同济大学试卷统一命题纸 (A 卷)

课号：122010 课名：线性代数（3 学分）

此卷选为：期中考试( )、期终考试(√)、补考( )试卷

年级_____专业_____________________学号__________姓名______________任课教师____________

题号	一	二	三	总分
得分				

（注意：本试卷共三大题，三大张，满分 100 分．考试时间为 120 分钟。要求写出解题过程，否则不予计分）

一. 填空题:(24’)

1.(4’) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}$, $a_i\neq 0, b_j\neq 0, i,j=1,2,\cdots,n.$ 则 $R(A)=($ $)$.

2.(4’) 设 3 阶矩阵 A 的特征值为 $2,-1,1$，$B=E-2A^{-1}+A^*$，其中 A^{-1} 是 A 的逆矩阵，A^* 是 A 的伴随矩阵，

则 $|B|=($ $)$.

3.(4’) n 阶矩阵 A 的各行元素之和均为零，且 $R(A)=n-1$，则线性方程组 $AX=0$ 的通解为( ).

4.(4’) 设 $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$，则 $(A+2E)^{-1}(A-2E)=($ $)$.

5.(4’) 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & x & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix}$ 和 $B=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$ 相似，则 x = ( ).

6. (4’) 已知线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3 = 1 \\ 2x_1+3x_2+(a+2)x_3 = 3 \\ x_1+ax_2-2x_3 = 0 \end{cases}$ 无解，则 $a=($ $)$.

二．计算题：(60')

1. (16') 问 k 为何值时，线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + kx_3 = 4 \\ -x_1 + kx_2 + x_3 = k^2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases}$ 有唯一解，无解，无穷多解？有解时求出解来.

2.(14') 已知 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, 与 $\beta_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, $\beta_2=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$, $\beta_3=\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}$, 分别是 $\mathbb{R}^3$ 的两组基，求从 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 到 $\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$ 的过渡矩阵 C, 并分别求向量 $\xi=\begin{pmatrix}0\\0\\-4\end{pmatrix}$ 在基 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 下的坐标和在基 $\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$ 下的坐标.

3.(15') 已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-8x_2x_3$,

(1) 写出二次型的矩阵表达式;

(2) 用正交变换把二次型化为标准形, 并写出相应的标准形和所用的正交矩阵.

4. (16') 设V是全部 2 阶实方阵所构成的线性空间. 定义V上的线性变换$\wp$: 对任意的$A\in V$,

$\wp(A)=A^T-A$, 其中A^T表示A的转置.

(1) 求线性变换$\wp$在基$E_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $E_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $E_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$下的矩阵.

(2) 求$\wp$的特征值与特征向量.

(3) $\wp$可否对角化? 可以的话, 找出V的一个基, 使$\wp$在这个基下的矩阵为对角阵; 不可以的话, 请说明理由.

三．证明题：(16')

1．(8') 设 A,B 是 n 级方阵，其中 B 为可逆阵，且满足关系式 $A^2+BA-2AB-2B^2=0$，证明 $R(A+B)+R(A-2B)=n$.

2．(8') 设 A 为 m 阶实对称矩阵且正定，B 为 $m\times n$ 实矩阵，B^T 为 B 的转置矩阵．试证：B^TAB 为正定矩阵的充分必要条件是 B 的秩 $R(B)=n$.