同济大学课程考核试卷（A 卷）

2023 — 2024 学年第 二 学期

命题教师签名：　　　　　　　　审核教师签名：

课号：　　　　课名：数学分析　　　　考试考查：考试

此卷选为：期中考试(√)、期终考试( )、重考( )试卷

年级____专业__________学号 2353105 姓名 倪南乡 任课教师__________

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

（注意：本试卷共六大题，四大张，满分 100 分．考试时间为 100 分钟。要求写出解题过程，否则不予计分）

一、简答题（20 分）

1. 设正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$发散（$x_n > 0, n = 1,2,\ldots$），证明：必存在发散的正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$使得$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n} = 0$。

$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 发散

2.讨论$S_n(x) = \sin\frac{x}{n}$在$(-\infty, +\infty)$与$[-A, +A](A > 0)$上的一致收敛性。

二、（15 分）求出$\frac{e^x-1}{x}$在$x=0$的幂级数展开，并由此求出$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$。

三、（15 分）将$f(x)=\begin{cases}-1 & 0\le x<\frac{\pi}{2}\\ 2+\frac{x}{\pi} & \frac{\pi}{2}\le x\le\pi\end{cases}$展开为 Fourier 正弦级数，并求出$x=-\frac{5\pi}{2}$该级数收敛的值。

四、(20 分)讨论下列级数的敛散性(包括绝对收敛、条件收敛、发散):

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n+1)x \cdot \cos(n-1)x}{n^p}$

2. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n^p \ln^q n}$

五、（15 分）设$U_n(x),V_n(x)$在区间(a,b)连续，且$|U_n(x)|\le V_n(x)$对一切$n\in N$成立，证明：若$\sum_{n=1}^{\infty} V_n(x)$在$(a,b)$上点态收敛于一个连续函数，则$\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$也必然收敛于一个连续函数。

六、（15 分）证明：函数$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2+1}$在$(0,2\pi)$上有连续的导函数。