

2025 年春工科数学分析(下) 测验一

学号_____ 姓名_____

组别	第一页	第二页	总分
得分			

说明: 本卷共 2 页、4 大题, 满分 100 分. 请详细写出解题过程.

1. (60 分 = 12 分 \times 5) 判断下列说法是否正确, 并证明你的结论.(1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi + \frac{1}{n})$ 条件收敛.(2) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n+2})$ 在 $x \in [0, 1]$ 上一致收敛.(3) 设 $\sum a_n$ 是收敛的正项级数. 令 $A_n = \sup_{k \geq n} a_k$, 则 $\sum A_n$ 也收敛.(4) 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x \in (-R, R)$ 上收敛于 $f(x)$, 且在 $x = R$ 处发散, 则 $\int_0^R f(x) dx$ 是一个瑕积分, 并且该瑕积分发散.(5) 设 $f \in C^1(\mathbb{R})$, $f(0) = 0$, $f'(x) > 0$, 若 $\sum f(a_n)$ 收敛, 则 $\sum a_n$ 收敛.

2. (15 分) 利用 $\sum_{n=1}^{\infty} [x^n + (1-x)^n]/n^2$ 在 $x \in [0, 1]$ 上的和函数计算 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(2^n n^2)$.

3. (15 分) 设 (a_n) 单调递减且 $0 < a_n < 1$, 证明: $\sum (a_{n-1} - a_n)/(a_n \ln a_n)$ 收敛的充要条件是 (a_n) 的极限是正数.

4. (10 分) 设 f 是一个以 2π 为周期的周期函数. 如果 $f(x)$ 在 $x \in \mathbb{R}$ 上可以展开成幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 证明: f 的 Fourier 级数一致收敛于 f , 并且可以逐项求导.