同济大学 2024 年高等数学竞赛试卷答案

2024.6

年级____专业__________学号___________姓名______________任课教师__________

题号	一 30 分	二 14 分	三 14 分	四 14 分	五 14 分	六 14 分	总分
得分							

(本试卷共六大题，3 大张，满分 100 分，考试时间为 150 分钟．解答题要求写出解题过程，否则不予计分)

一、填空题（本题 30 分，每小题 6 分，共 5 小题）

(1) 设 $x_n=\dfrac{1}{n^n}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}k^k\right)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=$ ___1___.

(2) 设 $f(x)$ 是可导函数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\cos x)}{x^2}=2$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为

_____ $y=-4(x-1)$ ____.

(3) 不定积分 $I=\displaystyle\int\frac{xe^{\arctan x}}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}\mathrm{d}x=$ ___ $\dfrac{x-1}{2\sqrt{1+x^2}}e^{\arctan x}+C$ ______.

(4) 设函数 $y=y(x)$ 是微分方程 $y''+y'-2y=0$ 的解, 且在 $x=0$ 处 $y(x)$ 取得极值 3, 则 $y(x)=$

_____ $2e^{x}+e^{-2x}$ _____.

(5) 设区域 $\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2+z^2\le 4,x^2+y^2\le 2x,z\ge 0\right\}$，则三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\_\dfrac{5}{4}\pi$.

二、（本题 14 分）设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内二阶可导，且

$$f(0)=f(1)=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

证明:

（1）在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=f(0)$.

（2）在 $(0,1)$ 内至少存在一点 η，使得 $f''(\eta)=f(\eta)-f(0)$.

证 （1）不妨假定 $f(0)=0$，否则考察函数 $g(x)=f(x)-f(0)$.

令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，由题意 $F(0)=F(1)=0$，

由 Rolle 定理，存在 $\xi\in(0,1)$，使得

$$F'(\xi)=0\text{，即 }f(\xi)=0.$$

（2）令 $G(x)=e^{-x}f(x)$，则 $G(0)=G(\xi)=G(1)=0$，且 $G'(x)=e^{-x}\left(f'(x)-f(x)\right)$，

由 Rolle 定理，存在 $\xi_1\in(0,\xi)$ 和 $\xi_2\in(\xi,1)$，使得

$$G'(\xi_1)=G'(\xi_2)=0\text{，即 }f'(\xi_1)=f(\xi_1),f'(\xi_2)=f(\xi_2).$$

令 $H(x)=e^{x}\left(f'(x)-f(x)\right)$，则 $H(\xi_1)=H(\xi_2)=0$，且 $H'(x)=e^{x}\left(f''(x)-f(x)\right)$，

由 Rolle 定理，存在 $\eta\in(\xi_1,\xi_2)$，使得

$$H'(\eta)=0\text{，即 }f''(\eta)=f(\eta).$$

三、（本题 14 分）设Σ是下半球面$z=-\sqrt{4-x^2-y^2}$，方向取上侧，求第二型曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

解 补充曲面$\Sigma_1: z=0, x^2+y^2\le 4$，方向取下侧，设$\Omega$是$\Sigma+\Sigma_1$所围的空间区域，

由 Gauss 公式，

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma+\Sigma_1}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=-\iiint_{\Omega}(2z+3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=-16\pi-2\iiint_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=-16\pi-2\pi\int_{-2}^{0}z\left(4-z^2\right)\mathrm{d}z=-8\pi,\end{aligned}$$

于是

$$\iint_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-8\pi-\iint_{\Sigma_1}1\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-4\pi,$$

从而

$$I=\frac{1}{2}\iint_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\pi.$$

四、（本题 14 分）设$f(x)$是$[0,2\pi]$上单调减少的连续函数，证明：对任意正整数n成立

$$\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x\ge 0.$$

证 令$t=nx$，则有

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x&=\frac{1}{n}\int_0^{2n\pi}f\left(\frac{t}{n}\right)\sin t\mathrm{d}t=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_{2(k-1)\pi}^{2k\pi}f\left(\frac{t}{n}\right)\sin t\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{2(k-1)\pi}^{(2k-1)\pi}f\left(\frac{t}{n}\right)\sin t\mathrm{d}t+\int_{(2k-1)\pi}^{2k\pi}f\left(\frac{t}{n}\right)\sin t\mathrm{d}t\right).\end{aligned}$$

在$\int_{2(k-1)\pi}^{(2k-1)\pi}f\left(\frac{t}{n}\right)\sin t\mathrm{d}t$与$\int_{(2k-1)\pi}^{2k\pi}f\left(\frac{t}{n}\right)\sin t\mathrm{d}t$中，分别令$u=t-2(k-1)\pi$与

$u=t-(2k-1)\pi$，得到

$$\int_{2(k-1)\pi}^{(2k-1)\pi}f\left(\frac{t}{n}\right)\sin t\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}f\left(\frac{u+2(k-1)\pi}{n}\right)\sin u\mathrm{d}u,$$

$$\int_{(2k-1)\pi}^{2k\pi}f\left(\frac{t}{n}\right)\sin t\mathrm{d}t=-\int_0^{\pi}f\left(\frac{u+(2k-1)\pi}{n}\right)\sin u\mathrm{d}u.$$

由于$f(x)$在$[0,2\pi]$上单调减少，$\sin u$在$[0,\pi]$上非负，所以

$$\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi}\left(f\left(\frac{u+2(k-1)\pi}{n}\right)-f\left(\frac{u+(2k-1)\pi}{n}\right)\right)\sin u\mathrm{d}u\ge 0.$$

五、（本题 14 分） 设二元函数 $f(x,y)$ 在全平面上有定义，具有连续的偏导数，且满足

$$x\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+y\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=0.$$

证明： $f(x,y)$ 为常数.

证 对平面上任意的 (x,y)，作辅助函数

$$\varphi(t)=f(tx,ty),$$

这是定义在 $[0,1]$ 上的一元函数. 由已知条件及多元复合函数的求导法则， $\varphi(t)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且

$$\varphi'(t)=xf_x(tx,ty)+yf_y(tx,ty).$$

由 Lagrange 中值定理，存在 $\theta\in(0,1)$，使得

$$\begin{aligned}f(x,y)-f(0,0)&=\varphi(1)-\varphi(0)=\varphi'(\theta)\\&=xf_x(\theta x,\theta y)+yf_y(\theta x,\theta y)\\&=\frac{1}{\theta}\left[\theta xf_x(\theta x,\theta y)+\theta yf_y(\theta x,\theta y)\right]=0,\end{aligned}$$

即 $f(x,y)=f(0,0)$. 因为 (x,y) 是任意的，所以 $f(x,y)$ 为常数.

六、（本题 14 分） 设 $\{a_n\}$ 是递增正数列，且 $a_1>1$， p 为大于 1 的常数，证明：级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)\frac{1}{\ln^p a_n}$$

收敛.

证 由已知条件知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)\frac{1}{\ln^p a_n}$ 是正项级数. 令

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{a_k}{a_{k+1}}\right)\frac{1}{\ln^p a_k},T_n=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{a_k}{a_{k+1}}\right)\frac{1}{\ln^p a_{k+1}},$$

因为 $p>1$ 以及

$$\left(1-\frac{a_k}{a_{k+1}}\right)\frac{1}{\ln^p a_{k+1}}=\frac{a_{k+1}-a_k}{a_{k+1}\ln^p a_{k+1}}\le\int_{a_k}^{a_{k+1}}\frac{1}{x\ln^p x}\mathrm{d}x,$$

所以得到

$$T_n\le\sum_{k=1}^{n}\int_{a_k}^{a_{k+1}}\frac{1}{x\ln^p x}\mathrm{d}x=\int_{a_1}^{a_{n+1}}\frac{1}{x\ln^p x}\mathrm{d}x\le\int_{a_1}^{+\infty}\frac{1}{x\ln^p x}\mathrm{d}x=\frac{1}{p-1}\ln^{1-p}a_1.$$

又因为

$$\begin{aligned}S_n-T_n&=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{a_k}{a_{k+1}}\right)\left(\frac{1}{\ln^p a_k}-\frac{1}{\ln^p a_{k+1}}\right)\\&\le\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\ln^p a_k}-\frac{1}{\ln^p a_{k+1}}\right)<\frac{1}{\ln^p a_1}.\end{aligned}$$

由此知 $S_n\le\frac{1}{p-1}\ln^{1-p}a_1+\frac{1}{\ln^p a_1}$，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)\frac{1}{\ln^p a_n}$ 收敛.