

# 引 言

□ 在前面所研究的运动学部分，质点的位置、速度、加速度和刚体的角速度、角加速度主要是用**矢量表示**的物理量，运动学的各种关系式主要是用矢量的代数运算和微分运算导出。这种运动学研究的**矢量法**在讨论运动学规律时具有十分直观的特点，适宜于对运动过程作定性分析。

□ 除此以外，运动学的物理量也可以利用各种形式的坐标及其导数表示。在运动学中直接分析标量形式的运动学参数的相互关系的方法称为**分析法**。由于计算机的发展和普及，分析法在工程计算中的重要性不断提高。即使是前面采用矢量法在作数值计算时，也必须将矢量向参考坐标系投影，转化为标量的微分运算和矩阵运算。本章将介绍分析运动学的基本概念和方法，这将提供运动学分析的另一种普遍方法。

# 第八章 分析运动学

## § 8-1 分析运动学的概念

分析运动学是后面将要介绍的分析静力学（虚位移原理）与分析动力学（动力学普遍方程、拉格朗日方程、哈密顿原理）的基础（分析静力学本身是分析动力学的一个特例），它是用数学的方法来描述约束和受约束质点系的位形空间。

掌握：

1、自由度和广义坐标的概念

2、会判断质点系的自由度，并会选择广义坐标

明确：

对于完整、定常、双面约束的质点系，自由度为 $k$ ，则：

确定质点系位形、速度、加速度需 $k$ 个独立参变量。

## § 8-2 受约束质点系位形空间的广义坐标和自由度

### 1. 约束的概念

在本课程教材静力学篇中，把物体（在这里称为质点系）所受来自周围与它相联系的其它物体对它运动的限制称为它受到的约束。

不受约束可以任意运动的质点系称为**自由质点系**，于此相反，受有约束而不能任意运动的质点系则称为**非自由质点系**。

**约束**就是限制物体任意运动的条件。

约束的几种常见分类方法：



## 2、约束的表示

### (1) 坐标

确定一个质点在空间的位置需要三个独立参数，这些参数或代表长度或代表角度，统称**坐标**。

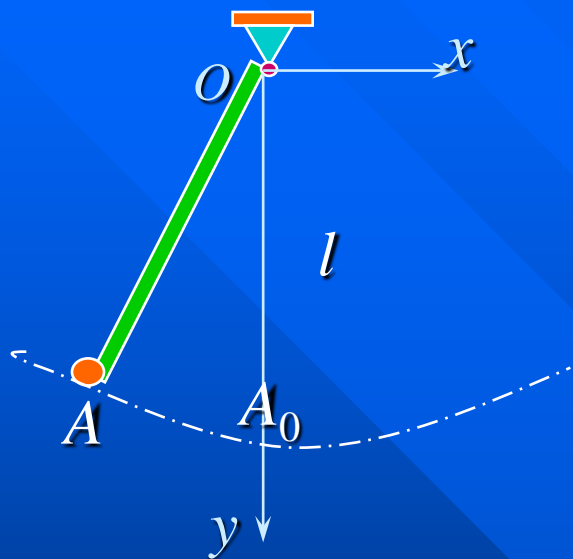
### (2) 位形

对于由 $n$ 个质点组成的自由质点系，则需要 $3n$ 个独立坐标，这 $3n$ 个的坐标集合称为质点系的**位形**。

### (3) 约束方程

约束可以通过联系坐标、坐标的时间导数以及时间 $t$ 之间的关系的数学方程组加以描述，这些数学方程组称之为**约束方程**。

## (1) 几何约束与运动约束

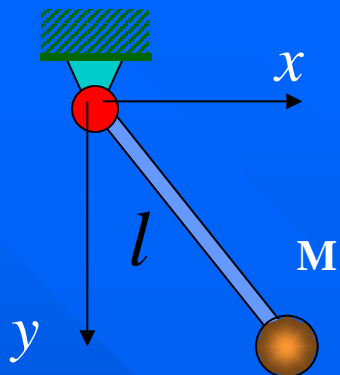


### 几何约束

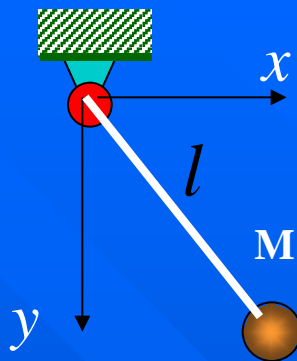
只限制系统中各质点位置的约束称为几何约束(**geometrical constraint**), 其约束方程是以坐标和时间表述的方程。

$$f(x, y) \equiv x^2 + y^2 - l^2 \equiv 0$$

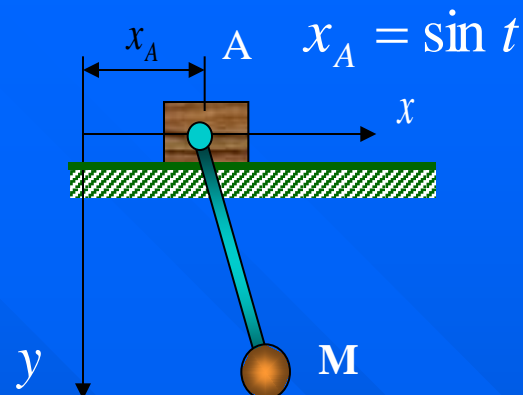
因为位置由坐标表示, 故几何约束的约束方程就是质点或质点系的坐标在约束的限制下所必须满足的条件。



$$x^2 + y^2 = l^2$$



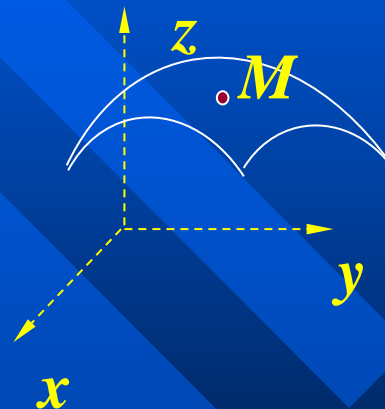
$$x^2 + y^2 \leq l^2$$



$$(x - \sin t)^2 + y^2 = l^2$$

在曲面上运动的质点：

$$f(x, y, z) = 0$$



如果限制运动的条件是几何性质的，则称为几何约束。

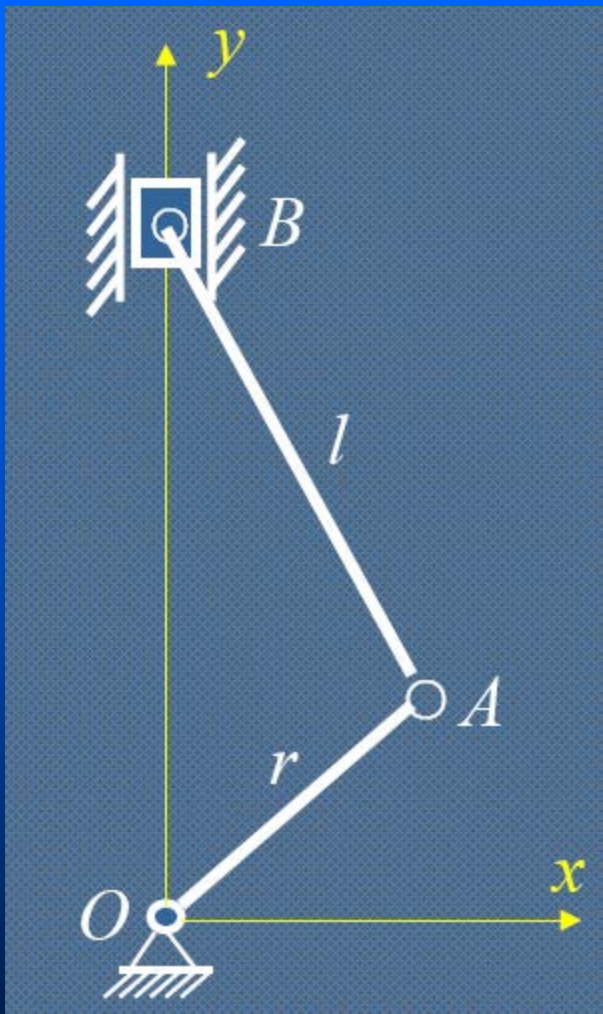
## 几何约束

曲柄连杆机构的约束方程为：

$$x_A^2 + y_A^2 = r^2$$

$$x_B = 0$$

$$x_A^2 + (y_B - y_A)^2 = l^2$$





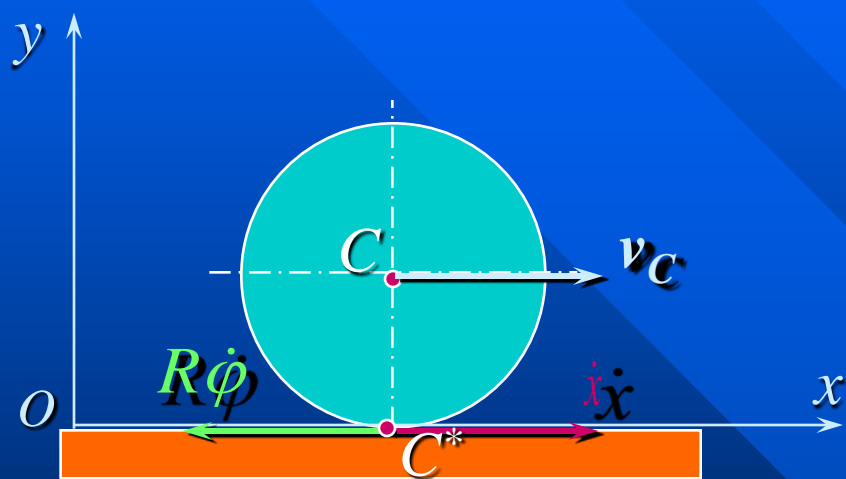
## 运动约束

在质点系中，所加的约束不仅限制各质点在空间的位置，还限制它们运动的速度。

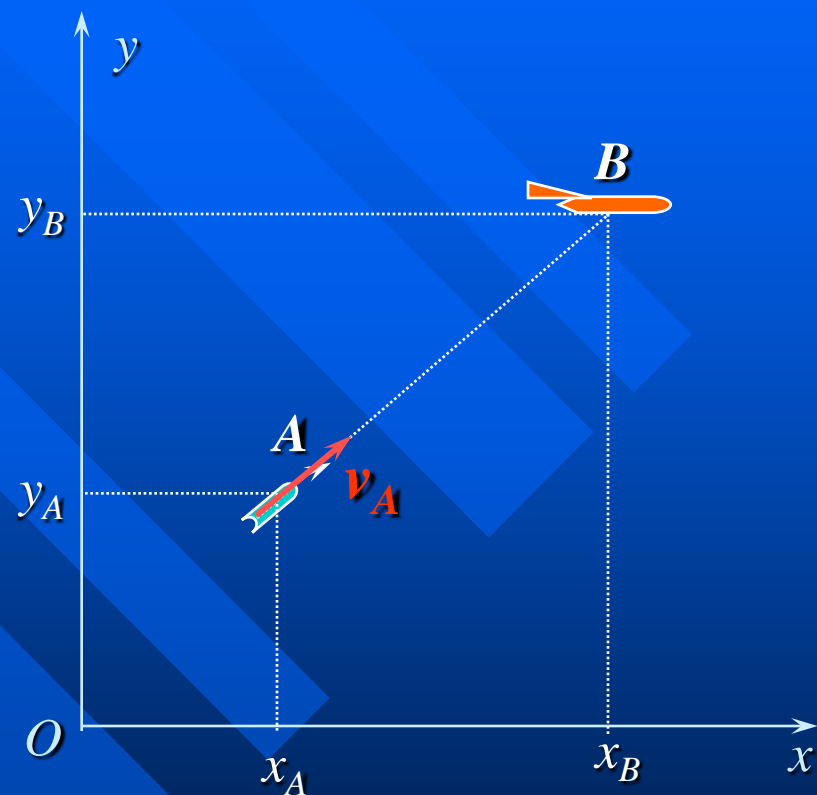
与几何约束相对应的是运动约束（constraint of motion），即限制质点运动速度的约束，其约束方程是含有坐标和时间以及坐标对时间的导数的微分方程。



纯滚动



$$f = \dot{x} - R\dot{\phi} = 0$$



$$\frac{\dot{x}_A}{\dot{y}_A} = \frac{x_B - x_A}{y_B - y_A}$$



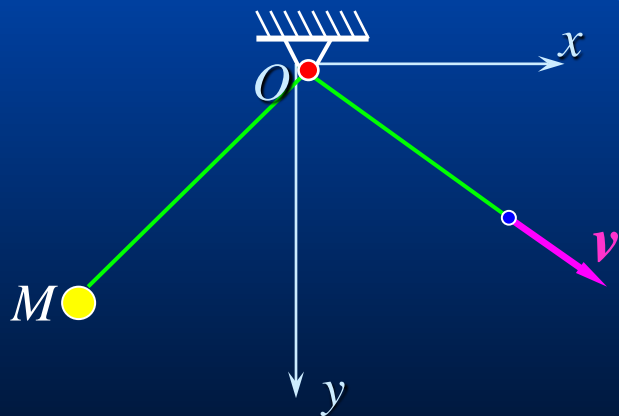
## (2) 定常约束与非定常约束

**定常约束** —— 约束方程中不显含时间 $t$ 的约束:

$$f_{\alpha}(\mathbf{r}_i) = 0, i = 1, 2, \dots, n(\text{质点数}); \quad \alpha = 1, 2, \dots, s(\text{约束数})$$

**非定常约束** —— 约束方程中显含时间 $t$ 的约束:

$$f_{\alpha}(\mathbf{r}_i, t) = 0, i = 1, 2, \dots, n(\text{质点数}); \quad \alpha = 1, 2, \dots, s(\text{约束数})$$



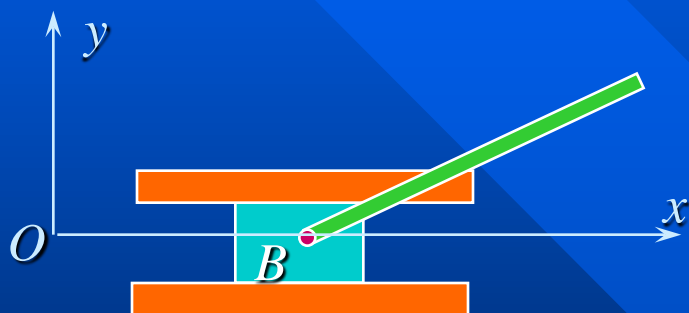
$$x^2 + y^2 \leq (l_0 - vt)^2$$



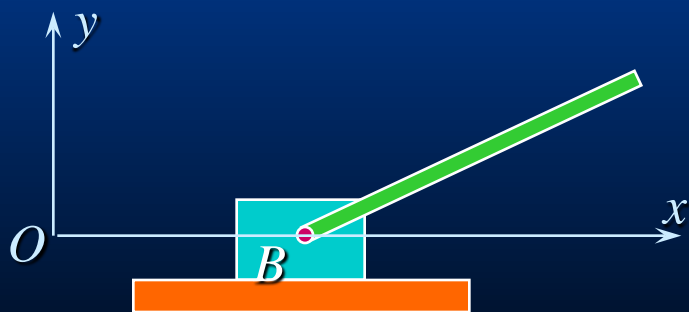
### (3) 单面约束（单侧约束）与双面约束（双侧约束）

**双面约束（双侧约束）** —— 约束方程可以写成等式的约束。

**单面约束（单侧约束）** —— 约束方程不能写成等式、但是可以写成不等式的约束。

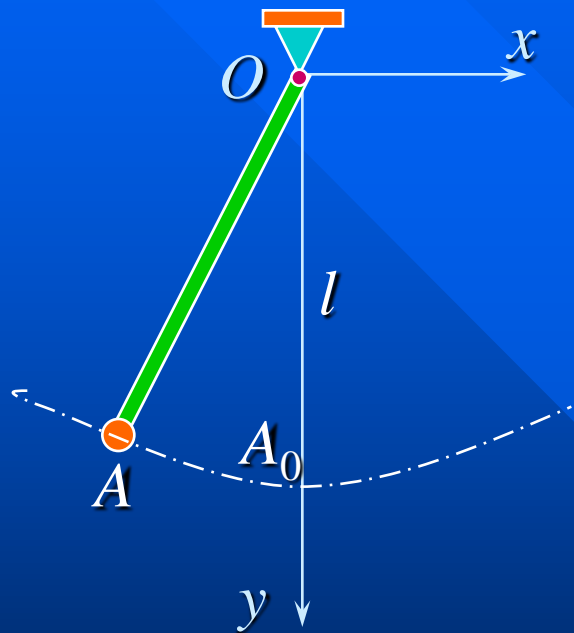


$$y_B = 0 \text{ (双面约束)}$$

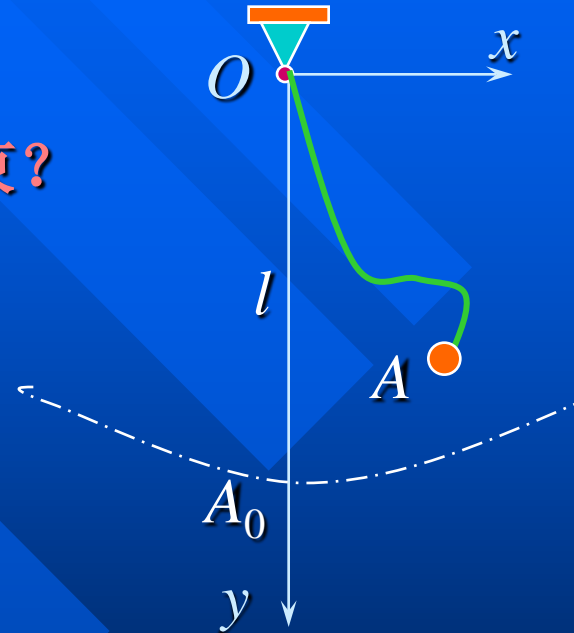


$$y_B \geq 0 \text{ (单面约束)}$$

单面约束还是双面约束?



$$x^2 + y^2 = l^2 \text{ (双面约束)}$$



$$x^2 + y^2 \leq l^2 \text{ (单面约束)}$$



#### (4) 完整约束与非完整约束

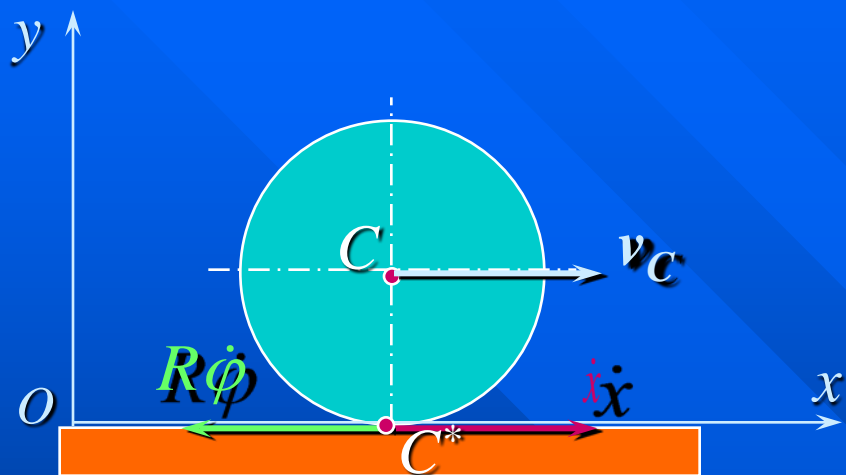
完整约束 —— 约束方程不包含质点速度，或者包含质点速度但约束方程是可以积分的约束。

$$f_{\alpha}(\mathbf{r}_i) = 0, i = 1, 2, \dots, n(\text{质点数}); \quad \alpha = 1, 2, \dots, s(\text{约束数})$$

非完整约束 —— 约束方程包含质点速度、且约束方程不可以积分的约束。

$$f_{\alpha}(\mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i) = 0, i = 1, 2, \dots, n(\text{质点数}); \quad \alpha = 1, 2, \dots, s(\text{约束数})$$

## 完整约束与非完整约束

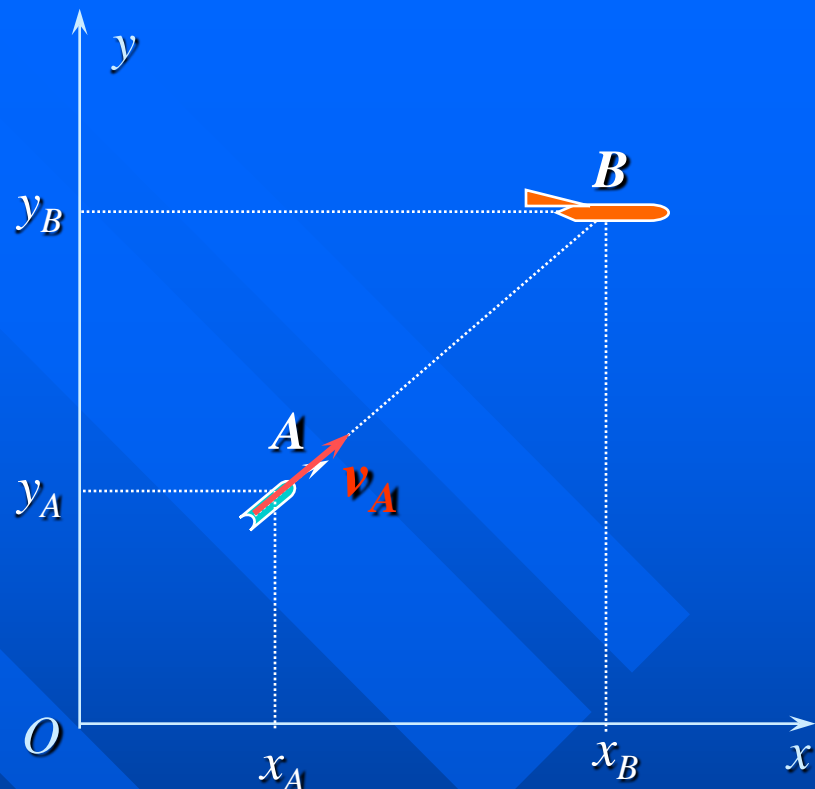


$$\dot{x}_C - R\dot{\phi} = 0$$

可以积分为

$$x_C - R\phi = 0$$

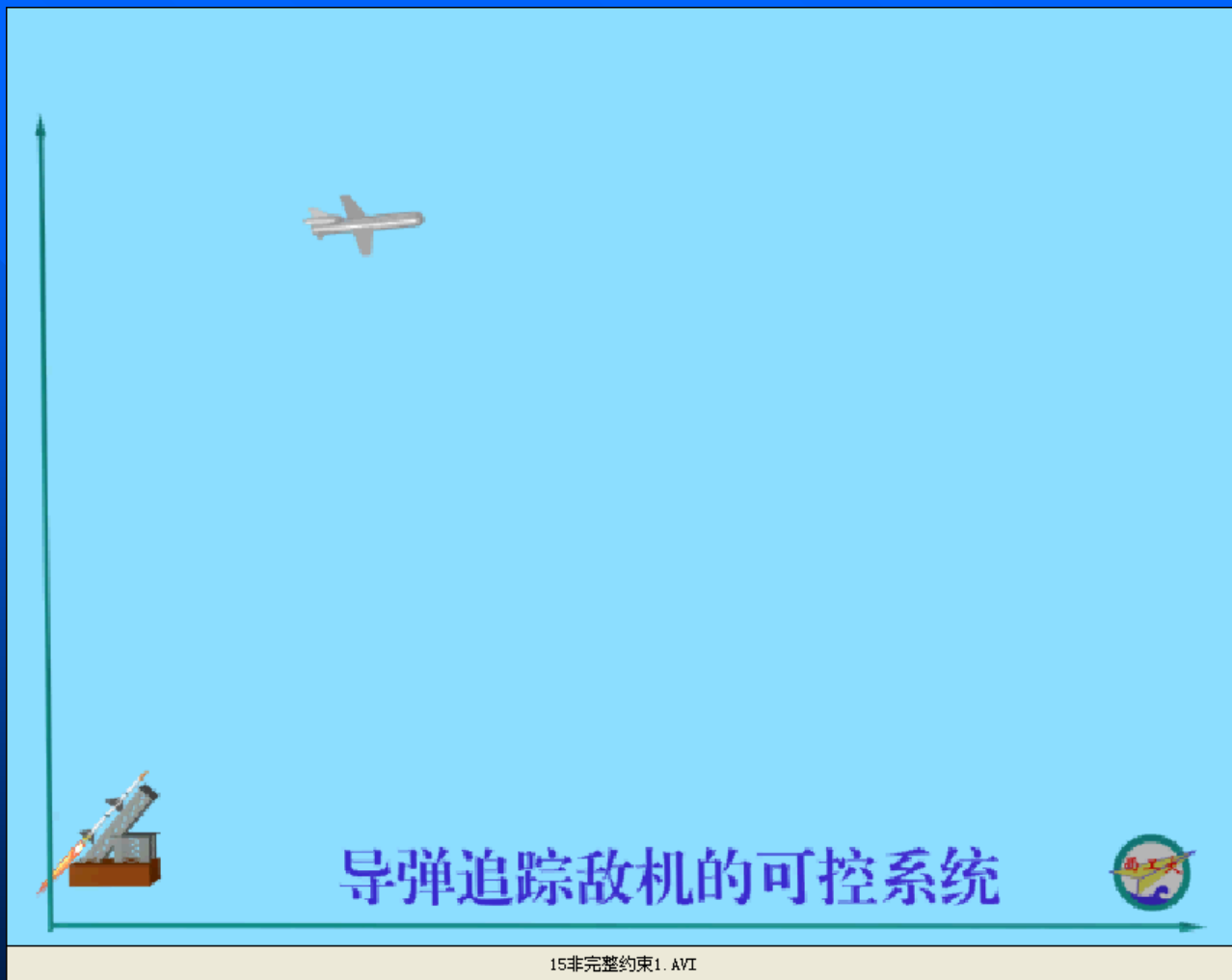
圆轮所受约束为完整约束。



$$\frac{\dot{x}_A}{\dot{y}_A} = \frac{x_B - x_A}{y_B - y_A}$$

约束方程不可积分，所以导弹所受的约束为非完整约束。

几何约束和可积分的运动约束是完整约束，不可积分的运动约束是非完整约束。





### 3、约束方程的一般形式

$n$ 个质点组成的质点系，约束方程的一般形式为：

$$f_r(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n; \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dots, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n; t) \leq 0$$

$(r=1, \dots, s)$  约束方程的个数为： $s$

单面约束方程的一般数学形式：

$$f_j(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dots, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n, t) > 0 \text{ 或 } < 0$$

$j = 1, 2, \dots, s$   $s$ 为系统中的约束数目

双面约束方程的一般数学形式：

$$f_j(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dots, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n, t) = 0$$

$j = 1, 2, \dots, s$   $s$ 为系统中的约束数目

**完整约束:** 约束方程中不含  $\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i (i = 1, \dots, n)$  或能够通过积分消去坐标对时间的导数。

约束方程的一般形式:

$$f_j(x_1, y_1, z_1 \cdots \cdots x_n, y_n, z_n) = 0 \quad (j = 1, 2, \cdots \cdots s)$$

**非完整约束:** 约束方程中含有  $\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i (i = 1, \dots, n)$  ,  
且不可通过积分消除。

约束方程的一般形式

$$f_j(x_1, y_1, z_1 \cdots \cdots x_n, y_n, z_n, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1 \cdots \cdots \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n, t) = 0$$
$$(j = 1, 2, \cdots \cdots s)$$

**定常约束：** 约束方程中不包含时间  $t$

约束方程的一般形式：

$$f_j(x_1, y_1, z_1 \cdots \cdots x_n, y_n, z_n, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \cdots \cdots \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n) = 0$$

**非定常约束：** 约束方程中显含时间  $t$

约束方程的一般形式：

$$f_j(x_1, y_1, z_1 \cdots \cdots x_n, y_n, z_n, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \cdots \cdots \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n, t) = 0$$

几何约束方程的一般数学形式:

$$f_j(x_1, y_1, z_1, \cdots, x_n, y_n, z_n, t) = 0$$

$j = 1, 2, \cdots, s$       $s$ 为系统中的约束数目

定常几何约束方程的一般数学形式:

$$f_j(x_1, y_1, z_1, \cdots, x_n, y_n, z_n) = 0$$

$j = 1, 2, \cdots, s$       $s$ 为系统中的约束数目

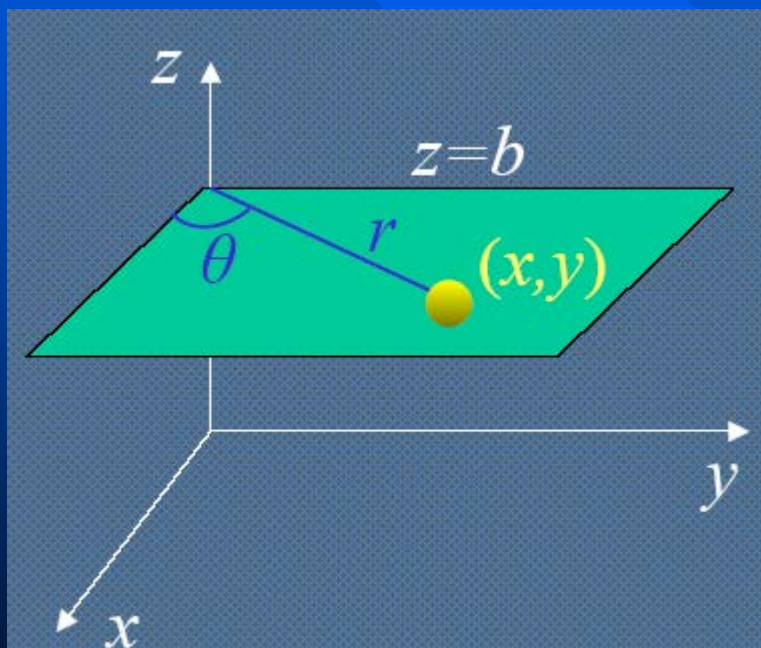
静力学问题中涉及的约束都是定常几何约束。

本章主要研究：定常、双面、完整约束。

#### 4. 广义坐标与自由度

**广义坐标** —— 确定质点系位形的独立参变量。  
用  $q_1, q_2, \dots$  表示。

**自由度** —— 在完整约束条件下，确定质点系位置的独立参变量（广义坐标）的数目等于系统的自由度数。



小球在三维空间的运动，自由度为3，广义坐标可选直角坐标 $x, y, z$ 。

当它被限制在平面 $z=b$ 上运动时，自由度为2，广义坐标可选直角坐标 $x, y$ 或极坐标 $r, \theta$ 。

空间质点系:

自由度数  $k = 3n - s$ ,

$n$ :质点数,  $s$ :完整约束方程个数

广义坐标 —— 确定质点  
系位形的独立参变量。

广义坐标:  $q_1, q_2, \dots, q_k$  ( $k$ 为自由度数)

二个广义坐标:

1.  $q_1 = \varphi_1, q_2 = \varphi_2$ ,
2.  $q_1 = \varphi_1, q_2 = y_2$ ,
3.  $q_1 = x_1, q_2 = y_2$ ,
4. 等等。

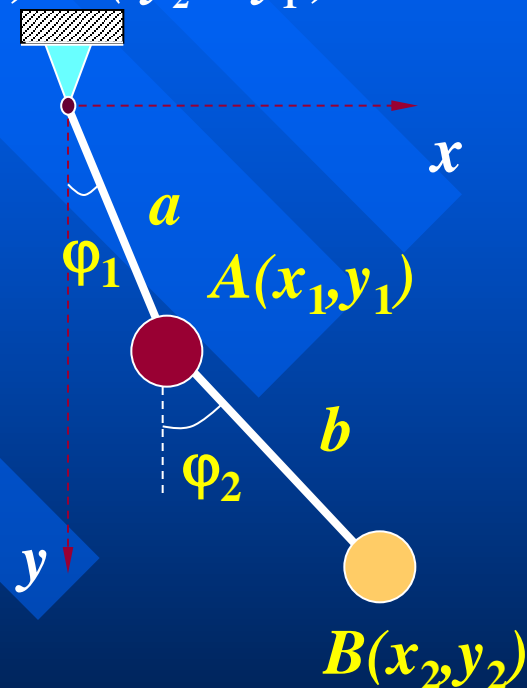
广义坐标的选择不唯一。

平面质点系:  $k = 2n - s$ ,

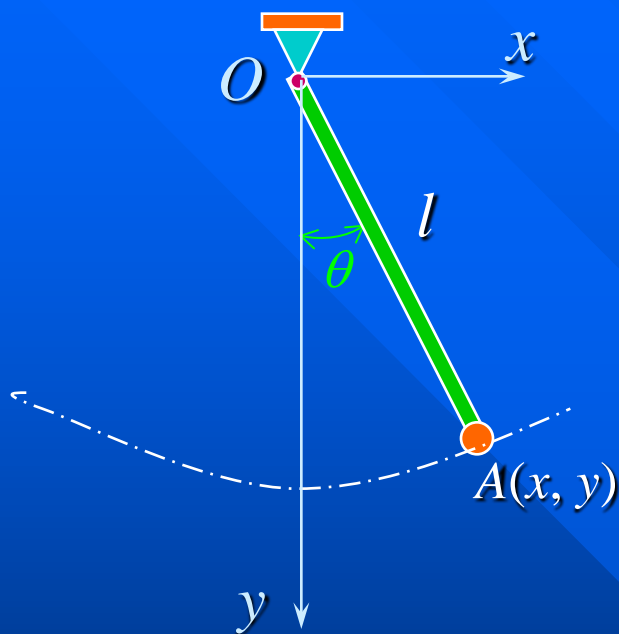
二个约束方程

$$x_1^2 + y_1^2 = a^2$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = b^2$$



2个自由度

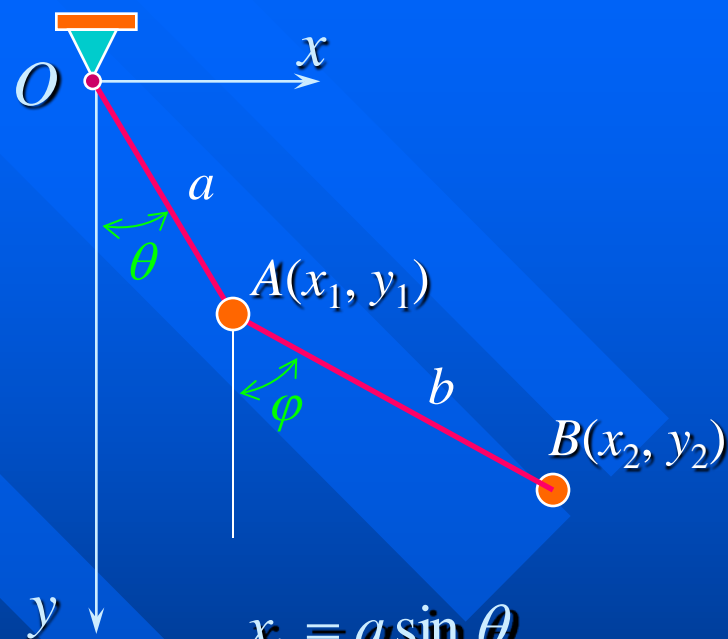


$$x = l \sin \theta$$

$$y = l \cos \theta$$

$\theta \Rightarrow$  广义坐标

广义坐标 —— 确定质点  
系位形的独立参变量。



$$x_1 = a \sin \theta$$

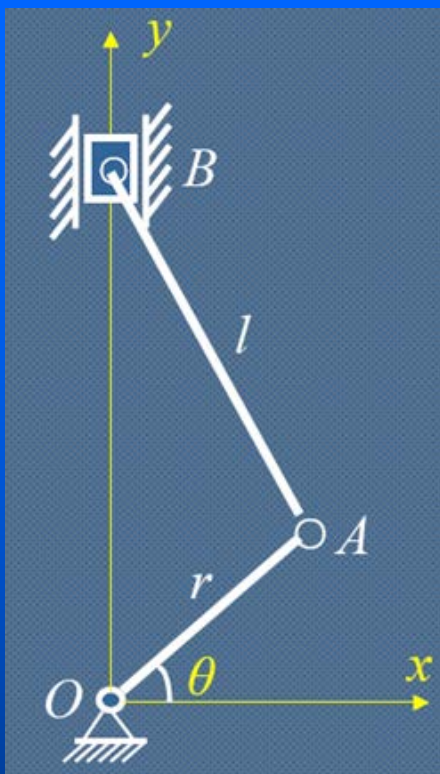
$$y_1 = a \cos \theta$$

$$x_2 = a \sin \theta + b \sin \varphi$$

$$y_2 = a \cos \theta + b \cos \varphi$$

$\theta, \varphi \Rightarrow$  广义坐标





曲柄连杆机构的约束方程为：

$$x_A^2 + y_A^2 = r^2$$

$$x_B = 0$$

$$x_A^2 + (y_B - y_A)^2 = l^2$$

确定质点系位置所需的独立变量数为1，即系统的自由度为1，可在 $x_A$ 、 $y_A$ 和 $y_B$ 中任选一个作为广义坐标，但是选取角度 $\theta$ 有时会更方便。

广义坐标不一定是直角坐标，也可以是球坐标、柱坐标、角度、距离、面积等等，只要它是一组能唯一确定系统位形的独立变量就行。

# 刚体的自由度\*

设刚体由 $n$ 个质点组成，这个质点组成的不变系统可以设想由 $n$ 个质点用很短很短的刚杆连成的空间不变形的刚性结构。

可以算出连接质点的刚杆数为： $3n - 6$

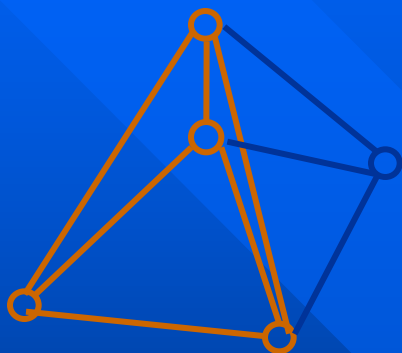
每一根刚杆相当于一个约束，所以约束数为：

$$s = 3n - 6$$

自由度数为： $k = 3n - s = 6$

# 1) 自由刚体的自由度

最简单的刚体由4个质点用6根刚杆组成几何不变体(形如四面体)，则自由刚体的自由度为：



$$k = 3 \times 4 (\text{质点数}) - 6 (\text{刚杆数}) = 6$$

此后每增加一个质点就增加3根刚杆。

$$\text{连接质点的刚杆数为: } 3n - 6$$

每一根刚杆相当于一个约束，所以约束数为：  $s = 3n - 6$

$$\text{自由度数为: } k = 3n - s = 6, \quad (n > 4)$$

## 2) 自由刚体的广义坐标

基点的直角坐标  $(x_0, y_0, z_0)$  和欧拉角  $\psi, \theta, \varphi$

或卡尔丹角  $\alpha, \beta, \gamma$  组成的6个独立参变量就是自由刚体的广义坐标。

它们被用于描述刚体的位形。

## 3) 受约束刚体的自由度

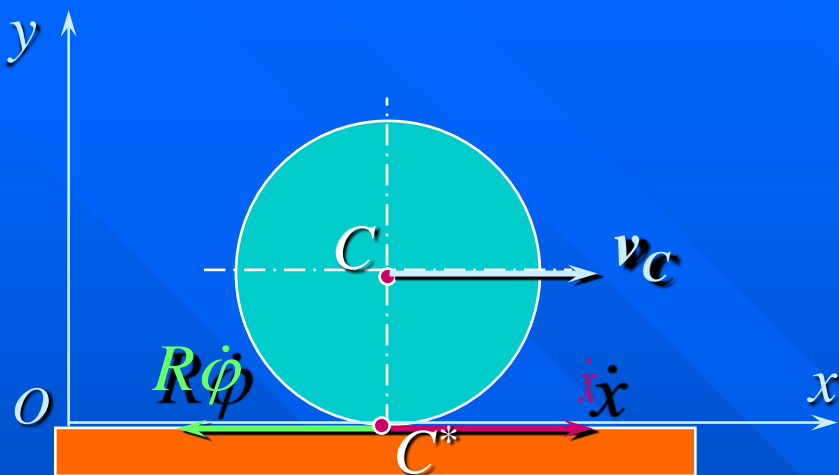
设刚体数为  $n$ , 则  $k = 6n - s$

### 3) 约束刚体的自由度与广义坐标

约束刚体的自由度与广义坐标根据其运动形式不同有所减小，下表给出刚体在不同的运动形式时的广义坐标数。

刚体约束情况	自由度	广义坐标
刚体上一轴被固定 (定轴转动)	1	$\varphi$
刚体上一点被固定 (定点运动)	3	$\theta, \varphi, \psi$
刚体被限制作平面平行运动 (平面运动)	3	$x_0, y_0, \theta$
刚体被限制作空间平行移动 (空间平移)	3	$x_0, y_0, z_0$

## 自由度判别：纯滚动的圆盘



自由度判别：连  
滚带滑的圆盘？

几何约束

$$y_C - R = 0$$

运动约束

$$\dot{x}_C - R\dot{\phi} = 0$$

可以积分为

$$x_C - R\phi = 0$$

自由度：  $k=1$

**\*\*对于刚体系统，若有 $n$ 个刚体，受到 $s$ 个完整约束，则系统的自由度数（广义坐标个数）为：**

**平面刚体系：**  $k=3n-s$

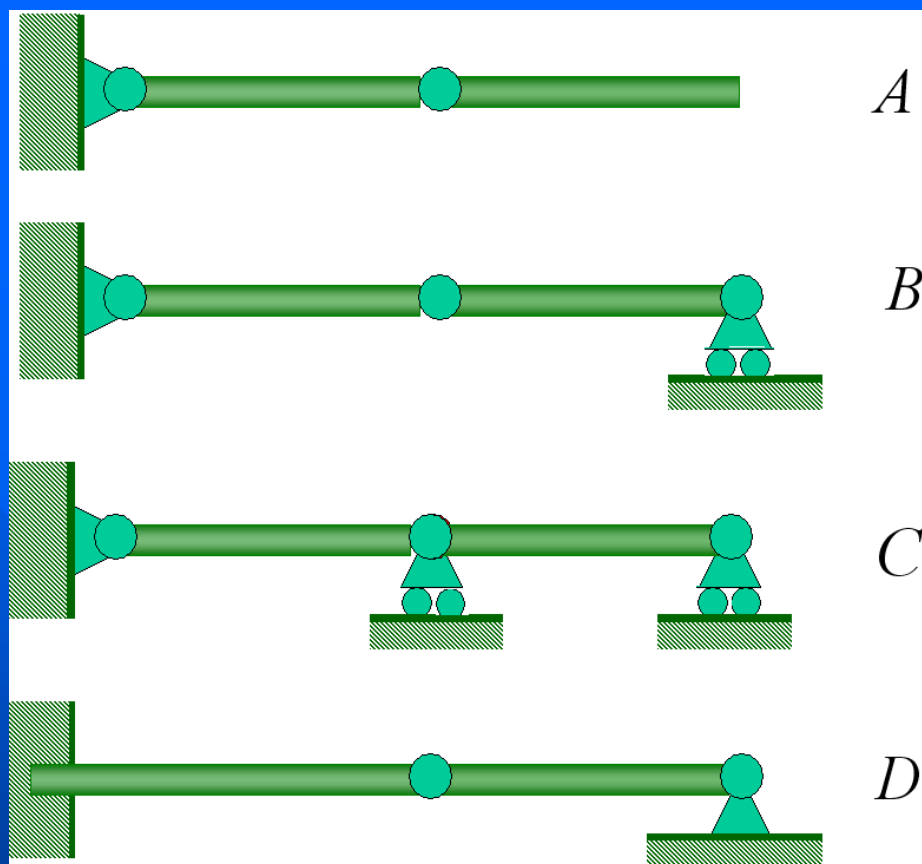
**空间刚体系：**  $k=6n-s$

**空间质点系：**  $k=3n-s$

**平面质点系：**  $k=2n-s$



## 确定图示系统的自由度



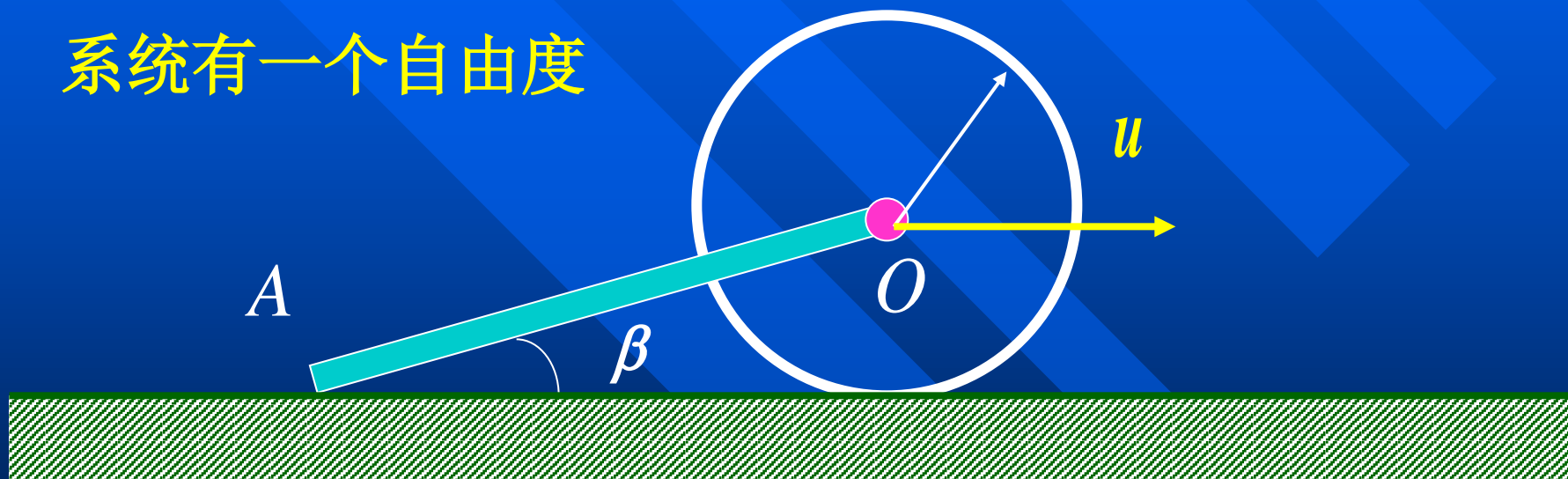
### •简单的判断方法（定常约束）：

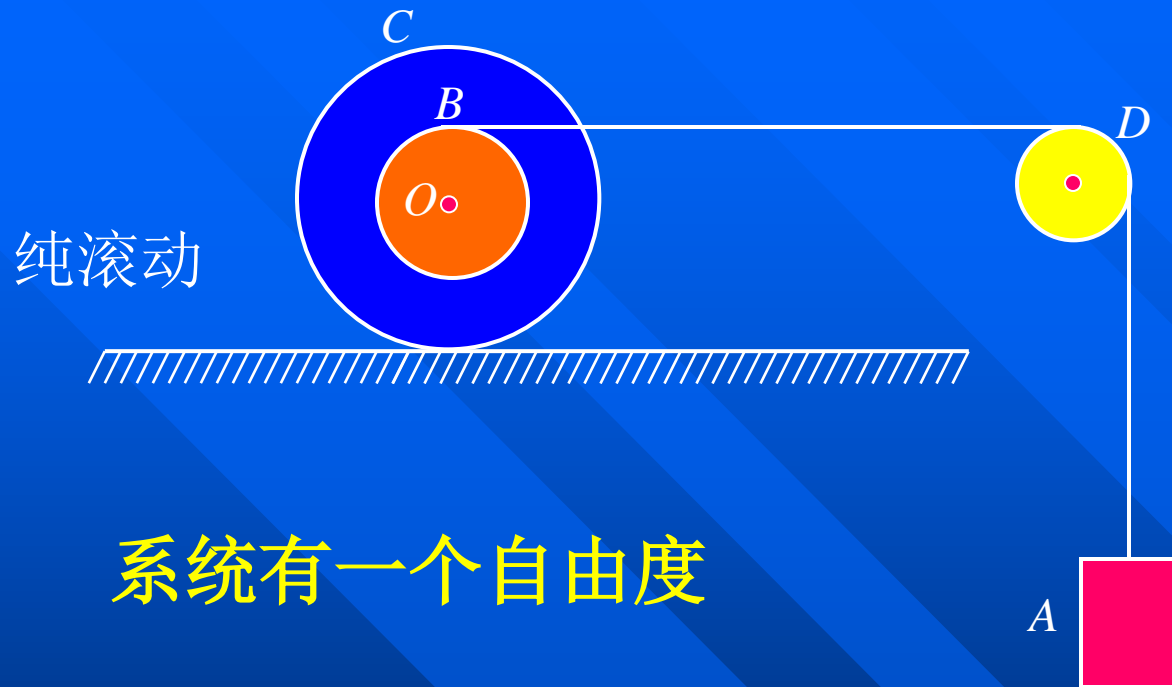
自由度数 = 变成不动的结构所需限制的未知坐标数目

根据约束方程判别系统自由度的方法很严密，但过程较长，对有许多质点或杆系所组成的系统，不太方便。在实际应用中，可选择“加锁”的方法。若加上若干把“锁”，系统才变为静止，则自由度数就与所加“锁”数相同。

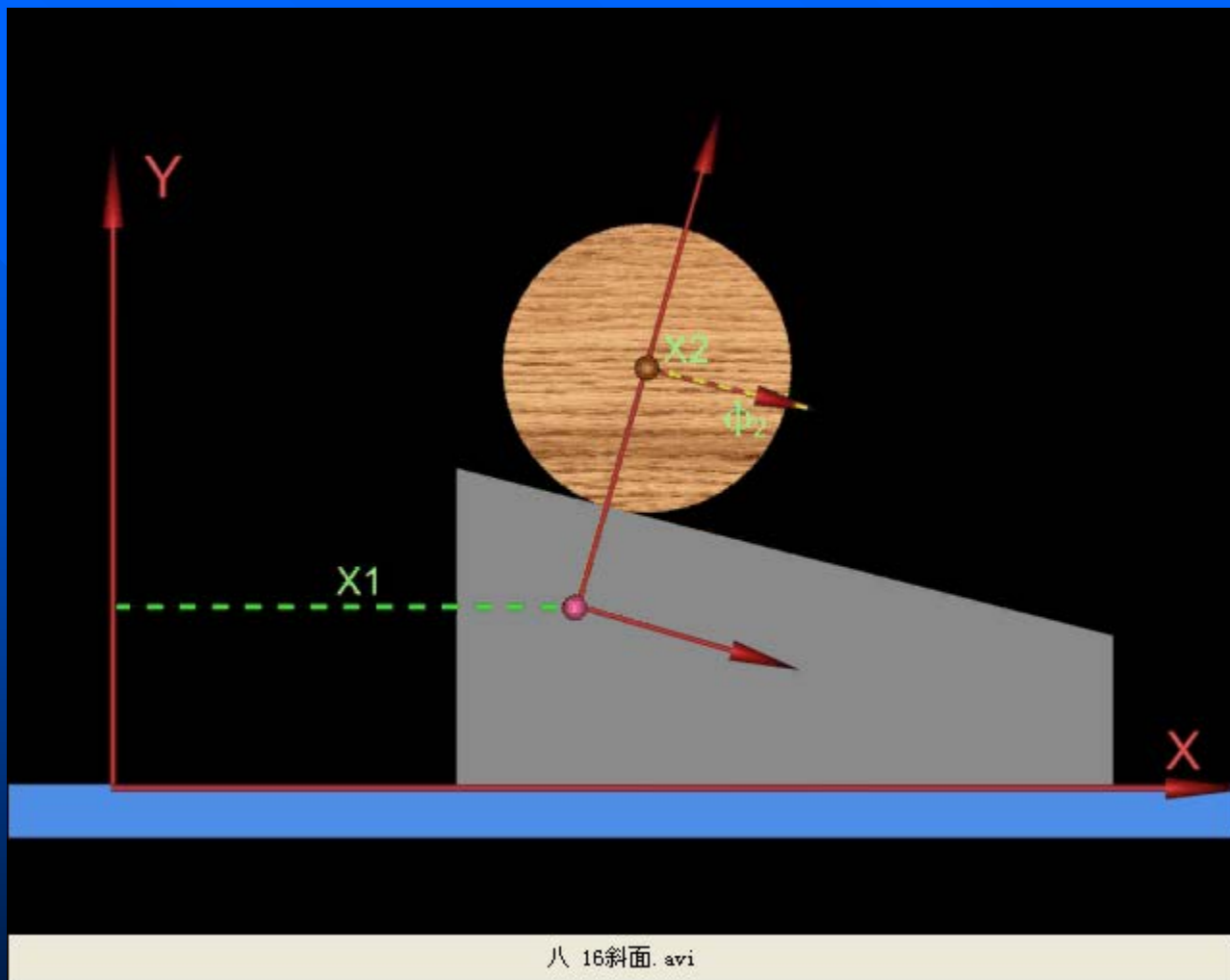
**例：** 均质圆盘和均质杆的质量都为 $m$ ，圆盘半径为 $r$ ，杆与水平面的夹角为 $\beta$ ，与地面的滑动摩擦因数为 $f$ ，初始时圆盘 $O$ 点的速度为 $u$ ，在地面上纯滚动，求系统的自由度数。

系统有一个自由度





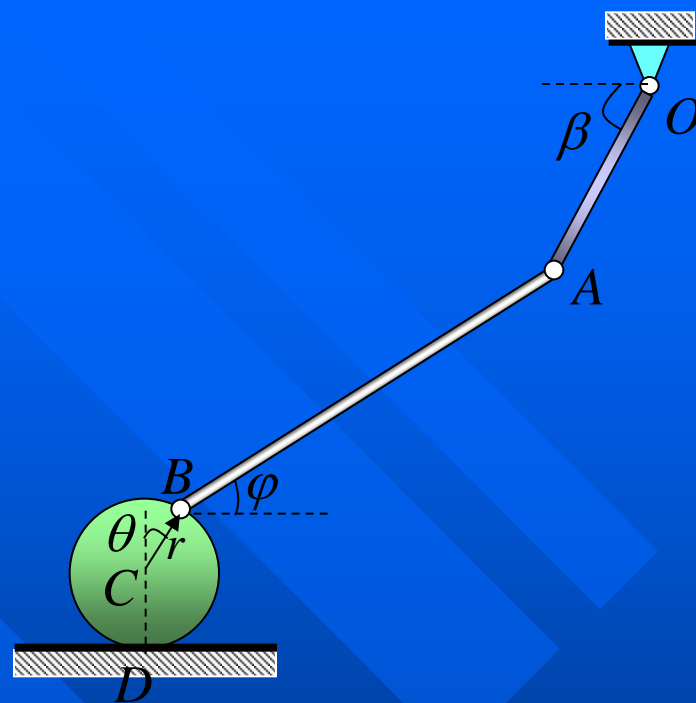
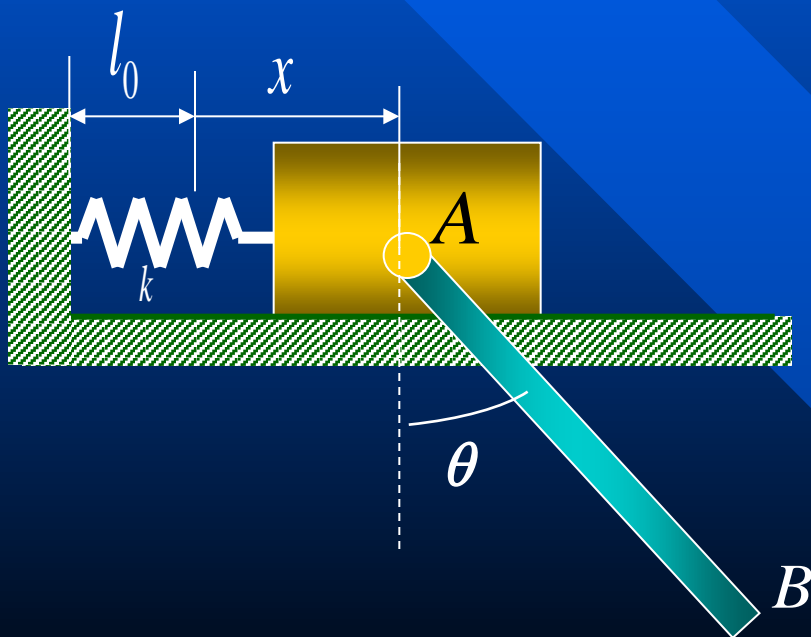
系统有一个自由度



## 四 实例

1. 刚体数目: 3;
2. 定轴转动刚体:  $OA$ ;  
平面运动刚体:  $AB$ 及轮 $C$ ;

自由度:  $k=1$



自由度  $k=2$

# 例1：图示曲柄连杆机构

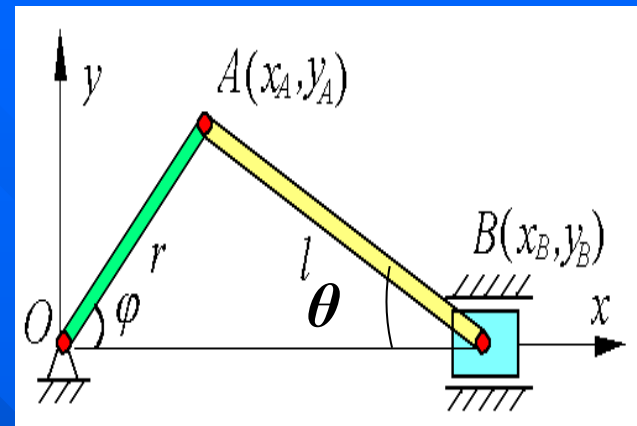
▼确定A、B两点位置（平面问题）

需四个独立坐标

▼系统受三个完整约束，其约束方程：

$$x_A^2 + y_A^2 = r^2; \quad (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = l^2; \quad y_B = 0$$

▼系统的自由度：  $N=2n-s=4-3=1$



★取  $\varphi$  作为广义坐标

$$x_A = r \cos \varphi; \quad y_A = r \sin \varphi$$

$$x_B = r \cos \varphi + \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi}, \quad y_B = 0$$

★取  $\theta$  作为广义坐标

$$x_A = x_A(\theta); \quad y_A = y_A(\theta)$$

$$x_B = x_B(\theta), \quad y_B = 0$$

● 广义坐标选定后，质点系中每一质点的直角坐标都可表示为广义坐标的函数。

## 例2：铅直平面内摆动的双摆。

▼确定A、B两点位置（平面问题）需四个独立坐标

▼系统受两个完整约束，其约束方程：

$$x_1^2 + y_1^2 = a^2, \quad (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = b^2$$

▼系统的自由度：  $N=2n-s=4-2=2$

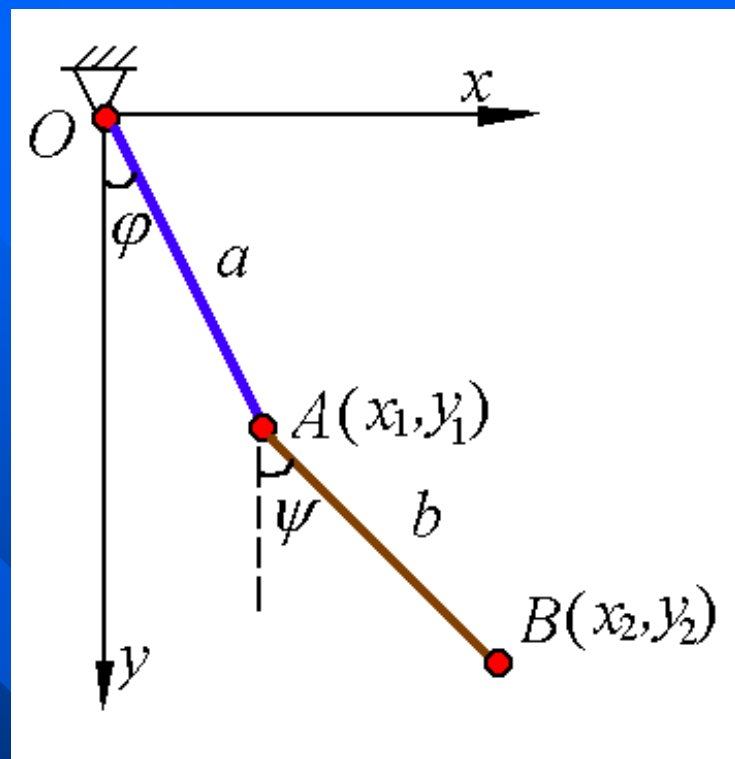
★两个自由度，取广义坐标  $\varphi, \psi$

$$x_1 = a \sin \varphi$$

$$y_1 = a \cos \varphi$$

$$x_2 = a \sin \varphi + b \sin \psi$$

$$y_2 = a \cos \varphi + b \cos \psi$$





**广义坐标** —— 确定质点系位形的独立参变量。  
用  $q_1, q_2, \dots$  表示。

**自由度** —— 在完整约束条件下，确定质点系位置的独立参变量（广义坐标）的数目等于：

$$k=3n-s$$

对于具有稳定的完整约束的  $n$  个质点组成的质点系，各质点的坐标可以写成广义坐标的函数形式

$$\left. \begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2, \dots, q_k, t) \\ y_i &= y_i(q_1, q_2, \dots, q_k, t) \\ z_i &= z_i(q_1, q_2, \dots, q_k, t) \end{aligned} \right\} (i=1, 2, \dots, n)$$

