2013-2014 学年第一学期期末考试 B 卷

一、填空题与选择题(24 分，每题 3 分，共 8 题，选择题为单选)

1、设三阶矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$B=(20\alpha_1+13\alpha_2+20\alpha_3,14\alpha_1+\alpha_2,14\alpha_1)$，如果 $|A|=2$，$|B|=$________.

2、α,β 是三维列向量，$\alpha\beta^T=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&4&2\\3&6&3\end{pmatrix}$，则 $\beta\alpha^T=$________.

3、设 $A^2+3A+E=0$，则 $(A+E)^{-1}=$________.

4、设 A 为 n 阶矩阵，A^* 为 A 伴随矩阵，E 为 n 阶单位矩阵。若 $|A-2E|=|A-3E|=|A-E|=0$，且 $|A|=1$，则 $|A^*|=$________.

5、设 A 为4阶对称矩阵，且 $A^4+2A^3=O$，若 A 的秩为 3，则 A 相似于________.

A、$\begin{pmatrix}-2&&&\\&-2&&\\&&-2&\\&&&-2\end{pmatrix}$　　B、$\begin{pmatrix}-2&&&\\&-2&&\\&&-2&\\&&&0\end{pmatrix}$

C、$\begin{pmatrix}-2&&&\\&-2&&\\&&0&\\&&&0\end{pmatrix}$　　D、$\begin{pmatrix}-2&&&\\&0&&\\&&0&\\&&&0\end{pmatrix}$

6、已知 $AB=C$，且 $|B|\neq 0$，则下列说法正确的是________.

A、矩阵 C 的行向量组与矩阵 A 的行向量组等价

B、矩阵 C 的列向量组与矩阵 A 的列向量组等价

C、矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的行向量组等价

D、矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的行向量组等价

7、二次型$f=x^2+2y^2+4z^2-2xy-4xz$是________.

A、 正定二次型　　　　B、 负定二次型

C、 非正定也非负定二次型　　　　D、 无法判断

8、设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$为$n$维列向量组是，$A$为$m\times n$矩阵，下列选项正确的是________.

A、若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关，则$A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$线性相关

B、若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关，则$A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$线性无关

C、若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，则$A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$线性相关

D、若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，则$A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$线性无关

二、(10分)

解矩阵方程：设$A=\begin{pmatrix}1&3&1\\3&0&2\\1&1&-2\end{pmatrix}$,$AX+3X+A=O$，求$X$.

三、(12分)

已知向量组：$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\\-1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}4\\5\\4\\1\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}3\\2\\1\\2\end{pmatrix},\alpha_5=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-2\end{pmatrix}$，求该向量组的秩及一个最大线性无关组，并将不属于最大线性无关组的向量用该最大线性无关组线性表示。

四、(13分)

问λ为何值时，线性方程组$\begin{cases}(\lambda-1)x_1+x_2+x_3=3\\x_1+(\lambda-1)x_2+x_3=3\lambda\\x_1+x_2+(\lambda-1)x_3=0\end{cases}$有唯一解、无解、有无穷多解？并在有无穷多解时求其通解。

五、（15 分）

求一个正交变换 $x=Py$，把二次型 $f=x_1^2+x_3^2+2x_1x_2-2x_2x_3$ 化为标准型，并写出标准型。

六、（10 分）

设 M_2 为所有 2 阶方阵按照通常矩阵的加法和数乘运算构成的线性空间。给定可逆矩阵 $P\in M_2$，在 M_2 上定义如下相似变换：对任意 $A\in M_2, T(A)=P^{-1}AP$。

(1)证明：映射 T 是 M_2 上的一个线性变换；

(2)若 $P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$，求出线性变换 T 在基 $E_{11}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},E_{12}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},E_{21}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},E_{22}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 下的矩阵。

七、证明题（16 分）

（1）（6 分）设 A 是 $n\times m$ 矩阵，B 是 $m\times n$ 矩阵，E 是 n 阶单位矩阵。若 $AB=E$，证明 B 的列向量组线性无关。

（2）（10 分）设矩阵 $A=\alpha\alpha^T+2\beta\beta^T$,其中 α,β 是两个相互正交的三维单位列向量。证明：矩阵 A 能够相似于对角矩阵 $\Lambda=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&0\end{pmatrix}$。

2013-2014 学年第一学期期末考试 B 卷参考答案

一、填空题与选择题(24 分，每题 3 分，共 8 题，选择题为单选)

1、【正解】-560

【学解】$|B|=|20\alpha_1+13\alpha_2+20\alpha_3,14\alpha_1+\alpha_2,14\alpha_1|=|13\alpha_2+20\alpha_3,14\alpha_1+\alpha_2,14\alpha_1|$

$=|20\alpha_3,\alpha_2,14\alpha_1|=-|14\alpha_1,\alpha_2,20\alpha_3|=-280|A|=-560$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 1】行列式的概念及其性质

2、【正解】$\beta\alpha^T=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\1&2&3\end{pmatrix}$

【学解】设$\alpha=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}$,$\beta=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$,所以$\alpha\beta^T=\begin{pmatrix}a_1b_1&a_1b_2&a_1b_3\\a_2b_1&a_2b_2&a_2b_3\\a_3b_1&a_3b_2&a_3b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&4&2\\3&6&3\end{pmatrix}$

则$\beta\alpha^T=\begin{pmatrix}a_1b_1&a_2b_1&a_3b_1\\a_1b_2&a_2b_2&a_3b_2\\a_1b_3&a_2b3&a_3b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\1&2&3\end{pmatrix}$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 4】矩阵的概念和基本运算

3、【正解】$A+2E$

【学解】

$$A^2+3A+E=0\Rightarrow A^2+3A+2E=E\Rightarrow(A+E)(A+2E)=E\Rightarrow(A+E)^{-1}=(A+2E)$$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 4】矩阵的概念和基本运算

4、【正解】1

【学解】$|A^*|=|A|^{n-1}=1$

【考点延伸】$|A^*|=|A|^{n-1}$

5、【正解】B

【学解】A 矩阵的秩为 3

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 9】矩阵的秩和矩阵等价

6、【正解】B

【学解】可逆矩阵可以分解成初等矩阵的乘积，所以C的列向量组可以通过A的列向量组进行初等列变换得到，故而等价。

【考点延伸】《考试宝典》【知识点13】等价向量组

7、【正解】C

【学解】其二次型矩阵为$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$，$D_1=1>0, D_2=1>0, D_3=-4<0$，$\because D_3<0$，$\therefore$非正定，又$\because D_1>0$，$\therefore$非负定，则选C

【考点延伸】《考试宝典》【知识点24】正定二次型和正定矩阵

8、【正解】A

【学解】通过向量组的秩的不等式：$r(AB)<=\min\{r(A), r(B)\}$来解决问题

设$B=(\alpha_1,\ \alpha_2\ldots\ldots\alpha_n), C=(A\alpha_1,\ A\alpha_2\ldots\ldots A\alpha_n)$,

A和B选项：若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关，则$r(B)<s$,所以$r(C)=r(AB)<=r(B)<s$,则C线性相关;故A正确，B错误。

C和D选项：若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，则

$r(B)=s$,所以$r(C)=r(AB)<=\min\{r(A), r(B)\}$；不能确定A矩阵的秩，只能确定$r(C)<=r(B)=s$,所以矩阵C既有可能线性相关（当秩小于s），也有可能线性无关(当秩等于s)；故C、D错误。

【考点延伸】《考试宝典》【知识点11】向量组的线性相关和线性表示

二、(10分)

【正解】$\begin{pmatrix} 2 & -6 & 9 \\ -3 & 8 & -15 \\ 0 & -3 & 8 \end{pmatrix}$

【学解】法一：$AX+3X+A=O\Rightarrow X=-(A+3E)^{-1}A$

$$(A+3E,A)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}4&3&1&1&3&1\\3&3&2&3&0&2\\1&1&1&1&1&-2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&1&-2\\0&0&-1&0&-3&8\\0&-1&-3&-3&-1&9\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&-2&6\\0&-1&0&-3&8&-15\\0&0&1&0&3&-8\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-2&6&-9\\0&1&0&3&-8&15\\0&0&1&0&3&-8\end{array}\right)$$

$$X=-\begin{pmatrix}-2&6&-9\\3&-8&15\\0&3&-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-6&9\\-3&8&-15\\0&-3&8\end{pmatrix}$$

法二：$AX+3X+A=O\Rightarrow X=-(A+3E)^{-1}A$

$$(A+3E)^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2&3\\-1&3&-5\\0&-1&3\end{pmatrix},X=-(A+3E)^{-1}A=\begin{pmatrix}2&-6&9\\-3&8&-15\\0&-3&8\end{pmatrix}$$

法三：$AX+3X+A=0$　　　$(A+3E)X+(A+3E)=3E$

$(A+3E)\cdot(X+E)=3E$　　　$X=3(A+3E)^{-1}-E$

$$(A+3E)^{-1}=\begin{vmatrix}1&-2&3\\-1&3&-5\\0&-1&3\end{vmatrix}$$

$$从而X=3(A+3E)^{-1}-E=\begin{vmatrix}2&-6&9\\-3&8&-15\\0&-3&8\end{vmatrix}$$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 5】矩阵的逆

三、(12 分)

【正解】秩为 3，最大线性无关组为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$（不唯一），线性表示为$\alpha_3=2\alpha_1+\alpha_2,\alpha_5=\alpha_1+\alpha_2-\alpha_4$

【学解】$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=\begin{pmatrix}1&2&4&3&0\\2&1&5&2&1\\3&-2&4&1&0\\1&-1&1&2&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&2&0&1\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

向量组的秩为 3，一个最大线性无关组为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$（不唯一）

$\alpha_3=2\alpha_1+\alpha_2,\alpha_5=\alpha_1+\alpha_2-\alpha_4$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 12】极大线性无关组

四、(13 分)

【正解】对线性方程组的增广矩阵做初等行变换得：

$$\begin{pmatrix} \lambda-1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & \lambda-1 & 1 & 3\lambda \\ 1 & 1 & \lambda-1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 2-\lambda & 3\lambda \\ 0 & 0 & -(\lambda+1)(\lambda-2) & 3(\lambda+1) \end{pmatrix}$$

当$(\lambda+1)(\lambda-2)\neq 0$，即$\lambda\neq 2,\lambda\neq -1$，有唯一解。

当$\lambda=2$时，无解

当$\lambda=-1$有无穷多解，通解满足$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},c\in R$

【学解】将矩阵变换成标准型或者行标准型后再分类讨论

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 17】非齐次线性方程组

五、(15 分)

【正解】二次型的矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

特征多项式$|A-\lambda E|=(1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+1)$，特征值为：2,1，-1

当$\lambda=2$时,特征向量为$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$；当$\lambda=1$时，特征向量为$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$；当$\lambda=-1$时，特征向量为$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

对特征向量单位化，得：$\begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix},\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},\begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$，正交矩阵$P=\begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

标准型为$f=2y_1^2+y_2^2-y_3^2$

【学解】通过二次型矩阵来求得特征值，进而求得正交矩阵，得到所要的标准型

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 19-24 重要题型】题型 6 二次型的标准化

六、(10 分)

【正解】(1) 证：任意 $A,B\in M_2, T(A+B)=P^{-1}(A+B)P=P^{-1}AP+P^{-1}BP=T(A)+T(B)$，

则对任意 $k\in R, A\in M_2$, 有 $T(kA)=P^{-1}(kA)P=kP^{-1}Ap=kT(A)$

(2) $P^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&1\end{pmatrix}, T(E_{11})=\begin{pmatrix}2&2\\-1&-1\end{pmatrix}, T(E_{12})=\begin{pmatrix}2&4\\-1&-2\end{pmatrix}, T(E_{21})=\begin{pmatrix}-1&-1\\1&1\end{pmatrix}, T(E_{22})=\begin{pmatrix}-1&-2\\1&2\end{pmatrix}$

线性变换 T 在该基下的矩阵为 $\begin{pmatrix}2&2&-1&-1\\2&4&-1&-2\\-1&-1&1&1\\-1&-2&1&2\end{pmatrix}$

【学解】要证明线性变换，即证明对任意 $k\in R$, 使得 $T(kA)=kT(A)$；第二问中首先得出 P 的可逆矩阵后再由线性变换得出该基下的矩阵。

【考点延伸】线性变换的矩阵的定义和性质

七、证明题（16 分）

【正解】（1）$R(B)\geqslant R(E)=n$, B 是 $m\times n$ 矩阵，$R(B)\leqslant n$，

B 的秩等于列数，所以列向量线性无关。

（2）$R(A)\leqslant R(\alpha\alpha^T)+R(\beta\beta^T)=2$，有特征值 0

$A\alpha=\alpha\alpha^T\alpha+2\beta\beta^T\alpha=\alpha$，有特征值 1

$A\beta=\alpha\alpha^T\beta+2\beta\beta^T\beta=2\beta$，有特征值 2

矩阵 A 有三个不同的特征值，所以能够相似于对角矩阵 $\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&0\end{pmatrix}$。

【学解】线性无关可以联系到满秩；相似对角阵需求得其特征值

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 9】矩阵的秩和矩阵等价、【知识点 19】特征值与特征向量

【知识点 20】矩阵相似对角化