《线性代数》2014-2015学年第二学期重修考试试卷及答案A

线性代数 课程 闭卷 课程类别：考试

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
分数									
评卷人									

一、选择题（每小题3分，共15分）

1、设A,B均为3阶方阵，且$|A|=3,|B|=-2$，则$|AB^T|=$（ A ）

A. −6　　B. 6　　C. −2/3　　D. −3/2

2、$\begin{vmatrix} k & 2 & 1 \\ 2 & k & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0$的充分条件是（ B ）。

A. $k=2$　　B. $k=-2$　　C. $k=0$　　D. $k=-3$。

3、设线性方程组$\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$，若$R(A,b)=4$，$R(A)=3$，则该方程组（ C ）

A. 有无穷多解　　B. 有非零解　　C. 无解.　　D. 有唯一解

4、n阶矩阵A中有一个r阶子式$D_r\neq 0$，且有一个含D_r的$r+1$阶子式等于零，则有（ B ）.

A. $R(A)<r$　　B. $R(A)\geq r$　　C. $R(A)=r$　　D. $R(A)=r+1$

5、对任意n阶方阵A,B总有（　B　）

$A.$ $AB=BA$　　$B.$ $|AB|=|BA|$　　$C.$ $(AB)^T=A^TB^T$　　$D.$ $(AB)^2=A^2B^2$

二．填空题（每小题3分，共15分）

1、已知$\begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\ x & 3 & 1\\ 4 & x & 2\end{vmatrix}$的代数余子式$A_{12}=0$，则代数余子式$A_{21}=$____________ -4

2、设A为三阶方阵，且$|A|=2$，则$\left|\frac{3}{2}A^*+7A^{-1}\right|=$____________ 500

A　n

3、设　为　阶方阵，且$n>1$，$|A|=d$，则$|A^T|=$____________ d

4、设A是$m\times n$ 阶矩阵，A的秩$r(A)=r$　$(r<m,r<n)$，则齐次线性方程组$Ax=0$ 的基础解系所含解向量的个数是____________ n-r

5、设$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 5\\ 0 & 3 & 6 & 8\\ 4 & 7 & 9 & 0\end{pmatrix}$，则 $|A|=$ ____________ 24

三、（10 分）计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a & a_2 & a_2 \\ a_2 & a_2 & a & a_3 \\ a_3 & a_3 & a_3 & a \end{vmatrix}$.

解：$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-a_1 & a_2-a_1 & a_2-a_1 \\ 0 & 0 & a-a_2 & a_3-a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a-a_3 \end{vmatrix}=(a-a_1)(a-a_2)(a-a_3)$

四、（10 分）设 A, B 为 n 阶矩阵，且 A 为对称矩阵，证明 B^TAB 也是对称矩阵。

证明：　因为 $A^T=A$, 所以

$(B^TAB)^T=B^T(B^TA)^T=B^TA^TB=B^TAB$,

从而 B^TAB 是对称矩阵.

五、（12分）设 $A=\begin{pmatrix}0&3&3\\1&1&0\\-1&2&4\end{pmatrix}$，求 A 的逆矩阵.

解：$\begin{pmatrix}0&3&3&1&0&0\\1&1&0&0&1&0\\-1&2&4&0&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&-\frac{4}{3}&2&1\\0&1&0&\frac{4}{3}&-1&-1\\0&0&1&-1&1&1\end{pmatrix}$

故 A 的逆矩阵为

$$\begin{pmatrix}-\frac{4}{3}&2&1\\\frac{4}{3}&-1&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}$$

六、（12分）求线性方程组 $\begin{cases}x_1\qquad\;+2x_3-x_4=0\\-x_1+x_2-3x_3+2x_4=0\\2x_1-x_2+5x_3-3x_4=0\end{cases}$ 的通解。

解：$\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\-1&1&-3&2\\2&-1&5&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&1&-1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

通解为 $X=k_1\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$，其中 k_1,k_2 为任意常数.

七、（12 分）讨论λ为何值时，方程组$\begin{cases}\lambda x_1 + x_2 = \lambda^2 \\ x_1 + \lambda x_2 = 1\end{cases}$有唯一解、无穷多解或无解.

解: $(A,b)=\begin{pmatrix}1 & \lambda & 1\\ \lambda & 1 & \lambda^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & \lambda & 1\\ 0 & 1-\lambda^2 & \lambda^2-\lambda\end{pmatrix}$

当$1-\lambda^2\neq 0$时, 即$\lambda\neq 1$时, 方程组有唯一解

当$\lambda=1$时，$R(A)=R(A,b)<2$此时方程组有无穷多解

当$\lambda=-1$时，$R(A)\neq R(A,b)$此时方程组有无解.

八、（14 分）求矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$的特征值和特征向量.

解：$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & 1-\lambda & 3 \\ 3 & 3 & 6-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+1)(9-\lambda)$

所以：$\lambda_1=-1, \lambda_2=9, \lambda_3=0$，

分别代入其次线性方程组$(A-\lambda E)x=0$中得到对应的基础解系为：

$p_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, p_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, p_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$，

所以对应的特征向量分别为：c_1p_1, c_2p_2, c_3p_3（$c_1\neq 0, c_2\neq 0, c_3\neq 0$）