函数项级数 1

自十七世纪以来，级数逐渐成为一种表达函数的自然方式. Newton 通过幂级数有效处理了超越函数，Euler 利用三角级数研究了行星轨道插值问题. 随着级数研究的成熟，人们已能处理更广泛、更复杂的函数. 本章先引入函数空间中的极限概念，随后介绍以 Taylor 级数和 Fourier 级数为代表的函数项级数.

1.1 函数空间中的极限 1
1.1.1 点态收敛与一致收敛 . . . 1
1.1.2 一致收敛的性质 4
1.1.3 函数项级数的收敛性 . . . 6
1.2 幂级数 8
1.2.1 幂级数的收敛域 8
1.2.2 幂级数的性质 11
1.2.3 幂级数的和函数 14
1.2.4 Taylor 级数 17
1.2.5 Euler 公式 23
1.3 三角级数 24
1.3.1 Euler-Fourier 公式 24
1.3.2 Fourier 级数 25
1.3.3 正弦级数与余弦级数 . . . 31
1.3.4 Fourier 变换 32

1.1 函数空间中的极限

1.1.1 点态收敛与一致收敛

之前我们讨论了数列、点列（向量序列）的极限，现在我们来讨论函数列的极限.

设 $f_n : I \to \mathbb{R}$ 是一列函数，那么它们收敛到函数 $f : I \to \mathbb{R}$ 的恰当涵义是什么？一个直接并且自然的想法是:

$$f_n \to f \iff \forall x \in I : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

换言之，如果对于任意给定的点 $x \in I$，数列 $(f_n(x))$ 收敛于数 $f(x)$，则称函数列 (f_n) 收敛于函数 f. 由于上述意义的收敛本质上是函数列在定义域的每个点处的取值收敛，因此这种收敛称为**点态收敛**或**逐点收敛**，并且称极限函数 f 为函数列 (f_n) 的**点态极限**，记为 $f_n \to f$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

不幸的是，点态极限并不是理解函数分析性质（比如连续性、可微性、可积性等等）的趁手工具, 下面的示例强烈暗示了这一点.

- **连续性破坏**. 设 $f_n(x) = x^n : [0,1] \to \mathbb{R}(n \geq 1)$, 显然有

  $$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1), \\ 1, & x = 1 \end{cases}.$$

  易见，f_n 均连续，但点态极限不再连续.
- **可微性破坏**. 事实上上面的例子已经足够，下面我们给一个更好的例子, 它的点态极限是连续的, 但不可微. 设 $f_n(x) = \sqrt{x^2 + n^{-1}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}(n \geq 1)$, 显然它们是可微的，并且

  $$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = |x|.$$

  可见即便点态极限连续也未必可微. 更令人震惊的是, Weierstrass 构造了一列光滑函数，它们的极限是连续的，但无处可微!
- **可积性破坏**. 将 $[0,1]$ 上的有理数排成一列 (r_n), 定义 $[0,1]$ 上的函数列

  $$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \neq r_1, \cdots, r_n, \\ 1, & x = r_1, \cdots, r_n \end{cases}.$$

每个函数都只有有限个可去间断点，所以它们都是 $[0,1]$ 上的 Riemann 可积函数，但它们的点态极限是不可积的 Dirichlet 函数.

可见，对函数而言，点态收敛并不是一个很好的概念. 重新审视数列、点列的极限之后，我们会发现，定义极限的关键在于两点间的**距离**应趋于零. 因此，如果我们要讨论函数的极限，比较合理的方法是先给出两个函数间的距离!

方便起见，记 $\mathscr{F}(I;\mathbb{R})$ 为定义在 I 上的所有实值函数的全体，称其为 I 上的函数空间. 从函数图像的角度，按照下面的方式定义 $f,g\in\mathscr{F}(I;\mathbb{R})$ 的距离是自然的:

$$d(f,g):=\sup_{x\in I}|f(x)-g(x)|.$$

上述距离本质上等价于下面的范数:

$$\|f\|:=\sup_{x\in I}|f(x)|.$$

注意，对于 $f,g\in\mathscr{F}(I;\mathbb{R})$，完全有可能出现 $d(f,g)=\infty$ 或 $\|f\|=\infty$ 的情形. 所以，严格来说，如果为了防止距离或范数无穷大，则需对函数做一定的限制. 比较合适的方式是仅讨论有界函数. 记 $\mathscr{F}_b(I;\mathbb{R})$ 是 $\mathscr{F}(I;\mathbb{R})$ 中的有界函数全体，称之为**有界函数空间**.

上确界范数/距离

对任意 $f,g\in\mathscr{F}_b(I;\mathbb{R})$，定义

$$\|f\|=\sup_{x\in I}|f(x)|,\quad d(f,g)=\|f-g\|.$$

分别称为**上确界范数**和**上确界距离**，它们满足:

(n1) $\|f\|=0\iff f=0$, (非退化)
(n2) $\|\lambda f\|=|\lambda|\|f\|,\forall\lambda\in\mathbb{R},f\in\mathscr{F}_b(I;\mathbb{R})$, (齐次性)
(n3) $\|f+g\|\le\|f\|+\|g\|,\forall f,g\in\mathscr{F}_b(I;\mathbb{R})$; (三角不等式)
(d1) $d(f,g)=0\iff f=g$, (非退化)
(d2) $d(f,g)=d(f,g),\forall f,g\in\mathscr{F}_b(I;\mathbb{R})$, (对称性)
(d3) $d(f,g)\le d(f,h)+d(h,g),\forall f,g,h\in\mathscr{F}_b(I;\mathbb{R})$. (三角不等式)

虽然在有界函数空间上 $\|\cdot\|$ 和 $d(\cdot,\cdot)$ 才是严格意义的范数和距离，但为了便于我们讨论无界函数列的极限，我们仍然将它们应用于 $\mathscr{F}(I;\mathbb{R})$ 上. 唯一的烦恼是会出现无穷大，但这并无大碍.[1]

在上确界范数的意义下, 我们可以定义函数列的**一致收敛**.

一致收敛 (uniform convergence)

设 (f_n) 是 $\mathscr{F}(I;\mathbb{R})$ 中的一个点列, 若存在 $f\in\mathscr{F}(I;\mathbb{R})$, 使得 $d(f_n,f)\to 0$，即

$$\forall\epsilon>0,\exists N,\forall n\ge N:\ d(f_n,f)=\|f_n-f\|=\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|<\epsilon$$

则称 (f_n) 在 I 上**一致收敛**于 f，记作 $f_n\rightrightarrows f$，称 f 为 (f_n) 的**一致极限**.

1: 事实上，如果在 $\mathscr{F}(I;\mathbb{R})$ 上定义等价关系:

$$f\sim g\Leftrightarrow f-g\in\mathscr{F}_b(I;\mathbb{R}),$$

那么在每个等价类上, $d(\cdot,\cdot)$ 都是严格意义的距离，而任何两个等价类之间距离都无限大. 可以把 $\mathscr{F}(I;\mathbb{R})$ 想象成一个奇特的宇宙, 把等价类看作一个个星系, 那么星系环游是可以实现的（至少在理论上），但星系间却是无法互访的.
还有一种解决方案是引入一种新的距离:

$$d'(f,g)=\sup_{x\in I}\frac{|f(x)-g(x)|}{1+|f(x)-g(x)|}.$$

本质上，它将 $d(f,g)=\infty$ 的情形压缩为 $d'(f,g)=1$. 使用 d' 也能等效的描述一致收敛性.

显然，$f_n \rightrightarrows f$ 蕴含 $f_n \to f$，即一致极限必然是点态极限. 因此，一致收敛比点态收敛更强.

一致收敛的条件也可以写为

$$\forall \epsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, \forall x \in I : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

对比点态收敛的 ϵN 语言写法

$$\forall x \in I, \forall \epsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon,$$

可以看到, 点态收敛的 N 依赖于 x, 而一致收敛的 N 与 x 无关. 这也是“一致”二字的由来，它表示 N 关于 x 是一致的.

例 1.1.1 证明 $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}, x \in \mathbb{R}$ 一致收敛.

证明. 易见 $\|f_n - 0\| = \sup |f_n(x)| = \frac{1}{n}$，故 $f_n \rightrightarrows 0$. □

例 1.1.2 证明 $f_n(x) = x^n, x \in [0, 1]$ 不一致收敛.

证明. 若 $f_n \rightrightarrows f$，则必有 $f_n \to f$，所以若一致收敛，则必有

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1), \\ 1, & x = 1 \end{cases}.$$

易知 $\|f_n - f\| = 1$, 矛盾. 故原函数列并不一致收敛. □

还有一个比一致收敛稍弱一点的概念. 设 (f_n) 是 $\mathscr{F}(I; \mathbb{R})$ 中的一个点列，若对于任意闭子区间 $[a, b] \subset I$, 总有 (f_n) 在 $[a, b]$ 上一致收敛，则称 (f_n) 在 I 上**内闭一致收敛**.

例 1.1.3 证明 $f_n(x) = nxe^{-nx^2}, x > 0$ 是不一致收敛但内闭一致收敛.

解. 如果一致收敛，则极限函数 $f(x) = 0$. 然而

$$\|f_n - f\| = \sup |f_n(x)| \geq f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \sqrt{n}e^{-1} \to \infty,$$

矛盾.

下面说明内闭一致收敛. 对于任意 $b > a > 0$, 有

$$\|f_n - f\|_{[a,b]} = \sup\{nxe^{-nx^2} | x \in [a, b]\} \leq nbe^{-na^2} \to 0.$$

故 (f_n) 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 0. 进而函数列在 $(0, +\infty)$ 上内闭一致收敛于 0. □

1.1.2 一致收敛的性质

依据经验，极限理论中最重要的定理是 Cauchy 原理. 所以我们首先讨论一致收敛的这一性质，它反映了函数空间的某种 Cauchy 完备性.

一致收敛的 Cauchy 准则

设 (f_n) 是 $\mathscr{F}(I;\mathbb{R})$ 中的一个点列，则 (f_n) 一致收敛的充要条件是它是 d-Cauchy 列，即

$$\forall\epsilon>0,\exists N,\forall n,m\geq N\,:\,d(f_n,f_m)<\epsilon.$$

证明. 利用三角不等式，必要性显然. 下面证明充分性. 假设 (f_n) 是 d-Cauchy 列，则对于任意固定的 $x\in I$, 数列 $(f_n(x))$ 是 Cauchy 列，根据实数完备性，可知 $(f_n(x))$ 必然收敛于一个实数，记作 $f(x)$. 我们说明 $f_n\rightrightarrows f$. 根据条件，对于任意 $\epsilon>0$，存在 N, 当 $n,m\geq N$ 时，有 $d(f_n,f_m)<\epsilon$. 故而，对于 $n,m\geq N$，有

$$|f_n(x)-f_m(x)|\leq d(f_n,f_m)<\epsilon.$$

注意到 $f_m\to f$，故而

$$|f_n(x)-f(x)|=\lim_{m\to\infty}|f_n(x)-f_m(x)|\leq\epsilon.$$

进而，只要 $n\geq N$，必有

$$d(f_n,f)=\sup|f_n(x)-f(x)|\leq\epsilon.$$

这表明 $d(f_n,f)\to 0$. □

下面讨论一致收敛下，连续性、可积性、可微性能否保持.

连续性定理

设 (f_n) 是连续函数空间 $C(I;\mathbb{R})$ 中的一个点列，且 (f_n) 一致收敛于 f，则 $f\in C(I;\mathbb{R})$. 此时，成立极限交换公式

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0}f_n(x)=\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty}f_n(x).$$

证明. 对于任意 $x_0\in I$，注意到

$$\begin{aligned}|f(x)-f(x_0)|&\leq|f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f_n(x_0)|+|f_n(x_0)-f(x_0)|\\&\leq d(f,f_n)+|f_n(x)-f_n(x_0)|+d(f_n,f)\\&=2d(f_n,f)+|f_n(x)-f_n(x_0)|.\end{aligned}$$

因此，对于任意的 $\epsilon>0$，取定 n，使得 $d(f_n,f)<\epsilon$. 由于 f_n 在 x_0 连续，所以存在 $\delta>0$, 对任意 $x\in U(x_0;\delta)$，有 $|f_n(x)-f_n(x_0)|<\epsilon$. 故而，对任意 $x\in U(x_0;\delta)$，成立 $|f(x)-f(x_0)|<3\epsilon$. 这表明 f 在 x_0 连续. □

从证明可以看出，上述连续性定理本质上的点态的. 换言之，若 f_n 均在 x_0 连续，则 f 也在 x_0 连续.

可积性定理

设 (f_n) 是可积函数空间 $R([a,b];\mathbb{R})$ 中的一个点列，且 (f_n) 一致收敛于 f，则 $f\in R([a,b];\mathbb{R})$. 此时有极限与积分交换公式

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx.$$

证明. 根据

$$|f(x)-f(y)|\le|f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f_n(y)|+|f_n(y)-f(y)|$$

可知 f,f_n 在任意区间上的振幅 ω^f,ω^{f_n} 满足

$$\omega^f\le 2d(f,f_n)+\omega^{f_n}.$$

故而

$$\begin{aligned}\Omega(f,T)=\sum_j\omega_j^f\Delta x_j&\le 2d(f,f_n)(b-a)+\sum_j\omega_j^{f_n}\Delta x_j\\&=2d(f,f_n)(b-a)+\Omega(f_n,T)\end{aligned}$$

因此，对于任意的 $\epsilon>0$，取定 n，使得 $d(f_n,f)<\epsilon$. 由于 f_n 可积，所以存在分割 T, 使得 $\Omega(f_n,T)<\epsilon$, 故而 $\Omega(f,T)<3\epsilon$, 所以 f 可积.

为了说明极限与积分交换公式，只要注意到

$$\left|\int_a^b[f_n(x)-f(x)]dx\right|\le d(f_n,f)(b-a).$$

□

一致收敛下的可微性定理并不成立. 仍以 $f_n(x)=\sqrt{x^2+n^{-1}}$ 为例，易见

$$|f_n(x)-|x||=\frac{n^{-1}}{\sqrt{x^2+n^{-1}}+\sqrt{x^2}}\le\frac{1}{\sqrt{n}},$$

故 $f_n\rightrightarrows|x|$. 可见可微函数列的一致极限未必可微. 但如果对导函数列也加以限制，则也有可微性定理.

可微性定理

设 (f_n) 是连续可微函数空间 $C^1([a,b];\mathbb{R})$ 中的一个点列. 如果 (f_n) 和 (f_n') 均一致收敛，则 (f_n) 的极限 f 也可微此时有极限与导数交换公式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{d}{dx}f_n(x)=\frac{d}{dx}\lim_{n\to\infty}f_n(x).$$

证明. 注意到

$$f_n(x)=f_n(a)+\int_a^x f_n'(t)dt.$$

根据连续性定理, (f_n') 收敛于一个连续函数 φ. 再根据极限与积分交换公式，有

$$f(x)=f(a)+\int_a^x\varphi(t)dt.$$

根据微积分基本定理，f 可微且 $f'(x) = \varphi(x)$. □

值得指出，可微性定理的条件可以从连续可微降至可微.

1.1.3 函数项级数的收敛性

如果无穷级数的通项是函数, 那么就称其为**函数项级数**, 一般可写为

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots .$$

我们以部分和函数列的收敛性来定义函数项级数的收敛性. 从而对于一个函数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$，我们可以说它点态收敛、一致收敛、内闭一致收敛.

就点态极限而言，我们给出进一步的说明. 如果函数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ 在 $x = x_0$ 点收敛，则称 x_0 为此级数的**收敛点**. 函数项级数所有收敛点的全体称为它的**收敛域**. 在收敛域上，函数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ 的和是 x 的函数，一般记作 $s(x)$，称为级数的**和函数**. 显然，函数项级数的一致收敛性只能在其收敛域内考虑.

根据函数列一致收敛的 Cauchy 原理，直接可得函数项级数的 Cauchy 原理.

函数项级数的 Cauchy 原理

设 $u_n(x) \in \mathscr{F}(I; \mathbb{R})$，则 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ 一致收敛的充要条件是它满足：

$$\forall \epsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{Z}_+ : \left\| \sum_{j=1}^{p} u_{n+j} \right\| < \epsilon.$$

实践中，判断函数项级数一致收敛更常用的方法其实是 Weierstrass-M 判别法.

Weierstrass-M 判别法

设 $u_n(x) \in \mathscr{F}(I; \mathbb{R})$. 若存在数列 (M_n) 使得 $\|u_n\| \leq M_n$, 且 $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ 收敛，则 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

证明. 显然只需证明 $M_n = \|u_n\|$ 的情形. 只要注意到 $\left\|\sum_{j=1}^{p} u_{n+j}\right\| \leq \sum_{j=1}^{p} \|u_{n+j}\|$, 再结合 Cauchy 原理即可. □

根据函数列一致收敛的性质，我们有下列函数项级数一致收敛的性质.

逐项求极限定理

设 $u_n \in C(I; \mathbb{R})$ 且 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上一致收敛, 则和函数 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \in$

$C(I;\mathbb{R})$. 此时，对于任意 $x_0 \in I$，成立

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\lim_{x\to x_0}u_n(x).$$

逐项积分定理

设 $u_n \in R([a,b];\mathbb{R})$ 且 $\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛, 则和函数 $\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)\in R([a,b];\mathbb{R})$ 并且

$$\int_a^b\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b u_n(x)dx.$$

逐项求导定理

设 $u_n \in C^1([a,b];\mathbb{R})$ 且 $\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty}u_n'(x)$ 均在 $[a,b]$ 上一致收敛, 则 $\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)\in C^1([a,b];\mathbb{R})$ 并且

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}u_n(x).$$

上面的三个定理表明，对于一致收敛的函数项级数，即便我们无法求得其和函数，仍然可以在一定程度上对和函数开展一定的分析工作.

例 1.1.4 讨论 $\sum_{n=0}^{\infty}ne^{-\sqrt{n}x}$ 的收敛性以及和函数的光滑性.

解. 记通项为 $u_n(x)$. 显然，当 $x\le 0$ 时级数发散. 对于任意 $x>0$, 考虑函数 $f(t)=te^{-\sqrt{t}x}$. 注意到 $f'(t)=e^{-\sqrt{t}x}(1-\sqrt{t}x/2)$，可见 f 在无穷远附近单调递减，故而根据积分判别法，$\sum_{n=0}^{\infty}ne^{-\sqrt{n}x}$ 的敛散性与 $\int_0^{\infty}f(t)dt$ 的敛散性一致. 而

$$\int_0^{\infty}f(t)dt=\int_0^{\infty}te^{-\sqrt{t}x}dt\overset{s=\sqrt{t}}{=\!=\!=}\int_0^{\infty}2s^3e^{-sx}ds,$$

故反常积分收敛，进而级数收敛. 所以级数 $\sum u_n$ 的收敛域是 $(0,+\infty)$.

易知 $\|u_n\|=n\not\to 0$, 故级数不一致收敛. 为了讨论光滑性，我们考虑内闭一致收敛性. 任取 $b>a>0$, 对于任意 $x\in[a,b]$, 有 $\|u_n\|\le ne^{-\sqrt{n}a}:=M_n$. 根据上面的分析可知 $\sum M_n$ 收敛，进而由 Weierstrass-M 判别法可知 $\sum u_n$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛. 进而和函数在 (a,b) 上连续. 根据 a,b 的任意性，可知和函数在 $(0,+\infty)$ 上连续.

下面讨论可微性. 考虑 $\sum u_n'(x)$. 由于 $u_n'(x)=-n^{3/2}e^{-\sqrt{n}x}$，类似上面的方法可知 $\sum u_n'(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛, 故而 $\sum u_n$ 可以在 (a,b) 上逐项求导. 事实上，可以进一步得到任意阶导级数 $\sum u_n^{(k)}(x)$ 均在 $(0,+\infty)$ 上内闭一致收敛，进而 $\sum u_n$ 可以任意阶逐项求导. 故 $\sum u_n\in C^{\infty}((0,+\infty);\mathbb{R})$. □

例 1.1.5 高木貞治 (Teiji Takagi) 函数. 设 $u_0(x)=dist(x,\mathbb{Z})$, 则 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}u_0(2^nx)/2^n$ 连续但无处可微.

证明. 对于任意 x_0, 设 $[l_n, r_n]$ 是函数 $u_n(x) = u_0(2^n x)/2^n$ 含 x_0 的最大的单调区间，显然 $r_n - l_n \to 0$. 如果 f 在 x_0 可微，注意到 $|r_n - x_0|, |l_n - x_0| \leq r_n - l_n$，可得

$$\begin{aligned} f(r_n) - f(l_n) =& f(x_0) + f'(x_0)(r_n - x_0) + o(r_n - x_0) \\ &- [f(x_0) + f'(x_0)(l_n - x_0) + o(l_n - x_0)] \\ =& f'(x_0)(r_n - l_n) + o(r_n - l_n). \end{aligned}$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(r_n)-f(l_n)}{r_n-l_n} = f'(x_0)$.

另一方面，注意到以下两点:

- 若 $k \leq n$, 则 u_k 在 $[l_n, r_n]$ 上是斜率为 ± 1 的一次函数;
- 若 $k \geq n+1$, 则 $u_k(l_n) = u_k(r_n) = 0$.

故而

$$\frac{f(r_n) - f(l_n)}{r_n - l_n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u_k(r_n) - u_k(l_n)}{r_n - l_n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k(r_n) - u_k(l_n)}{r_n - l_n} = \sum_{k=0}^{n} \pm 1.$$

因此 $\left(\frac{f(r_n)-f(l_n)}{r_n-l_n}\right)$ 是一个奇偶交错的整数列，不可能收敛，故 $f'(x_0)$ 不存在. □

高木貞治函数是 Weierstrass 函数的一种简化. Weierstrass 在 1872 年给出的连续且无处可微的函数是 $\sum a^n \cos(b^n \pi x)$, $0 < a < 1$, b 是正奇数且 $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$. 高木貞治在 1901 年提出上面所述的函数.

1.2 幂级数

简单而常见的一类函数项级数就是**幂级数**，它的一般形式为

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots.$$

这里 $a_0, a_1, a_2, \cdots$ 都是常数，称为**幂级数的系数**，x 是自变量、a 是固定的点. 为了讨论方便，我们仅考虑以下形式

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots.$$

我们将讨论幂级数的收敛域、分析性质、和函数.

1.2.1 幂级数的收敛域

我们知道，几何级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 的收敛域是对称区间 $(-1, 1)$. Abel 定理指出，这种收敛域的对称性是幂级数的普遍现象.

Abel 定理 (I)

- 如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_0 \neq 0$ 处收敛，那么当 $|x| < |x_0|$ 时级数绝对收敛,
- 如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_0 \neq 0$ 处发散，那么当 $|x| > |x_0|$ 时级数发散.

证明. 先证第一部分. 因为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ 收敛，所以通项 $a_n x_0^n \to 0$. 因此，当 n 充分大时，必有

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \cdot |x/x_0|^n \le |x/x_0|^n.$$

如果 $|x| < |x_0|$，那么几何级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |x/x_0|^n$ 收敛，根据比较判别法知 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ 收敛，即 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛.

第二部分可用反证法证明. 任取 x_* 满足 $|x_0| < |x_*|$. 假如级数在 x_* 处收敛，那么根据第一条，级数在 x_0 处必然收敛，与假设矛盾，因此级数在 x_* 处发散. □

Abel 定理 (I) 表明：如果幂级数在 $x = x_0$ 处收敛，那么它在开区间 $(-|x_0|, |x_0|)$ 内处处都收敛；如果幂级数在 $x = x_0$ 处发散，那么它在闭区间 $[-|x_0|, |x_0|]$ 外处处发散. 现在从原点沿数轴向右走，最初只遇到收敛点，然后就只遇到发散点. 这两部分的分界点可能是收敛也可能是发散. 从原点沿数轴向左方走情形也是如此，并且两个界点关于原点对称. 因此，幂级数的收敛域只有以下几种情况

$$\{0\},\ (-R, R),\ [-R, R),\ (-R, R],\ [-R, R],\ (-\infty, +\infty)$$

这里 R 是正数. 第一种情况可以看做闭区间 $[-R, R]$ 取 $R = 0$，最后一种情况可以视为开区间 $(-R, R)$ 取 $R = +\infty$. 我们把 R 叫做幂级数的**收敛半径**. 这样，我们可以把 Abel 定理 (I) 重新表述为下面的结果.

收敛半径

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛情况必然是下述三者之一:

- 级数仅在 $x = 0$ 处收敛;
- 级数在 $(-\infty, +\infty)$ 上都绝对收敛;
- 存在正数 $R > 0$, 使得级数在 $(-R, R)$ 上绝对收敛，在 $(-\infty, -R)$ 和 $(R, +\infty)$ 上都发散.

例 1.2.1 证明幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$ 的收敛半径是 $R = 0$.

解. 只要 $x \ne 0$，必有 $\lim_{n\to\infty} n! x^n = \infty$. 通项不趋于零，级数发散. 所以收敛半径 $R = 0$. □

例 1.2.2 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/2^n$ 的收敛域.

解. 当 $|x| < 2$ 时，级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/2^n$ 是公比的模小于 1 的等比数列，所以收敛. 当 $|x| > 2$ 时 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/2^n$ 是公比的模大于 1 的等比数列，必然收敛. 所以收敛半径是 $R = 2$. 容易验证 $x = \pm 2$ 时级数发散，所以所求收敛域为 $(-2, 2)$. □

例 1.2.3 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n$ 的收敛域.

解. 当 $x=1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ 发散，所以收敛半径 $R \le 1$；当 $x=-1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/n$ 收敛，于是收敛半径 $R \ge 1$. 因此，幂级数的收敛半径为 $R=1$，且收敛域是 $[-1,1)$. □

例 1.2.4 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n^2$ 的收敛域.

解. 当 $x=\pm 1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n^2$ 绝对收敛，因此级数在 $[-1,1]$ 上必然收敛. 另一方面，任给 $x>1$，通项的极限 $\lim_{n\to\infty} x^n/n^2=\infty$，所以级数发散. 因此收敛半径必然是 $R=1$，进而收敛域就是 $[-1,1]$. □

例 1.2.5 证明幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n^n$ 的收敛半径是 $R=+\infty$.

解. 对于任意给定正数 x，当 $n \ge 2x$ 时，必有

$$0 \le \frac{x^n}{n^n} \le \frac{x^n}{(2x)^n} = \frac{1}{2^n}.$$

根据正项级数的比较判别法，知 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n^n$ 收敛. 因此，级数在整条实轴上都收敛，进而收敛半径是 $R=+\infty$. □

这几个例子中，我们都是根据表达式做出针对性的分析. 事实上我们有一般的方法可以求得收敛半径.

比值模法 根值模法

如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的系数满足

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l \quad \text{或者} \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=l,$$

那么它的收敛半径 $R=1/l$. 这里我们约定，$l=0$ 时 $R=+\infty$，$l=+\infty$ 时 $R=0$.

证明. 我们以比值模法为例进行证明，根值模法的证明是类似的. 由条件可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = l|x|.$$

根据比值判别法，当 $|x|<1/l$ 时，级数 $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$ 收敛，也就是说级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛. 因此，收敛半径 $R \ge 1/l$. 另一方面，当 $|x|>1/l$ 时，级数 $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$ 发散，即 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 不绝对收敛，于是收敛半径 $R \le 1/l$. 综上，收敛半径 $R=1/l$. 极限 $l=0,+\infty$ 的情形留作练习. □

例 1.2.6 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ 的收敛半径.

解. 系数含阶乘，适用比值模法. 已知

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0.$$

根据比值模法，收敛半径为 $R=+\infty$ □

例 1.2.7 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n}(x-1)^n$ 的收敛域.

解. 令 $t=x-1$，级数变为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n}t^n$. 易见

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1/(2^n n)}=\frac{1}{2}.$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n}t^n$ 的收敛半径时 $R=2$. 注意到，$t=\pm 2$ 时级数时调和级数和交错调和级数，前者发散后者收敛. 因此 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n}t^n$ 的收敛域是 $[-2,2)$，进而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n}(x-1)^n$ 的收敛域是 $[-1,3)$. □

例 1.2.8 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^{2n}$ 的收敛半径.

解. 级数缺少奇次项，不能直接用比值模法. 我们用比值模法的证明来分析本例. 记 $u_n=\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^{2n}$，那么

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(2n+2)x^2}{(n+1)^2}=4x^2.$$

根据比值判别法，当 $x^2<1/4$ 时级数 $\sum u_n$ 收敛，当 $x^2>1/4$ 时级数 $\sum u_n$ 发散. 也就是说，级数在 $|x|<1/2$ 上收敛，在 $|x|>1/2$ 上发散. 所以原级数的收敛半径为 $R=1/2$. □

1.2.2 幂级数的性质

我们先给出幂级数的代数运算性质.

幂级数的加法与乘法

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 和 $\sum_{n=0}^{n}b_nx^n$ 的收敛半径分别是 R_a,R_b. 记 $\rho=\min\{R_a,R_b\}$，那么

- 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$ 的收敛半径 $R\geq\rho$，并且在 $(-\rho,\rho)$ 内成立
$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n.$$
- 记 $c_n=a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0$，则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ 的收敛半径 $R\geq\rho$，并且在 $(-\rho,\rho)$ 内成立
$$\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n\right).$$

证明. 加法是简单的. 为了证明乘法，只要利用 Abel 定理 (I) 以及数项级数的 Cauchy 乘积定理. □

幂级数的除法相对复杂，暂且按下不表. 现在来介绍幂级数的分析性质，为此先给出 Abel 定理 (II).

Abel 定理 (II)

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在收敛域上内闭一致收敛.

证明. 设幂级数在 $x = r$ 处收敛，方便起见假设 $r > 0$. 下面说明幂级数在 $[0, r]$ 上一致收敛. 利用 Abel 变换，对于任意 $x \in [0, r]$，有

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=N}^{M} a_n x^n\right| &= \left|\sum_{n=N}^{M} \frac{x^n}{r^n} a_n r^n\right| \\
&\le \left|\frac{x^M}{r^M} \sum_{n=N}^{M} a_n r^n\right| + \sum_{n=N}^{M-1} \left|\sum_{k=N}^{n} a_k r^k\right| \left(\frac{x^{n+1}}{r^{n+1}} - \frac{x^n}{r^n}\right) \\
&\le \left|\frac{x^M}{r^M} \sum_{n=N}^{M} a_n r^n\right| + \max_{n=N}^{M-1} \left|\sum_{k=N}^{n} a_k r^k\right| \left(\frac{x^M}{r^M} - \frac{x^N}{r^N}\right) \\
&\le \left|\sum_{n=N}^{M} a_n r^n\right| + \max_{n=N}^{M-1} \left|\sum_{k=N}^{n} a_k r^k\right| \le 2 \max_{n=N}^{M} \left|\sum_{k=N}^{n} a_k r^k\right|.
\end{aligned}$$

利用 $\sum a_n r^n$ 的收敛性，可知 $\sum a_n x^n$ 在 $[0, r]$ 上满足 d-Cauchy 条件，故一致收敛.

如果 $r < 0$，类似可以证明级数在 $[r, 0]$ 上一致收敛. 两者结合可知内闭一致收敛性. □

特别地，如果 $R > 0$ 是 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径，且 $x = R$ 是收敛点，则幂级数至少在 $(-R, R]$ 上内闭一致收敛.

利用 Abel 定理 (II)，立即可得下述结论.

逐项求极限

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在收敛域上连续，且对收敛域中的任一点 x_0 成立

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\lim_{x \to x_0} a_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n.$$

逐项积分

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在收敛域上可以逐项积分，即对收敛域中的任一点 x 成立

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^x a_n t^n dt\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

并且，逐项积分之后的幂级数和原级数有相同的收敛半径.

例 1.2.9 证明：$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \cdots$.

证明. 考虑几何级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$，它的收敛域是 $(-1,1)$，和函数为 $\frac{1}{1+x^2}$. 那么根据逐项积分定理，对于任意 $|x|<1$，成立

$$\begin{aligned}\arctan x &= \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}\right)dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n \int_0^x t^{2n}dt\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}.\end{aligned}$$

由莱布尼茨判别法知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$ 在 $x=1$ 处收敛，所以它在 $x=1$ 处可以逐项求极限，进而可得

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} = \lim_{x\to 1^-}\arctan x &= \lim_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\lim_{x\to 1^-}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}.\end{aligned}$$

虽然此级数常常被叫做 π 的莱布尼茨公式，但也许应该归功于 14 世纪的印度数学家马德哈瓦（Madhava）. 这是已知的人类历史上首次用级数表示圆周率，它与割圆法迥然不同. □

逐项求导

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 在收敛半径以内可以逐项求导，即在收敛半径以内成立

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty}n a_n x^{n-1}.$$

逐项求导之后的幂级数和原级数有相同的收敛半径.

证明. 设 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 在 $x=x_*>0$ 处绝对收敛. 任意给定充分小的 $\epsilon>0$，当 n 充分大时，成立

$$|na_n(x_*-\epsilon)^{n-1}| \le n\left(\frac{x_*-\epsilon}{x_*}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{x_*}\cdot|a_n|x_*^n \le |a_n|x_*^n.$$

根据比较判别法，导级数 $\sum na_n x^{n-1}$ 在 $x=x_*-\epsilon$ 处绝对收敛. 因此导级数的收敛半径不小于原级数的收敛半径. 此外，根据幂级数的逐项积分定理，原级数的收敛半径也不小于导级数的收敛半径. 故两者的收敛半径相等，记作 R. 进而两者在 $(-R,R)$ 上必然内闭一致收敛，因此可以逐项求导. □

例 1.2.10 设 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛半径都是正数，其和函数记作 $f(x)$. 证明：f 在收敛半径内任意阶可导，且 $f^{(n)}(0)=n!a_n$.

证明. 因为幂级数在收敛半径内可导，且导级数的收敛半径不变，进而导级数可以继续求导. 依次类推，f 在收敛半径内任意阶可导. 这样，

对幂级数连续求 n 阶导数，可得

$$\begin{aligned}f^{(n)}(x) &= (a_0)^{(n)} + (a_1x)^{(n)} + (a_2x^2)^{(n)} + \cdots + (a_nx^n)^{(n)} + \cdots \\ &= n!a_n + (n+1)!a_{n+1}x + \frac{1}{2}(n+2)!a_{n+2}x^2 + \cdots.\end{aligned}$$

因此，$f^{(n)}(0) = n!a_n$. □

例 1.2.11 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n$ 的收敛半径都是正数，并且在公共收敛域内成立 $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n$，证明：$a_n = b_n(n \geq 0)$

证明. 把它们在公共收敛域内的和函数记作 $f(x)$，那么根据上例可知 $a_n = f^{(n)}(0)/n! = b_n$. 此结果叫做幂级数的**唯一性**. □

现在我们来考虑幂级数的商. 假设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n$ 的商也可以表示为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} d_nx^n$，那么根据幂级数的乘积，有

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} d_nx^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (d_0b_n + d_1b_{n-1} + \cdots + d_nb_0)x^n.\end{aligned}$$

根据幂级数的唯一性，比较两侧系数，可得

$$\begin{aligned}a_0 &= d_0 \\ a_1 &= d_0b_1 + d_1b_0 \\ a_2 &= d_0b_2 + d_1b_1 + d_2b_0 \\ a_3 &= d_0b_3 + d_1b_2 + d_2b_1 + d_3b_0 \\ &\cdots\end{aligned}$$

只要 $b_0 \neq 0$，就可以依次解出 $d_0, d_1, d_2, \cdots$. 商级数的收敛半径比较复杂，它涉及到分子和分母的零点，此处不表.

1.2.3 幂级数的和函数

幂级数的和函数求法主要有逐项求导、逐项积分、系数递归等，下面我们举几个例子.

例 1.2.12 求和函数 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$.

解. 在 $(-1, 1)$ 上可以逐项积分

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x nt^{n-1}dt = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} - 1.$$

求导即得 $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$. □

例 1.2.13 求和函数 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$.

解. 收敛域为 $[-1,1)$. 在开区间 $(-1,1)$ 上可以逐项求导

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}.$$

利用 $f(0)=0$，积分可得

$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)dt=\int_0^x\frac{dt}{1-t}=-\ln(1-x).$$

根据幂级数的连续性，上式在 $x=-1$ 处也成立. 因此，当 $x\in[-1,1)$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n=-\ln(1-x)$. □

例 1.2.14 求和函数 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^2x^n$.

解. 收敛域为 $(-1,1)$，在此区间上可以逐项积分和逐项求导.

$$\begin{aligned}f(x)&=x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n\cdot nx^{n-1}=x\sum_{n=1}^{\infty}\Big[(-1)^{n-1}nx^n\Big]'\\&=x\sum_{n=1}^{\infty}\Big[x(-1)^{n-1}(x^n)'\Big]'=x\sum_{n=1}^{\infty}\Big[x\Big((-1)^{n-1}x^n\Big)'\Big]'\\&=x\Big[x\Big(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^n\Big)'\Big]'=x\Big[x\Big(\frac{x}{1+x}\Big)'\Big]'=\frac{x(1-x)}{(1+x)^3}.\end{aligned}$$

虽然计算过程没有出现积分,但本质上我们求出了每一项的原函数. □

例 1.2.15 求常数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n(2n+1)}$ 的和.

解. 做幂级数 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n(2n+1)}x^{2n+1}$，它在 $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$ 上可以逐项求导.

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}x^{2n}=\frac{x^2}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{x^2}{3}}=\frac{x^2}{3-x^2}.$$

结合 $f(0)=0$ 可知

$$f(x)=\int_0^x\frac{t^2}{3-t^2}dt=\frac{\sqrt{3}}{2}\ln\frac{\sqrt{3}+x}{\sqrt{3}-x}-x.$$

所以，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n(2n+1)}=f(1)=\frac{\sqrt{3}}{2}\ln\big(2+\sqrt{3}\big)-1.$ □

例 1.2.16 求常数项级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n(n^2-1)}$ 的和.

解. 做幂级数 $f(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}x^n$，利用 $\sum_{n=1}^{\infty}x^n/n=-\ln(1-x)$ 可得

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}x^n-\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^n\\&=\frac{x}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}x^{n-1}-\frac{1}{2x}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}\\&=-\frac{x}{2}\ln(1-x)-\frac{1}{2x}\left(-\ln(1-x)-x-\frac{1}{2}x^2\right)\\&=\left(\frac{1}{2x}-\frac{x}{2}\right)\ln(1-x)+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x.\end{aligned}$$

从而

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n(n^2-1)}=f(\frac{1}{2})=\frac{5}{8}-\frac{3}{4}\ln 2.$$

□

例 1.2.17 (母函数法) 斐波那契数列满足 $F_1=1,F_2=1,F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$. 求 F_n 的通项公式.

解. 容易证明 $0\le F_n\le 2^n$. 因此，$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}F_nx^n$ 在 $(-1/2,1/2)$ 内有定义. 由递推公式易知

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}F_{n+2}x^{n+2}&=\sum_{n=1}^{\infty}F_{n+1}x^{n+2}+\sum_{n=1}^{\infty}F_nx^{n+2}\\&=x\sum_{n=1}^{\infty}F_{n+1}x^{n+1}+x^2\sum_{n=1}^{\infty}F_nx^n.\end{aligned}$$

因此

$$f(x)-F_1x-F_2x^2=x(f(x)-F_1x)+x^2f(x).$$

代入 $F_1=F_2=1$ 可得

$$f(x)=\frac{x}{1-x-x^2}.$$

做部分分式分解，结合等比级数和函数，可得

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{x}{1-x-x^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x}-\frac{1}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x}\right]\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^nx^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^nx^n\right].\end{aligned}$$

由幂级数唯一性定理可得斐波那契数列的通项公式

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

我们把 $\sum F_nx^n$ 叫做数列 $\{F_n\}$ 的**母函数**. 母函数有很多类型, 比如 $\sum\frac{F_n}{n!}x^n$ 也是常用的母函数. □

还有一种求和函数的方法是构造微分方程，我们举两个例子说明.

例 1.2.18 求 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^n/n!$.

解. 此幂级数的收敛半径 $R=+\infty$. 因此总是可以逐项求导

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(x^n)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}=f(x),$$

即

$$\frac{d}{dx}\Big(f(x)e^{-x}\Big)=0.$$

由于 $f(0)=1$，所以 $f(x)e^{-x}=1$，进而 $\sum_{n=0}^{\infty}x^n/n!=e^x$. □

例 1.2.19 求 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}$.

解. 此级数比较复杂，先求导数做观察.

$$f'(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}x^{2n}.$$

对比 $f(x)$ 可见，$f'(x)$ 的系数的分子比分母大，不妨对其分子做拆分

$$\begin{aligned}
f'(x)&=1+2x^2+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2n-2)!!\cdot(2n)}{(2n-1)!!}x^{2n}\\
&=1+2x^2+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2n-2)!!\cdot(2n-1+1)}{(2n-1)!!}x^{2n}\\
&=1+2x^2+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2n-2)!!}{(2n-3)!!}x^{2n}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}x^{2n}\\
&=1+2x^2+x^2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2n-2)!!}{(2n-3)!!}x^{2n-2}+x\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}x^{2n-1}\\
&=1+2x^2+x^2(f'(x)-1)+x(f(x)-x).
\end{aligned}$$

整理可得

$$(1-x^2)f'(x)-xf(x)=1.$$

结合 $f(0)=0$，可解得

$$f(x)=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

本例已较为复杂. 一般而言，幂级数的和函数是难以求出的. □

1.2.4 Taylor 级数

前面讨论了幂级数的收敛域及其和函数的性质. 本节我们来讨论反问题：给定函数 $f(x)$，考虑它是否能在某个区间内“展开成幂级数”. 就是说，是否能找到这样一个幂级数，它在某区间内收敛，且其和恰好就是给定的函数 $f(x)$. 如果能找到这样的幂级数，我们就说，函数 $f(x)$ 在该区间内能展开成幂级数.

在一元函数微分学中，我们已经学习了泰勒级数的雏形——泰勒公式. 以拉格朗日余项为例，在 a 点的泰勒公式为

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x),$$

其中余项

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

这里 ξ 介于 x 与 a 之间. 我们把幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

称为函数 f 在 $x=a$ 处的**泰勒级数**. 原点处的泰勒级数叫做**麦克劳林级数**.

- 给定一个任意阶可微的函数 f，它的泰勒级数未必有正的收敛半径. 事实上，博雷尔定理指出，任意给定数列 $\{a_n\}$，均存在函数 f，使得 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 是 f 的泰勒级数.
- 即便函数 f 的泰勒级数有正的收敛半径，其和函数也未必是 f. 一个典型的例子是

  $$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2}, & x\neq 0; \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

  由于 f 在原点的各阶导数均为零，所以其麦克劳林级数的和函数是零，与 f 不同.

解析点

设函数 f 在 $x=a$ 处任意阶可微，并且存在邻域 $U(a)$，使得在 $U(a)$ 上成立

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

则称 f 在 a 点**可以泰勒展开**，或者 f 在 a 点**解析**.

根据幂级数的唯一性，函数在解析点处的泰勒级数是唯一的. 下面的判定法则是显然的.

余项判别法

设函数 f 在 a 点可以泰勒展开的充要条件是余项 $\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0, x\in U(a)$.

下面给出几个典型初等函数的泰勒展开.

例 1.2.20 (指数函数) $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}x^n/n!, x\in\mathbb{R}$.

解. 上一节中我们已经用逐项求导的方法证明了这一点. 这里我们从泰

勒公式的角度来看. 指数函数的麦克劳林公式为

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{e^{\xi_n}}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

对于固定的 x, $|\xi_n| \le |x|$. 从而余项满足

$$\left|\frac{e^{\xi_n}}{(n+1)!}x^{n+1}\right| \le \frac{e^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1} \to 0, n \to \infty.$$

所以，指数函数可以在整条实轴上展开为泰勒级数. □

例 1.2.21 (正弦函数) $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n+1}/(2n+1)!, x \in \mathbb{R}$.

解. 由于 $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n}{2}\pi\right)$. 因此正弦函数的拉格朗日余项满足

$$|R_n(x)| \le \left|\frac{\sin\left(\xi_n + \frac{n}{2}\pi\right)}{(n+1)!}x^{n+1}\right| \le \frac{1}{(n+1)!}|x|^{n+1} \to 0, n \to \infty.$$

所以，正弦函数也可以在整条实轴上展开为泰勒级数. □

上述两例我们通过分析函数的泰勒公式，证明其余项趋于零，从而获得泰勒展开式. 这种方法叫做直接法. 在实践中，我们常常通过求导、积分、四则运算等方法把函数表示为一个幂级数，再根据泰勒级数的唯一性，最终得到函数的泰勒展开式. 这种方法叫做间接法. 下面举例说明.

例 1.2.22 (余弦函数) $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}/(2n)!, x \in \mathbb{R}$.

解. 由于幂级数在收敛半径内可以逐项求导，所以只要对正弦级数求导即得余弦级数，并且收敛半径保持不变. □

例 1.2.23 (对数函数) $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^n/n, -1 < x \le 1$.

解. 根据等比级数性质，当 $|x| < 1$ 时成立

$$(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n.$$

逐项积分，可得

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x (-1)^n t^n dt = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^n/n, \quad -1 < x < 1.$$

注意到上式两端在 $x = 1$ 处均左连续，因此在 $x = 1$ 时也成立. □

例 1.2.24 (二项级数) $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^\infty \binom{\alpha}{n} x^n, -1 < x < 1.$

解. 利用 Cauchy 型余项

$$\begin{aligned}
R_n(x) &= \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\theta x)(1-\theta)^n x^{n+1} \\
&= (-1)^n \alpha(1-\alpha)\cdots(1-\frac{\alpha}{n})(1+\theta x)^{\alpha-n-1}(1-\theta)^n x^{n+1}. \\
&= O(\frac{1}{n^\alpha})(1+\theta x)^{\alpha-n-1}(1-\theta)^n x^{n+1} \\
&= O(\frac{1}{n^\alpha})(1+\theta x)^{\alpha-1}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n x^{n+1}.
\end{aligned}$$

因为 $0 < 1-|x| \le 1+\theta x \le 1+|x|$, $\left|\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right| \le 1$, 因此 $R_n(x) = O(\frac{1}{n^\alpha})x^{n+1}$. 所以，当 $|x|<1$ 时, 无论 α 是正是负均有 $R_n(x) \to 0$. □

二项级数在端点 $x=\pm 1$ 处的情形比较复杂，我们仅指出结论：当 $\alpha \ge 0$ 时，级数在 $x = \pm 1$ 处均收敛；当 $-1 < \alpha < 0$，级数仅在 $x = 1$ 处收敛.

例 1.2.25 (反正切函数) $\arctan x = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, -1 \le x \le 1.$

解. 利用二项级数和逐项积分，当 $x \in (-1,1)$ 时，成立

$$\begin{aligned}
\arctan x &= \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^\infty (-t^2)^n\right) dt \\
&= \sum_{n=0}^\infty \int_0^x (-t^2)^n dt = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.
\end{aligned}$$

注意到最后的幂级数在 $x = \pm 1$ 均收敛，利用连续性可知上式对于 $x = \pm 1$ 也成立. □

把 $x = 1$ 代入 $\arctan x$ 的展开式，可得 Madhava- Gregory-Leibniz 公式

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots.$$

例 1.2.26 (反正弦函数) $\arcsin x = \sum_{n=0}^\infty \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, -1 < x < 1.$

解. 利用二项级数和逐项积分，可得

$$\begin{aligned}
\arcsin x &= \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^\infty \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-t^2)^n\right) dt \\
&= \sum_{n=0}^\infty \int_0^x \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-t^2)^n dt = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n+1} \\
&= \sum_{n=0}^\infty \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.
\end{aligned}$$

上式在 $|x| < 1$ 上成立. □

上面介绍的都是 Maclaurin 级数，下面再举几个在一般点处展开的例子.

例 1.2.27 求 $\sin x$ 在 $x = a$ 处的泰勒展开.

解. 根据三角公式有

$$\sin x = \sin(x - a + a) = \sin(x - a)\cos a + \cos(x - a)\sin a.$$

进而，利用正弦级数和余弦级数可得

$$\begin{aligned}
\sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos a}{(2n+1)!}(x-a)^{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin a}{(2n)!}(x-a)^{2n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left[\frac{\cos a}{(2n+1)!}(x-a)^{2n+1} + \frac{\sin a}{(2n)!}(x-a)^{2n}\right].
\end{aligned}$$

上式对于所有实数均成立. □

类似地，我们可以得到指数函数、对数函数、幂函数在 $x = a$ 点的泰勒展开式.

$$\begin{aligned}
e^x &= e^a e^{x-a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^a}{n!} x^n; \\
\ln x &= \ln a + \ln\left(1 + \frac{x-a}{a}\right) = \ln a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{na^n}(x-a)^n; \\
x^\alpha &= a^\alpha \left(1 + \frac{x-a}{a}\right)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} a^{\alpha-n}\binom{\alpha}{n}(x-a)^n.
\end{aligned}$$

例 1.2.28 求 $f(x) = \sqrt{4-x}$ 的麦克劳林展开.

解. 将其变形为 $f(x) = 2\cdot\left(1 - \frac{x}{4}\right)^{1/2}$. 那么根据二项级数可得

$$f(x) = 2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}\left(-\frac{x}{4}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n-1}}\binom{\frac{1}{2}}{n}x^n.$$

当 $|x| < 4$ 时上式成立. □

例 1.2.29 求 $f(x) = \frac{1}{x^2+4x+3}$ 在 $x = 1$ 处的泰勒展开.

解. 结合部分分式分解和等比级数，可得

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+x} - \frac{1}{3+x}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2+(x-1)} - \frac{1}{4+(x-1)}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-1}{2}} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-1}{4}}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x-1}{2}\right)^n - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x-1}{4}\right)^n\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+2}} - \frac{1}{2^{2n+3}}\right)(x-1)^n.
\end{aligned}
$$

上式成立的范围是 $|\frac{x-1}{2}| < 1$ 且 $|\frac{x-1}{4}| < 1$. 因此在 $-1 < x < 3$ 上成立上述展开式. □

例 1.2.30 求 $f(x) = \frac{e^x}{1-x}$ 的麦克劳林展开.

解. 根据幂级数的柯西乘积定理[2]，有

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)x^n.$$

□

2: 也可以用长除式得到低阶项

利用函数的 Taylor 展开，我们可以进行一些近似计算.

例 1.2.31 $\ln 3$.

解. 它超出了 $\ln(1+x)$ 的泰勒级数的收敛范围. 我们考虑

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

当 $x = \frac{1}{2}$ 时恰好为 $\ln 3$. 所以

$$\ln 3 = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\cdot 2^{2n+1}}.$$

若截断至 $n = 2$, 可得近似值 1.09; 若截断至 $n = 4$, 可得近似值 1.098. □

例 1.2.32 (Machin 公式) 圆周率 π.

解. 我们在前面已经得到了圆周率的 Leibniz 公式. 1707 年，Machin 对此做了改进.

$$
\begin{aligned}
\frac{\pi}{4} &= 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239} \\
&= 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)\cdot 5^{2n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)\cdot 239^{2n+1}}.
\end{aligned}
$$

上述公式截断至 $n=1$ 就能得到 π 的近似值 3.14，若截断至 $n=4$ 则能得到 3.1415926. □

例 1.2.33 $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$.

解. 函数 $\sin x/x$ 在 $x=0$ 处时可去间断点. 事实上，补充定义之后它可以泰勒展开为

$$\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}.$$

此幂级数的收敛半径是 $R=+\infty$. 应用逐项积分可得

$$\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)\cdot(2n+1)!}.$$

这是一个莱布尼茨型级数，其误差由截断项决定. 注意到 $n=3$ 时，

$$\frac{1}{7\cdot 7!}<0.00003.$$

所以截断到 $n=2$ 可得有效数字 0.946(1). □

1.2.5 Euler 公式

幂级数的理论完全可以推广到复级数，即讨论形如 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ 的级数，其中 $c_n,z_0,z\in\mathbb{C}$.

根据绝对收敛性，容易发现，如果一个实级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径是 R，那么复级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 在 $|z|<R$ 上也绝对收敛. 据此可以将很多实变函数延拓为复变函数. 比如 $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}x^n/n!$ 的收敛半径是无穷大，我们就可以用幂级数来定义**复指数函数**.

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=1+z+\frac{1}{2}z^2+\cdots+\frac{1}{n!}z^n+\cdots,\quad z\in\mathbb{C}.$$

利用 Cauchy 乘积定理，可得

$$\begin{aligned}e^z\cdot e^w&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n}\frac{z^j}{j!}\cdot\frac{w^{n-j}}{(n-j)!}\right)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{n!}\binom{n}{j}z^jw^{n-j}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(z+w)^n=e^{z+w}.\end{aligned}$$

这就是我们熟知的指数函数乘法法则.

类似地，我们还可以定义**复三角函数**.

$$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}=z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5-\frac{1}{7!}z^7+\cdots.$$

$$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}=1-\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{4!}z^4-\frac{1}{6!}z^6+\cdots.$$

根据上述定义，可得

$$e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = \cos z + i \sin z.$$

这就是著名的 Euler 公式.

Euler 公式

对于任意的复数 z，成立

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z.$$

特别地，如果 $z = x$ 是实数，那么

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

如果取 $x = \pi$，则

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

1.3 三角级数

1.3.1 Euler-Fourier 公式

稳定的信号（如声音、电磁波）可以看做周期函数. 通常它们是多个谐频信号的混合. 假设三个信号源分别发射了 1 rad/s, 5 rad/s, 7 rad/s 三种角频率的信号，它们的振幅依次为 $4, 3, 2$，那么信号接收器收到的混合信号函数为

$$f(t) = 4 \sin t + 3 \sin 5t + 2 \sin 7t.$$

通常我们无法先验的知晓信号的谐频序列，只能假设它是所有频率合成的结果. 此外，不同频率信号的相位可能也不尽相同. 因此，一般地我们应当假设接收器收到的信号函数为

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nt + \varphi_n).$$

利用三角公式，上述级数总可以写作

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt).$$

这就是所谓的 (2π 周期) **三角级数**.

接收端的任务是：如何从收到的混合信号 f 提取特定频率的信号？也就是如何从 f 获得 a_n, b_n？注意到下面的事实 [3]: 对于任意的正整数 n, m,

3: 这些式子称为**三角函数的正交性**. 可以用积化和差公式或者 Euler 公式验证.

成立

$$\int_0^{2\pi} \cos nt \cdot 1\, dt = 0,$$
$$\int_0^{2\pi} \sin nt \cdot 1\, dt = 0,$$
$$\int_0^{2\pi} \cos nt \cdot \sin mt\, dt = 0,$$
$$\int_0^{2\pi} \cos nt \cdot \cos mt\, dt = \begin{cases} \pi, & n = m, \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$
$$\int_0^{2\pi} \sin nt \cdot \sin mt\, dt = \begin{cases} \pi, & n = m, \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

这样，如果可以对三角级数应用逐项积分，就可以得到

Euler-Fourier 公式

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\, dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt\, dt.$$

从而，给定信号 $f(t)$，应用 Euler-Fourier 公式，我们就可以得到它的各个频率所对应的振幅与相位. 也就是说，为了提取某个频率的信息，只需要对信号函数进行恰当的积分即可.

1.3.2 Fourier 级数

现在我们来讨论数学问题. 第一个问题是：一个周期函数是否必然可以展开成三角级数？第二个问题是：如果可以展开成三角级数，那其系数是否必然来自 Euler-Fourier 公式. 第一个问题在当初争议很大，但 Fourier 极为坚信这一点；第二个问题其实是三角级数的唯一性问题.

设 f 是周期为 2π 的函数且在 $[0, 2\pi]$ 上可积，由 Euler-Fourier 公式得到的 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 和 $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ 称为 f 的 **Fourier 系数**. 称三角级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

为 $f(t)$ 的 **Fourier 级数**，记作

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt).$$

利用复数表示 Fourier 级数会更为便捷. 事实上，根据 Euler 公式 $e^{int} = \cos nt + i \sin nt$，有

$$\cos nt = \frac{1}{2}(e^{int} + e^{-int}), \quad \sin nt = \frac{1}{2i}(e^{int} - e^{-int}).$$

进而,

$$a_n \cos nt + b_n \sin nt = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{int} + \frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{-int}.$$

如果允许 n 取所有整数，那么可以令

$$c_n = \begin{cases} a_0/2, & n = 0, \\ (a_n - ib_n)/2, & n > 0, \\ (a_{-n} + ib_{-n})/2, & n < 0. \end{cases}$$

从而，f 的 Fourier 级数可以简洁地写为

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}.$$

数列 (c_n) 也称为函数 f 的 **Fourier 系数**或者**频谱**. 容易验证,

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

把函数 f 变成数列 (c_n) 的变换就是 **Fourier 变换**，记作 $\mathfrak{F}$. 也就是说，$\mathfrak{F}(f)$ 是一个数列，它的第 n 项就是 c_n，即 $\mathscr{F}(f)(n) = c_n$.

与 Taylor 级数类似，函数的 Fourier 级数未必收敛，即使收敛，其和函数也未必是 f. 但是，对于分段光滑函数，我们有下述的 Dirichlet 收敛定理.

Dirichlet 收敛定理

设 f 是周期为 2π 的分段 C^1 函数 (在有限区间上 f, f' 至多只有有限个第一类间断点)，则其 Fourier 级数在任一点均收敛，且

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt) = \frac{1}{2}\Big(f(t^+) + f(t^-)\Big).$$

换言之，如果函数在 t 点连续，那么该点的 Fourier 级数收敛到函数值；如果函数在 t 点间断，那么相应的 Fourier 级数的和是函数在该点左右极限的平均值.

这个定理的证明比较复杂，我们先做一些预备工作. 考虑 Fourier 级数的部分和，有

$$\begin{aligned} S_N(t) &:= \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int} = \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s)e^{-ins}ds \cdot e^{int} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s)\sum_{n=-N}^{N} e^{in(t-s)}ds = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(s)\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N}\cos n(t-s)\right)ds. \end{aligned}$$

引入 **Dirichlet 核**函数

$$D_N(t)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{N}\cos nt\right)=\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)t}{2\pi\sin\frac{t}{2}}.$$

可得

$$\begin{aligned}S_N(t)&=\int_0^{2\pi}f(s)D_N(t-s)ds=\int_0^{2\pi}f(t-s)D_N(s)ds\\&=\int_{-\pi}^{\pi}f(t-s)D_N(s)ds=\int_{-\pi}^{\pi}f(t+s)D_N(s)ds.\end{aligned}$$

注意到 $\int_{-\pi}^{\pi}D_N(t)dt=1$ 且 $\lim\limits_{N\to\infty}D_N(0)=+\infty$. 因此, 随着 N 增大, 上面最后一个积分式在 $t=0$ 附近的权重越来越大, 即 f 在 t 附近的取值越来越占据主导地位. 因此我们有理由猜测 $S_N(t)\to f(t)$.

Riemann-Lebesgue 引理

设 $\phi\in R([a,b])$, 则 $\lim\limits_{s\to+\infty}\int_a^b\phi(t)e^{ist}dt=0$.

证明. 取 $t_n(n=0,\cdots,N)$ 为 $[a,b]$ 的 N 等分点, 则

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{2\pi}\phi(t)e^{ist}\right|dt&=\left|\sum_{n=0}^{N-1}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\phi(t)e^{ist}dt\right|\\&=\left|\sum_{n=0}^{N-1}\int_{t_n}^{t_{n+1}}(\phi(t)-\phi(t_n))e^{ist}dt+\sum_{n=0}^{N-1}\phi(t_n)\int_{t_n}^{t_{n+1}}e^{ist}dt\right|\\&\le\sum_{n=0}^{N-1}\int_{t_n}^{t_{n+1}}|\phi(t)-\phi(t_n)|dt+\|\phi\|\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{s}|e^{ist_n}-e^{ist_{n+1}}|\\&\le\sum_{n=0}^{N-1}\omega_n^{\phi}\Delta t_n+\frac{2N\|\phi\|}{s}.\end{aligned}$$

令 $N=[\sqrt{s}]\to\infty$ 即可. □

收敛定理的证明. 但为了便于理解, 我们先假设 f 是 C^1 函数. 此时

$$\begin{aligned}S_N(t)-f(t)&=\int_{-\pi}^{\pi}\Big(f(t+s)-f(t)\Big)\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)s}{2\pi\sin\frac{s}{2}}ds\\&=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(t+s)-f(t)}{2\pi\sin\frac{s}{2}}\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)s\,ds.\end{aligned}$$

注意到 $\phi(s)=\frac{f(t+s)-f(t)}{2\pi\sin\frac{s}{2}}$ 唯一的间断点是 $s=0$. 如果 $f\in C^1$, 则 $s=0$ 是 ϕ 的可去间断点，从而 $\phi\in R([-\pi,\pi])$. 再利用 Riemann-Lebesgue 引理即可.

若 f 仅仅分段 C^1，则上述 ϕ 可能出现无穷间断点. 但是极限

$$\lim_{s\to0+}\frac{f(t\pm s)-f(t\pm0)}{s}$$

是存在的, 因此只要分别考虑左右极限即可. 注意到 $D_N(s)$ 是偶函数, 所以 $\int_0^\pi D_N(s)ds = \int_{-\pi}^0 D_N(s)ds = \frac{1}{2}$, 于是

$$\begin{aligned}
&S_N(t) - \frac{1}{2}(f(t+0)+f(t-0)) \\
&= \int_0^\pi \Big(f(t+s)-f(t+0)\Big)D_N(s)ds + \int_{-\pi}^0 \Big(f(t+s)-f(t-0)\Big)D_N(s)ds \\
&= \int_0^\pi \Big(f(t+s)-f(t+0)\Big)D_N(s)ds + \int_0^\pi \Big(f(t-s)-f(t-0)\Big)D_N(s)ds.
\end{aligned}$$

只要说明最后两项趋于零. 以第一项为例,

$$\int_0^\pi \Big(f(t+s)-f(t+0)\Big)D_N(s)ds = \int_0^\pi \frac{f(t+s)-f(t+0)}{2\pi\sin\frac{s}{2}}\sin\Big(N+\frac{1}{2}\Big)s\,ds.$$

记 $\phi_+(s) = \frac{f(t+s)-f(t+0)}{2\pi\sin\frac{s}{2}}(s\in(0,\pi])$, 它在 $s=0$ 处存在右极限，但由于 f 未必连续，所以 ϕ_+ 可能有其他间断点，但它们都是第一类间断点，因此 ϕ 在 $[0,\pi]$ 上可积，进而适用 Riemann-Lebesgue 引理. □

Dirichlet 收敛定理意味着一个光滑性较好的函数总能写成三角级数——它的 Fourier 级数. 那这种展开是唯一的么？也就是说，它的系数是否一定符合 Euler-Fourier 公式呢？Cantor 回答了这个问题.

Cantor-Lebegues 唯一性定理

设 S 是个闭的可列数集. 若 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^\infty (a_n\cos nt + b_n\sin nt) = 0 (t \in [0,2\pi]-S)$, 则 $a_0 = a_n = b_n = 0$.

Cantor 定理的证明更为复杂，有兴趣的读者可以查阅相关资料. 值得指出，Cantor 提出集合论的一大动因就是这个唯一性定理!

此外，Fourier 分析中还有一个深刻的定理，它的证明也超出我们的目标，仅陈述如下.

Parseval 恒等式

设 f,g 在 $[0,2\pi]$ 上可积，则

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathfrak{F}(f)(n)\cdot\overline{\mathfrak{F}(g)(n)}.$$

特别地，如果 $f=g$，那么

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[f(t)]^2dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2 = \frac{1}{4}a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2).$$

例 1.3.1 (方波) 设函数 $f(t)$ 是周期为 2π 的函数，它在 $[-\pi,\pi)$ 上满足

$$f(t) = \begin{cases} -1, & -\pi \le x < 0, \\ 1, & 0 \le x < \pi. \end{cases}$$

试求其 Fourier 级数及相应的和函数.

解. 因为周期函数在任何一段周期上积分相同，本例中我们在 $[-\pi,\pi]$ 上做定积分. 从而，Fourier 系数为

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\cdot\cos nt\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1\cdot\cos nt\,dt = 0, (n\geq 0) \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt \\
&= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\sin nt\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin nt\,dt = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin nt\,dt \\
&= \frac{2}{n\pi}(1-\cos n\pi) = \frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n).(n\geq 1)
\end{aligned}$$

所以，f 的 Fourier 级数为

$$f(t) \sim \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)t.$$

根据 Dirithlet 收敛定理，级数在 $t=k\pi(k\in\mathbb{Z})$ 处收敛到函数左右极限的平均值 $\frac{1}{2}(-1+1)=0$，其它点处收敛到函数 f，即

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)t = \begin{cases} f(t), & t\neq k\pi, \\ 0, & t=k\pi. \end{cases}$$

特别地，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)t}{2n-1} = \frac{\pi}{4},\quad t\in(0,\pi).$$

如果用 $t=\pi/2$ 代入，可以再次得到圆周率的 Leibniz 公式. □

例 1.3.2 (锯齿波) 设函数 $f(t)$ 是周期为 2π 的函数，它在 $[-\pi,\pi)$ 上满足 $f(t)=t$. 求函数 f 的 Fourier 展开，并以此计算级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ 的和.[4]

解. 根据对称性，Fourier 系数为

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\cos nt\,dt = 0, (n\geq 0) \\
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} t\sin nt\,dt = -\frac{2}{n}\cos n\pi = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}.(n\geq 1)
\end{aligned}$$

根据狄利克雷收敛定理，当 $t\neq(2k+1)\pi(k\in\mathbb{Z})$ 时，函数 f 可展开为 Fourier 级数，即

$$t = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nt,\quad t\in(-\pi,\pi).$$

根据 Parseval 恒等式，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{\pi^2}{6}.$$

4: 此级数的求和问题称为 **Basel 问题**，由 Pietro Mengoli 在 1650 年提出，1734 年被 Euler 解决. Euler 因此一举成名. Euler 的观察极为漂亮,他将函数 $\sin x/x$ 类比于多项式，将它按零点展开为无穷乘积

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).$$

左边 Taylor 展开，右边乘积展开，比较系数即得. 当然，这个观察的严格证明是比较复杂的.

此外，如果令 $t = x - \pi (0 < x < 2\pi)$，那么

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2}, \quad x \in (0, 2\pi).$$

这也是一个常用的级数. □

例 1.3.3 设函数 $f(t)$ 是周期为 2π 的函数，它在 $[-\pi, \pi)$ 成立 $f(t) = |t|$. 求函数 f 的 Fourier 展开.

解. 由于 f 分段光滑并且连续，所以它的 Fourier 级数在每个点处都收敛到函数 f. 下面计算它的 Fourier 系数，注意到 f 是偶函数，所以

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t| \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \, dt = \pi, \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos nt \, dt = \frac{2}{n^2 \pi} ((-1)^n - 1), (n \geq 1) \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t| \sin nt \, dt = 0. (n \geq 1) \end{aligned}$$

因此，对任意 $t \in [-\pi, \pi]$ 成立

$$|t| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)t}{(2n-1)^2}.$$

代入 $t = 0$ 可得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

根据

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{\pi^2}{8},$$

可以再次得到巴塞尔问题的解 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 = \pi^2/6$.

如果比较例1.3.2和例1.3.3，则可发现，当 $0 \leq t < \pi$ 时，t 可以写为两种不同形式的三角级数. 这并不于 Cantor 定理冲突，因为它们仅在半个周期上想等. □

最后简要说明**一般周期函数函数的 Fourier 展开**. 设 $f(t)$ 是以 $T = 2\pi/\omega$ 为周期函数分段光滑函数，令 $g(s) = f(s/\omega)$，那么 $g(s)$ 是 2π 为周期的分段光滑函数. 根据 Dirichlet 收敛定理，可知

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{ins} = \frac{1}{2}\Big(g(s^+) + g(s^-)\Big)$$

其中

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(s) e^{-ins} ds.$$

由于 $f(t)=g(\omega t)$，将 $s=\omega t$ 代入前两式，有得到 f 的 Fourier 展开

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t} = \frac{1}{2}\Big(f(t^+)+f(t^-)\Big),$$

$$c_n = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega} g(\omega t)e^{-in\omega t}dt = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}dt.$$

可见，周期不是 2π 并不是什么障碍，换元即可.

1.3.3 正弦级数与余弦级数

一般说来, 一个函数的 Fourier 级数既含有正弦项, 又含有余弦项. 但是, 如果函数是奇函数，那么它的 Fourier 级数只含有正弦项 (如例1.3.1和例1.3.2)；如果函数是偶函数，那么它的 Fourier 级数只含有常数项和余弦项 (如例1.3.3). 事实上，如果 f 是奇函数，那么 $f(t)\cos nt$ 也是奇函数，进而

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt = 0.$$

如果 f 是偶函数，那么 $f(t)\sin nt$ 是奇函数，于是

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt = 0.$$

因此，如果希望把函数展开成正弦级数或余弦级数，只要对它进行奇延拓或偶延拓，然后在展开为 Fourier 级数即可. 也就是说，给定 $(0,\pi)$ 上的函数 $f(t)$，我们在区间 $(-\pi,0]$ 内补充函数 $f(t)$ 的定义，使之称为 $(-\pi,\pi)$ 上的奇函数或偶函数，然后将延拓后的函数展开成 Fourier 级数. 这个级数必定是正弦级数或余弦级数，它在 $(0,\pi)$ 上的限制就是原始 $f(t)$ 的正弦级数或余弦级数展开式.

正弦展开和余弦展开

设函数 $f(t)$ 在 $[0,\pi]$ 上分段光滑，则它在 $(0,\pi)$ 上的连续点处可以展开为正弦级数和余弦级数.

正弦展开式

$$f(t)\sim\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin nt \qquad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin nt\,dt,\quad n\geq 1.$$

余弦展开式

$$f(t)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nt \qquad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos nt\,dt,\quad n\geq 0.$$

例 1.3.4 求函数 $f(t)=t(0<t<\pi)$ 的正弦展开和余弦展开.

解. 将其奇延拓为 $f(t)=t(-\pi<t<\pi)$，根据例1.3.2可得正弦展开式. 为求余弦展开，只需偶延拓为 $f(t)=|t|(-\pi<t<\pi)$，这就是例1.3.3. □

1.3.4 Fourier 变换

假设 $f(t)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的可微函数，一般而言它不是周期函数，我们无法把它在 $(-\infty,+\infty)$ 上展开为 Fourier 级数. 但是我们可以用截断的方式逼近. 我们截取它在 $[-T/2,T/2]$ 上的部分，把它按照周期 T 展开为 Fourier 级数，那么在 $(-T/2,T/2)$ 上成立

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{in\omega t},\quad \omega=2\pi/T.$$

下面考察 $T\to+\infty$（即 $\omega\to 0$）时发生的现象.

基频为 ω 时，所有谐频为 $\{n\omega\}$，相应的频谱为 $\{c_n\}$. 当 ω 越来越小时，谐频会越来越密集，但频谱会变小. 为此，我们引入**正规化频谱/谱密度**

$$c_\xi=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{1}{\pi\omega}}^{\frac{1}{\pi\omega}}f(t)e^{-i\xi t}dt,\quad \xi\in\{n\omega\}.$$

易知 $c_n=\omega c_{n\omega}$，进而当 $|t|<\pi/\omega$ 时成立

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\omega c_{n\omega}e^{in\omega t}=\sum_{\xi\in\{n\omega\}}c_\xi e^{i\xi t}\Delta\xi.$$

当 $\omega\to 0$ 时, 频谱会从离散集合 $\{n\omega\}$ 变成连续集合 $\mathbb{R}$, 且谱密度变为

$$c(\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\xi t}dt.$$

此处需要假设 $\int_{-\infty}^{\infty}f(t)dt$ 绝对收敛. 从函数 $f(t)$ 到函数 $c(\xi)$ 的变换就叫做 **Fourier 变换**，记作 $c=\mathfrak{F}(f)$. 显然这是有限区间上函数的 Fourier 变换的推广. 进一步，Fourier 级数 (1.3.4) 变为

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}c(\xi)e^{i\xi t}d\xi.$$

它告诉我们从频谱 $c(\xi)$ 可以重组出函数 $f(t)$.