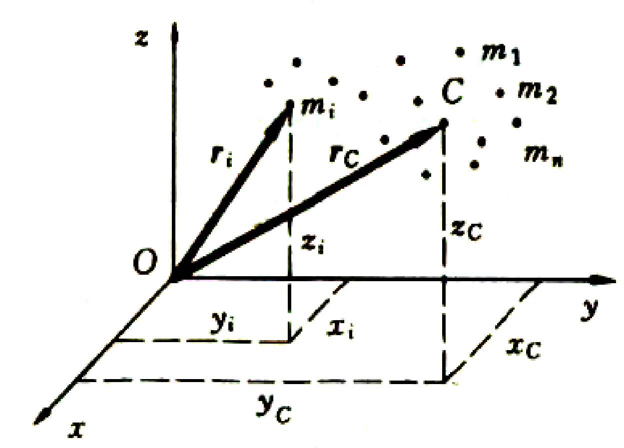
概念：质点系的质心

质点系：有限个或无限个相互联系并组成运动整体的一群质点。

质心：质点系中各质点按其质量在质点系总质量中所占比例分布的平均位置。

设由n个质点所组成的质点系中任一质点的质量为m_i，相对于某一固定点O的矢径为r_i，如图所示。各质点的质量的总和m就是整个质点系的质量，则由矢径r_C所确定的一个几何点C称为该质点系的质量中心，简称质心。



$$\vec{r}_C = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m}$$

将上式投影到直角坐标系的三个轴上，则得质心的坐标为

$$x_C = \frac{\sum m_i x_i}{m} \quad y_C = \frac{\sum m_i y_i}{m} \quad z_C = \frac{\sum m_i z_i}{m}$$

质心： $x_C = \frac{\sum m_i x_i}{m}$ $y_C = \frac{\sum m_i y_i}{m}$ $z_C = \frac{\sum m_i z_i}{m}$

重心： $x_C = \frac{\sum G_i x_i}{G}$ $y_C = \frac{\sum G_i y_i}{G}$ $z_C = \frac{\sum G_i z_i}{G}$

若将式中各式等号右端的分子与分母同乘以重力加速度g，就得到质点系的重心公式。可见，**在地面附近的质点系，其质心与重心重合**。但是质心和重心是不同的概念。质心完全取决于质点系的质量分布情况，而与所受的力无关，它随质点系的存在而存在；重心只在地面附近，质点系受到重力作用时才存在，它是质点系各质点所受重力的合力作用点，失重物体无重心。因此质心概念的适用范围远较重心广泛。

对于地面附近的均质物体，形心、质心、重心合一。

§ 10-3 质心运动定理

设质点系由n个质点组成，其中第i个质点的质量为 m_i，矢径为 ，则质点系的质量中心（质心）C的坐标为

$$\vec{r}_C = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m} \qquad m\vec{r}_C = \sum m_i \vec{r}_i$$

将上式对时间求两次导数

$$m\frac{d\vec{r}_C}{dt} = m\vec{v}_C = \sum m_i \vec{v}_i \qquad m\frac{d\vec{v}_C}{dt} = \frac{d(m\vec{v}_C)}{dt} = m\vec{a}_C = \sum m_i \vec{a}_i$$

质点系的动量可写为

$$\vec{p} = \sum m_i \vec{v}_i = m\vec{v}_C$$

代入动量定理 $\dfrac{d(m\vec{v}_C)}{dt} = \sum \vec{F}_i$ $\Rightarrow$ $\boxed{m\vec{a}_C = \sum m_i\vec{a}_i = \sum \vec{F}_i}$

质点系质量与质心加速度乘积等于作用于质点系上外力主矢量。 ——质心运动定理

$$m\frac{d^2x_C}{dt^2}=\sum F_{ix}^e=F_{Rx}$$

$$m\frac{d^2y_c}{dt^2}=\sum F_{iy}^e=F_{Ry}$$

$$m\frac{d^2z_c}{dt^2}=\sum F_{iz}^e=F_{Rz}$$

质心运动定理的直角坐标投影式

$$m\frac{v_c^2}{\rho}=\sum F_{in}^e$$

$$m\frac{d\ v_c}{dt}=\sum F_{\tau y}^e$$

$$\sum F_b^e=0$$

质心运动定理的自然坐标投影式

刚体系统： $$m\frac{d^2\vec{r}_c}{dt^2}=\sum m_i\frac{d^2\vec{r}_{ci}}{dt^2}$$

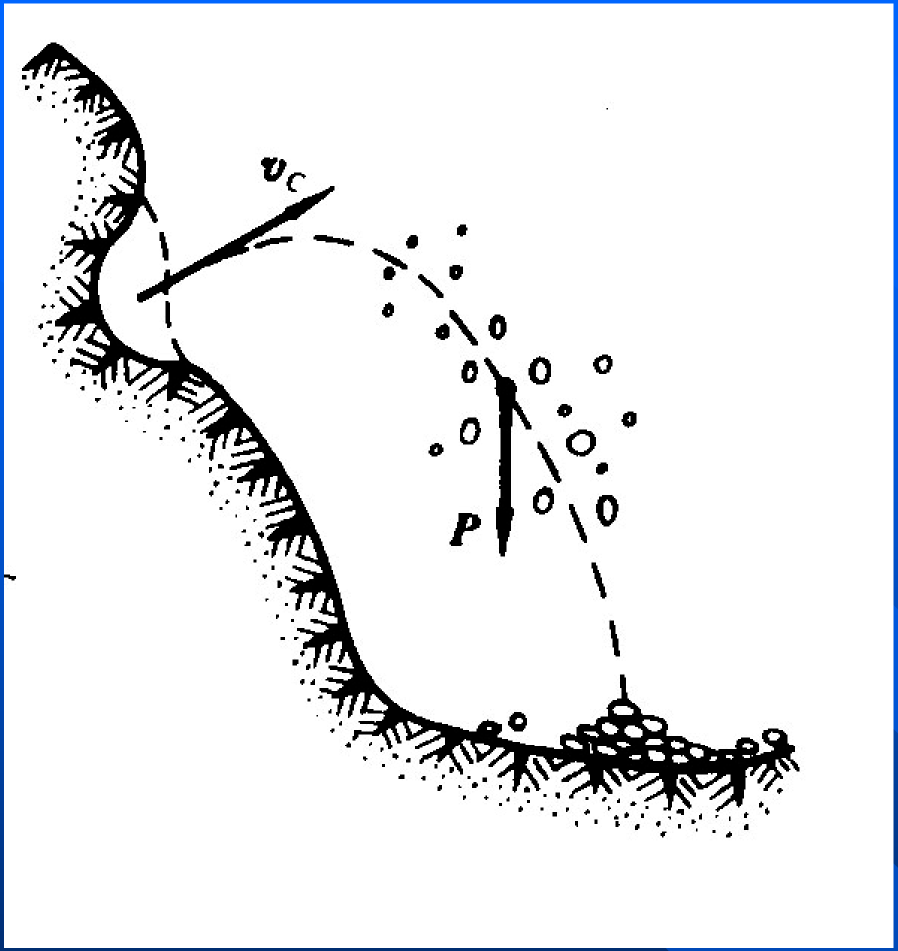
$$\sum m_i\vec{a}_{Ci}=\sum\vec{F}_i^e=\vec{F}_R$$

刚体系统质心运动定理

$$\mathrm{m}\vec{a}_{\mathrm{C}}=\sum\vec{F}_{\mathrm{i}}$$

牛顿第二定律： $$\mathrm{m}\vec{a}=\sum\vec{F}_{\mathrm{i}}$$

物理意义：质点系（刚体）质心的运动可以看成是一个质点的运动，设想此质点集中了整个质点系所有的质量及其所受的外力。



如在定向爆破中，爆破时质点系中各质点的运动轨迹不同，但质心的运动轨迹近似一抛物线，由此可初步估计出大部分物块堆落的地方。

物理意义：质点系（刚体）质心的运动可以看成是一个质点的运动，设想此质点集中了整个质点系所有的质量及其所受的外力。

讨 论

（1）若恒有 $\sum \vec{F}_i = 0$, 则有 $\vec{a}_C = 0$，即

$$\vec{\upsilon}_C = \text{常矢量}$$

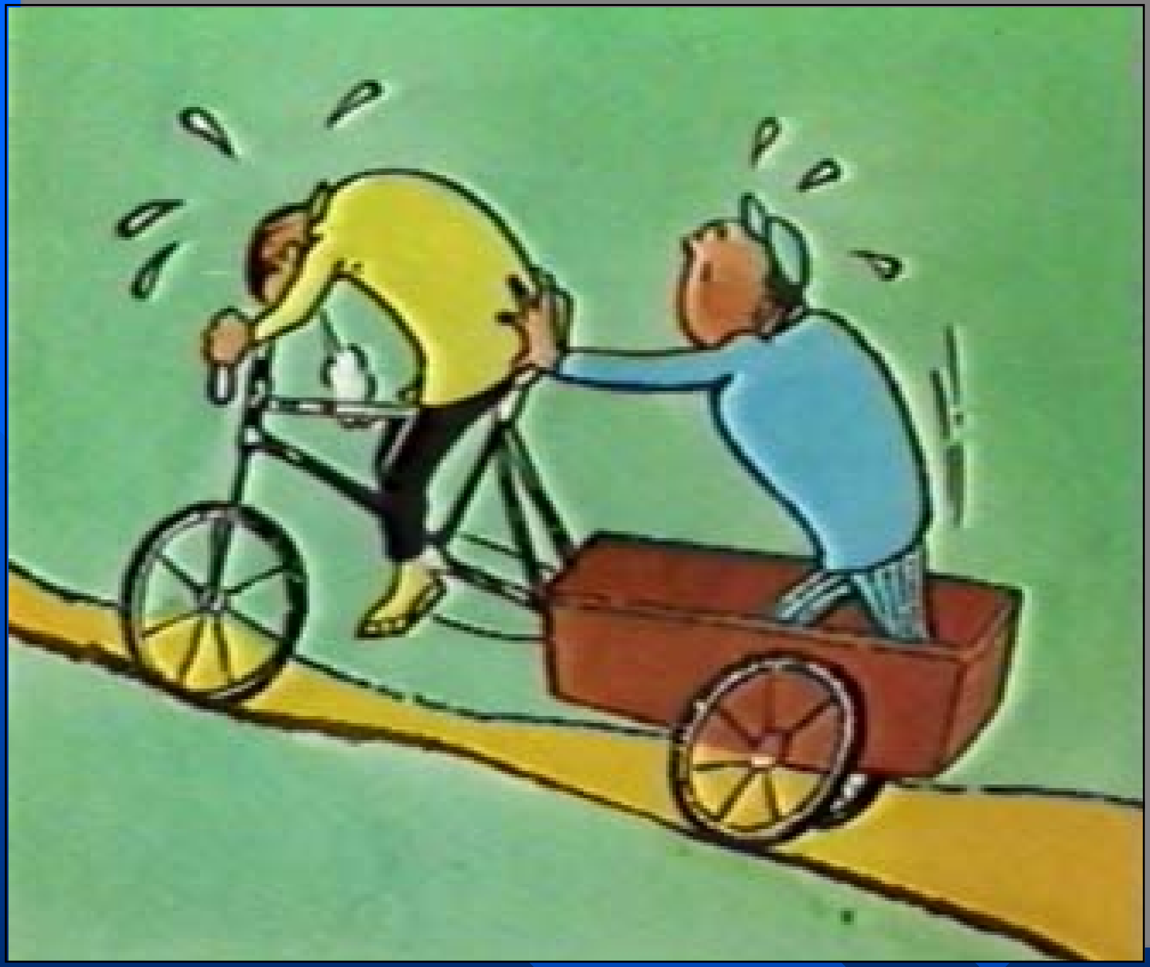
若开始时 $\vec{\upsilon}_C = 0$, 则有 $\vec{r}_C = \text{常矢量}$，即质心的位置不变

（2）若恒有 $\sum F_{xi} = 0$, 则 $\upsilon_{Cx} = \text{常量}$。

若开始时$v_{cx}=0$，则有x_c＝常数，即质心的x轴坐标不变

质心运动守恒定理

结 论： 质点系的内力不影响其质心的运动，只有外力才能使质点系质心的运动发生变化。



结 论： 质点系的内力不影响其质心的运动，只有外力才能使质点系质心的运动发生变化。

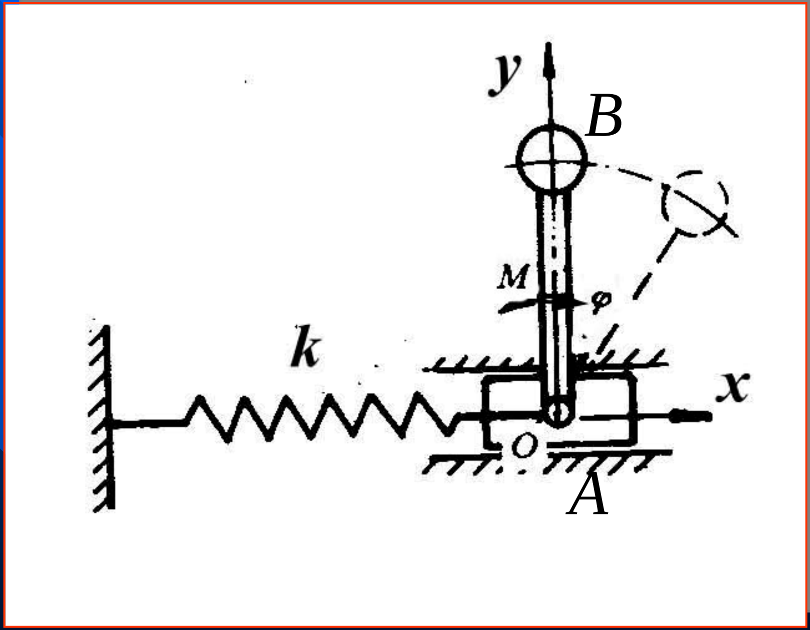
质心运动定理的意义：

质心运动定理在质点系动力学中具有重要意义。当作用于质点系的外力已知时，根据这一定理可确定质心的运动规律。

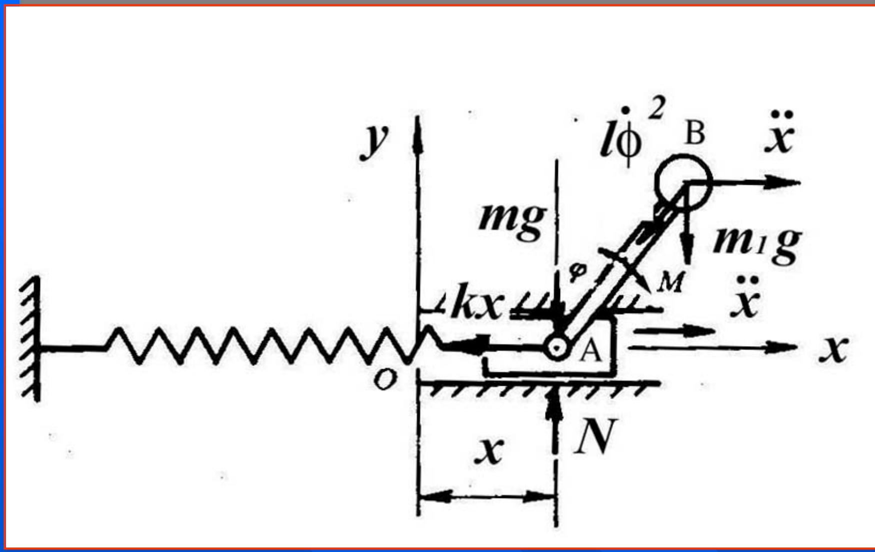
由刚体运动学的知识可知，若将质心取为基点，刚体运动可分为随质心的平移（平动）和相对于质心的转动两部分。若这两部分都已知（质心运动定理可求出其中平移部分的运动规律），刚体上各点的运动规律皆可知。

例 质量为m的滑块A，可以在水平光滑槽中运动，具有弹簧常量为k的弹簧，一端与滑块相连接，另一端固定。杆AB长L，质量忽略不计，A端与滑块铰接，B端装有质量m_1，在铅直面内可绕点A转动，设在力偶M作用下转动角速度ω为常数。如在初瞬时，角$\varphi = 0$，弹簧恰为原长，求滑块A的运动方程。

解：取滑块A、杆AB和质量m_1组成的系统为研究对象，画受力图，建坐标系如图。坐标原点为初瞬时弹簧未伸长时的滑块A所在位置。



解：由质心运动定理



$$\Sigma m_i a_{ix} = \Sigma F_x$$

$$a_{1x} = \ddot{x}$$

$$a_{2x} = (x + l\sin\varphi)''$$

$$a_{2x} = \ddot{x} - l\dot{\varphi}^2\sin\varphi$$

$$\Sigma F_x = -kx$$

$$m\ddot{x} + m_1\left(\ddot{x} - l\dot{\varphi}^2\sin\varphi\right) = -kx$$

$$\therefore\ (m+m_1)\ddot{x} + kx = m_1 l\dot{\varphi}^2\sin\varphi$$

并注意到：

$$\dot{\varphi} = \omega$$

$$t = 0, x = 0, \dot{x} = 0$$

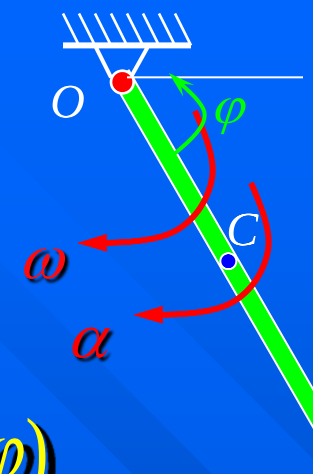
令：$p^2 = \dfrac{k}{m+m_1}$ (称为系统固有频率)

则：$x = \dfrac{m_1 l\omega^2}{(m+m_1)(p^2-\omega^2)}\sin\omega t$

例 题

已知：杆长为 $2l$； m； ω； α

求：转轴 O 处的约束力。



解：取杆为研究对象

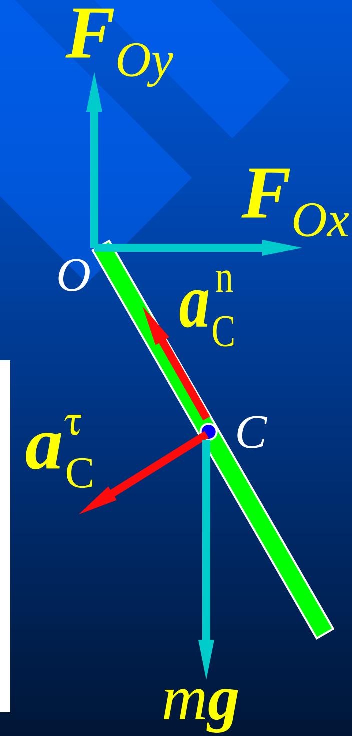
$$a_C^\tau = l\alpha;\ a_C^n = l\omega^2 \text{(运动学原理)}$$

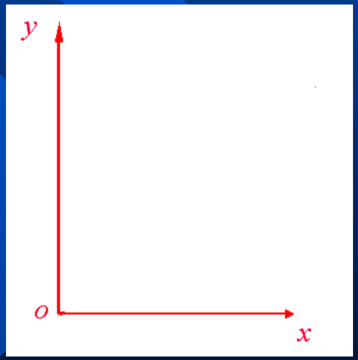
$$a_{Cx} = -a_C^\tau \sin\varphi - a_C^n \cos\varphi = -l(\alpha\sin\varphi + \omega^2\cos\varphi)$$

$$a_{Cy} = -a_C^\tau \cos\varphi + a_C^n \sin\varphi = -l(\alpha\cos\varphi - \omega^2\sin\varphi)$$

$$\sum F_x^{(e)} = F_{Ox} = ma_{Cx}$$

$$\sum F_y^{(e)} = F_{Oy} - mg = ma_{Cy}$$





$$F_{Ox} = -ml(\alpha\sin\phi + \omega^2\cos\phi)$$

$$F_{Oy} = mg - ml(\alpha\cos\phi - \omega^2\sin\phi)$$

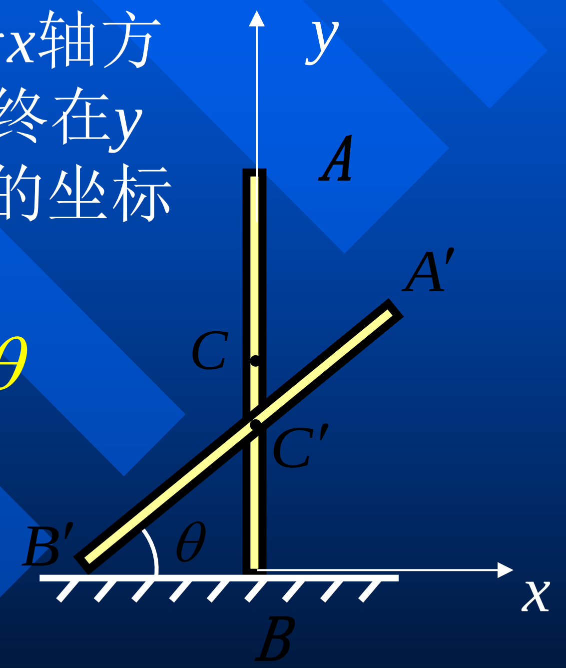
例　如图所示，均质杆AB长为 l ，铅垂地立在光滑的水平面上，求它从铅垂位置无初速度地倒下时，端点A的轨迹。

解：AB杆初始静止，且下落过程中始终有

$$\sum F_x = 0$$

（仅在铅垂方向受重力、地面竖向约束力作用，受力图略）

故水平方向（建直角坐标系如图，即沿x轴方向）质心运动应守恒，质心C位置应始终在y轴上，在任意位置（如图所示），A点的坐标可表示为：



$$x_A = \frac{l}{2}\cos\theta \qquad y_A = l\sin\theta$$

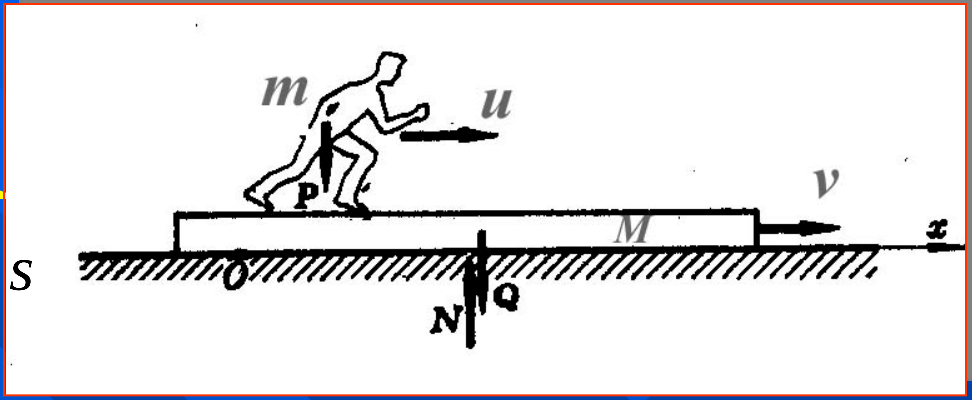
消去 θ，得轨迹方程：

$$4x_A^2 + y_A^2 = l^2$$

即A点的轨迹为椭圆（的一部分）。

例　一匀质木板放在光滑的水平面上，板的一端站着1人。在某一时刻，人以相对于板的速度u沿板向x轴正向运动。试求人的绝对速度v_1与板的绝对速度v。设板的质量为M，人的质量为m（初始人与板均静止）．

解：取人和板为研究对象，水平方向系统合力为零，水平方向系统动量守恒。

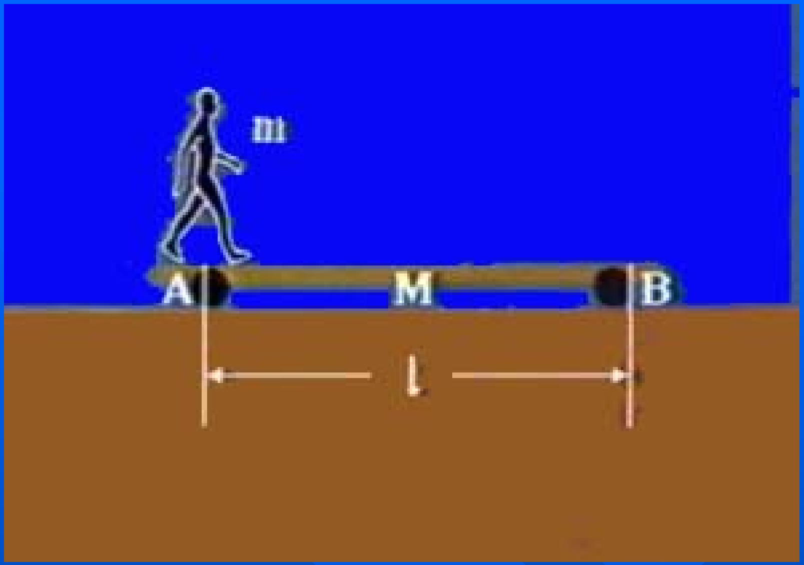


$$M\ v+m(v+u)=p_{x0}=0$$

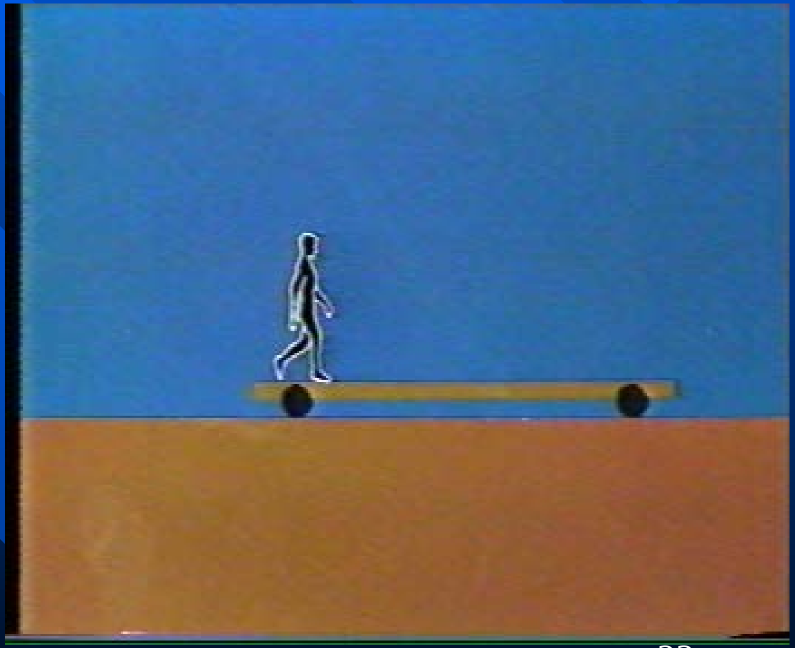
$$v=-\frac{m}{m+M}u$$

$$v_1=v+u=-\frac{m}{m+M}u+u=\frac{M}{m+M}u$$

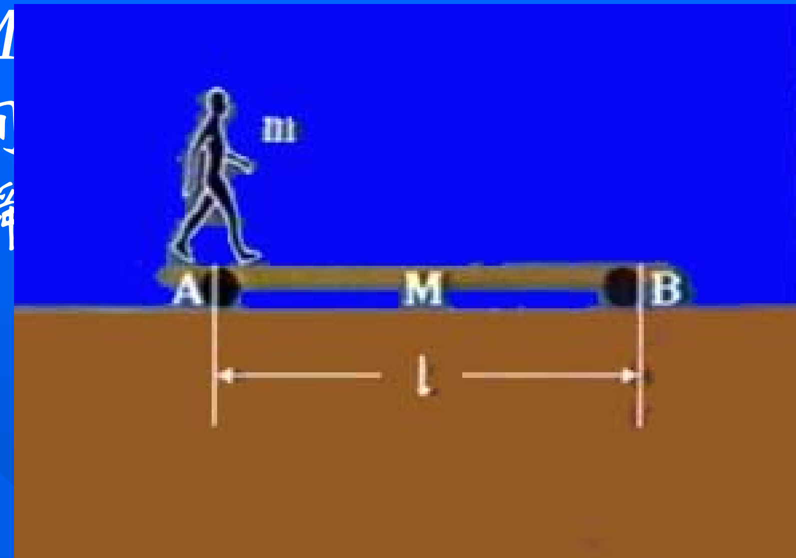
- 例 今有长$AB=l$，质量为M的小车，假设车轮与地面间的摩擦力可忽略不计，初瞬时人车均静止。求当人从A点走到B点时，车移动距离。



解：取人和小车为研究对象，因水平方向系统合力为零，且$V_{C0}=0$，所以水平方向质心位置守恒。



- 例4 今有长$AB=l$，质量为M的小车，假设车轮与地面间的摩擦力可忽略不计，初瞬时人车静止。求当人从A点走到B点时，车移动距离。



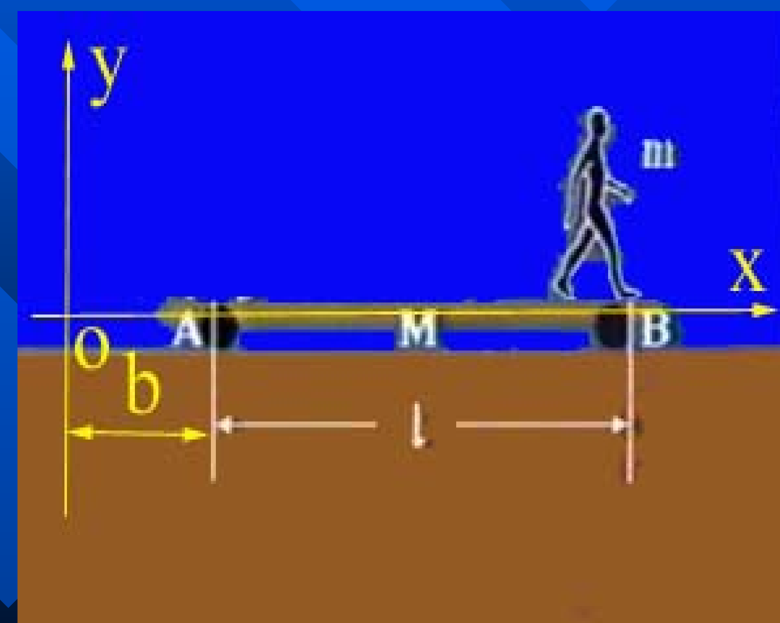
解：建立图示坐标系，假设初瞬时坐标原点O与A点重合。假设当人从A点走到B点时，车向右移动距离为b。

$$x_C = \frac{\sum G_i x_i}{G}$$

$$x_{C1} = \frac{M\ l/2}{m+M}$$

$$x_C = \frac{\sum m_i x_i}{m}$$

$$x_{C2} = \frac{M\ (l/2+b)+m(l+b)}{m+M}$$



令以上两式相等，

$$b = -\frac{ml}{m+M}$$