2018-2019 学年第二学期期末考试 A 卷

一、填空题

1、设A,B均为n阶正交矩阵，若$|A|=1,|B|=-1$，则$|B+A|=$______

2、设$D=\begin{vmatrix}3&3&7\\2&2&6\\8&x&y\end{vmatrix}$，若$D$的代数余子式满足$A_{11}+A_{12}+A_{13}=4$,则$x=$

3、设A,B均为n阶方阵，若A和B的秩分别为r和n,则$R(AB)-R(A)=$______

4、设A为n阶实对称矩阵，二次型$f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX$，通过正交变换$X=PY$，可化为标准型$y_1^2-y_2^2+2y_3^2$，设A^*是A的伴随矩阵，则$|2A^{-1}-A^*|=$______

5、若矩阵$A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&1&x\end{pmatrix}$与$B=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&1&2\\3&3&1\end{pmatrix}$等价，则$X=$______

6、设n阶方阵$A(a_{ij})$，把A中每个元素a_{ij}都换到第$n-i+1$行，第列$n-i+1$的位置上，得到方阵B.若$|A|=m$，则$|B|=$______

7、设α_1，α_2，α_3是其次线性方程组$Ax=0$的基础解系，则______也是它的基础解系

A、α_1，α_2，α_3任一个等价向量组　　B、α_1，α_2，α_3任一个等秩向量组

C、$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3-\alpha_1$　　D、$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2-\alpha_3$，$\alpha_3-\alpha_1$

8、设AB均为n阶实对称矩阵，则下列四个命题中正确的是（　　）

（1）A与B相似，$\Longleftrightarrow |\lambda E_n-A|=|\lambda E_n-B|$

（2）n元二次型X^TAx和X^TBx有相同规范形$\Longleftrightarrow |\lambda E_n-A|=|\lambda E_n-B|$

（3）若A和B相似，则A和B合同　　（4）若A和B合同，则A和B相似

A、(1)(2)　　B、(2)(3)　　C、(1)(3)　　D、(1)(4)

9、设n维向量组S_1、S_2和$S_1\cup S_2$的秩依次为r,s,t，则（　　）

A、$t\geqslant r+s$　　B、$t\leqslant r+s$　　C、$t=r+s$　　D、不确定

10、$m\times n$矩阵A的秩等于n是非齐次线性方程组$Ax=\beta$有唯一解的（　　）

A、充分必要条件　B、充分非必要条件　C、必要非充分条件　D、非充分非必要条件

二、设$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，且满足$A^*x=A^{-1}+2x$，求矩阵$x$

三、已知向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -9 \\ 3-2a \end{pmatrix}$线性相关，求$a$的值，$\alpha_4$能否由$\alpha_1\alpha_2\alpha_3$线性表示，请写出表达式

四、已知线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-1 \\ 4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1 \\ ax_1+x_2+3x_3+bx_4=1 \end{cases}$有三个线性无关解

（1）求方程组系数矩阵的秩

（2）求a,b及方程组通解

五、设三次型$f(x_1,x_2,x_3)=X^TAx=ax_1{}^2+2x_2{}^2-2x_3{}^2+2bx_1x_3\,(b>0)$，已知二次型矩阵A所有特征值之和为1，之积为-12，

（1）求a,b

（2）利用正交变换将其代为标准形，并写出标准形和所用正交变换的正交矩阵

六、在次数不超过n的实系数多项式关于通常的多项式加法及数乘多项式乘法下所成的线性空间

$V=R[x]_n$中定义变换$T=T(f(x))=f(x+1)-f(x),\forall f(x)\in R[x]_n$，已知

$B=\left\{\alpha_1=1,\alpha_2=x,\cdots,\alpha_{n+1}=\dfrac{1}{n!}x(x-1)\cdots(x-n+1)\right\}$是$V$的一个基，

（1）证明T是V的一个线性变换

（2）求T在B这组基下的矩阵

七、设A是n阶可逆实对称矩阵，B是n阶实反对称矩阵（即$B^T=-B$）且$AB=BA$，证明：

（1）$A^{-1}B$是反对称矩阵

（2）$A+B$是可逆矩阵

2018-2019 学年第二学期期末考试 A 卷参考答案

一、填空选择题

1、【正解】0

【学解】$|A+B|=|A^T+B^T|=|A^{-1}+B^{-1}|=|A^{-1}(A+B)(B^{-1})|=|A^{-1}||A+B||B^{-1}|$

$|A+B|\dfrac{1}{|A||B|}=-|A+B|$,故$|A+B|=0$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 10——向量的概念与运算

2、【正解】7

【学解】$A_{11}+A_{12}+A_{13}=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&2&6\\8&x&y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&0&4\\0&x-8&y-8\end{vmatrix}=-4\begin{vmatrix}1&1\\0&x-8\end{vmatrix}=4(8-x)=4$

解得$x=7$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 2——行列式的展开

3、【正解】0

【学解】由$R(A)=r\leqslant n$，$R(A)\geqslant R(AB)\geqslant R(A)+R(B)-n=R(A)$，故$R(AB)=R(A)$

因此$R(AB)-R(A)=0$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 9——矩阵的秩和矩阵等价

4、【正解】-32

【学解】由题可知矩阵A的特征值分别为$1,-1,2$，则A^*特征值为$\dfrac{|A|}{\lambda}$,即$-2,2,-1$，而A^{-1}特征值则为$\dfrac{1}{\lambda}$，即$1,-1,\dfrac{1}{2}$，故$2A^{-1}-A^*$特征值为$4,-4,2$，故

$|2A^{-1}-A^*|=4\cdot(-4)\cdot2=-32$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 19——特征值与特征向量

5、【正解】0

【学解】若矩阵等价，则矩阵的秩相同，$r(B)=r\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&1&2\\3&3&1\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&-3&4\\0&-3&4\end{pmatrix}=2$

故$r(A)=2\Rightarrow|A|=\begin{vmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&1&x\end{vmatrix}=x\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}=0$，故$x=0$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 9——矩阵的秩和矩阵等价

6、【正解】m

【学解】$B=\begin{pmatrix}&&&1\\&&1&\\&\cdot^{\cdot^{\cdot}}&&\\1&&&\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}&&&1\\&&1&\\&\cdot^{\cdot^{\cdot}}&&\\1&&&\end{pmatrix}$，故$|B|=\begin{vmatrix}&&&1\\&&1&\\&\cdot^{\cdot^{\cdot}}&&\\1&&&\end{vmatrix}^2|A|=m$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 4——矩阵的概念和基本运算

7、【正解】D

【学解】$(\alpha_1+\alpha_2\ \ \alpha_2-\alpha_3\ \ \alpha_3-\alpha_1)=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3)$，$\begin{vmatrix}1&0&-1\\1&1&0\\0&-1&1\end{vmatrix}\neq0$

$\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$可逆，故$(\alpha_1+\alpha_2\ \ \alpha_2-\alpha_3\ \ \alpha_3-\alpha_1)$也是基础解系

【考点延伸】《考试宝典》知识点 16——齐次线性方程组

8、【正解】C

【学解】若两矩阵相似，则特征值相同，故$|\lambda E_n-A|=|\lambda E_n-B|$，则（1）正确

两矩阵相似，特征值相同，则规范性的正负惯性系数相同，故必合同

【考点延伸】《考试宝典》知识点 23——矩阵的合同

9、【正解】B

【学解】$r(s_1|s_2)\leqslant r(s_1)+r(s_2)$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 9——矩阵的秩和矩阵等价

10、【正解】C

【学解】非齐次线性方程组有唯一解的充分必要条件是系数矩阵和增广矩阵的秩相等且等于n

【考点延伸】《考试宝典》知识点 17——非齐次线性方程组

二、【学解】$A^{x}X=A^{-1}+2X$

$$|A|A^{-1}X=A^{-1}+2X$$

$$|A|X=E+2AX$$

$$(|A|E-2A)X=E$$

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 0\end{vmatrix}=4$$

$$X=(|A|E-2A)^{-1}=(4E-2A)^{-1}$$

$$(4E-2A)=\begin{pmatrix}2 & -2 & 2\\ 2 & 2 & -2\\ -2 & 2 & 2\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0\\ -2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}0 & -2 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4}\end{pmatrix}\qquad\therefore X=(XE-2A)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0\\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 4——矩阵的概念和基本运算

三、【学解】$(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3\ \ \alpha_4)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & 3\\ 1 & 3 & 1 & 7\\ 1 & -5 & 10 & -9\\ 3 & -1 & 15 & 3-2a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & 3\\ 0 & 2 & -2 & 4\\ 0 & -6 & 7 & -12\\ 0 & -4 & 6 & -2a-6\end{pmatrix}$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&3&3\\0&2&-2&4\\0&0&1&0\\0&0&2&2-2a\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&0&3\\0&1&0&2\\0&0&1&0\\0&0&0&2-2a\end{pmatrix}$$

由于线性相关，故$2-2a=0$，$a=1$，α_4可由α_1，α_2，α_3线性表示

$\alpha_4=\alpha_1+2\alpha_2$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 11——向量组的线性相关和线性表示

四、【学解】（1）系数矩阵$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\4&3&5&-1\\a&1&3&b\end{pmatrix}$，向量$\beta=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$

$AX=\beta$，$X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}$，有三线性无关解，则$r(A)=2$

（2）$A\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-1&1&-5\\0&1-a&3-a&b-a\end{pmatrix}$，若$r(A)=2$，则$\dfrac{1-a}{-1}=\dfrac{3-a}{1}=\dfrac{b-a}{-5}$

$\Rightarrow a=2,b=-3$

$$(A|b)\rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&-1\\4&3&5&-1&-1\\2&1&3&-3&1\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&-1\\0&-1&1&-5&3\\0&-1&1&-5&3\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&-1\\0&-1&1&-5&3\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

则运行为$X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=k_1\begin{bmatrix}-2\\1\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}4\\-5\\0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-4\\0\\3\\0\end{bmatrix}\quad k_1,k_2\in R$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 17——非齐次线性方程组

五、【学解】$f(x_1,x_2,x_3)=[x_1\ \ x_2\ \ x_3]\begin{bmatrix}a&0&b\\0&2&0\\b&0&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=X^TAX$

（1）由$a+2+(-2)=1$，故：$a=1$

$$A=\begin{vmatrix}1&0&b\\0&2&0\\b&0&-2\end{vmatrix}=-4-2b^2=-12$$，又$b>0$，故：$b=2$

（2）$A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&0\\2&0&-2\end{pmatrix}$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&-2\\0&\lambda-2&0\\-2&0&\lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda-2)[(\lambda-1)(\lambda+2)-4]=(\lambda-2)^2(\lambda+3)$$

$\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=-3$

$$(2E-A)=\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&0&0\\-2&0&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$取单位正交特征向量

$$\eta_1=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix},\ \eta_2=\frac{1}{\sqrt{30}}\begin{bmatrix}2\\-5\\1\end{bmatrix}$$

$$(-3E-A)=\begin{pmatrix}-4&0&2\\0&-5&0\\-2&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-2&0&-1\\0&-5&0\\0&0&0\end{pmatrix}\qquad \eta_3=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1\\0\\-2\end{bmatrix}$$

$$Q=[\eta_1\ \ \eta_2\ \ \eta_3]=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{30}}&\frac{1}{\sqrt{5}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{-5}{\sqrt{30}}&0\\\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{30}}&-\frac{2}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}$$ $Q^T=Q^{-1}$，故$X=QY$，$Y=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$

$$f=X^TAX=Y^TQ^TAQY=2y_1{}^2+2y_1{}^2-3y_3{}^2$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 22——二次型

六、【学解】(1) $T(f(x))=f(x+1)-f(x)$

$T(f(y))=f(y+1)-f(y)$

而$T(f(x)+f(y))=f(x+1)+f(y+1)-f(x)-f(y)=T(f(x))+T(f(y))$

$T(kf(x))=kf(x+1)-kf(x)=kT(f(x))$，故$T$是$V$的一个线性变换

(2) 有$T(a_1)=1-1=0$，$T(a_2)=(x+1)-x=1=a_1$，$T(a_3)=\frac{(x+1)x}{2!}-\frac{x(x-1)}{2!}$

$=x=a_2$，…，$T(a_{n+1})=a_n$，故在B这组基下的矩阵为$\begin{pmatrix}0&1&0&0&\cdots&0\\0&0&1&0&\cdots&0\\0&0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&0&\cdots&1\\0&0&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}$.

【考点延伸】《考试宝典》知识点 15——向量空间

七、【学解】(1) $(A^{-1}B)^T=B^T(A^{-1})^T=-B(A^T)^{-1}=-BA^{-1}$

$AB=BA\to B=A^{-1}BA$，$-BA^{-1}=-A^{-1}B$

故$(A^{-1}B)^T=-A^{-1}B$，故$A^{-1}B$为反对称矩阵

(2) 设λ,α分别为$A^{-1}B$的特征值特征向量，则$A^{-1}B\alpha=\lambda\alpha$，

则$\alpha^T(A^{-1}B)\alpha=\alpha^T\lambda\alpha=\lambda\alpha^T\alpha$

同时$\alpha^T(A^{-1}B)\alpha=\alpha^T(A^{-1}B)^T\alpha=-\alpha^T(A^{-1}B)\alpha=-\lambda\alpha^T\alpha$

故$\lambda\alpha^T\alpha=-\lambda\alpha^T\alpha$,因此$A^{-1}B$的实特征值只能为0

故$|A+B|=|A(E+A^{-1}B)|=|A||E+A^{-1}B|=(-1)^n|A||-E-A^{-1}B|\neq0$

因此$A+B$可逆

【考点延伸】《考试宝典》知识点 4——矩阵的概念和基本运算