同济大学课程考核试卷(B 卷)
2009—2010 学年第一学期

课名：线性代数（2 学分）　　　考试考查：**考查**

（注意：本试卷共七大题，三大张，满分 100 分. 考试时间为 100 分钟.要求写出解题过程，否则不予计分）

一、填空与选择题(6-8 小题均为单选题)(24 分)

1、 设 A 为 3 阶方阵，已知 $|A|=-2$，把 A 按行分块为 $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$，则行列式 $\begin{vmatrix} a_3-2a_1 \\ 3a_2 \\ a_1 \end{vmatrix}=$ ___6_____.

解：根据行列式的最后一个性质（书上的那个），

$\begin{vmatrix} a_3-2a_1 \\ 3a_2 \\ a_1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_3 \\ 3a_2 \\ a_1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -2a_1 \\ 3a_2 \\ a_1 \end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix} a_3 \\ 3a_2 \\ a_1 \end{vmatrix}=-3\begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{vmatrix}=6$，$\begin{vmatrix} -2a_1 \\ 3a_2 \\ a_1 \end{vmatrix}=0$，所以原式为 **6**

2、 已知 4 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$，且 M_{ij} 和 A_{ij} 分别为 D 中元素 a_{ij} 的余子式和代数余子式，则 $\sum_{j=1}^{4} A_{4j}=$ __0_________.

解：根据代数余子式性质 $\sum_{j=1}^{4} A_{4j}=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$.(这是代数余子式经常出的一种形式的习题)

3、 已知 3 阶方阵 A 的特征值分别为 1，2，-3，则 $\left|A^*+3A+2E\right|=$ __25____________.

解：根据特征值的性质，有 $|A|=-6$，设 $B=A^*+3A+2E$，则 B 对应的三个特征值分别为

$\lambda_1=\frac{-6}{1}+3+2$，$\lambda_2=\frac{-6}{2}+6+2$，$\lambda_3=\frac{-6}{-3}-9+2$，则

$\left|A^*+3A+2E\right|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=-1\times5\times(-5)=25$

4、设 $\alpha_1=(k,1,1),\alpha_2=(0,2,3),\alpha_3=(1,2,1)$，则当__ $k=\frac{1}{4}$ _________时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线

性相关.

解：因为这三个向量构成的矩阵为方阵，则对该矩阵求行列式，因为三个向量线性相关，所以行列式的值等于 0，解得 $k=\frac{1}{4}$

5、已知二次型 $f=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2ax_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$ 为正定二次型，则参数 a 满足___ $-\frac{4}{5}<a<0$ ___________.

解：先写出二次型对应的矩阵，为 $\begin{bmatrix} 1 & a & -1 \\ a & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$，由于二次型是正定二次型，则矩阵也一定是正定矩阵，根据正定矩阵的性质，它的顺序主子式都应大于 **0**，则有

$$\begin{cases} 1>0 \\ 1-a^2>0 \\ -4a-5a^2>0 \end{cases} \longrightarrow -\frac{4}{5}<a<0$$

6、 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，$m>3,n>3$，若 A 与 B 行等价，则 __D______________.

(A).若A的前三行线性无关，则B 的前三行也线性无关

(B).若A的前三列线性无关，则B 的前三列也线性无关

(C).若A的左上角的三阶行列式非零，则B 的左上角的三阶行列式也非零

(D).以上都不对

解：因为 A 是 $m\times n$ 矩阵，且 A 与 B 行等价，那么可知，在经过初等行变换后，A 与 B 行线性无关的个数相同，但并不能保证线性无关的行都是相对应的（比如 m=4，A 的前三行线性无关，而 B 可能是后三行线性无关，但他们行等价。）所以 A 错误，同理 B，C 错，

反例：$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$。固选 D

7、 设 A,B,C 为同阶方阵，且 $ABC=E$，则下列各式中不成立的是___B_________.

(A). $CAB=E$　　　　(B). $C^{-1}A^{-1}B^{-1}=E$

(C). $BCA=E$　　　　(D). $B^{-1}A^{-1}C^{-1}=E$

解：因为 $ABC=E$，所以我们可知 $A^{-1}=BC$ 和 $C=AB^{-1}$，又因为 $XX^{-1}=X^{-1}X=E$，所以 A，C 正确，现在，对 $ABC=E$ 两边求逆，有 $C^{-1}B^{-1}A^{-1}=E$，可

以看出 B 错，对于 D，$A^{-1}=BC$，所以 $A^{-1}C^{-1}=B$，所以 $CA=B^{-1}$，带入 **D**，可知其正确性

8、 非齐次线性方程组 $Ax=b$ 中，A 是 $m\times n$ 矩阵，$R(A)=r$，则____A___________.

$(A).\ r=m$时方程组有解　　　　$(B).\ r=n$时方程组有唯一解

$(C).\ m=n$时方程组有唯一解　　$(D).\ r<n$时方程组有无穷多解

解：这题我直接看到 A 就选了，其它的也不好分析，因为他们的条件和结论根本没什么明显联系。

分析 A，因为 $r=m$，所以可知 **A** 一定是行满秩，则增广矩阵的秩 $\bar{r}=m$（因为增光矩阵也只有 **m** 行）。现在，有 $r=\bar{r}$，即系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩，那 $Ax=b$ 一定有解，至于是无穷解还是唯一解，要看 n（但是本题 A 选项只是说有解）

二、(8 分)计算行列式 $\begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c & a & b & 1 \\ \dfrac{b+c}{2} & \dfrac{a+c}{2} & \dfrac{a+b}{2} & 1 \end{vmatrix}$

解：观察发现，第四行和第二行，第三行有代数加法的关系，于是利用行列式的性质

$$\begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c & a & b & 1 \\ \dfrac{b+c}{2} & \dfrac{a+c}{2} & \dfrac{a+b}{2} & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_4-\frac{1}{2}r_3-\frac{1}{2}r_2} \begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c & a & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0$$，（就是第四行减去第三行和第二行的二分之一倍。）

三、(15 分)已知线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ \quad x_2+2x_3+2x_4=1 \\ -x_2+(a-3)x_3-2x_4=b \\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1 \end{cases}$，试问参数 a,b 取何值时线性方程组无解？取何值时有唯一解？取何值时有无穷多解，求出其通解.

解：一看到这种系数矩阵是方阵的球方程组解的形式的题，直接对方阵求其对应行列式，令其为 0.

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & (a-3) & -2 \\ 3 & 2 & 1 & a \end{vmatrix}=0$，解得 **a=1**，于是把 **a=1** 带入增广矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & b \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$，初

等变换后有$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,所以，当$b \neq -1$时，方程组无解，（因为系数矩阵的秩小于增广矩阵的秩），当$b=-1$，系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩，但小于 **A** 的列数，所以有无穷解，且将上式化成最简式可得到基础解系为$k_1\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,**k** 均为常数。

最后，当$a \neq 1$时，方程组有唯一解。

四、(15 分) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3+2ax_2x_3$，经正交变换 $x=Py$ 后化为标准形 $f=y_1^2+y_2^2+10y_3^2$，求参数 a 及所用的正交变换矩阵 P.

解：最烦做这种题了- -要写好多好多。。。

（1）根据二次型，可得到它所对应的矩阵形式为$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & a \\ -2 & a & 5 \end{bmatrix}$,因为标准型所对应的系数即是对应矩阵的特征值，在根据特征值之积 **10** 等于对应行列式的值，我们可以解除 **a=0** 或 **a=-4.** 又因为 **a=0** 时，解得矩阵的特征值为 **1280/4289 ,5 , 4289/640,**很明显者不是标准型所对应的系数，所以 **a=-4**（应该还有其它方法可以避过检验 **a** 的，但一般遇到两种情况以上的我都会检验，纯属个人习惯。）

（2）$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$，当特征值为 **1** 时，$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{bmatrix}$的解就是对应的特征向量(**2** 重)，为$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$,$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，当特征值为 **10** 时，解得其对应特征向量为$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$,因为不同特征值对应的特征向量必定正交（实对称阵中），所以现在只需把一开始求得的两个通过施密特正交法（自己翻书或者百度去）正交化后，对全体单位化就行了。

施密特正交法后得到$\xi_1=\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\xi_2=\begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{8}{5} \\ 0 \end{bmatrix}$，$\xi_3=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$，单位化有 **p1=**$\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，**p2=**

$\frac{4}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}\frac{4}{5}\\ \frac{8}{5}\\ 0\end{bmatrix}$，p3=$\frac{3}{2}\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\ -1\\ 1\end{bmatrix}$，所以正交变换的矩阵 P=（p1，p2，p3）

五、(12 分)设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$，已知 $A^*X=A^{-1}+2X$，其中 A^* 是 A 的伴随矩阵，求 X.

解：因为伴随阵 A^* 未知，所以等式两边左乘 A ，有 $|A|X=E+2AX$， $|A|$ =4， 所以

（$4E$-$2A$） $X=E$，解得 $X=\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0\\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4}\end{bmatrix}$.

六、(10 分)设向量组 α_1， α_2， α_3 线性无关，$\beta_1=k_1\alpha_1+\alpha_2+k_1\alpha_3$，$\beta_2=\alpha_1+k_2\alpha_2+(k_2+1)\alpha_3$，

$\beta_3=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$， 试讨论当 k_1,k_2 取何值时，组 β_1,β_2,β_3 线性相关、线性无关?

解：由线性表示的定义，假设存在一组 l，使得

$$l_1\beta_1+l_2\beta_2+l_3\beta_3=l_1(k_1\alpha_1+\alpha_2+k_1\alpha_3)+l_2(\alpha_1+k_2\alpha_2+(k_2+1)\alpha_3)+l_3(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)$$

化简后有

$$l_1\beta_1+l_2\beta_2+l_3\beta_3=(l_1k_1+l_2+l_3)\ \alpha_1+(l_1+l_2k_2+l_3)\alpha_2+(l_1k_1+l_2(k_2+1)+l_3)\ \alpha_3$$

，因为 α_1， α_2， α_3 线性无关，所以 $\begin{cases}(l_1k_1+l_2+l_3)=0\\ (l_1+l_2k_2+l_3)=0\\ (l_1k_1+l_2(k_2+1)+l_3)=0\end{cases}$ 则关于未知数 l 的方程组的对应行列式为 $\begin{vmatrix}k_1 & 1 & k_1\\ 1 & k_2 & k_2+1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$，然后用第三题的思想--。。。解得 $k_1=1$或$k_2=0$，因为系数方阵对应的行列式为 0，所以对关于未知数 l 的方程组来说，一定有非零解，即说明此时 β_1,β_2,β_3 线性相关，反之，若 $k_1=1$且$k_2=0$，则 β_1,β_2,β_3 线性无关。

七、(1) （8 分）设 A 为 n 阶方阵，λ 是 A 的特征值，ξ 为对应的特征向量，μ 是 A^T 的特

征值，η 为对应的特征向量． 若 $\lambda \neq \mu$，证明：ξ, η 正交.

(2)（8 分）设 A, B 为 n 阶矩阵，且满足 $2B^{-1}A = A - 4E$，其中 E 为 n 阶单位阵． 证明：$B-2E$ 为可逆矩阵，并求 $(B-2E)^{-1}$

解：（1）由题可知，$A\xi = \lambda\xi$，$A^T\mu = \eta\mu$，所以，对等式 $A\xi = \lambda\xi$ 两边取转置，有 $\xi^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = \lambda\xi^{\mathrm{T}}$，然后对其右乘特征向量 μ，得到 $\xi^T A^T \mu = \lambda \xi^T \mu$, 所以可得

$\xi^T n\mu = \lambda \longrightarrow (n-\lambda)\xi^T\mu = 0$，题目已给出 $\lambda \neq \mu$，所以 $\xi^T\mu$ 为 **0**，即 ξ, η 正交.

（2）看逆这玩意确实很不爽－－。。。。对等式左乘 B，有 $2A = BA - 4B \longrightarrow B(A-4E) - 2A = 0 \longrightarrow B(A-4E) - 2A + 8E = 8E$

所以原式等于 $(B-2E)\dfrac{(A-4E)}{8} = E$，现在，你该知道答案了吧。