前面的例题中的研究对象都是一个自由度（单自由度）系统的情况。在前面的分析中，质点系中各质点的虚位移不一定相互独立。因此在求解过程中，必须建立各主动力对应的虚位移之间的关系。对于多自由度系统的平衡问题，这种关系更加复杂。所以对于多自由度系统的静力学问题来说，运用分析静力学方法分析时，有必要介绍用广义坐标表示的质点系平衡条件（**广义坐标形式的虚位移原理**），因为各广义虚位移（广义坐标的变分）是相互独立的，适合求解多自由度质点系的平衡问题。

§15-3 用广义坐标表示的质点系平衡条件（**广义坐标形式的虚位移原理**）

一、广义虚位移

设具有n个质点的质点系，其广义坐标为$q_1,q_2,\cdots q_k$（系统有k个自由度），对于稳定（定常）的完整约束：

$$\left.\begin{aligned} x_i &= x_i(q_1,q_2,\cdots q_k) \\ y_i &= y_i(q_1,q_2,\cdots q_k) \\ z_i &= z_i(q_1,q_2,\cdots q_k) \end{aligned}\right\}(i=1,2,\cdots,n)$$

求变分（计算方法类似多元函数的微分）

$$\delta x_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2}\delta q_2 + \cdots + \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\delta q_k$$

$$= \sum_{j=1}^{k}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\delta q_j$$

变分 ⇒

$$\left.\begin{aligned} \delta x_i &= \sum\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\delta q_j \\ \delta y_i &= \sum\frac{\partial y_i}{\partial q_j}\delta q_j \\ \delta z_i &= \sum\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\delta q_j \end{aligned}\right\}(i=1,2,\cdots,n)$$

δq_j——广义虚位移

上式表明：质点系的虚位移可以用广义虚位移表示。

二、广义力

虚位移原理的解析表达式

$$\sum \delta W_F = \sum (F_{xi}\delta x_i + F_{yi}\delta y_i + F_{zi}\delta z_i) = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \delta x_i &= \sum \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\delta q_j \\ \delta y_i &= \sum \frac{\partial y_i}{\partial q_j}\delta q_j \\ \delta z_i &= \sum \frac{\partial z_i}{\partial q_j}\delta q_j \end{aligned}\right\} (i = 1, 2, \cdots, n)$$

$$\begin{aligned} \sum \delta W_F &= \sum (F_{xi}\delta x_i + F_{yi}\delta y_i + F_{zi}\delta z_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (F_{xi}\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\delta q_j + F_{yi}\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial y_i}{\partial q_j}\delta q_j + F_{zi}\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\delta q_j) \\ &= \sum_{j=1}^{k}[\sum_{i=1}^{n}(F_{xi}\frac{\partial x_i}{\partial q_j} + F_{yi}\frac{\partial y_i}{\partial q_j} + F_{zi}\frac{\partial z_i}{\partial q_j})]\delta q_j \\ &= 0 \end{aligned}$$

令 $Q_j = \sum_{i=1}^{n} (F_{xi} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + F_{yi} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + F_{zi} \frac{\partial z_i}{\partial q_j})]$ $(j = 1, 2, 3, \ldots k)$

$$\sum \delta W_F = \sum_{j=1}^{k} Q_j \delta q_j = 0$$

Q_j——广义力

Q_j 称为对应于广义坐标 q_j 的广义力

由于广义坐标是独立的，因此 δq_j 也是独立的。

$Q_1 = Q_2 = \ldots = Q_j = 0$

$(j = 1, 2, 3, \ldots k)$ (k为系统自由度数)

广义坐标形式的虚位移原理：具有双面、定常、完整、理想约束的静止质点系，在给定位置保持平衡的充要条件是：该质点系所有的广义力均为零。

广义力的计算方法

1. 按定义计算（解析法）

$$Q_j = \sum_{i=1}^{n}(F_{xi}\frac{\partial x_i}{\partial q_j} + F_{yi}\frac{\partial y_i}{\partial q_j} + F_{zi}\frac{\partial z_i}{\partial q_j})] \quad (j = 1, 2, 3, \ldots k)$$

2. 用一组特定的广义坐标变分来计算（几何法）

$$\sum \delta w = Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2 + \cdots\cdots + Q_k\delta q_k$$

令： $\delta q_k \neq 0$ 而其它的广义虚位移都等于零.

则 $\sum \delta W_k' = Q_k \delta q_k$

$$Q_k = \frac{\sum \delta W_k'}{\delta q_k}$$

广义力的计算主要还是用于下一章的动力学问题求解，可根据定义由解析法计算，但更常用的是所谓几何法。由

$$\sum \delta w = Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2 + \cdots\cdots + Q_k\delta q_k$$

令独立变分 $\delta q_1 \neq 0$ 而 $\delta q_2 = \delta q_3 = \delta q_4 = \cdots = 0$

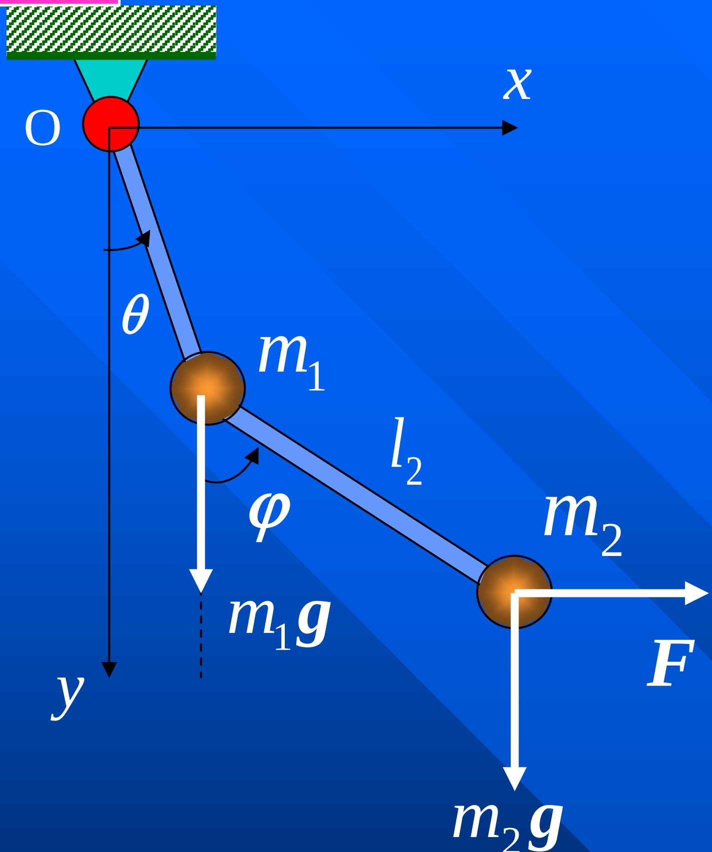
在此变更下，计算所有主动力的元功之和 $\sum \delta w_1$，则有

$$\sum \delta w_1 = Q_1\delta q_1$$

$$Q_1 = \frac{\sum \delta w_1}{\delta q_1}$$

类似地可求得 Q_2、Q_3、…等各个广义力。

例 题



例题： 若已知：

$$l_1 = l_2 = l$$

$$m_1 = m_2 = m$$

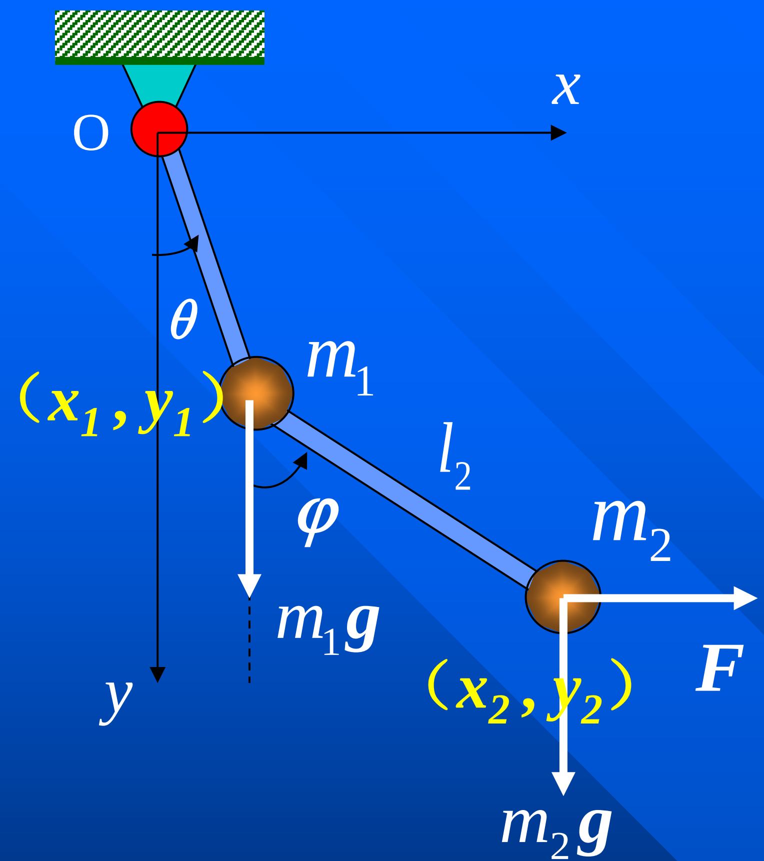
$$F = mg$$

求： 平衡时的位置

$$\theta = ?, \varphi = ?$$

2个质点组成的质点系的平衡问题，用解析法求解。

$$\sum_{i=1}^{3} \delta W_i = \sum_{i=1}^{3} \{F_{ix}\delta x_i + F_{iy}\delta y_i\} = 0$$



$$x_1 = l_1 \sin\theta$$

$$y_1 = l_1 \cos\theta$$

$$x_2 = l_1 \sin\theta + l_2 \sin\varphi$$

$$y_2 = l_1 \cos\theta + l_2 \cos\varphi$$

以固定点O为坐标原点建坐标系如图，取广义坐标为θ 和φ

$$\delta\theta,\ \delta\varphi \rightarrow \delta x,\ \delta y,$$

解： 根据虚位移原理

$$\boxed{\sum_{i=1}^{3}\{F_{ix}\delta x_i + F_{iy}\delta y_i\} = 0}$$

$$\delta x_1 = l_1 \cos\theta\delta\theta$$

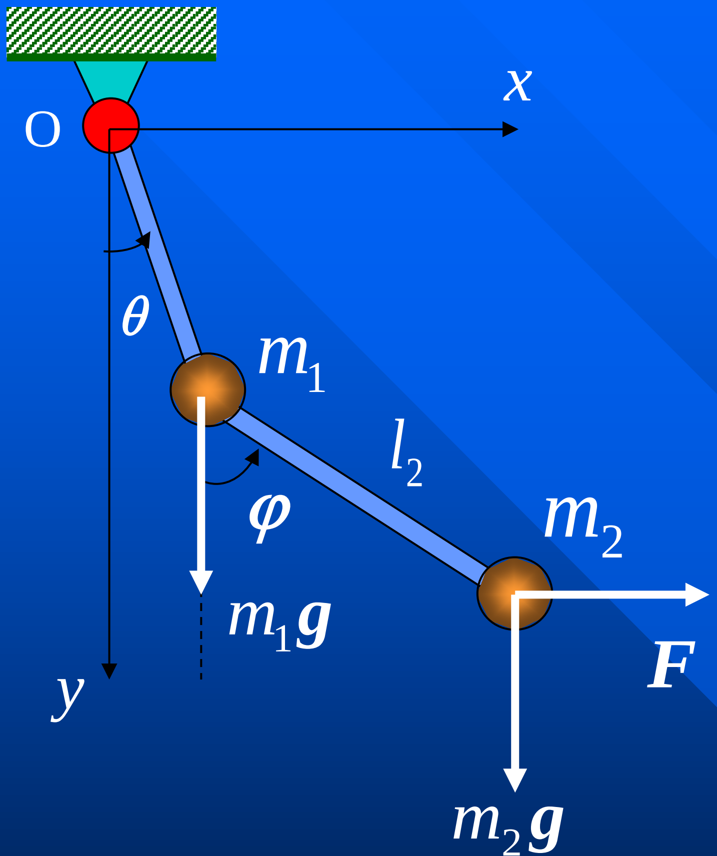
$$\delta y_1 = -l_1 \sin\theta\delta\theta$$

$$\delta x_2 = l_1 \cos\theta\delta\theta + l_2 \cos\varphi\delta\varphi$$

$$\delta y_2 = -l_1 \sin\theta\delta\theta - l_2 \sin\varphi\delta\varphi$$

$$m_1 g\delta y_1 + m_2 g\delta y_2 + F\,\delta x_2 = 0$$

$$\boxed{(-2mgl\sin\theta - mgl\cos\theta)\delta\theta + (-mgl\sin\varphi + mgl\cos\varphi)\delta\varphi = 0}$$



因为 $\delta\theta, \delta\varphi$ 是独立的, 而且是任意的.

$$-2mgl\sin\theta + mgl\cos\theta = 0$$

$$-mgl\sin\varphi + mgl\cos\varphi = 0$$

$$\tan\theta = \frac{1}{2}, \quad \tan\varphi = 1$$

$$Q_1 = Q_\theta = -2mgl\sin\theta + mgl\cos\theta \quad q_1 = \theta$$

$$Q_2 = Q_\varphi = -mgl\sin\varphi + mgl\cos\varphi \quad q_2 = \varphi$$

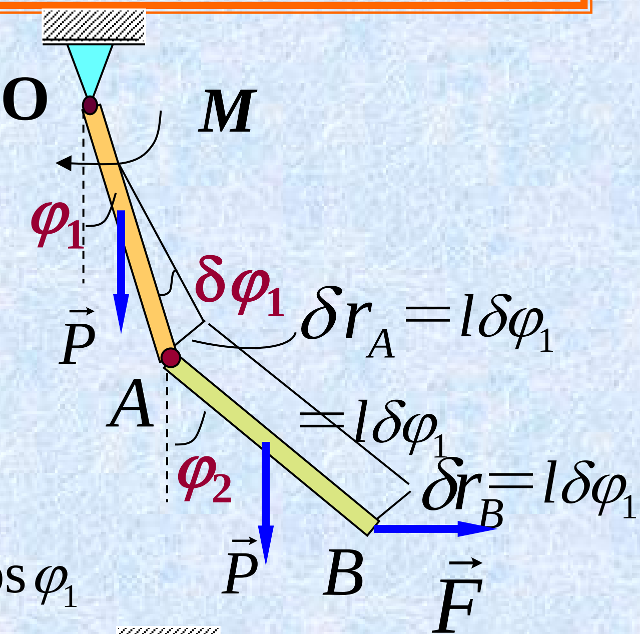
$$Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2 = 0$$

$$\boxed{Q_1 = 0, \quad Q_2 = 0}$$

$\delta\theta, \delta\varphi$ 即为广义虚位移 Q_θ, Q_φ 即为其对应的广义力

例6：均质杆长均为l，求图示双摆平衡时的力F和力偶M。

解： 自由度：2， 取广义坐标：φ_1，φ_2



1. 令$\delta q_1 = \delta\varphi_1 \neq 0$, $\delta q_2 = \delta\varphi_2 = 0$

逆时针为正？

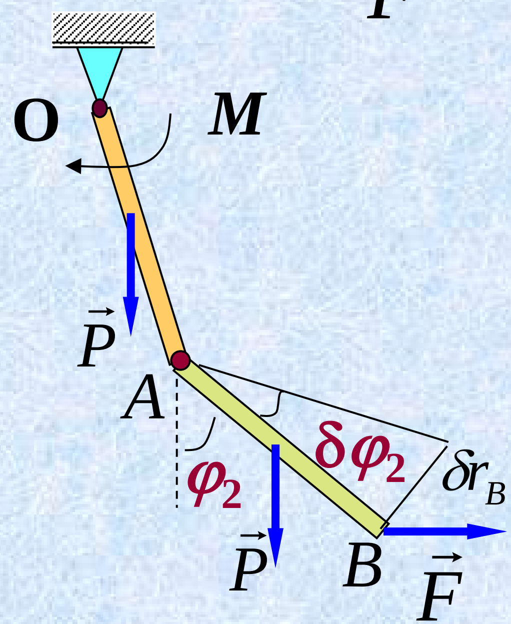
顺时针为正？

$$\delta W_1 = -M\cdot\delta\varphi_1 + (-\frac{Pl}{2}\sin\varphi_1)\delta\varphi_1$$

$$+(-Pl\sin\varphi_1)\delta\varphi_1 + Fl\cos\varphi_1\delta\varphi_1$$

$$Q_1 = \frac{\delta W_1}{\delta\varphi_1} = -M + P(-\frac{l}{2}\sin\varphi_1) + P(-l\sin\varphi_1) + Fl\cos\varphi_1$$

2. 令$\delta q_2 = \delta\varphi_2 \neq 0$, $\delta q_1 = \delta\varphi_1 = 0$



$$\delta W_2 = (-P\frac{l}{2}\sin\varphi_2)\delta\varphi_2 + Fl\cos\varphi_2\delta\varphi_2$$

$$Q_2 = \frac{\delta W_2}{\delta\varphi_2} = (-\frac{Pl}{2}\sin\varphi_2) + Fl\cos\varphi_2$$

令广义力Q_1、Q_2均为零。

$$M = \frac{1}{2}Pl(\cos\varphi_1\tan\varphi_2 - 3\sin\varphi_1) \qquad F = \frac{1}{2}P\tan\varphi_2$$

- 例　如图1-18所示，重量分别为3P和P的A、B物体系在无重不伸长的绳的两端，绳中间部分绕过滑轮C、D、E，滑轮D为动滑轮，其轴上挂有物体H，物体A放在粗糙的水平面上。求当系统平衡时物体H的重量P_H和物体A与水平面间的静滑动摩擦因数的最小值。

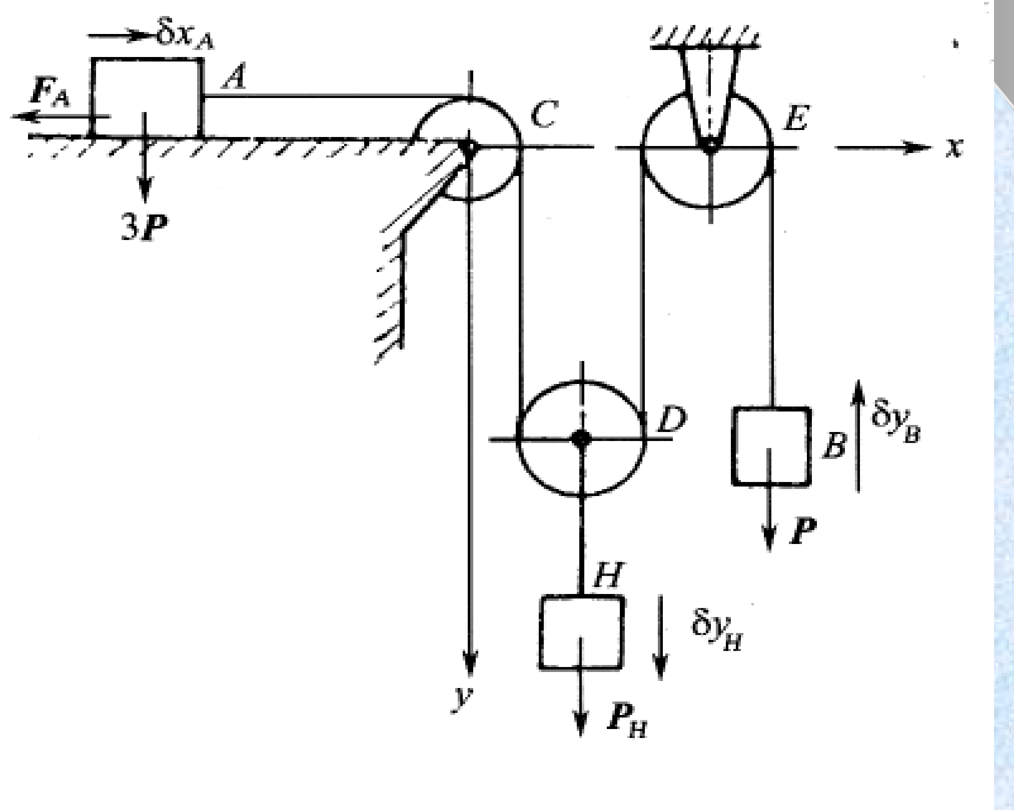


图 1-18

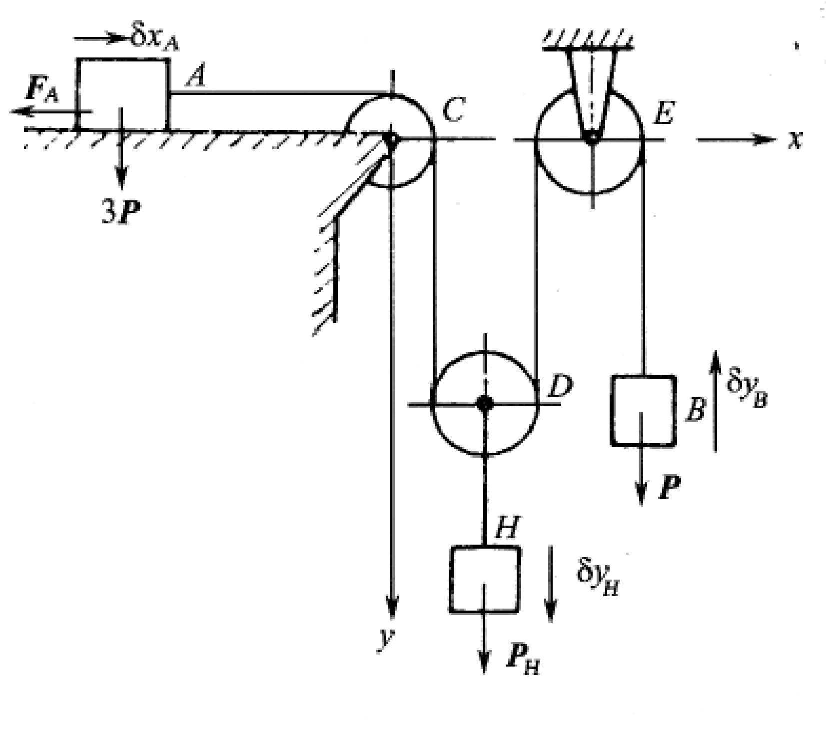


图 1-18

解：物体A，B，H的位置即确定系统的位置，三物体的位置分别由坐标x_A,y_B和y_H确定；绳的长度不变，物体间有一个约束关系，故系统有两个自由度。或这样分析，三物体中必须给定两个物体的位置，另一个物体的位置才能确定，也说明系统有两个自由度。

选取x_A（方向向右为正）和y_B（方向向上为正）为广义坐标，解除粗糙水平面水平方向约束（非理想约束），视摩擦力F_A为主动力。采用几何法，可得

1） 令$\delta y_B=0$，给A给以图示虚位移δx_A；则H相应的虚位移为δy_H（轮D右侧与绳接触点为瞬心）， $\delta y_H=\delta x_A/2$ 主动力所作虚功的和为

$$\sum \delta W_A' = -F_A \delta x_A + P_H \delta_{yH} = \left(-F_A + \frac{1}{2} P_H\right)\delta x_A$$

由此得对应于广义坐标x_A的广义力为 $Q_A = \frac{1}{2} P_H - F_A$

平衡时，$Q_A=0$，则有

$$F_A = \frac{1}{2} P_H$$

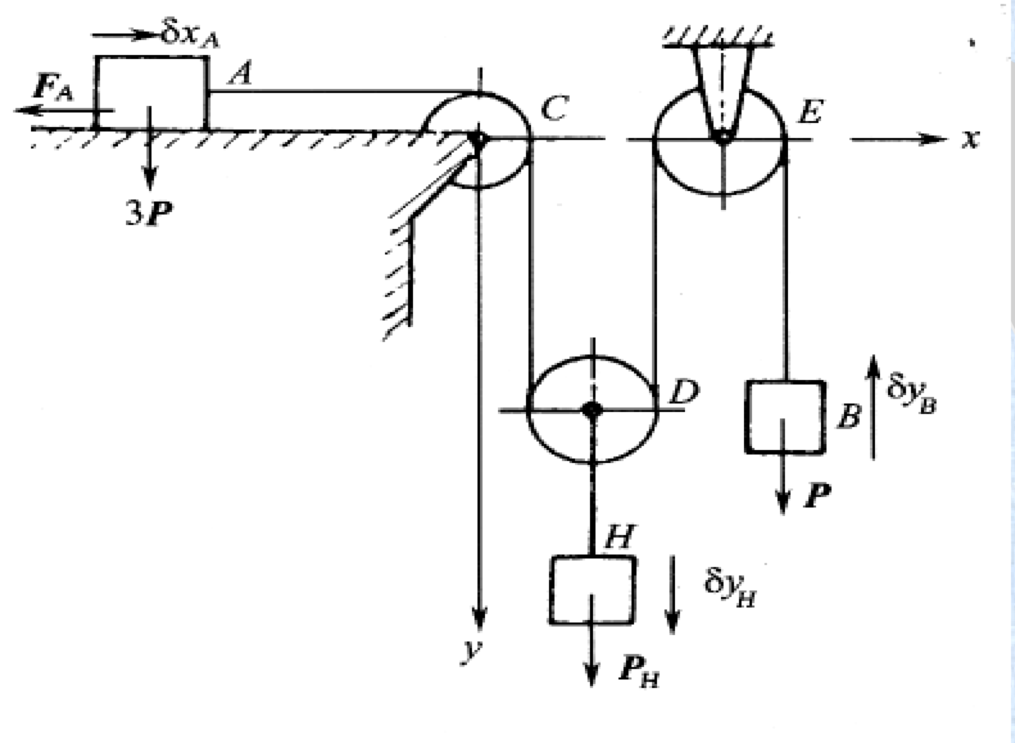


图 1-18

2）再令$\delta x_A=0$，给B以图示虚位移δy_B；则H相应的虚位移仍然是图示δy_H（轮D左侧与绳接触点为瞬心），$\delta y_B=2\delta y_H$

$$\sum \delta W_B' = -P\delta y_B + P_H \delta y_H = \left(-P+\frac{1}{2}P_H\right)\delta y_B$$

由此得对应于广义坐标y_B的广义力为 $Q_B = -P + \frac{1}{2}P_H$

令其为零，可得 $P=\frac{1}{2}P_H$

将上式与前面求得的表达式

$$F_A = \frac{1}{2}P_H$$

对比得 $F_A = P$

因系统为静平衡，故

$$f_s \geq \frac{F_A}{3P} = \frac{1}{3}$$

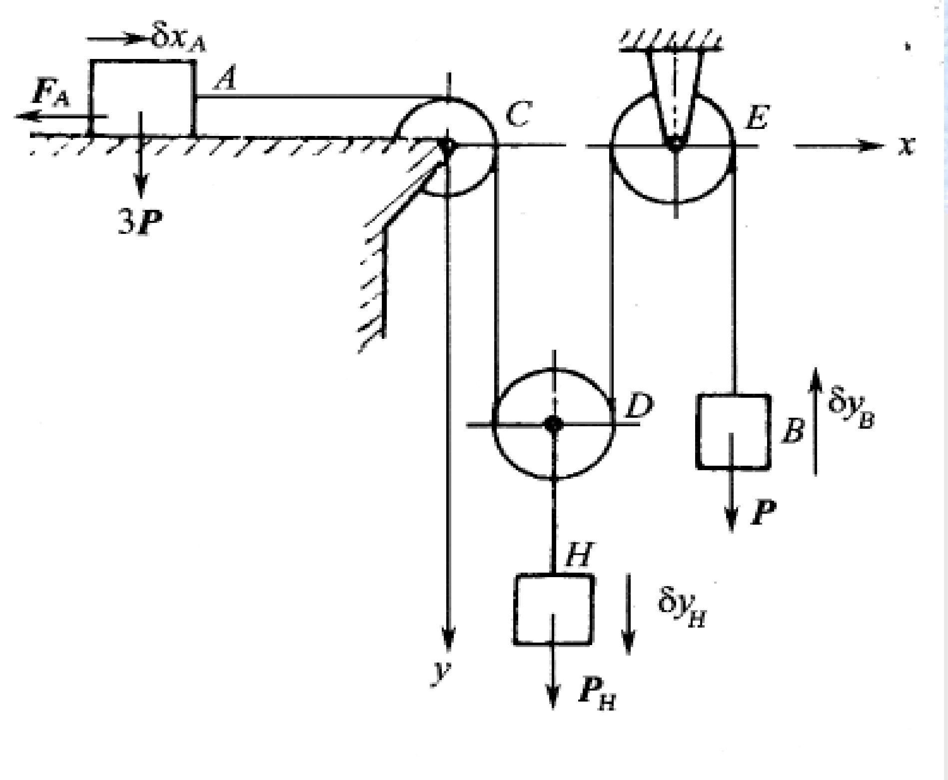


图 1-18

1. 平衡条件

某质点系由 n 个质点组成，内有 d 个完整、定常的理想约束，处于势力场中。作用在各质点上的主动力 F_i 都是有势力（重力、弹性力等），因此，该质点系是**保守系统**，它的势能函数 V 可以表示为各质点坐标的函数，即

$$V = V(x_1, y_1, z_1, \cdots, x_i, y_i, z_i, \cdots, x_n, y_n, z_n)$$

这些主动力 F_i 都可以用势能函数对坐标的偏导数表示，即

$$\boldsymbol{F}_i = -\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\boldsymbol{i} + \frac{\partial V}{\partial y_i}\boldsymbol{j} + \frac{\partial V}{\partial z_i}\boldsymbol{k}\right) \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

将上式代入虚功方程，得

$$\sum \delta W_F = \sum \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r} = -\sum\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial V}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial V}{\partial z_i}\delta z_i\right) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

$$\sum\delta W_F=-\sum\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial V}{\partial y_i}\delta y_i+\frac{\partial V}{\partial z_i}\delta z_i\right)=0\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

$$\boxed{\delta V=0}$$

上式表明，在势力场中，具有完整、定常的理想约束的质点系其平衡的充分必要条件是：*该质点系势能的一阶变分等于零。*

当选择广义坐标，则直角坐标表示的势能函数可改写为用广义坐标表示的势能函数 $V=V(q_1,q_2,\cdots,q_k)$

$$Q_j=-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}+\frac{\partial V}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial q_j}+\frac{\partial V}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\right)$$

$$=-\frac{\partial V}{\partial q_j}\quad(j=1,2,\cdots,k)$$

$$Q_j=\sum_{i=1}^{n}\left(F_{xi}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}+F_{yi}\frac{\partial y_i}{\partial q_j}+F_{zi}\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\right)]\quad(j=1,2,3,\ldots k)$$

$$\boldsymbol{F}_i=-\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\boldsymbol{i}+\frac{\partial V}{\partial y_i}\boldsymbol{j}+\frac{\partial V}{\partial z_i}\boldsymbol{k}\right)\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

因此用广义坐标表示的平衡条件可写成如下形式：

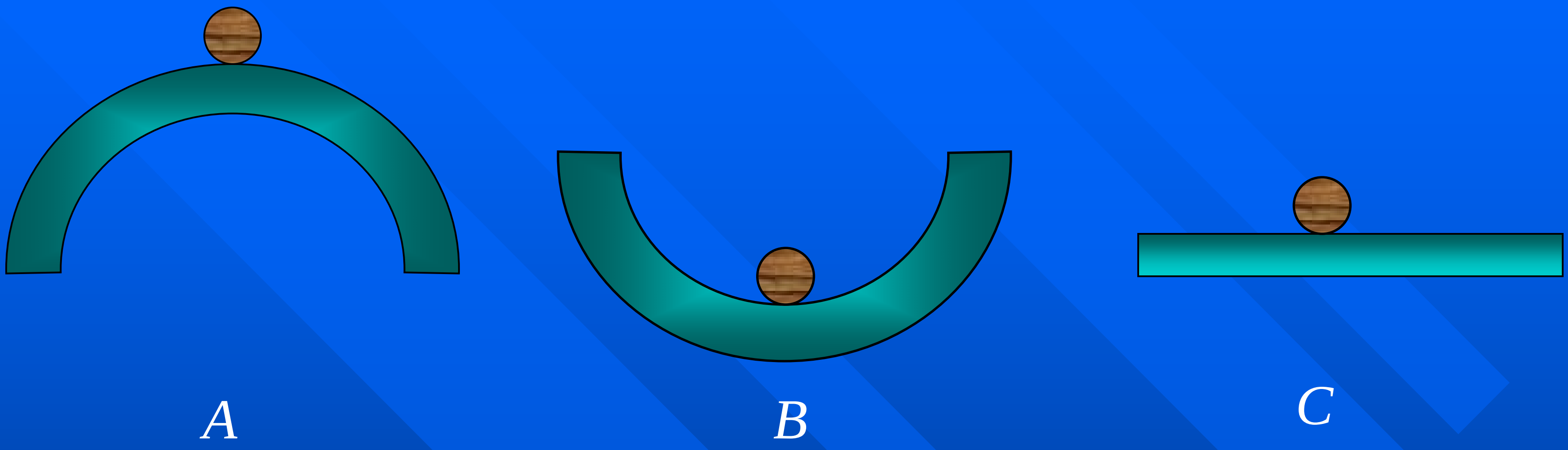
$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} = 0 \qquad (j=1,2,\cdots,k)$$

（k为系统自由度数）

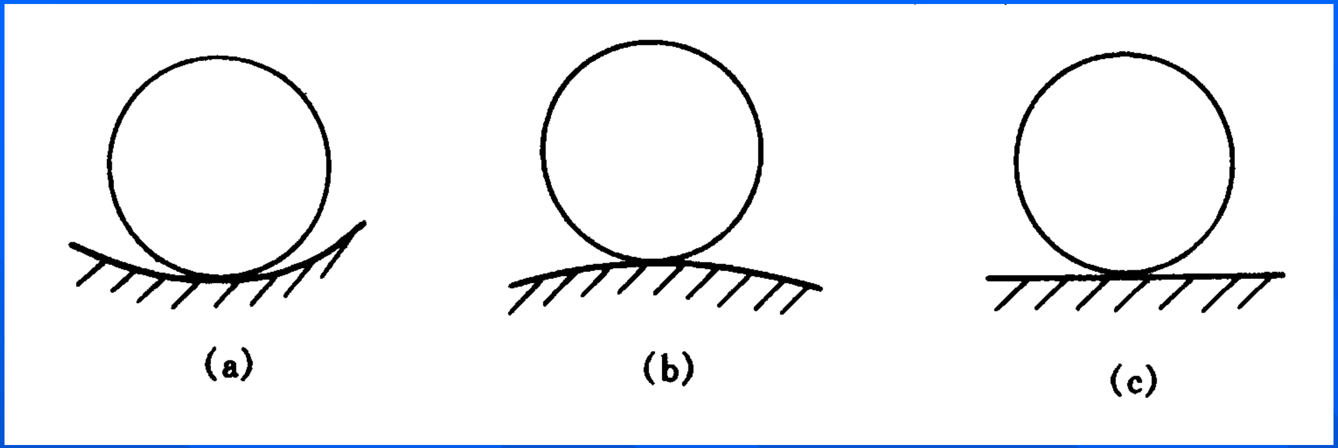
势力场中具有理想约束的质点系平衡条件是势能对每个广义坐标的偏导数分别等于零（也称为*有势力的虚位移原理*）

上式表明，求解具有理想约束的保守系统（作用于该系统的主动力均为重力、弹性力等有势力）的平衡问题时，可选取合适的广义坐标，并将系统势能表示为广义坐标的函数，然后将势能对广义坐标求偏导数，即可得到该广义坐标对应的广义力，令这些广义力均等于零，就能得到所需的平衡方程。

2. 平衡稳定性的概念



- **平衡的稳定性(stability of equilibrium)**：质点系处于某一平衡位置，若受到微小干扰偏离平衡位置后总不超出平衡位置邻近的某个微小区域，则称质点系在该位置的平衡是**稳定的(stable)**，否则是**不稳定的(unstable)**。



（a）稳定平衡 （b）非稳定平衡 （c）随遇平衡。

稳定平衡：在平衡位置，给一很小扰动后，仍会回到平衡位置；

非稳定平衡：与稳定平衡相反，在平衡位置，给一很小扰动后，不会再回到平衡位置；

随遇平衡：在平衡面的任一位置都能平衡；

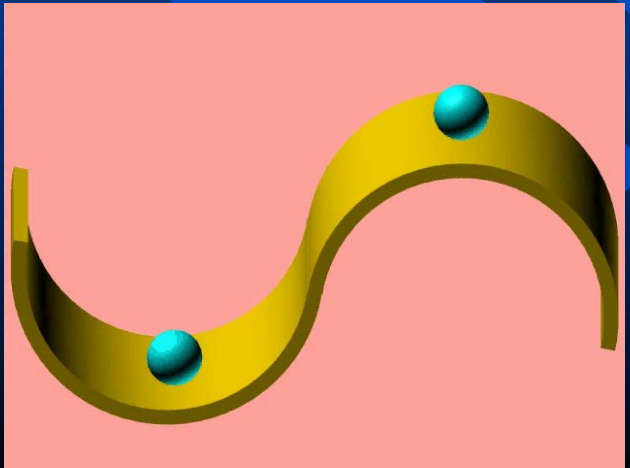
稳定平衡

不稳定平衡

稳定平衡：在平衡位置，给一很小扰动后，仍会回到平衡位置；

非稳定平衡：与稳定平衡相反，在平衡位置，给一很小扰动后，不会再回到平衡位置；

随遇平衡：在平衡面的任一位置都能平衡；



3. 质点系在势力场中平衡的稳定性

拉格朗日——狄利克雷提出的关于保守系统平衡稳定性的定理：

定理： 若质点系在平衡位置的势能具有极小值，则该平衡是稳定的；若势能具有非极小值，则其平衡是不稳定的。

以下仅讨论具有理想约束的单自由度保守系统的平衡稳定性问题。

4. 单自由度系统平衡稳定性质的判别方法

平衡位置：

$$-\left.\frac{dV}{dq}\right|_{q=q_0}=0$$

若： $\left.\frac{d^2V}{dq^2}\right|_{q=q_0}>0 \Rightarrow$ 稳定平衡状态

若： $\left.\frac{d^2V}{dq^2}\right|_{q=q_0}<0 \Rightarrow$ 非稳定平衡状态

若： $\left.\frac{d^2V}{dq^2}\right|_{q=q_0}=0 \Rightarrow$ 需进一步分析其高阶导数

若： $\left.\frac{d^2V}{dq^2}\right|_{q=q_0}\equiv 0 \Rightarrow$ 随遇平衡状态

质点系在势力场中平衡及其稳定性分析的基本步骤：

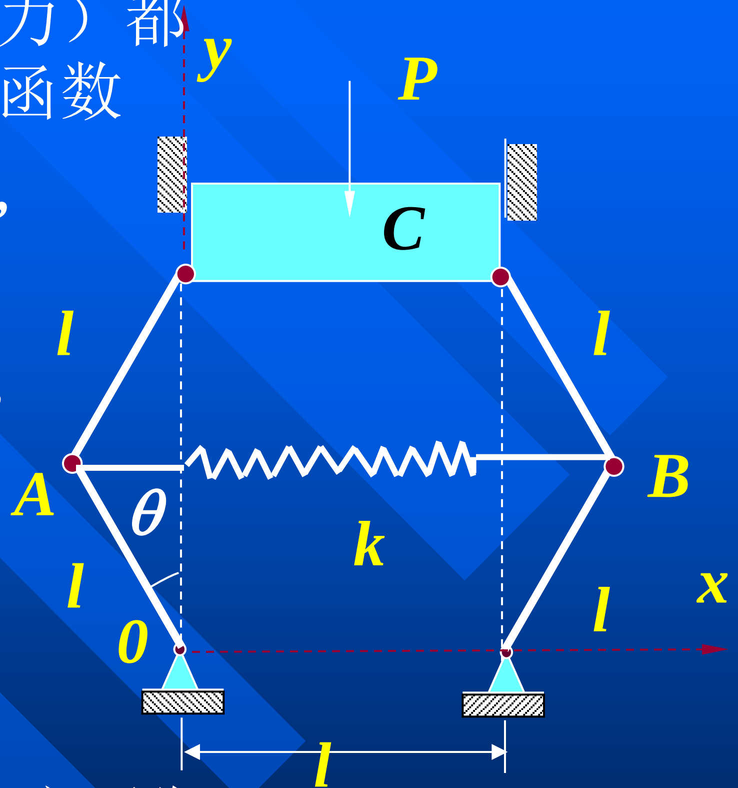
1、给出系统的势能函数

2、确定系统的平衡位置

3、讨论平衡位置的稳定性

例　图示平面缓冲机构, 各杆的重量和摩擦不记, 弹簧原长为l, 刚性系数为k. 求:稳定平衡的位置

解: 一个自由度，主动力（重力、弹性力）都是有势力。将势能写成广义坐标的函数



$$V = P(2l\cos\theta + h) + \frac{1}{2}k(2l\sin\theta)^2,$$

$$Q_\theta = -\frac{dV}{d\theta}$$

$$Q_\theta = 0, \quad -2Pl\sin\theta + 4kl^2\cos\theta\sin\theta = 0,$$

$$\sin\theta = 0, \theta_1 = 0,$$

$$\cos\theta = \frac{P}{2kl}, \quad \theta_2 = \arccos\frac{P}{2kl},$$

$$\frac{dV^2}{d\theta^2} = -2Pl\cos\theta + 4kl^2\cos^2\theta - 4kl^2\sin^2\theta,$$

当 $\theta = 0°$, $-2Pl + 4kl^2 > 0$. 则 $2kl > P$ 稳定平衡

当 $\theta = \arccos\frac{P}{2kl}$, $-\frac{P^2}{k} + \frac{2P^2}{k} - 4kl^2 > 0$, $P > 2kl$.稳定平衡

零势能位：重力势能：O点；弹性力势能：弹簧原长位置