同济大学 2024 年高等数学竞赛试卷

2024.6

年级____专业__________学号___________姓名______________任课教师__________

题号	一 30 分	二 14 分	三 14 分	四 14 分	五 14 分	六 14 分	总分
得分							

(本试卷共六大题，3 大张，满分 100 分，考试时间为 150 分钟．解答题要求写出解题过程，否则不予计分)

一、填空题（本题 30 分，每小题 6 分，共 5 小题）

(1) 设 $x_n=\dfrac{1}{n^n}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}k^k\right)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=$__________.

(2) 设 $f(x)$ 是可导函数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\cos x)}{x^2}=2$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为______________________.

(3) 不定积分 $I=\displaystyle\int\frac{xe^{\arctan x}}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}\mathrm{d}x=$____________________________.

(4) 设函数 $y=y(x)$ 是微分方程 $y''+y'-2y=0$ 的解，且在 $x=0$ 处 $y(x)$ 取得极值 3，则 $y(x)=$______________________.

(5) 设区域 $\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2+z^2\le 4,x^2+y^2\le 2x,z\ge 0\right\}$，则三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$____.

二、（本题 14 分）设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内二阶可导，且

$$f(0)=f(1)=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

证明:

（1）在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=f(0)$.

（2）在 $(0,1)$ 内至少存在一点 η，使得 $f''(\eta)=f(\eta)-f(0)$.

三、（本题 14 分） 设Σ是下半球面$z=-\sqrt{4-x^2-y^2}$，方向取上侧，求第二型曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

四、（本题 14 分） 设$f(x)$是$[0,2\pi]$上单调减少的连续函数，证明：对任意正整数n成立

$$\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x\geq 0.$$

五、（本题14分）设二元函数$f(x,y)$在全平面上有定义，具有连续的偏导数，且满足

$$x\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+y\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=0.$$

证明：$f(x,y)$为常数.

六、（本题14分）设$\{a_n\}$是递增正数列，且$a_1>1$，p为大于1的常数，证明：级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)\frac{1}{\ln^p a_n}$$

收敛.