同济大学课程考核试卷（期中试卷）
2020—2021 学年第一学期

命题教师签名：　　　　　　　　　　审核教师签名：

课号：122004　　　　课名：高等数学 B(上)　　　　考试考查：考试

此卷选为：期中考试(√)、期终考试(　)、重修(　)试卷

专业__________学号__________姓名__________任课教师__________

题号	一（30 分）	二（30 分）	三（10 分）	四（10 分）	五（10 分）	六（10 分）	总分
得分							

（注意：本试卷共六大题，三大张，满分 100 分．考试时间为 100 分钟.解答题要求写出解题过程）

一、填空与选择题(每小题 3 分，共 30 分)

1. 函数 $f(x)$ 满足 $f\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)=1+\cos x$，则 $f(x)=$__$2-2x^2$__.

2. 数列 $x_n=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{15}+\cdots+\dfrac{1}{4n^2-1}$，则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=$__$\dfrac{1}{2}$__.

3. 设 $x\to 0$ 时，函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}-k\cos x$ 是无穷小，则常数 $k=$__$\dfrac{1}{3}$__.

4. 函数 $y=f\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$，而 $f'(x)=\arctan x^2$，则 $\mathrm{d}y\big|_{x=0}=$__$-\dfrac{\pi}{2}\mathrm{d}x$__.

5. 函数 $f(x)=\dfrac{(1-x)(2-x)\cdots(n-x)}{(1+x)(2+x)\cdots(m+x)}$， m,n 为正整数，则 $f'(1)=$__$-\dfrac{(n-1)!}{(m+1)!}$__.

6. 如果连续函数 $f(x)=(\cos x-2\sin x)^5-2+o(x)$，则 $f'(0)=$__-10__.

7. 曲线 $y=(x-1)^2(x-3)^2$ 的拐点个数为__2__.

8. $x=0$ 是函数 $f(x)=(1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}})^{-1}$ 的　　　　【 C 】

(A) 连续点． (B) 可去间断点． (C) 跳跃间断点． (D) 无穷间断点.

9. 函数 $f(x)=x\mathrm{e}^{\cos x}\sin x$　　　　【 B 】

(A) 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界.　　(B) 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界.

(C) 当 $x\to\infty$ 时为无穷大.　　(D) 当 $x\to\infty$ 时有极限.

10. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义，在开区间 (a,b) 内可导，则　　　　【 D 】

(A) $f(a)<f(b)$ 时，必有 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)>0$.

(B) $f(a)=f(b)$ 时，必有 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$.

(C) 必有 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

(D) 如果 $f(a^+),f(b^-)$ 存在，必有 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(b^-)-f(a^+)=f'(\xi)(b-a)$.

二、计算下列各题(每小题 6 分，共 30 分)

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x+x^2+x^3}-x\right)$.

解：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x+x^2+x^3}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}+1}-1\right)$

$$=\lim_{x\to\infty}x\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}+1\right)=\frac{1}{3}.$$

2. 设 $f(x)=\arcsin\dfrac{1-x}{1+x}\,(x>0)$，求 $f'(x),f''(x)$.

解：$f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^2}}\cdot\dfrac{-2}{(1+x)^2}=-\dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$,

$$f''(x)=\frac{\sqrt{x}+\dfrac{1+x}{2\sqrt{x}}}{\left[(1+x)\sqrt{x}\right]^2}=\frac{1+3x}{2x\sqrt{x}(1+x)^2}\left(=\frac{x^{-\frac{1}{2}}+3x^{\frac{1}{2}}}{2(x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{3}{2}})^2}\right).$$

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases} a+b\ln(1-2x), & x\le 0, \\ e^{3x}+x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x>0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，求常数 a,b.

解：$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，

$$\lim_{x\to 0^-}\left[a+b\ln(1-2x)\right]=\lim_{x\to 0^+}\left(e^{3x}+x^2\sin\frac{1}{x}\right)=a，\ a=1，$$

$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1+b\ln(1-2x)-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{3x}+x^2\sin\frac{1}{x}-1}{x}，\ b=-\frac{3}{2}.$$

4. 设函数 $f(x)=\sin^6 x+\cos^6 x$，试求 $f^{(n)}(x)\ \left(n\ge 1\right)$.

解：$f(x)=(\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x)$

$$=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-3\sin^2 x\cos^2 x=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x$$

$$=\frac{3}{8}\cos 4x+\frac{5}{8}，$$

$$f^{(n)}(x)=\frac{3}{8}4^n\cos(4x+n\frac{\pi}{2}).$$

5. 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $e^{2x+y}-\cos(xy)=e-1$ 确定，求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$；并求曲线 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 所对应点处的法线方程.

解：$x=0$ 代入，解得 $y=1$，

方程两边求导：$e^{2x+y}(2+y')+\sin(xy)(y+xy')=0$，

$(0,1)$ 代入得，$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\left.y'\right|_{x=0}=-2$，

法线方程为 $y-1=\dfrac{1}{2}x$，即 $x-2y+2=0$.

三、(本题 10 分) 设曲线 $y=\left|x-2\right|e^{\frac{1}{x}}$，求该曲线的所有渐近线.

解：$y=\begin{cases} (x-2)e^{\frac{1}{x}}, & x\ge 2, \\ -(x-2)e^{\frac{1}{x}}, & x<2, \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0^+}y=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[-(x-2)e^{\frac{1}{x}}\right]=+\infty$，曲线有垂直渐近线 $x=0$；

$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{(x-2)}{x}e^{\frac{1}{x}}=1$，$\lim\limits_{x\to +\infty}(y-x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left[(x-2)e^{\frac{1}{x}}-x\right]=-1$，

曲线有斜渐近线 $y=x-1$；

$\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-(x-2)}{x}e^{\frac{1}{x}}=-1$，$\lim\limits_{x\to +\infty}(y-x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left[-(x-2)e^{\frac{1}{x}}+x\right]=1$，

曲线有斜渐近线 $y=-x+1$.

四、(本题 10 分) 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=t^3+3t+1, \\ y=t^3-3t+1 \end{cases}$ 确定，求 $y=y(x)$ 的单调区间.

解：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{3t^2-3}{3t^2+3}=\dfrac{t^2-1}{t^2+1}$

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$，$t_1=-1, t_2=1$，$x_1=-3, x_2=5$，

$t\in(-\infty,-1)$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}>0$，$y=y(x)$ 在 $(-\infty,-3]$ 上单调增加，

$t\in(-1,1)$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}<0$，$y=y(x)$ 在 $[-3,5]$ 上单调减少，

$t\in(1,+\infty)$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}>0$，$y=y(x)$ 在 $[5,+\infty)$ 上单调增加.

五 A、(本题 10 分) 证明在 $[0,+\infty)$ 内，函数 $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$ 一致连续；$g(x)=\dfrac{x^3}{x+1}$ 非一致连续.

证：对任意 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon$，$x_1,x_2\in[0,+\infty)$，当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，

$$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|=\left|\frac{x_1{}^2}{1+x_1}-\frac{x_2{}^2}{1+x_2}\right|=\frac{x_1+x_2+x_1x_2}{1+x_2+x_2+x_1x_2}|x_1-x_2|<|x_1-x_2|<\varepsilon,$$

所以 $f(x)$ 一致连续.

取 $x_n=n+\dfrac{1}{n}$，$\overline{x}_n=n$，$g(x_n)>g(\overline{x}_n)$，$x_n-\overline{x}_n=\dfrac{1}{n}\xrightarrow{n\to\infty}0$，

而 $\left|g(x_n)-g(\overline{x}_n)\right|=\dfrac{(n+\frac{1}{n})^3}{n+\frac{1}{n}+1}-\dfrac{n^3}{n+1}\xrightarrow{n\to\infty}2$，所以 $g(x)$ 非一致连续.

五 B、(本题 10 分) 设函数 $f(x)=\ln x-ax\ (a>0)$，分别讨论常数 a 取何值时，(1) $f(x)$ 没有零点；(2) $f(x)$ 有一个零点；(3) $f(x)$ 有两个零点？

解：$f'(x)=\dfrac{1}{x}-a=0$，$x=\dfrac{1}{a}$ 为驻点，

$f(x)$ 在 $(0,\dfrac{1}{a})$ 内单调增加，在 $(\dfrac{1}{a},+\infty)$ 内单调减少，

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty$，$f(\dfrac{1}{a})=-\ln a-1$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$，

(1) $f(\dfrac{1}{a})<0$，即 $a>\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，$f(x)$ 没有零点，

(2) $f(\dfrac{1}{a})=0$，即 $a=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，$f(x)$ 只有一个零点 $x=\mathrm{e}$，

(3) $f(\dfrac{1}{a})>0$，即 $a<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，$f(x)$ 有两个零点.

六、(本题 10 分) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界且二阶可导，$f''(0)>0$，证明：存在 $\xi\in(-\infty,+\infty)$，使得 $f''(\xi)=0$.

证：反证：假设对任意 x，$f''(x)\neq0$，

则任意两点 $x_1\neq x_2$，$f'(x_1)\neq f'(x_2)$.

如果存在 $x_1<x_0<x_2$，$f'(x_0)>f'(x_1)$ 及 $f'(x_0)>f'(x_2)$，

(或 $f'(x_0)<f'(x_1)$ 及 $f'(x_0)<f'(x_2)$)，

则在某一点 $\eta\in(x_1,x_2)$ $f'(\eta)$ 为得最大值(或最小值)，从而 $f''(\eta)=0$. 矛盾.

所以，根据 $f''(0)>0$，$f'(x)$ 单调增加.

不妨设有一点 a 的导数 $f'(a)>0$，则对 $x>a$，存在 $\xi\in(a,x)$，使得

$$f(x)=f(a)+f'(\xi)(x-a)>f(a)+f'(a)(x-a)\xrightarrow{x\to+\infty}+\infty,$$

这与 $f(x)$ 有界矛盾.

所以，存在 $\xi\in(-\infty,+\infty)$，使得 $f''(\xi)=0$.

注：不证明直接由 $f''(x)\neq0$ 得到 $f''(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上大于 0 或者 $f''(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上小于 0，　**扣** 6 分