同济大学课程考核试卷（期中试卷评分标准）
2022—2023 学年第二学期

命题教师签名：　　　　　　　　审核教师签名：

课号：122138　　　　课名：高等数学 A 下　　　　考试考查：

此卷选为：期中考试(√)、期终考试( )、重考( )试卷

年级_____专业______________学号__________姓名__________任课教师_________

题号	一 (30)	二 (10)	三 (8)	四 (12)	五 (10)	六 (10)	七 (10)	八 (10)	总分
得分									

（注意：本试卷共八大题，三大张，满分 100 分．考试时间为 100 分钟。要求写出解题过程，否则不予计分）

一、填空选择题(每小题 3 分, 共 30 分)

1. 已知$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=2$，则$\left[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})\right]\cdot(\vec{c}+\vec{a})=$__4__.

2. 将 xOy 坐标面上的曲线 $4x^2-y^2=1$ 绕 x 轴旋转一周，所生成的旋转曲面方程为__$4x^2-(y^2+z^2)=1$__.

3. 若$a\neq 0$，则$\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,a)}\left(1+\frac{1}{xy}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}=$__$e^{\frac{1}{a}}$__.

4. 函数 $u=xy+\sin\frac{y}{2}+e^{xz}$ 在点 $(1,\pi,0)$ 处的全微分为__$du=\pi dx+dy+dz$__.

5. 函数 $u=xyz$ 在点 $(5,1,2)$ 处沿从点 $(5,1,2)$ 到点 $(9,4,14)$ 的方向的方向导数为__$\frac{98}{13}$__.

6. 曲线 $x=\int_0^t e^u\cos u\,du$，$y=2\sin t+\cos t$，$z=1+e^{3t}$ 在点 $(0,1,2)$ 处的切线方程为__$\frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{3}$__.

7. 方程 $F(x,y,z)=0$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 的某个邻域内恒能唯一确定一个连续且有连续偏导数的函数 $y=f(x,z)$，需要的充分条件是：__(1) $F(x,y,z)$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 的某个邻域内一阶偏导数连续；(2) $F(x_0,y_0,z_0)=0$；(3) $F_y(x_0,y_0,z_0)\neq 0$__.

8. 函数 $z=f(x,y)$ 在某点处偏导数存在是其在该点处连续的__D__条件.

A. 充分不必要　　B. 必要不充分　　C. 充分必要　　D. 无关

9. 将二次积分 $\int_0^2 dy\int_{y^2}^{2y} f(x,y)dx$ 交换积分次序后，得__A__.

A. $\int_0^4 dx\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$　　B. $\int_0^2 dx\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$

C. $\int_0^4 dx\int_{2x}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$　　D. $\int_0^2 dx\int_{2x}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$

10. 设 D 是由 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 围成的区域，则$\iint_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)dxdy=$__$\frac{\pi ab}{2}$__.

二、(10 分) 设直线 $L_1:\frac{x}{4}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$，$L_2:\begin{cases}z-5x=-6,\\ z-4y=3,\end{cases}$ $L_3:\begin{cases}y-2x=4,\\ z-3y=5,\end{cases}$

求平行于 L_1 并分别与 L_2，L_3 都相交的直线 L 的方程.

解 1：设过 L_2 的平面束：$z-5x+6+k(z-4y-3)=0$，则

$4\cdot(-5)+1\cdot(-4k)+1\cdot(1+k)=0$，解得　$k=-\frac{19}{3}$，

故 L_2 与 L 确定的平面为：$15x-76y+16z-75=0$，

设过 L_3 的平面束：$y-2x-4+l(z-3y-5)=0$，则

$4\cdot(-2)+1\cdot(1-3l)+1\cdot l=0$，解得　$l=-\frac{7}{2}$，

故 L_3 与 L 确定的平面为：$4x-23y+7z-27=0$，

所求直线 L：$\begin{cases}15x-76y+16z-75=0,\\ 4x-23y+7z-27=0.\end{cases}$

解 2：设 L 与 L_2，L_3 的交点分别为$\left(\frac{z+6}{5},\frac{z-3}{4},z\right)$，$(x,2x+4,6x+17)$，

则　$\frac{x-\frac{z+6}{5}}{4}=\frac{2x+4-\frac{z-3}{4}}{1}=\frac{6x+17-z}{1}$，解得：$x=\frac{-107}{41}$，(或 $z=\frac{99}{41}$，)

所求直线 L：$\frac{x+\frac{107}{41}}{4}=\frac{y+\frac{50}{41}}{1}=\frac{z-\frac{55}{41}}{1}$.　(或　$\frac{x-\frac{69}{41}}{4}=\frac{y+\frac{6}{41}}{1}=\frac{z-\frac{99}{41}}{1}$.　)

三、(8 分) 求 $\iiint\limits_{\Omega}(x+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 围成.

解：$\iiint\limits_{\Omega} x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$，

$$\iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\rho\mathrm{d}\rho\int_{\rho}^{\sqrt{1-\rho^2}} z\mathrm{d}z$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\rho\,\frac{1-\rho^2-\rho^2}{2}\,d\rho=\pi\left(\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\pi}{8},$$

$$\iiint\limits_{\Omega}(x+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega} x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{\pi}{8}.$$

四、(12 分) 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 确定的隐函数，试问函数 $z=z(x,y)$是否存在极值？若存在极值，请计算出极值并指出是极大值还是极小值.

解：存在极值.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x-3y}{y+z},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-3x+10y-z}{y+z},$$

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1-(\frac{\partial z}{\partial x})^2}{y+z},\qquad B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{-3-\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}}{y+z},\qquad C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{10-2\frac{\partial z}{\partial y}-(\frac{\partial z}{\partial y})^2}{y+z},$$

解得驻点：$(9,3)$和$(-9,-3)$，

判别$AC-B^2$的符号都大于零，

在$(9,3)$取极小值3，在$(-9,-3)$取极大值-3.

注：二阶导数也可为：

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{(y+z)-(x-3y)z_x}{(y+z)^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{-3(y+z)-(x-3y)z_y}{(y+z)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{(10-z_y)(y+z)-(-3x+10y-z)(1+z_y)}{(y+z)^2}.$$

五、(10 分) 在曲面 $z=xy$ 上求一点，使该点的法线垂直于平面 $x+3y+z=0$，并写出该点处的切平面方程和法线方程.

解：设切点为 (x_0,y_0,z_0)，则法线向量为 $(y_0,x_0,-1)$，

由已知得 $\quad \frac{y_0}{1}=\frac{x_0}{3}=\frac{-1}{1}$,

解得 $\quad y_0=-1$，$x_0=-3$，$z_0=3$，

故切平面方程为 $\quad x+3y+z+3=0$，

法线方程为 $\quad \frac{x+3}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{1}$.

六、(10 分) 求圆周 $(x+1)^2+y^2=1$ 上的点与定点 $(0,1)$ 的距离的最大值和最小值.

解：点 (x,y)与定点 $(0,1)$ 的距离$\sqrt{x^2+(y-1)^2}$，

令 $\quad L(x,y,\lambda)=x^2+(y-1)^2+\lambda[(x+1)^2+y^2-1]$

$$\begin{cases}2x+2\lambda(x+1)=0\\ 2(y-1)+2\lambda y=0\\ (x+1)^2+y^2=1\end{cases}$$

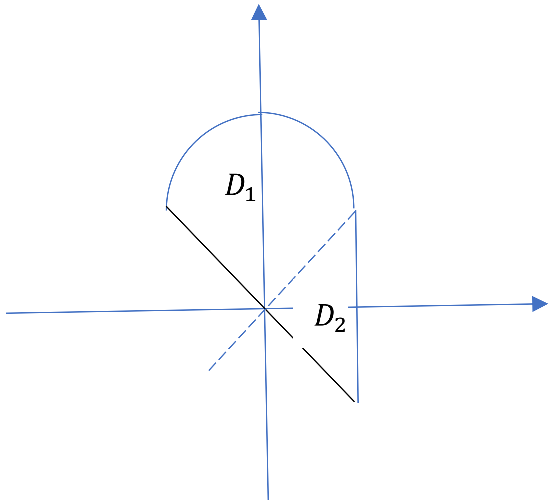
解得驻点：$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-1,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，

在点$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$取得最小值 $\sqrt{2}-1$（或$\sqrt{3-2\sqrt{2}}$），

在点$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-1,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$取最大值 $\sqrt{2}+1$（或$\sqrt{3+2\sqrt{2}}$）.

七、(10 分) 计算二重积分 $\iint\limits_D x\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由曲线 $y=4-x^2$，直线 $y=-3x$ 及直线 $x=1$ 围成的位于直线 $x=1$ 左边的部分.

解：作直线 $y=3x$，得 $D=D_1+D_2$，



D_1关于 y 轴对称，D_2关于 x 轴对称，

$x\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)$ 关于 x 和 y 都是奇函数，

$\iint\limits_{D_1} x\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，

$\iint\limits_{D_2} x\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，

得 $\iint\limits_{D} x\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

$=\iint\limits_{D_1} x\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2} x\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=0$.

八、(10 分) 设 $u=u(x,y)$ 有连续的二阶偏导数，且 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\equiv 0$，

（1）证明：在变换 $\begin{cases}\xi=x-y\\ \eta=x+y\end{cases}$ 之下，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\equiv 0$ 可变换成 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}\equiv 0$；

（2）若 $u(x,2x)=x$，$u_x(x,2x)=x^2$，求 $u=u(x,y)$.

（1）证明：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial \xi}\dfrac{\partial \xi}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial \eta}\dfrac{\partial \eta}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial \xi}+\dfrac{\partial u}{\partial \eta}$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial(\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta})}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial\eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial\xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}(-1)+\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial(-\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta})}{\partial y}=-\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial\eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial\xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

代入 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\equiv 0$ 得：$\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial\eta}\equiv 0$.

（2）由 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial\eta}\equiv 0$ 得 $u(\xi,\eta)=f(\xi)+g(\eta)$，

由 $\begin{cases}\xi=x-y\\ \eta=x+y\end{cases}$，得 $\begin{cases}u(x,y)=f(x-y)+g(x+y),\\ u_x(x,y)=f'(x-y)+g'(x+y),\end{cases}$

又由 $u(x,2x)=x$，$u_x(x,2x)=x^2$，代入上式，可得 $\begin{cases}f(-x)+g(3x)=x,\\ f'(-x)+g'(3x)=x^2,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}f(-x)=\dfrac{1}{4}(x-x^3-3C),\\ g(3x)=\dfrac{1}{4}(3x+x^3+3C),\end{cases}$ 或者 $\begin{cases}f(x)=\dfrac{1}{4}(-x+x^3-3C),\\ g(x)=\dfrac{1}{4}(x+\dfrac{x^3}{27}+3C),\end{cases}$

$$u(x,y)=f(x-y)+g(x+y)=\frac{(x+y)^3}{108}+\frac{(x-y)^3}{4}+\frac{y}{2}.$$