1. (单选题, 3 分)

设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，则下列说法中，**不一定成立的是**__________。

A.

存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$

B.

如果 $\boldsymbol{A}$ 行等价于单位阵 $\boldsymbol{E}$，则 $|\boldsymbol{B}|\neq 0$

C.

如果 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{PB}=\boldsymbol{E}$

D.

如果 $|\boldsymbol{A}|>0$，则 $|\boldsymbol{B}|>0$

我的答案：

✓ D

2. (单选题, 3 分)

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解，下列向量中

$$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\quad \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3,\quad \frac{1}{5}(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3),\quad 3\boldsymbol{\alpha}_1-4\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$$

是导出组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解向量的个数为__________。

A. 3

B. 4

C. 1

D. 2

我的答案：

B

3. (填空题, 3 分)

设 α_1、α_2、α_3 均为 3 维列向量，已知矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，且 $|\boldsymbol{A}|=2$，将 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 列乘以-3 加到第 3 列，得到矩阵 $\boldsymbol{B}$，再交换 $\boldsymbol{B}$ 的第 1 列与第 2 列，得到矩阵 $\boldsymbol{C}$，则 $|\boldsymbol{C}|=$________。

我的答案：

(1) -2

4. (填空题, 3 分)

设 $D=\begin{vmatrix}1 & 2 & -3 & 1\\ 3 & -3 & 4 & 1\\ 7 & 2 & -4 & 1\\ 8 & -2 & 5 & 1\end{vmatrix}$，$M_{ij}$ 是元素 a_{ij} 的余子式，则 $M_{11}+M_{21}+M_{31}+M_{41}=$________。

我的答案：

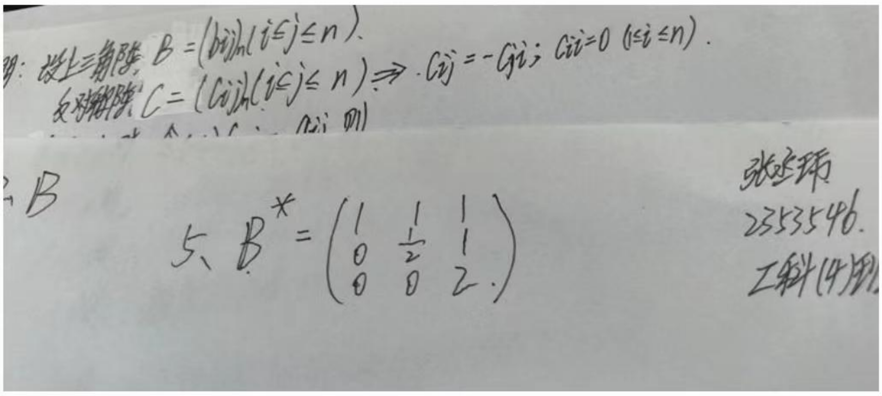
(1) 2

5. (填空题, 3 分)

已知 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{B}^{*}=$__________。

我的答案：

(1)



6. (填空题, 3 分)

若3阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，且 $\left|\boldsymbol{A}-\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\right|=\left|\boldsymbol{A}-\frac{1}{3}\boldsymbol{E}\right|=\left|\boldsymbol{A}-\frac{1}{4}\boldsymbol{E}\right|=0$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为3阶单位阵，则矩阵

$\boldsymbol{B}^{-1}-\boldsymbol{E}$ 的迹（即对角线上元素之和）$Tr\left(\boldsymbol{B}^{-1}-\boldsymbol{E}\right)=$__________。

我的答案：

(1) 6

7. (简答题, 82 分)

二、(12分) 设有向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2a\\1+a\\4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\a+3\end{pmatrix}$ 及向量 $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}a+2\\3\\a+5\end{pmatrix}$，问当参数 a 取何值时，

(1) $\boldsymbol{\beta}$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示； (2) $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 唯一地线性表示；

(3) $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，但表示式不唯一，并求出表示式。

三、(10 分) 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}6&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{*}=3\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}+4\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{2}-\boldsymbol{E}$，求矩阵 $\boldsymbol{B}$。

四、(16分) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\beta_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}-1\\3\\4\end{pmatrix}$，向量空间 $V_1=span\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$，

$V_2=span\{\beta_1,\beta_2\}$，

(1) 求矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2)$ 的满秩分解； (2) 求向量空间 V_1,V_2 的交与和的维数及一组基。

五、(10分) 设 V_1 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的 n 阶上三角阵的全体，V_2 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的 n 阶上反对称阵的全体，

(1) 证明：$M_n(\mathbb{R})$ (实数域 $\mathbb{R}$ 上的 n 阶方阵全体) 中的任意 n 阶方阵 $A=(a_{ij})_n$ 均可表示为一个上三角阵和一个反对称阵之和；

(2) 证明：$M_n(\mathbb{R})=V_1\oplus V_2$。

六、(18 分) 定义线性空间 $\mathbb{R}^3=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\middle| x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}\right\}$ 上的变换 T 如下：对任意 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$，

$T(\boldsymbol{x})=T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1-x_2\\x_2-x_3\\x_1\end{pmatrix}$，(1) 证明：$T$ 是 $\mathbb{R}^3$ 上的一个线性变换；(2) 求 T 在 $\mathbb{R}^3$ 的基

$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ 下的矩阵；(3) 求 T 的像空间与核空间的维数和一组基。

七、(16分) 已知 n 阶矩阵 A,B 满足 $BA=O,A^2=A$，证明：

(1) $R(A)+R(B)\le n$；

(2) $R(A)+R(A-E)=n$；

(3) 若齐次线性方程组 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 没有非零的公共解，则 $R(A)+R(B)=n$。