回顾：静力学主要研究两个问题：力系的简化、力系的平衡，同时也研究力的一般性质。

第一、二章主要内容：力的一般性质、力系的简化

第三章开始讲述力系的平衡。

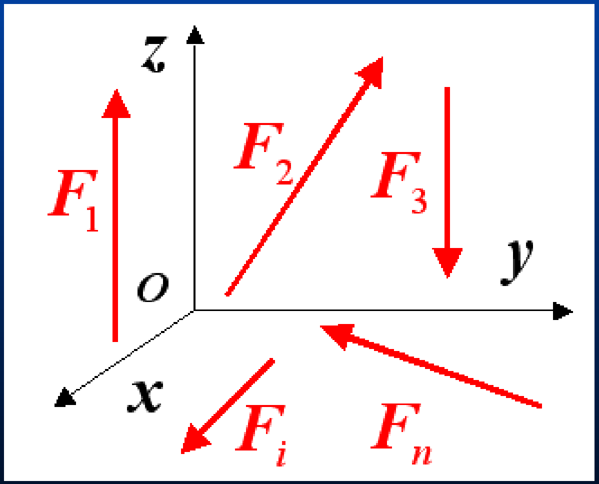
重点：平面物体系统的平衡及应用。

第三章　力系的平衡

第一节　　平衡方程的解析形式

一、 空间任意（一般）力系

空间一般力系平衡的充分和必要条件：力系的主矢和对于任一点O简化的主矩均等于零。



$$\vec{F}_R = \sum_{i=1}^{n} X_i \vec{i} + \sum_{i=1}^{n} Y_i \vec{j} + \sum_{i=1}^{n} Z_i \vec{k} = 0,$$

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{n} [\vec{M}_O(\vec{F}_i)]_x \vec{i} + \sum_{i=1}^{n} [\vec{M}_O(\vec{F}_i)]_y \vec{j} + \sum_{i=1}^{n} [\vec{M}_O(\vec{F}_i)]_z \vec{k}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} M_x(\vec{F}_i)\vec{i} + \sum_{i=1}^{n} M_y(\vec{F}_i)\vec{j} + \sum_{i=1}^{n} M_z(\vec{F}_i)\vec{k}$$

$$= 0$$

空间任意力系平衡方程的基本形式：

$$\begin{cases} \sum F_{xi}=0, \quad \sum F_{yi}=0, \quad \sum F_{zi}=0 \\ \sum M_{xi}=0, \quad \sum M_{yi}=0, \quad \sum M_{zi}=0 \end{cases}$$

空间任意力系的独立平衡方程数是6个，对一个刚体，最多可建立6个独立的平衡方程，可解六个未知量。

以上是空间任意力系平衡方程的基本形式，而非唯一形式。

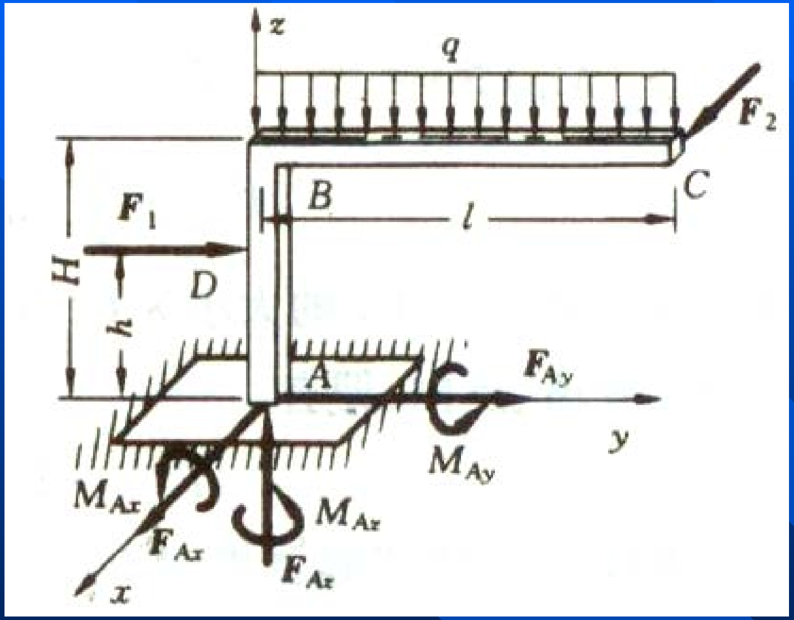
1）可以选取空间任意直线为投影轴，可选取任意轴为矩轴（可对任意轴取矩），这些轴不一定是坐标轴，这些轴也不一定相互正交；

2）力的投影轴与矩轴不一定重合；

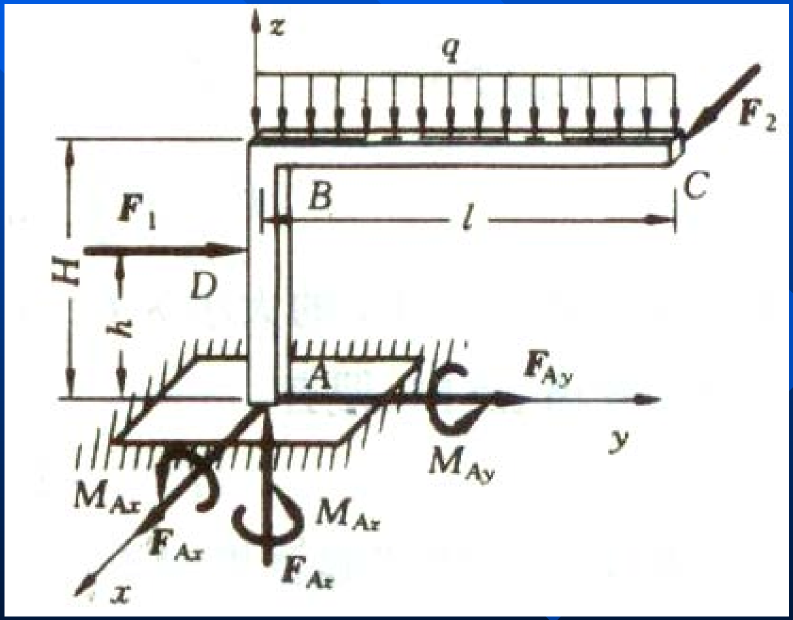
3）可以用力矩形式的平衡方程来代替投影形式的平衡方程，即可建立4～6个力矩形式的平衡方程，而减少投影形式的平衡方程个数，但独立的平衡方程个数最多为6个。

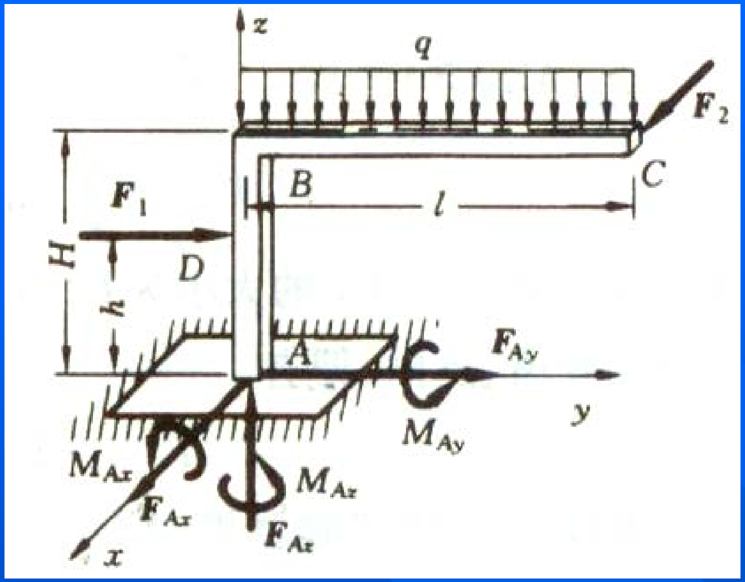
求解空间任意力系平衡问题最关键的是建立合适形式的平衡方程，尽可能避免求解联立方程组。

例（空间力系平衡）如图所示悬臂刚架*ABC*，*A*端固定在基础上，在刚架的*D*点和*C*点分别作用有水平力F_1和F_2，在*BC*段作用有集度为*q*的均布线荷载，已知*l*，*h*，*H*，如略去刚架的重量，试求固定端*A*的约束力。



解：1）选取ABC刚架为研究对象，由于A是固定端，而且作用在刚架上的主动力是空间力系，因此当刚架平衡时，A端的约束反力也是一空间力系。故A端约束反力用三个相互垂直的分力F_x、F_y、F_z和力偶矩矢分别为M_x、M_y、M_z的三个分力偶表示，刚架受力如图所示。显然，这是一个空间一般力系的平衡问题。





$$\Sigma M_{xi}=0 \quad M_{Ax}-F_1h-ql\cdot\frac{l}{2}=0 \quad M_{Ax}=F_1h+\frac{ql^2}{2}$$

$$\Sigma M_{yi}=0 \quad M_{Ay}+F_2\cdot H=0 \quad M_{Ay}=-F_2H$$

$$\Sigma M_{zi}=0 \quad M_{Az}-F_2\cdot l=0 \quad M_{Az}=F_2\cdot l$$

2）选取图示坐标系，列平衡方程并求解

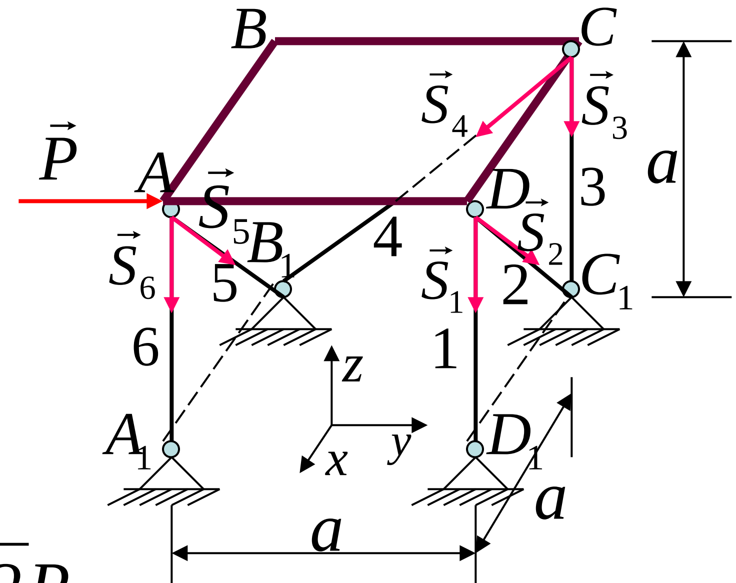
$$\Sigma F_{xi}=0 \quad F_{Ax}+F_2=0 \quad F_{Ax}=-F_2$$

$$\Sigma F_{yi}=0 \quad F_{Ay}+F_1=0 \quad F_{Ay}=-F_1$$

$$\Sigma F_{zi}=0 \quad F_{Az}-ql=0 \quad F_{Az}=ql$$

因假设未知约束力沿坐标轴的正向，所以解出的负值表示该约束反力或约束反力偶矩的实际方向与假设的相反。

例2 用六根不计自重杆支撑正方形板ABCD如图所示，水平力$\vec{P}$沿水平方向作用在A点，不计板的自重，求各杆的内力。

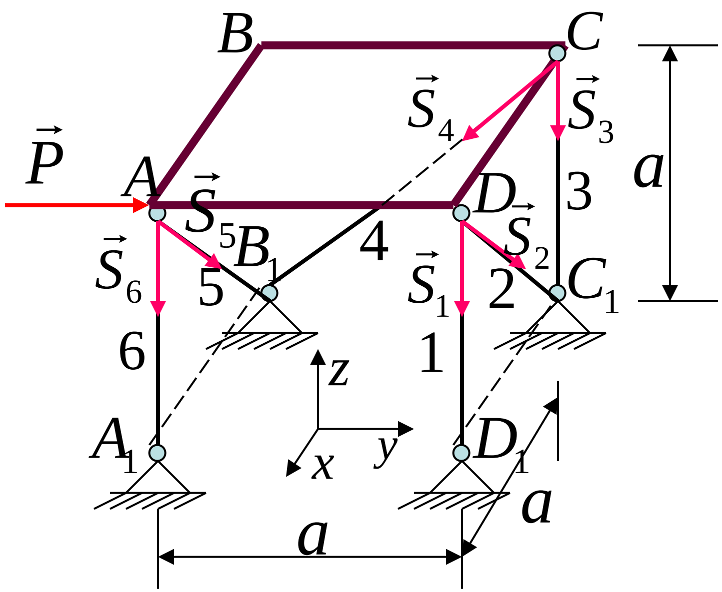


解：以板为研究对象，各杆均为二力杆，设其均为拉力（若计算结果为负表示受压），受力如图，建立如图坐标系。

$$\sum Y=0: P-S_4\cos 45^\circ=0 \Rightarrow S_4=\sqrt{2}P$$

$$\sum m_{A_1A}(\vec{F})=0: S_4\cos 45^\circ a+S_2\cos 45^\circ a=0 \Rightarrow S_2=-S_4=-\sqrt{2}P$$

$$\sum m_{D_1D}(\vec{F})=0: S_4\cos 45^\circ a-S_5\cos 45^\circ a=0 \Rightarrow S_5=S_4=\sqrt{2}P$$



$$\sum m_{DA}(\vec{F}) = 0: S_3 a + S_4 \cos 45^\circ a = 0 \Rightarrow S_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} S_4 = -P$$

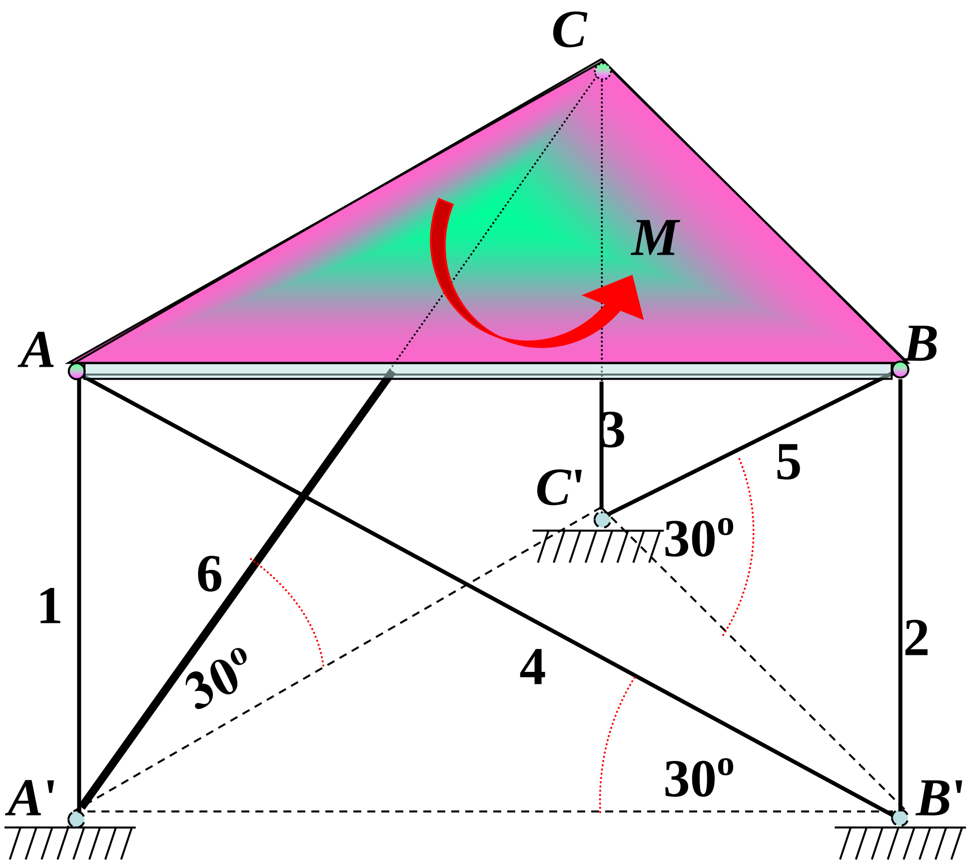
$$\sum m_{CD}(\vec{F}) = 0: S_6 a + S_5 \cos 45^\circ a = 0 \Rightarrow S_6 = -P$$

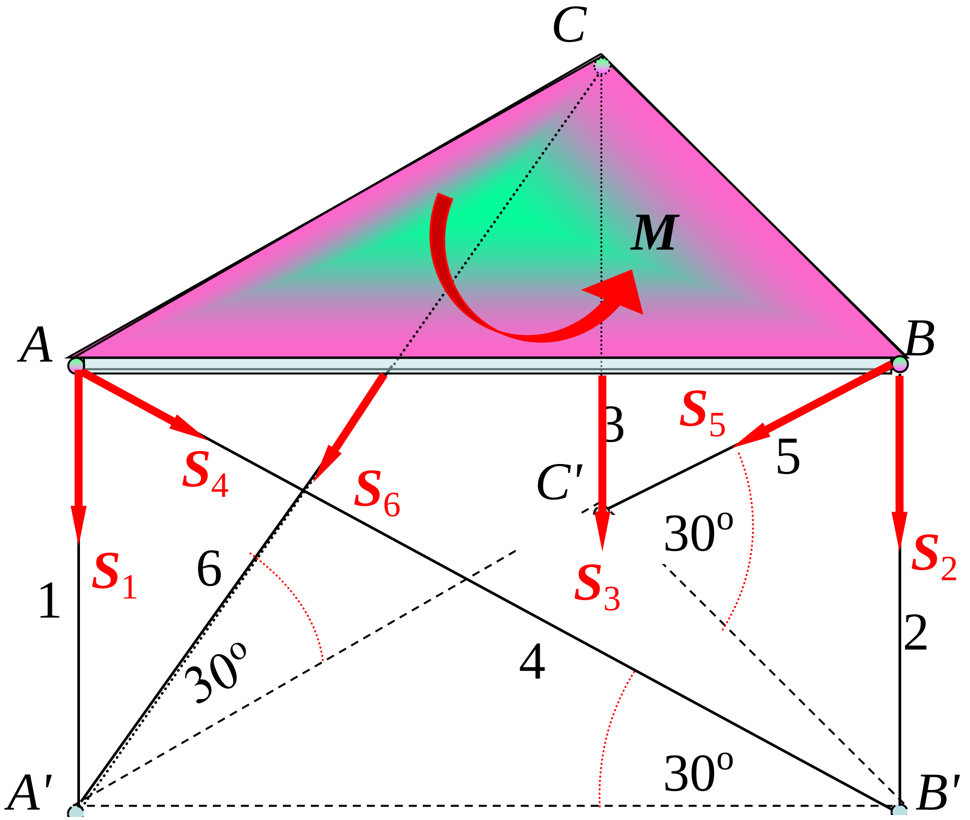
$$\sum Z = 0: -S_1 - S_6 - S_3 - S_5 \cos 45^\circ - S_4 \cos 45^\circ - S_2 \cos 45^\circ = 0$$

$$\Rightarrow S_1 = P + P - P - P + P = P$$

求解空间任意力系最关键的是建立合适形式的平衡方程，*尽量*避免求解联立方程组，故选投影轴要使尽可能多的未知力与它垂直，选矩轴要尽可能多的未知力与它相交或与它平行。总之，尽可能使一个方程求解一个未知量。

例4　一等边三角形板边长为a，用六根杆支承成水平位置如图所示.若在板内作用一力偶其矩为M。求各杆的约束反力。





解:取等边三角形板为研究对象画受力图。

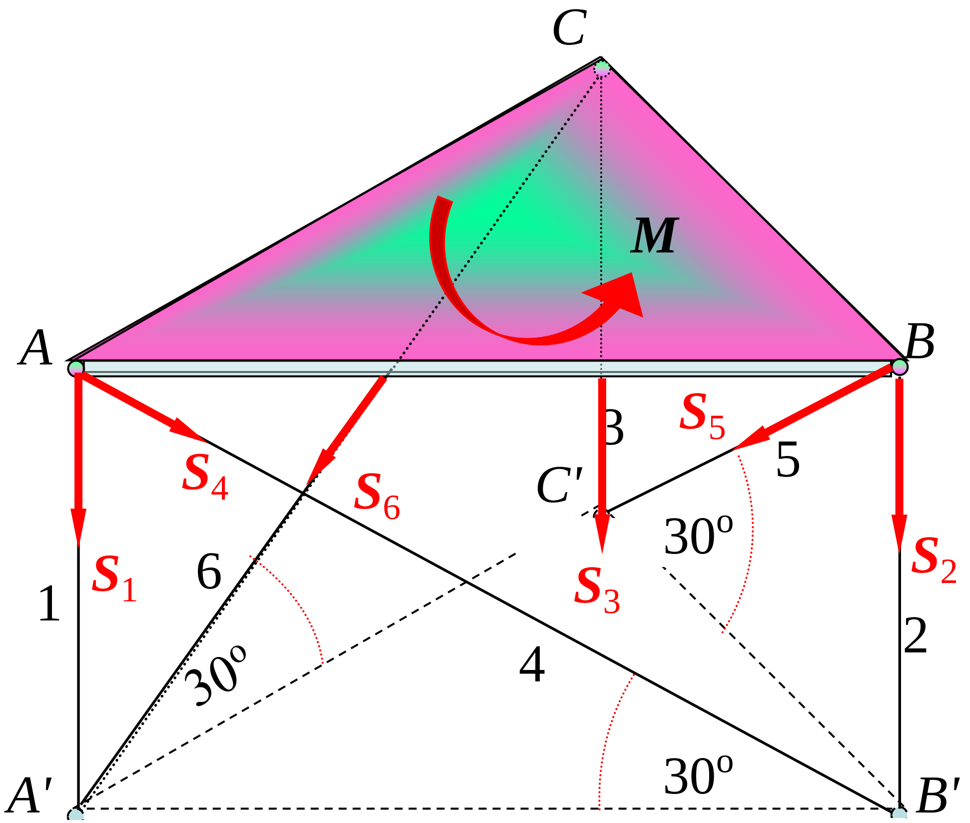
$$\Sigma M_{BB'}(\boldsymbol{F})=0$$

$$M+\frac{\sqrt{3}}{2}a\frac{\sqrt{3}}{2}S_6=0$$

$$S_6=-\frac{4M}{3a}$$

$$\Sigma M_{CC'}(\boldsymbol{F})=0,\quad M+\frac{\sqrt{3}}{2}a\frac{\sqrt{3}}{2}S_4=0 \qquad S_4=-\frac{4M}{3a}$$

$$\Sigma M_{AA'}(\boldsymbol{F})=0\quad M+\frac{\sqrt{3}}{2}a\frac{\sqrt{3}}{2}S_5=0 \qquad S_5=-\frac{4M}{3a}$$



$$\Sigma M_{BC}(\boldsymbol{F}) = 0$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}a\,S_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}a\frac{1}{2}S_4 = 0$$

$$S_1 = \frac{2M}{3a}$$

$$\Sigma M_{AC}(\boldsymbol{F}) = 0 \quad \frac{\sqrt{3}}{2}a\,S_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}a\frac{1}{2}S_5 = 0$$

$$S_2 = \frac{2M}{3a}$$

$$\Sigma M_{AB}(\boldsymbol{F}) = 0 \quad -\frac{\sqrt{3}}{2}a\,S_3 - \frac{\sqrt{3}}{2}a\frac{1}{2}S_6 = 0$$

$$S_3 = \frac{2M}{3a}$$

但由于大锥齿轮*D*上承受的啮合反力3个分力存在比例关系，相当于补充了两个方程

静力平衡方程如下：

$$\sum X = 0 \qquad F_{Ax} + F_{Bx} - F_t = 0$$

$$\sum Y = 0 \qquad F_{Ay} + F_{By} + F_r = 0$$

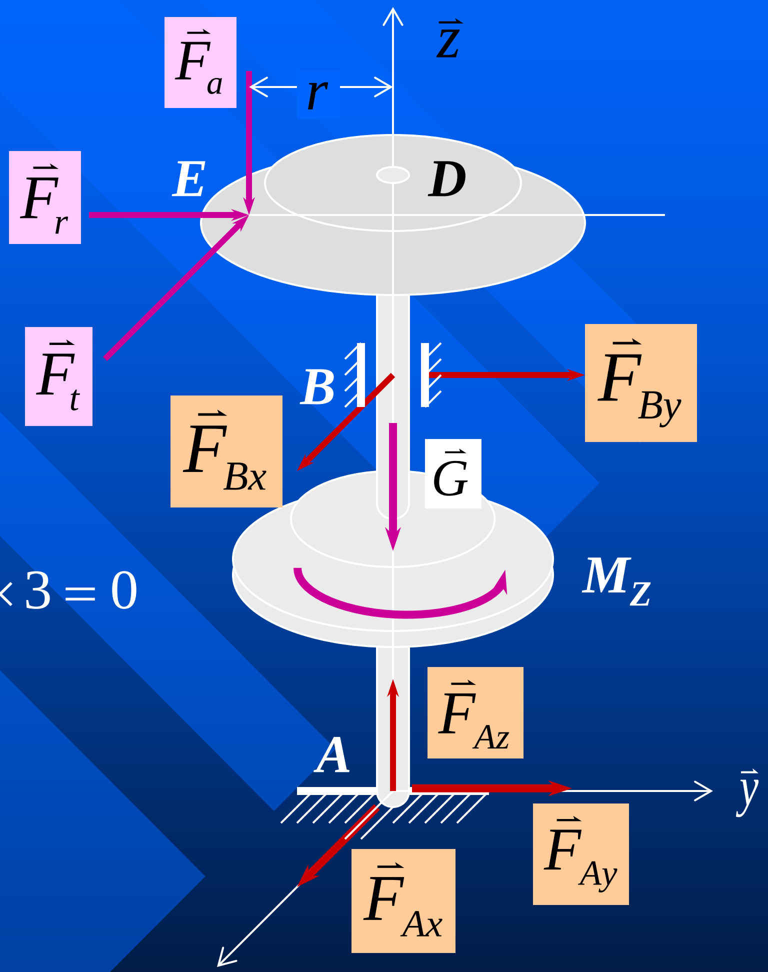
$$\sum Z = 0 \qquad F_{Az} - F_a - G = 0$$

$$\sum M_x = 0 \qquad F_a \times 0.6 - F_r \times 4 - F_{By} \times 3 = 0$$

$$\sum M_y = 0 \qquad F_{Bx} \times 3 - F_t \times 4 = 0$$

$$\sum M_z = 0 \qquad M_z - F_t \times 0.6 = 0$$

$$\boxed{F_t / F_a / F_r = 1/0.32/0.17}$$



由（6）解得：　$F_t = 2\ kN$

代入（7），可得：　$F_a = 0.64\ kN,\quad F_r = 0.34\ kN$

将上述结果代入（1）～（5），最后求得：

$$F_{Ax} = -0.67\ kN,\quad F_{Ay} = -0.015\ kN,\quad F_{Az} = 12.64\ kN$$

$$F_{Bx} = 2.67\ kN,\quad F_{By} = -0.325\ kN$$

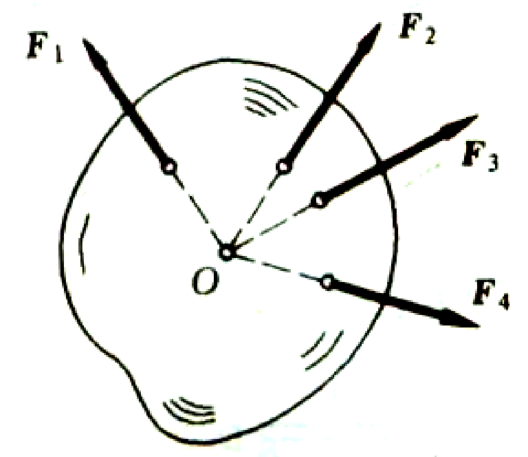
　　空间任意（一般）力系是最普遍的力系，其它一些特殊的力系，如空间汇交力系、空间平行力系、空间力偶系、平面任意（一般）力系等均为它的特例，其平衡方程均可由它导出。

- 力系
  - 汇交力系
    - 平面汇交力系
    - 空间汇交力系
  - 力偶系
    - 平面力偶系
    - 空间力偶系
  - 平行力系
    - 平面平行力系
    - 空间平行力系
  - 任意力系（一般力系）
    - 平面任意力系
    - <u>空间任意力系</u>

在以下三种空间任意力系的特例中，独立平衡方程个数相应减少：

1. 空间汇交力系

当空间平衡力系中各力的作用线汇交于某一点（设为O点），以O点为简化中心，则主矩M_O为零自然满足，要使主矢



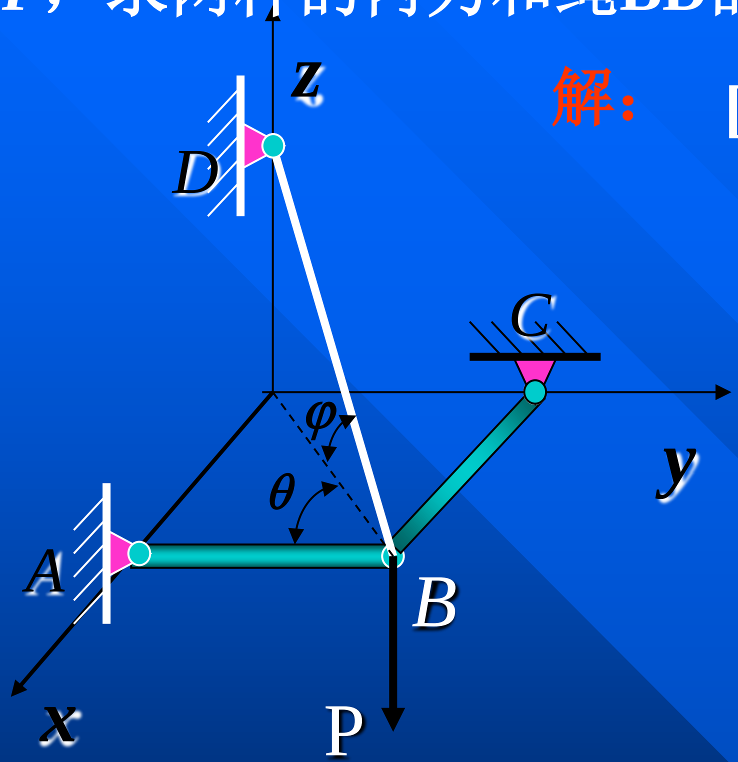
$$\vec{F}_R=\sum_{i=1}^{n}X_i\vec{i}+\sum_{i=1}^{n}Y_i\vec{j}+\sum_{i=1}^{n}Z_i\vec{k}=0,$$

应有，

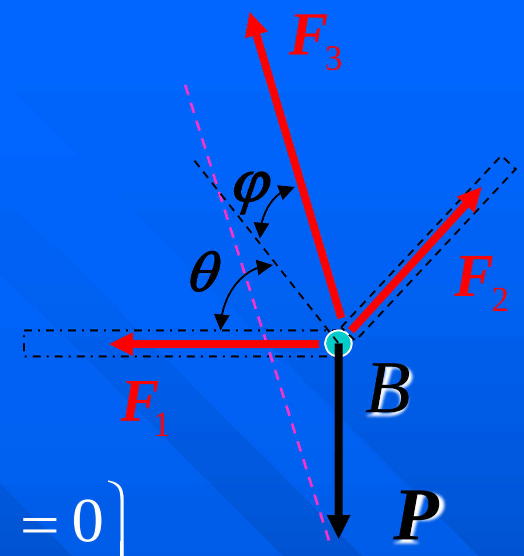
$$\left.\begin{aligned}\sum F_x=0\\ \sum F_y=0\\ \sum F_z=0\end{aligned}\right\}$$

因此空间汇交力系的平衡问题最多可建立3个独立平衡方程求解3个未知量。

例：结构如图所示，杆重不计，已知力P，求两杆的内力和绳BD的拉力。



解： [铰链B]



空间力系
$$\left.\begin{aligned}\sum F_x &= 0\\ \sum F_y &= 0\\ \sum F_z &= 0\end{aligned}\right\}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$-F_3\cos\varphi\sin\theta - F_2 = 0$$

$$\sum F_z = 0$$

$$F_3\sin\varphi - P = 0$$

$$F_3 = \frac{P}{\sin\varphi}$$

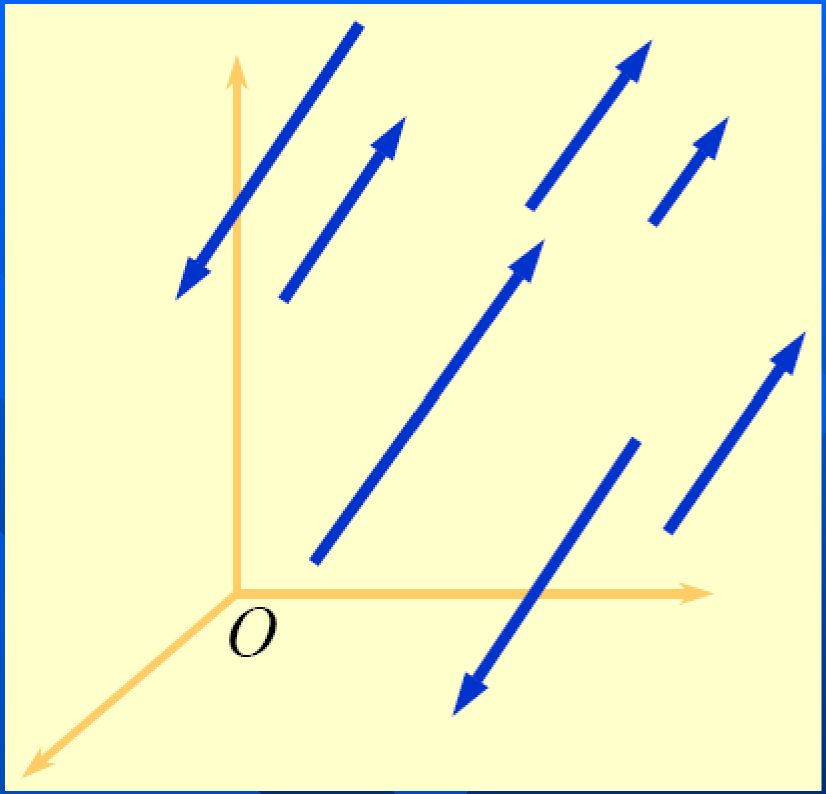
$$F_2 = -F_3\cos\varphi\sin\theta = -\frac{P}{\sin\varphi}\cos\varphi\sin\theta$$

$$\sum F_y = 0 \qquad -F_1 - F_3\cos\varphi\cos\theta = 0$$

$$F_1 = -F_3\cos\varphi\cos\theta = -\frac{P}{\sin\varphi}\cos\varphi\cos\theta$$

2. 空间平行力系

各力的作用线相互平行的力系称为平行力系(System of parallel forces）。

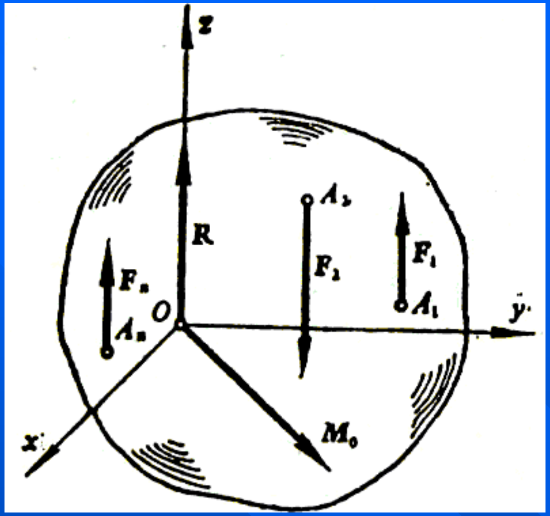


自然满足的方程：

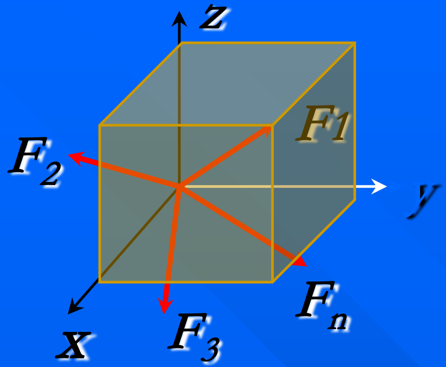
$$\sum F_x=0,\ \sum F_y=0$$

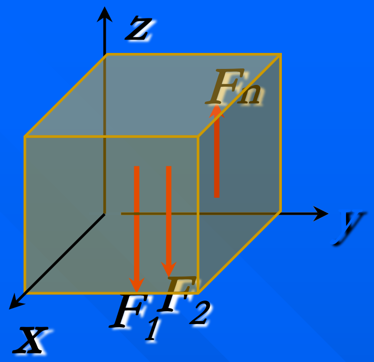
$$\sum M_z(F)=0$$

因此空间平行力系的平衡问题最多可建立如下3个独立平衡方程，求解3个未知量。



$$\sum F_z=0,\ \sum M_x(F)=0,\ \sum M_y(F)=0,$$





空间汇交力系的平衡方程：

$$\left.\begin{array}{l}\sum X=0\\ \sum Y=0\\ \sum Z=0\end{array}\right\}$$

$$\sum m_x(F)\equiv 0$$
$$\sum m_y(F)\equiv 0$$
$$\sum m_z(F)\equiv 0$$

自然满足

空间平行力系的平衡方程：

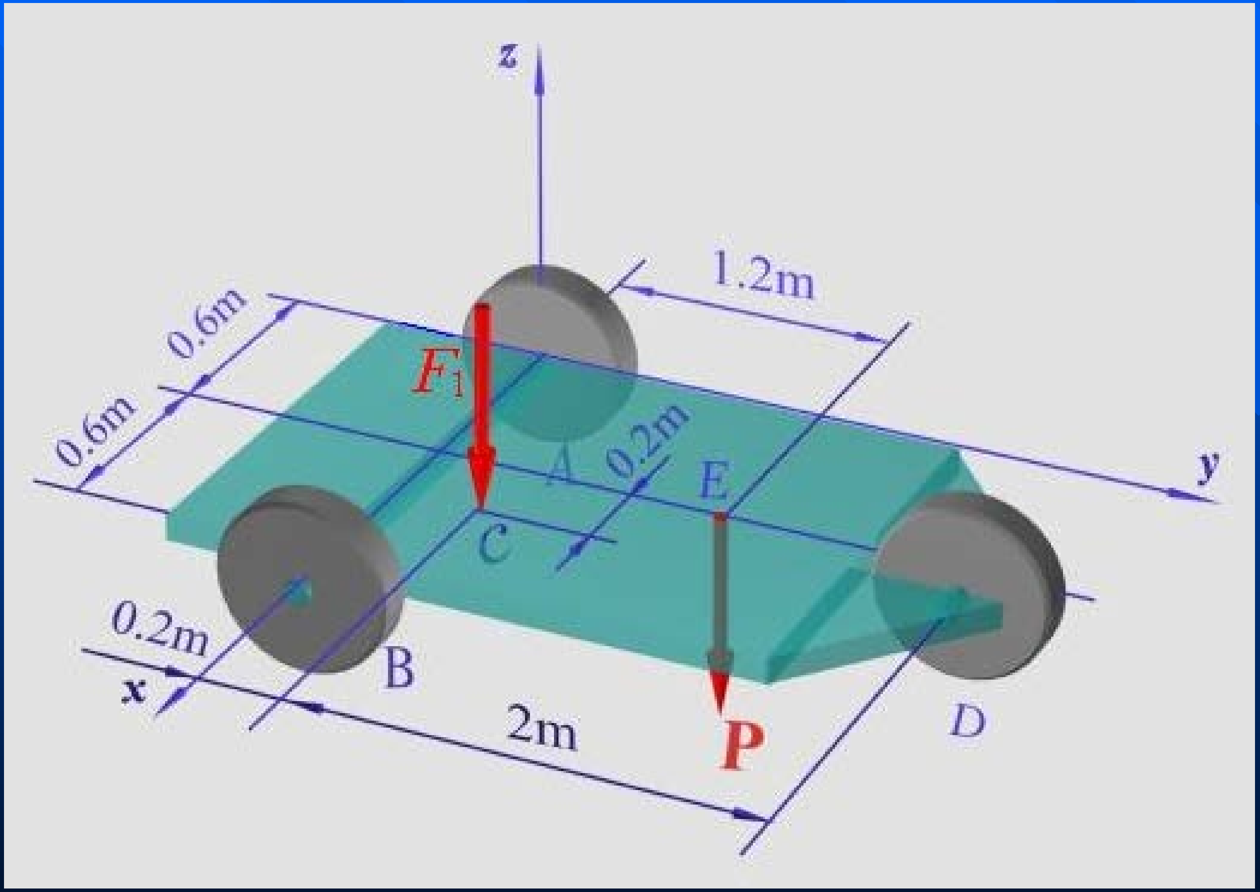
$$\left.\begin{array}{l}\sum Z=0\\ \sum m_x(F)=0\\ \sum m_y(F)=0\end{array}\right\}$$

$$\sum m_z(F)=0$$
$$\sum X=0$$
$$\sum Y=0$$

自然满足

例题

如图所示三轮小车，自重 $P = 8$ kN，作用于E点，载荷$F_1 = 10$ kN，作用于C点。求小车静止时地面对车轮的约束力。



例题

解：以小车为研究对象，主动力和约束反力组成空间平行力系，画受力图、建坐标系如图。

列平衡方程

$$\sum F_z = 0 \qquad -P - F_1 + F_A + F_B + F_D = 0$$

$$\sum M_x(F) = 0 \qquad -0.2F_1 - 1.2P + 2.2F_D = 0$$

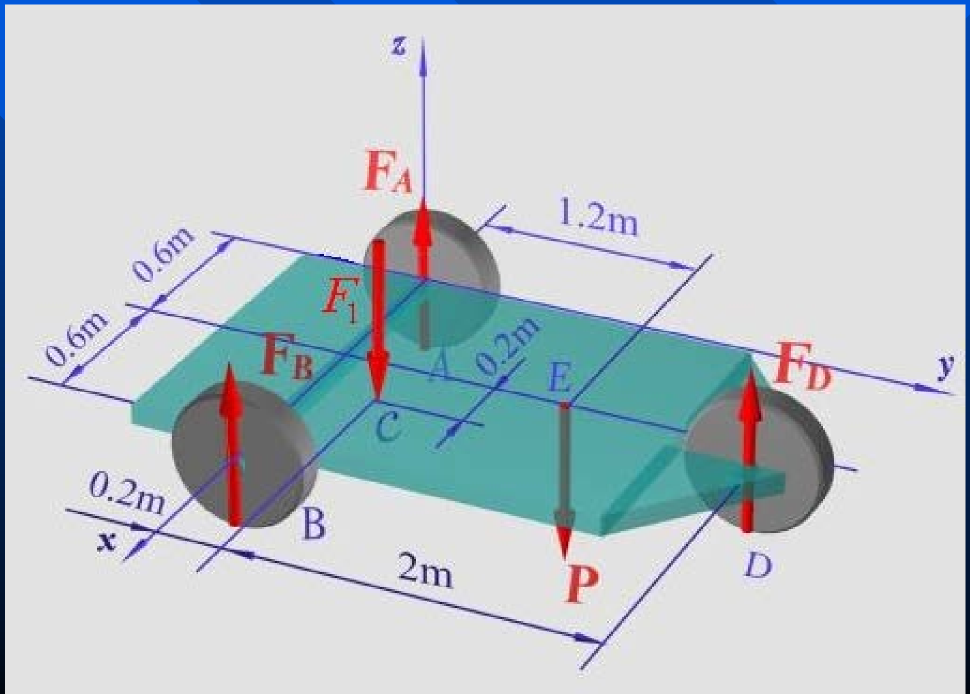
$$\sum M_y(F) = 0 \qquad 0.8F_1 + 0.6P - 1.2F_B - 0.6F_D = 0$$

解方程得

$$F_D = 5.8\,\text{kN}$$

$$F_B = 7.777\,\text{kN}$$

$$F_A = 4.423\,\text{kN}$$



3. 空间力偶系

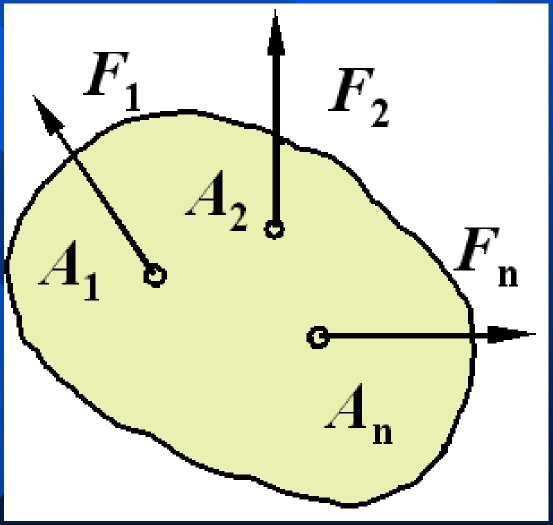
空间力偶系主矢恒为零，要使主矩M_O为零，应有

$$\sum M_x(F)=0,\ \sum M_y(F)=0,\ \sum M_z(F)=0,$$

因此空间力偶系的平衡问题最多可建立3个独立平衡方程求解3个未知量。

二、平面任意（一般）力系

严格地说，平面任意力系也是空间任意力系的特殊情况。平衡时力系的主矢（矢量）和对于平面内任一点O简化的主矩M_O（代数量）均等于零。



$\vec{F}_R = 0$, $\boldsymbol{M}_{\mathbf{o}}\mathbf{=0}$ 力系平衡的必要、充分条件。

$$\sum \boldsymbol{F}_{xi} = 0 \qquad \sum \boldsymbol{F}_{yi} = 0 \qquad \sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i) = 0$$

因此平面任意力系的平衡问题最多可建立以上3个独立平衡方程，求解3个未知量。

平面任意力系平衡的充分必要条件：力系的各力在该平面内任意两根不相平行的坐标轴上投影的代数和及对平面内任意点的矩的代数和等于零。

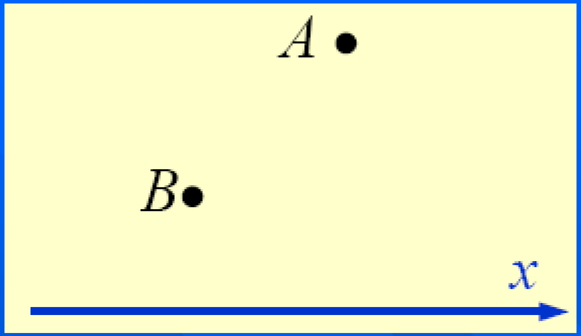
以上三个方程是平面一般力系平衡的基本形式。

二矩式方程：

$$\sum F_x=0$$

$$\sum M_A(F)=0$$

$$\sum M_B(F)=0$$



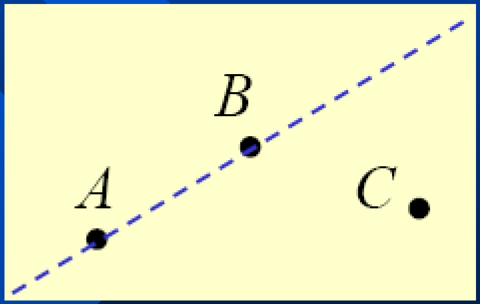
条件：***A、 B*连线不垂直x轴**。

三矩式方程：

$$\sum M_A(F)=0$$

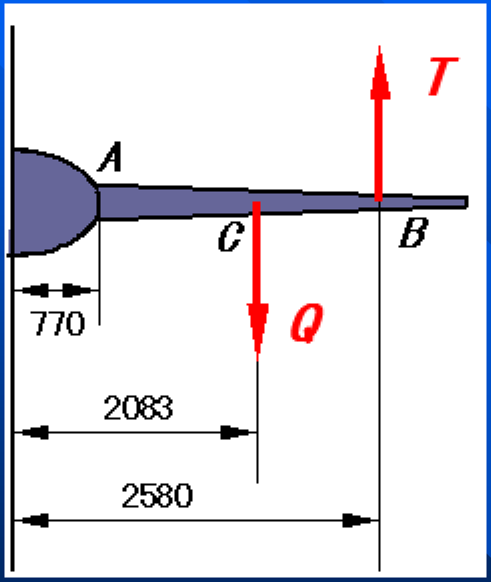
$$\sum M_B(F)=0$$

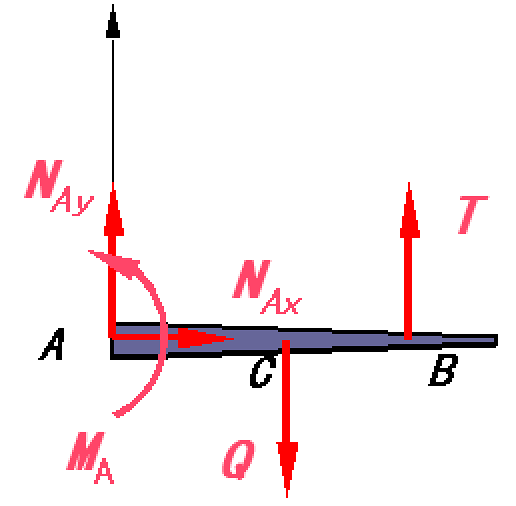
$$\sum M_C(F)=0$$



条件：矩心A、B、C不共线。

例题 某飞机的单支机翼重 Q=7.8 kN。飞机水平匀速直线飞行时，作用在机翼上的升力 T= 27 kN，力的作用线位置如图示。试求机翼与机身连接处的约束力。





解：

1、取机翼为研究对象。

2、受力分析如图.

3、列平衡方程：

$$\sum F_x = 0: \qquad N_{Ax} = 0$$

$$\sum F_y = 0: \qquad N_{Ay} - Q + T = 0$$

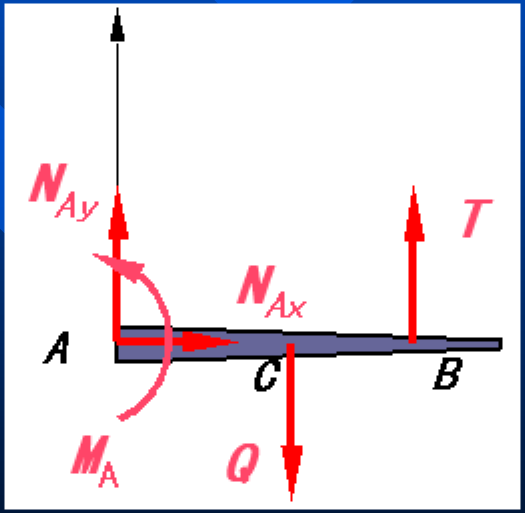
$$\sum m_A(F) = 0: \qquad M_A - Q \cdot AC + T \cdot AB = 0$$

4、求解上式：

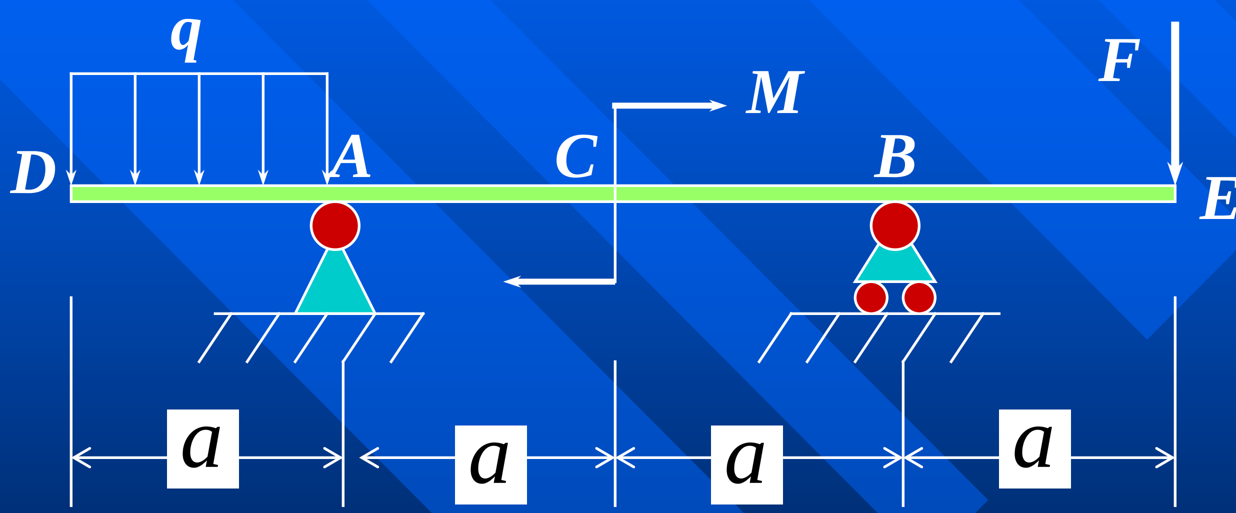
M_A=−38.6 kN•m （顺时针）

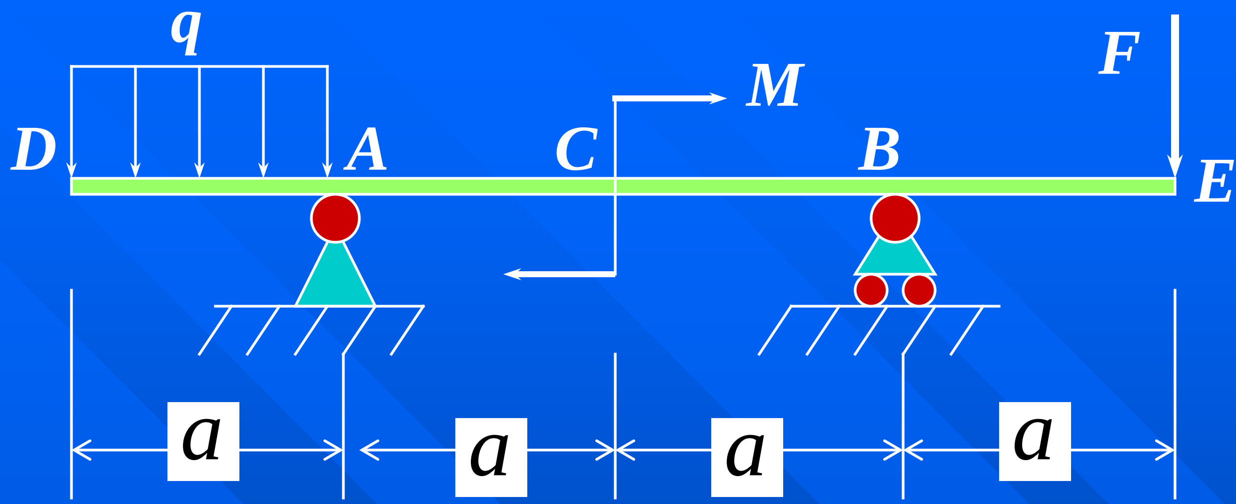
N_{Ax}= 0

N_{Ay}=−19.2 kN （向下）

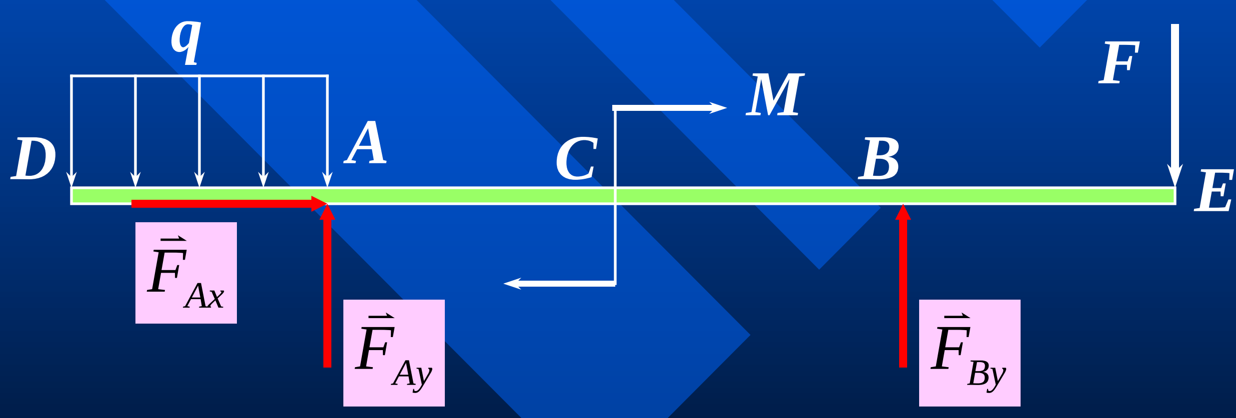


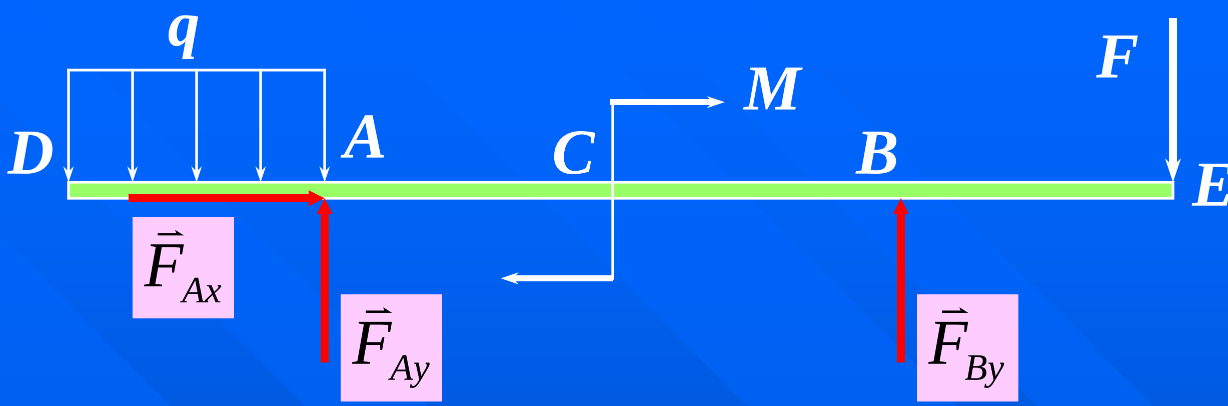
求图示外伸梁支座A、B约束反力。





画约束反力





建立平衡方程

$$\sum M_A = 0 \qquad \frac{1}{2}qa^2 + F_{By}\times 2a - M - F\times 3a = 0$$

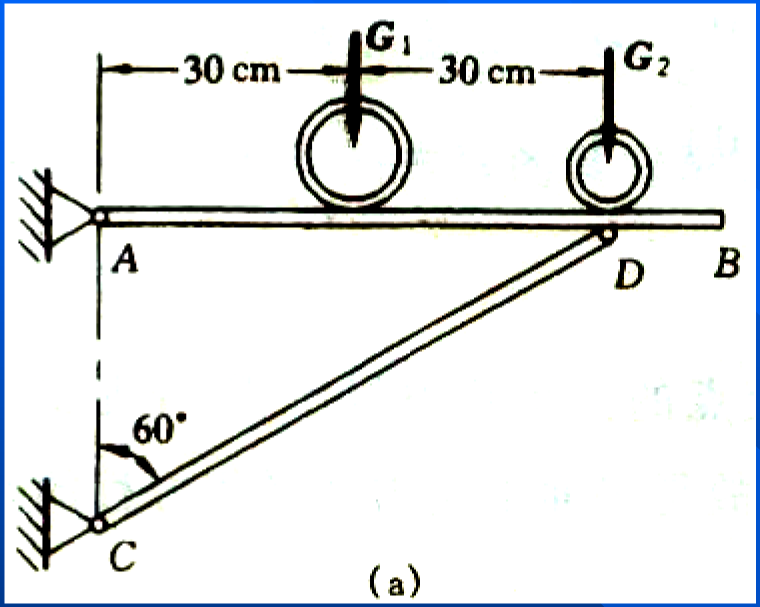
$$\longrightarrow \quad F_{By} = \frac{1}{2}\left(3F + \frac{M}{a} - \frac{1}{2}qa\right)$$

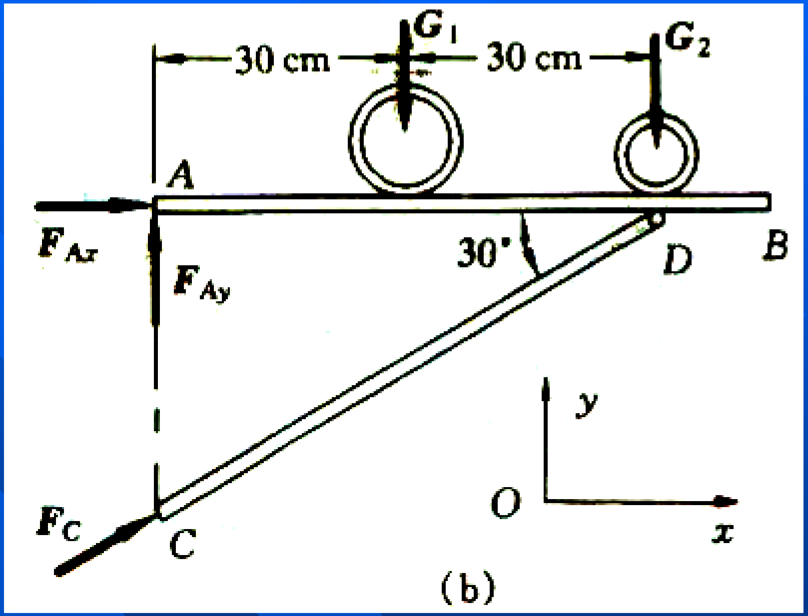
$$\sum X = 0 \quad \longrightarrow \quad F_{Ax} = 0$$

$$\sum Y = 0 \qquad F_{Ay} + F_{By} - F - qa = 0$$

$$\longrightarrow \quad F_{Ay} = -\frac{1}{2}\left(F + \frac{M}{a} - \frac{5}{2}qa\right)$$

例：图示为一管道支架，其上搁有管道，设每一支架所承受的管重G_1=19kN，G_2=14kN，且架重不计。求支座A和C处的约束反力，尺寸如图所示。





$\sum M_A = 0$ $\longrightarrow$ F_C

$\sum M_D = 0$ $\longrightarrow$ F_{Ay}

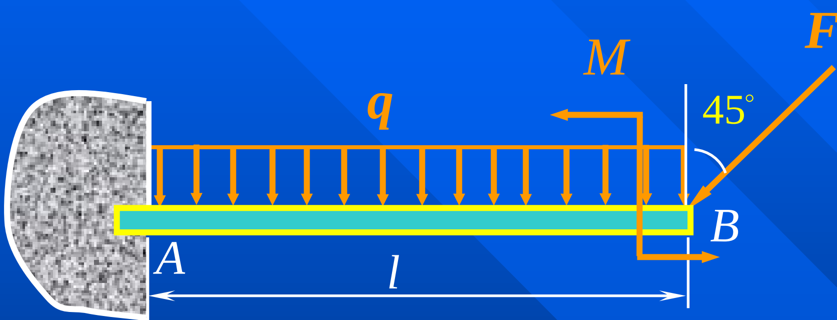
$\sum M_C = 0$ $\longrightarrow$ F_{Ax}

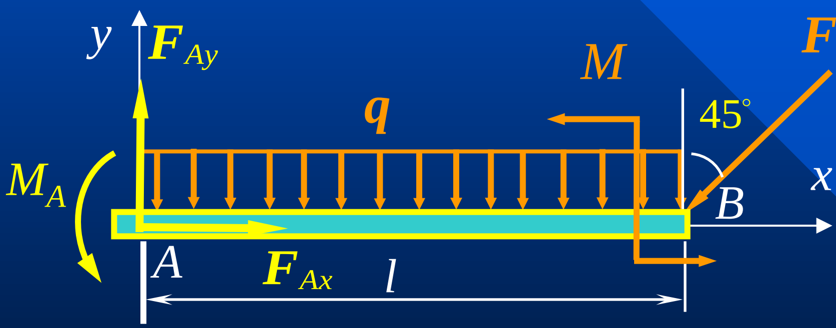
$\sum X = 0$　$\sum Y = 0$

不独立方程，用于校核

例　如图所示为一悬臂梁，*A* 为固定端，设梁上受强度为 q 的均布载荷作用，在自由端 *B* 受一集中力F和一力偶 M 作用，梁的跨度为 l。

求: 固定端的约束力





解:（1）以梁为研究对象，画受力图。

（2）取坐标，列平衡方程

由：$\sum F_x = 0$

$$F_{Ax} - F\sin 45^\circ = 0$$

由：$\sum F_y = 0$

$$F_{Ay} - ql - F\cos 45^\circ = 0$$

由：$\sum M_A(\boldsymbol{F}) = 0$

$$M_A - ql \times \frac{l}{2} - F\cos 45^\circ \times l + M = 0$$

（3）解方程

一个方只包含一未知量，故易得：

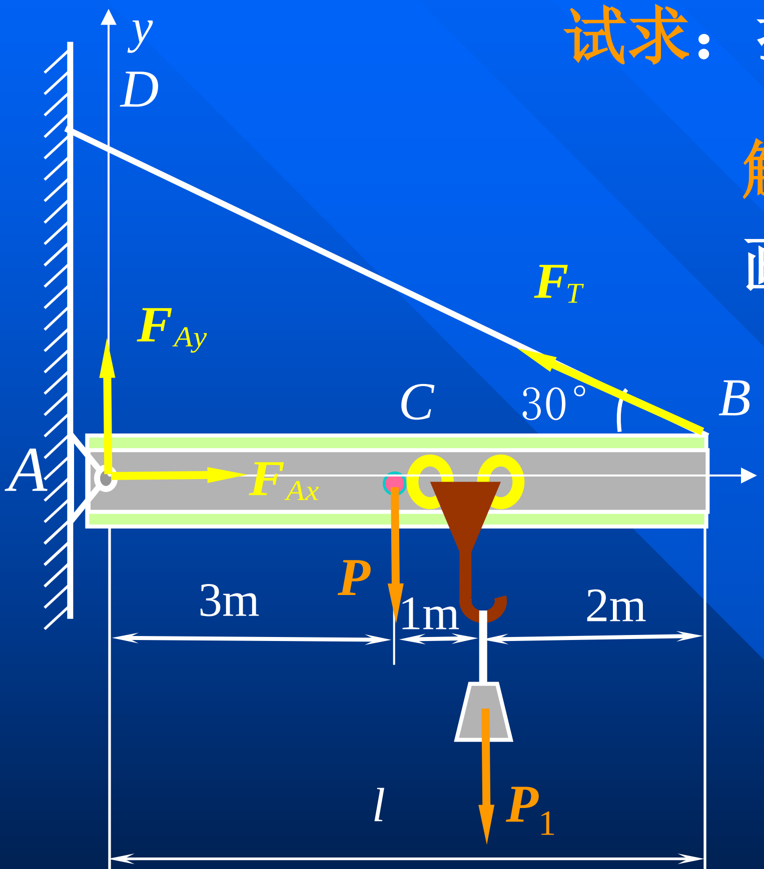
$$F_{Ax} = F\cos 45^{\circ} = 0.707F$$

$$F_{Ay} = ql + 0.707F$$

$$M_A = \frac{1}{2}ql^2 + 0.707Fl - M$$

例　伸臂式起重机，已知匀质梁AB 重P =4kN，吊车连同吊起重物重P_1=10kN。有关尺寸如图。

试求：拉索BD 的拉力及铰链 A 的约束力。



解：取**AB**梁连同重物为研究对象，画受力图。

取坐标，列平衡方程。

由：$\sum X = 0$

$$F_{Ax} - F_T \cos 30^\circ = 0 \qquad (a)$$

由：$\sum Y = 0$

$$F_{Ay} - P - P_1 + F_T \sin 30^\circ = 0 \qquad (b)$$

由：$\sum M_A(F) = 0$　　$6 \cdot F_T \sin 30^\circ - 3P - 4P_1 = 0 \qquad (c)$

三式联立求解，得到：

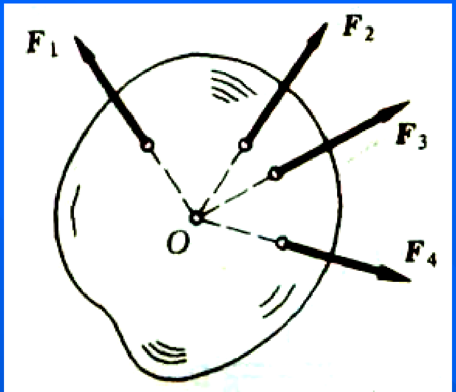
$$F_T = 17.33\text{kN} \qquad F_{Ax} = 15.01\text{kN} \qquad F_{Ay} = 5.33\text{kN}$$

- 结果均为正，表明实际受力方向与假设方向相同。

- 为使平衡方程尽可能包含较少的未知量，避免联立求解，通常将矩心取在两个未知力的交点。

平面任意力系的特例：

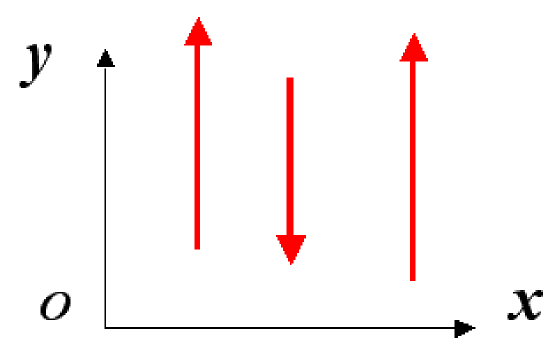
1. 平面汇交力系



$$\sum F_{xi}=0 \qquad \sum F_{yi}=0$$

因此平面汇交力系的平衡问题最多可建立2个独立平衡方程求解2个未知量。

2. 平面平行力系



$$\sum F_{yi}=0 \qquad \sum M_O(F_i)=0$$

因此平面平行力系的平衡问题最多也可建立2个独立平衡方程求解2个未知量。

3. 平面力偶系

平面力偶系主矢恒为零，要使主矩M_O（代数量）为零，应有

$$\Sigma M_i = 0$$

因此平面力偶系的平衡问题最多只可建立1个独立平衡方程求解1个未知量。

各种力系作用下的独立方程数

力系名称	空间任意力系	空间汇交力系	空间平行力系	空间力偶系
独立方程数	6	3	3	3
力系名称	平面任意力系	平面汇交力系	平面平行力系	平面力偶系
独立方程数	3	2	2	1

对于 n 个物体组成的物体（刚体）系统，在平面任意力系作用下，最多可以列出 $3n$ 个独立平衡方程，求解 $3n$ 个未知量。