的自然坐标形式：

$$s = s(t)$$

$$(\vec{v} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{\tau} = v\vec{\tau})$$



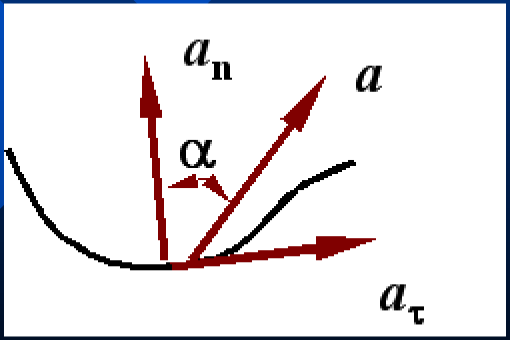
速度大小：弧坐标对时间的一阶导数；

速度方向：沿运动轨迹的切线方向指向运动方向。

$$全加速度\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n} + 0\vec{b}$$

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \qquad a_n = \frac{v^2}{\rho} \qquad a_b = 0$$

$$a = \sqrt{(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t})^2 + (\frac{v^2}{\rho})^2} \qquad \tan\alpha = \left|\frac{a_\tau}{a_n}\right|$$



总结：

1. 本章中点的运动描述的3种方法：矢量法、直角坐标法、自然法；

2. 点的运动学问题常见的3种类型。

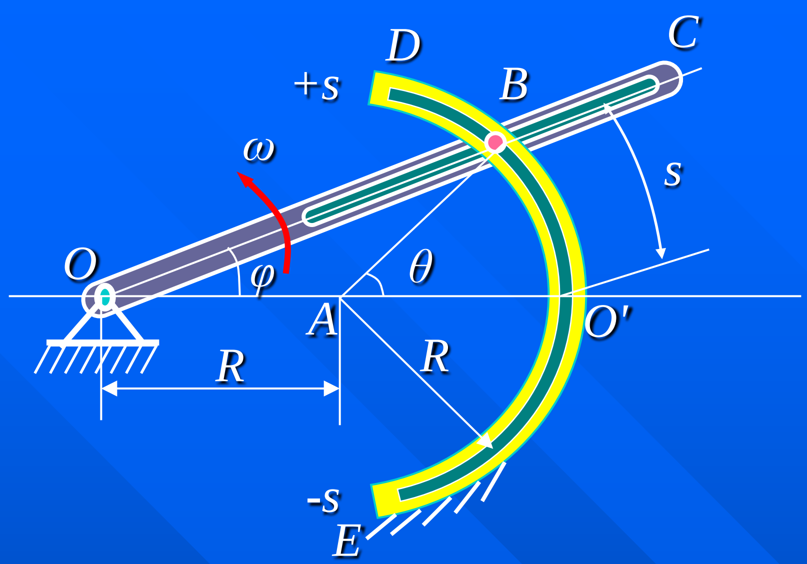
（1）给出运动条件，求运动方程、速度、加速度；

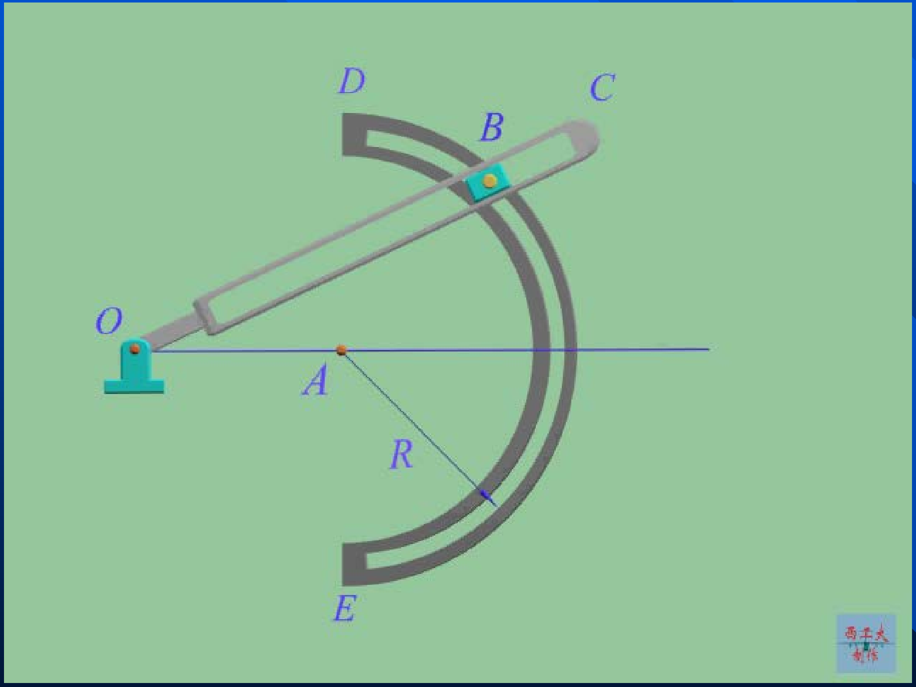
（2）已知加速度，求速度、运动方程或者已知速度求运动方程（初始条件已知）；

$$v = \int a_\tau dt \qquad s = \int v dt$$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{vdv}{ds} \qquad a_\tau ds = vdv$$

（3）点的运动不同描述方法（直角坐标法、自然法）中运动量的相互转换。



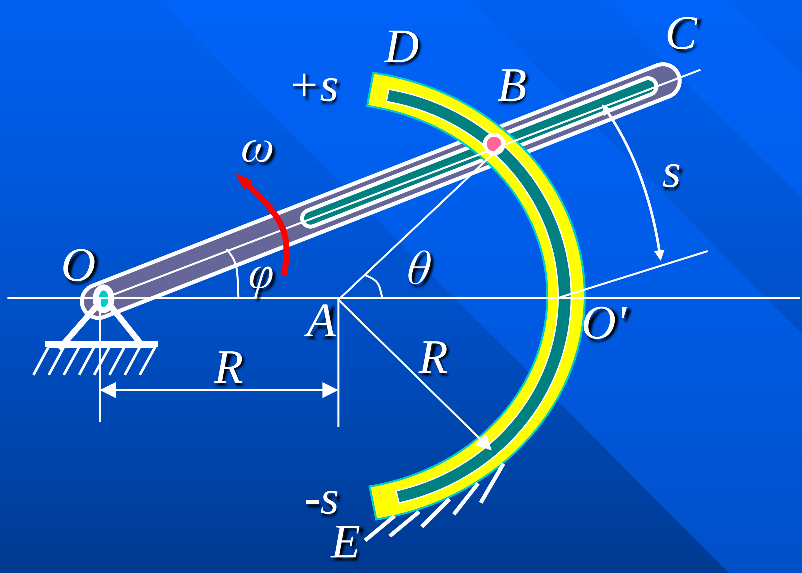


例4： 销钉B可沿半径等于R的固定圆弧滑道DE和摆杆的直槽中滑动，$OA=R=0.1$ m。已知摆杆的转角

$$\varphi=\frac{\pi}{8}\sin 2\pi t$$

（时间以s计，φ以rad计），试求销钉自然坐标形式的运动方程及在$t_1=1/4$ s和$t_2=1$ s时的加速度。

***B*的运动轨迹已知：沿圆弧*DE*作圆周运动**



解： 已知销钉B的轨迹是圆弧DE，中心在A点，半径是R。选滑道上O'点作为弧坐标的原点，并以$O'D$为正向。则B点在任一瞬时的弧坐标

$$s = R\theta$$

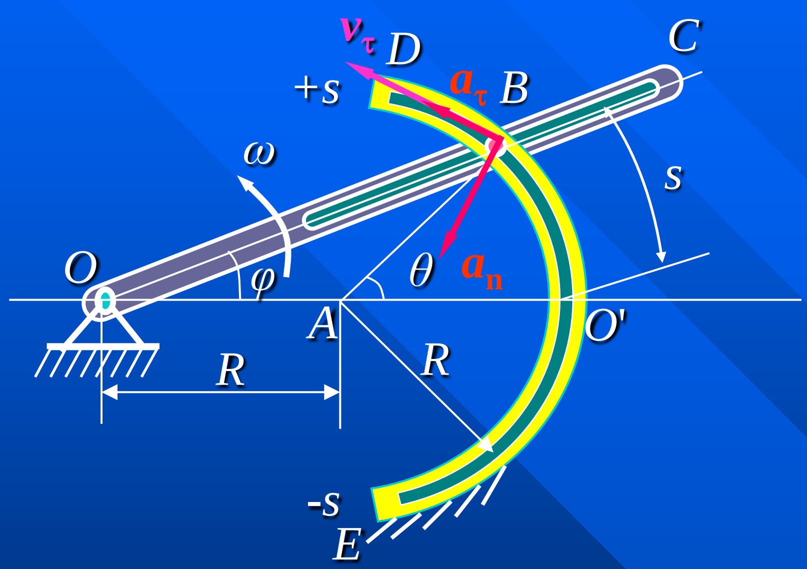
由几何关系知: $\theta = 2\varphi$ ，

且 $\varphi = \dfrac{\pi}{8}\sin 2\pi t$ ，将其代入上式，得

$$s = 2R\varphi = \frac{\pi}{40}\sin 2\pi t$$

这就是B点的自然坐标形式的运动方程。

$$s = 2R\varphi = \frac{\pi}{40}\sin 2\pi\, t$$



B点的速度:

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\pi^2}{20}\cos 2\pi t$$

方向沿圆弧切线

B点的加速度 $\boldsymbol{a}$ 在切向的投影:

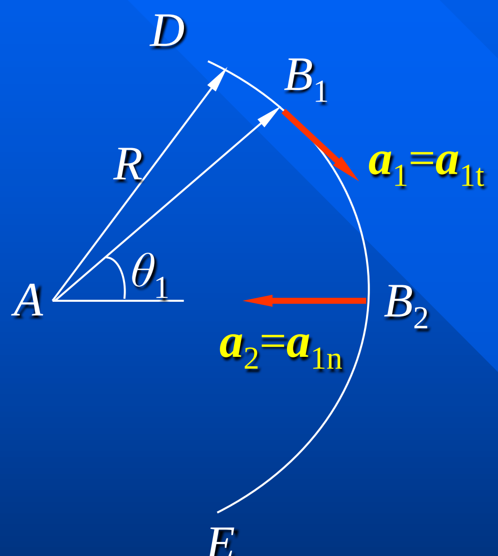
$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{\pi^3}{10}\sin 2\pi t$$

在法向的投影:

$$a_\mathrm{n} = \frac{v^2}{\rho} = \frac{\left(\frac{\pi^2}{20}\cos 2\pi\, t\right)^2}{0.1} = \frac{\pi^4}{40}\cos^2 2\pi\, t$$

当 $t_1 = \frac{1}{4}$ s 时， $a_{1n} = 0$ $a_{1t} = -\frac{\pi^3}{10}$ m/s^2

B点的加速度大小: $a_1 = |a_{1t}| = \frac{\pi^3}{10}$ m/s^2 且a_1沿切线的负向。



当 $t_1 = 1$ s 时，这时点B的加速度大小

$a_{2t} = 0$ ， $a_{2n} = \frac{\pi^4}{40}$ m/s^2 。

$$a_2 = |a_{2n}| = \frac{\pi^4}{40} \ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

且 a_2 沿半径 B_2A。

如果弧坐标的原点不取O'点，结论有何不同？

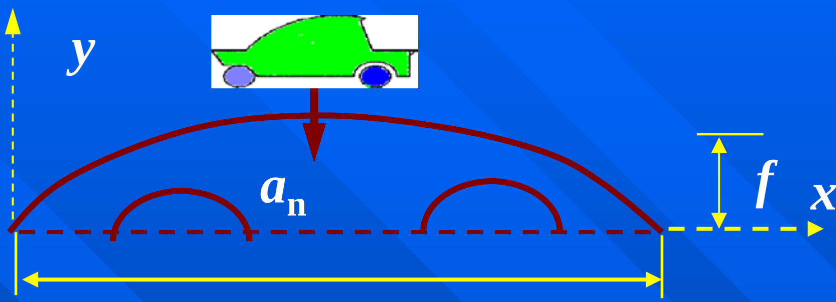
例4 汽车以匀速率 v=10m/s过拱桥，桥面曲线

$y=4fx(L-x)/L^2$， f=1m

求：车到桥最高点时的加速度。

解：

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}; \qquad a_n = \frac{v^2}{\rho};$$



$$\rho = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}; \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{8f}{L^2};$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4f}{L^2}(L-2x); \qquad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=L/2} = 0 \qquad \rho = \frac{L^2}{8f}$$

$$a = \frac{10^2 \cdot 8 \cdot f}{L^2} = 0.78\ m/s^2。$$

$a_\tau = 0$， $a_n \neq 0$ 匀速（率）曲线运动

例 5 已知点的运动方程为x=2sin 4t m，y=2cos 4t m，z=4t m。求：点运动轨迹的曲率半径 ρ 。

解：由点M的运动方程，得

$$v_x = \dot{x} = 8\cos 4t, \quad a_x = \ddot{x} = -32\sin 4t$$

$$v_y = \dot{y} = -8\sin 4t, \quad a_y = \ddot{y} = -32\cos 4t$$

$$v_z = \dot{z} = 4, \ a_z = \ddot{z} = 0$$

从而 $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{80}\mathrm{m/s}, \ a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = 32\mathrm{m/s^2}$

而 $a_t = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0, \ a_n = a = 32\mathrm{m/s^2}$

故 $\rho = \dfrac{v^2}{a_n} = 2.5\mathrm{m}$