

上一章已经把积分概念从一维直线推广到了二维平面和三维空间. 本章将把积分概念推广到曲线和曲面上.

	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
平直	定积分	二重积分	三重积分
弯曲	曲线积分	曲面积分	

曲线积分和曲面积分有显著的物理意义, 我们以物理问题作为引例来介绍这两种积分. 最后, 利用这两种积分, 我们将把微积分基本定理推广到二维和三维.

1.1 第一类曲线积分	1
1.2 第二类曲线积分	4
1.3 Green 公式	10
1.4 第一类曲面积分	17
1.5 第二类曲面积分	21
1.6 Gauss 公式与散度定理 . . .	27
1.7 Stokes 公式与旋度定理 . . .	30

1.1 第一类曲线积分

让我们回顾一下曲线的弧长. 设 $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} (\alpha \leq t \leq \beta)$ 是一条分段光滑的平面参数曲线, 它从 $\mathbf{r}(\alpha)$ 到 $\mathbf{r}(\beta)$ 的弧长为

$$s(t) = \int_{\alpha}^t |\mathbf{r}'(\tau)| d\tau = \int_{\alpha}^t \sqrt{[x'(\tau)]^2 + [y'(\tau)]^2} d\tau. \quad (1.1)$$

等价地, 弧长微分是

$$ds = |\mathbf{r}'(t)| dt = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt. \quad (1.2)$$

设 $t = t(s)$ 是 $s = s(t)$ 的反函数, 那么我们可以用弧长 s 把曲线参数化为 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t(s)) = x(t(s))\mathbf{i} + y(t(s))\mathbf{j}$, 也可直接写作 $\mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j}$, 称之为曲线的弧长参数化. 一般地, 如果 $\mathbf{r}'(t)$ 是单位向量, 那么 t 与 s 仅相差一个平移 $t = s + \alpha$, 这样的参数 t 通常也被称为弧长参数.

我们通过曲线构件的质量来引出第一类曲线积分. 设 $C : \mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} (0 \leq s \leq L)$ 是一条弧长参数化的曲线, 它的总长度是 L , 它在 (x, y) 点的密度为 $f(x, y)$. 基于积分思想, 我们通过以下步骤来推导曲线 C 的质量 m .

1. 第一步作划分. 取参数分割 $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_N = L$, 曲线上相应的点记为 $P_j = \mathbf{r}(s_j)$. 从 P_{j-1} 到 P_j 的小弧段记作 C_j , 它的弧长是 $\Delta s_j = s_{j+1} - s_j$.
2. 第二步采样近似. 在每个小弧段 C_j 上选样本点 $M_j = \mathbf{r}(\zeta_j)$, 那么 C 的质量可以近似取做

$$m \approx \sum_{j=1}^N f(M_j) \Delta s_j. \quad (1.3)$$

3. 最后取极限. 记 $\lambda = \max_j \Delta s_j$ 为所有小弧段的最大长度, 把极限

$$m = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{j=1}^N f(M_j) \Delta s_j \quad (1.4)$$

定义为曲线 C 的**质量**.

借助上述符号, 我们可以引出第一类曲线积分的定义.

第一类曲线积分

设函数 f 在曲线 C 上有定义, 把极限 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{j=1}^N f(M_j) \Delta s_j$ 称为 f 在曲线 C 上的**第一类曲线积分**, 写做

$$\int_C f(x, y) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{j=1}^N f(M_j) \Delta s_j. \quad (1.5)$$

第一类曲线积分也可以看做**曲边柱面的面积**: 以 C 为准线做母线平行 z 轴的柱面, 它夹在 xy 平面和 f 的图像之间的部分就是一个曲边柱面, 其面积就是高度函数沿着底边的曲线积分.

下面我们把 (1.5) 写成定积分的形式. 注意到 Riemann 和 (1.3) 可以写成

$$\sum_{j=1}^N f(M_j) \Delta s_j = \sum_{j=1}^N f(x(\zeta_j), y(\zeta_j)) \Delta s_j,$$

这里 $\zeta_j \in [s_{j-1}, s_j]$ 是参数采样. 根据定积分的定义有

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{j=1}^N f(x(\zeta_j), y(\zeta_j)) \Delta s_j = \int_0^L f(x(s), y(s)) ds. \quad (1.6)$$

所以, 第一类曲线积分 (1.5) 本质上就是一元函数 $f(x(s), y(s))$ 在区间 $s \in [0, L]$ 上的定积分.

第一类曲线积分的弧长参数公式

$$\int_C f(x, y) ds = \int_0^L f(x(s), y(s)) ds. \quad (1.7)$$

几何上, 此公式相当于把曲边柱面展平, 再计算得到的平面曲边梯形的面积.

根据这个公式, 曲线积分具有与定积分同样的性质, 比如线性性、保号性、绝对值不等式、中值定理等, 不再一一列举.

如果曲线采用的是一般参数 $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} (\alpha \leq t \leq \beta)$, 那么利用 (1.1) 把 $s = s(t)$ 代入 (1.7), 根据定积分换元法可知

$$\int_0^L f(x(s), y(s)) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) ds(t) = \int_{\alpha}^{\beta} f(\mathbf{r}(t)) |\mathbf{r}'(t)| dt. \quad (1.8)$$

第一类曲线积分的参数化公式

函数 f 在曲线 $C: \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} (\alpha \leq t \leq \beta)$ 上的第一类曲线积

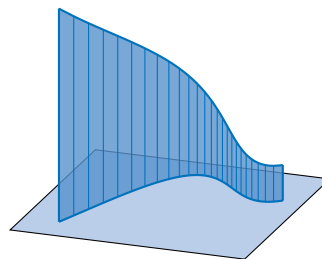


图 1.1. 曲边柱面的面积

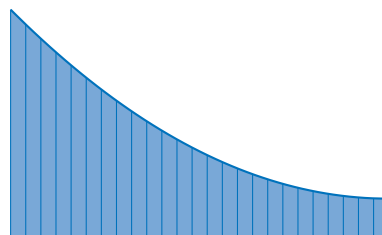


图 1.2. 曲边柱面展平

分是

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^\beta f(x(t), y(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt. \quad (1.9)$$

如果曲线是函数 $y = y(x) (a \leq x \leq b)$ 的图像, 那么曲线可以参数化为 $\mathbf{r}(x) = (x, y(x))$, 进而曲线积分可以写为

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx. \quad (1.10)$$

类似地, 如果曲线是 $x = x(y) (c \leq y \leq d)$ 的图像, 那么曲线积分公式为

$$\int_C f(x, y) ds = \int_c^d f(x(y), y) \sqrt{[x'(y)]^2 + 1} dy. \quad (1.11)$$

例 1.1.1 求密度函数为 $\rho(x, y) = x$ 的抛物线段 $y = x^2 (0 \leq x \leq 1)$ 的质量.

解. 此时可以用公式 (1.10),

$$m = \int_C \rho(x, y) ds = \int_0^1 x \sqrt{1 + 4x^2} dx = \frac{1}{12} (5\sqrt{5} - 1).$$

仿照薄板和空间物体, 也可以计算曲线的质心和转动惯量, 留给读者完成.¹ □

例 1.1.2 求 Viviani 体的侧面积, 也就是计算柱面 $x^2 + y^2 = Rx$ 位于 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 以内部分的面积.

解. 侧面可分为上下两个全等的部分, 上半部分的面积可以看做函数 $f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 在平面曲线 $C: x^2 + y^2 = Rx$ 上的曲线积分

$$A_+ = \int_C \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} ds.$$

曲线 C 可参数化为

$$\mathbf{r}(\theta) = (x(\theta), y(\theta)) = \frac{R}{2}(1 + \cos \theta, \sin \theta).$$

从而弧长微分

$$ds = |\mathbf{r}'(\theta)| d\theta = \frac{R}{2} d\theta,$$

并且函数

$$f(x(\theta), y(\theta)) = R \sin \frac{\theta}{2}.$$

于是, 根据积分公式 (1.9) 可知上半部分的面积为

$$A_+ = \int_0^{2\pi} R \sin \frac{\theta}{2} \cdot \frac{R}{2} d\theta = 2R^2.$$

因此侧面积 $A = 2A_+ = 4R^2$. □

1: 密度为 $\rho(x, y)$ 的曲线 C 的质心公式为

$$\bar{x} = \frac{\int_C x \rho(x, y) ds}{\int_C \rho(x, y) ds},$$

$$\bar{y} = \frac{\int_C y \rho(x, y) ds}{\int_C \rho(x, y) ds}.$$

它对于 x 轴和 y 轴的转动惯量分别为

$$I_x = \int_C y^2 \rho(x, y) ds,$$

$$I_y = \int_C x^2 \rho(x, y) ds.$$

与平面曲线类似, 对于空间曲线 $C: \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} (\alpha \leq t \leq \beta)$, 也可以定义第一类曲线积分, 并且也成立类似 (1.9) 的公式

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt. \quad (1.12)$$

一般地, 对于 \mathbb{R}^n 中的曲线 $C: \mathbf{r}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ 有

$$\int_C f(\mathbf{r}) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(\mathbf{r}(t)) |\mathbf{r}'(t)| dt. \quad (1.13)$$

例 1.1.3 计算曲线积分 $I = \int_C (x^2 + y^2 + z^2) ds$, 其中 C 为螺旋线 $\mathbf{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ 上相应于 t 从 0 到 2π 的一段弧.

解. 切向量为 $\mathbf{r}'(t) = (-a \sin t, a \cos t, b)$, 从而弧长微分为

$$ds = |\mathbf{r}'(t)| dt = \sqrt{a^2 + b^2} dt.$$

进而, 曲线积分为

$$I = \int_0^{2\pi} (a^2 + b^2 t^2) \sqrt{a^2 + b^2} dt = \sqrt{a^2 + b^2} \left(2\pi a^2 + \frac{8}{3} b^2 \pi^3 \right).$$

□

1.2 第二类曲线积分

力场沿曲线的做功问题会引出一种新形式的积分, 它被称为**第二类曲线积分**, 下面我们来讨论这个问题. 设质点在力场

$$\mathbf{F} = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$$

的作用下, 沿曲线 $C: \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} (\alpha \leq t \leq \beta)$, 从 $A = \mathbf{r}(\alpha)$ 移动到了 $B = \mathbf{r}(\beta)$. 下面推导这个移动过程中力 \mathbf{F} 所做的功 W .

1. 第一步作划分. 取参数分割 $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_N = \beta$, 从而曲线被分为了 N 小段, 从 $\mathbf{r}(t_{j-1})$ 到 $\mathbf{r}(t_j)$ 的小弧段记作 C_j .
2. 第二步取近似. 在每个小弧段 C_j 上选样本点 $\mathbf{r}(\tau_j) = M_j(\xi_j, \eta_j)$, 那么力 \mathbf{F} 在 C_j 段上所做的功可近似为

$$\Delta W_j \approx \mathbf{F}(M_j) \cdot \Delta \mathbf{r}_j \quad (2.1)$$

其中 $\Delta \mathbf{r}_j = \mathbf{r}(t_j) - \mathbf{r}(t_{j-1})$ 是质点在这一段上的位移. 这样, 总功 W 可以近似取做

$$W \approx \sum_{j=1}^N \mathbf{F}(M_j) \cdot \Delta \mathbf{r}_j. \quad (2.2)$$

如果记 $\Delta \mathbf{r}_j = \Delta x_j \mathbf{i} + \Delta y_j \mathbf{j}$, 那么上式可写做

$$W \approx \sum_{j=1}^N (P(\xi_j, \eta_j) \Delta x_j + Q(\xi_j, \eta_j) \Delta y_j). \quad (2.3)$$

3. 最后取极限. 记 λ 为 N 个小弧段的最大长度, 那么极限

$$W = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{j=1}^N \mathbf{F}(M_j) \cdot \Delta \mathbf{r}_j = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{j=1}^N (P(\xi_j, \eta_j) \Delta x_j + Q(\xi_j, \eta_j) \Delta y_j) \quad (2.4)$$

就是力场 \mathbf{F} 沿曲线 C 从 A 到 B 所做的功. 此极限称为 \mathbf{F} 沿曲线 C 从 A 到 B 的曲线积分, 一般写为

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy. \quad (2.5)$$

注意, (2.5) 式的信息表达并不完整: 根据前面的讨论, 这里的曲线 C 是有方向的, 也就是从 A 到 B , 而表达式中并未指明这一点. 因此我们需要引入曲线的定向的概念. 如果我们规定从 A 到 B 是曲线 C 的正方向, 那么这条被赋予方向的正向曲线通常写为 $+C$ 或 C^+ , 通常也简写为 C ; 从 B 到 A 的反向曲线则记作 $-C$ 或 C^- . 指定方向的曲线称为定向曲线. 因此, 上述积分应当是在定向曲线上的积分.

显然, 力场沿反向曲线做的功是沿正向曲线做的功的相反数, 这是因为质点反向运动时 (2.1) 中的位移 $\Delta \mathbf{r}_j$ 应为 $\Delta \mathbf{r}_j = \mathbf{r}(t_{j-1}) - \mathbf{r}(t_j)$, 它与正向时相差一个负号.

如无特殊说明, 我们把参数曲线 $\mathbf{r}(t)$ 参数增大的方向定为正方向.

这样, 沿用上面的符号, 我们可以写出第二类曲线积分的准确定义.

第二类曲线积分

设有定向曲线 $C^+ : \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} (\alpha \leq t \leq \beta)$, 以及向量场 $\mathbf{F} = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$. 极限

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{j=1}^N \mathbf{F}(M_j) \cdot \Delta \mathbf{r}_j = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{j=1}^N (P(\xi_j, \eta_j) \Delta x_j + Q(\xi_j, \eta_j) \Delta y_j)$$

称为 \mathbf{F} 沿定向曲线 C^+ 的曲线积分, 记作

$$\int_{C^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \text{ 或 } \int_{C^+} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

向量场 \mathbf{F} 沿着定向曲线 C^- 的曲线积分为

$$\int_{C^-} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{C^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

通常把 $Pdx + Qdy$ 称为微分形式, 那么上述积分也称为微分形式的积分. 再者, $\int_{C^+} Pdx$ 称为 P 对坐标 x 的曲线积分, $\int_{C^+} Qdy$ 称为 Q 对坐标 y 的曲线积分.

如何计算第二类曲线积分? 我们尝试参数化的方法. 假设定向曲线 $C^+ : \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} (\alpha \leq t \leq \beta)$ 连续可微, 那么

$$\Delta \mathbf{r}_j = \mathbf{r}(t_j) - \mathbf{r}(t_{j-1}) = \mathbf{r}'(t_j) \Delta t_j + o(\Delta t_j) = (\mathbf{r}'(t_j) + o(1)) \Delta t_j.$$

再假设 F 连续, 那么 $F(M_j) = F(\mathbf{r}(t_j)) + o(1)$. 于是

$$\sum_{j=1}^N F(M_j) \cdot \Delta \mathbf{r}_j = \sum_{j=1}^N F(\mathbf{r}(t_j)) \cdot \mathbf{r}'(t_j) \Delta t_j + o(1).$$

取极限即得

$$\int_{C^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt. \quad (2.6)$$

形式上看, 把第二类曲线积分化为定积分时, 只要把 $d\mathbf{r}$ 看做曲线 $\mathbf{r}(t)$ 的微分 $d\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}'(t)dt$ 即可, 即

$$\int_{C^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot d\mathbf{r}(t).$$

它也称为第二类曲线积分的参数化公式.²

进一步, 也能得到沿反向的第二类曲线积分

$$\int_{C^-} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_{\beta}^{\alpha} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt. \quad (2.7)$$

比较上面两个式子可以发现, 第二类曲线积分化为定积分时, 积分限是从起点参数到终点参数, 不一定是从小到大.

2: 如果用微分形式来表示, 那么

$$P(x, y)dx = P(x(t), y(t))x'(t)dt,$$

$$Q(x, y)dy = Q(x(t), y(t))y'(t)dt.$$

从而

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

$$= (P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t))dt.$$

第二类曲线积分的参数公式

设向量场 F 连续, 曲线 $C: \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} (\alpha \leq t \leq \beta)$ 连续可微, 则第二类曲线积分可化为

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\text{start}}^{\text{end}} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt. \quad (2.8)$$

特别地, 沿 C^+ 的积分为 (2.6), 沿 C^- 的积分为 (2.7).

如果曲线分段光滑, 那么只需将积分分解为各光滑段上的积分之和.

如果将定向曲线 C 按正向弧长参数化为 $C: \mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} (0 \leq s \leq L)$, 则沿其正向的第二类曲线积分可化为

$$\int_{C^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^L \mathbf{F}(\mathbf{r}(s)) \cdot \mathbf{r}'(s) ds = \int_C \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau}_0^+ ds \quad (2.9)$$

其中 $\boldsymbol{\tau}_0^+$ 是指向曲线正向的单位切向量. 类似地, 沿反向的曲线积分是

$$\int_{C^-} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_0^L \mathbf{F}(\mathbf{r}(s)) \cdot \mathbf{r}'(s) ds = \int_C \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau}_0^- ds \quad (2.10)$$

其中 $\boldsymbol{\tau}_0^- = -\boldsymbol{\tau}_0^+$ 是指向曲线反向的单位切向量. 上述两式可总结为以下结论.

第二类曲线积分与第一类曲线积分

向量场 \mathbf{F} 沿定向曲线 C 的第二类积分可化为第一类曲线积分

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau}_0 ds. \quad (2.11)$$

其中 $\boldsymbol{\tau}_0$ 是与曲线定向相同的单位切向量.

对于空间向量场 $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ 和空间定向曲线 $C^+ : \mathbf{r} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} (\alpha \leq t \leq \beta)$, 也可定义第二类曲线积分

$$\int_{C^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C^+} Pdx + Qdy + Rdz. \quad (2.12)$$

同样可以将其化为定积分和第一类曲线积分, 形式上与 (2.8) 和 (2.11) 完全一致.

通过上面的参数公式, 利用定积分的线性性和区间可加性, 容易得到下面的性质.

► **线性性.** 若 λ, μ 是常数, 则

$$\int_C (\lambda \mathbf{F} + \mu \mathbf{G}) \cdot d\mathbf{r} = \lambda \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \mu \int_C \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r}.$$

► **逐项积分**

$$\int_C Pdx + Qdy + Rdz = \int_C Pdx + \int_C Qdy + \int_C Rdz.$$

► **可加性.** 设 C_1, C_2 是光滑的定向曲线, 那么

$$\int_{C_1 \pm C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \pm \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

这里 $C_1 \pm C_2$ 的涵义如下: 当 C_1 的终点与 C_2 的起点重合时, 两条曲线连接之后按照原定向形成的新定向曲线记作 $C_1 + C_2$; 当 C_1 的终点与 C_2 的终点重合时, C_1 和 $-C_2$ 可以首尾相连形成新的定向曲线 $C_1 + (-C_2)$, 把它记作 $C_1 - C_2$. 如果 C_1, C_2 不相连, 那么上式可以看做积分 $\int_{C_1 \pm C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ 的定义.

例 1.2.1 计算 $I = \int_C xy dx$, 其中 C 为抛物线 $y^2 = x$ 上从点 $A(1, -1)$ 到点 $B(1, 1)$ 的定向弧段.

解. 曲线可以用纵坐标 y 参数化为 $\mathbf{r}(y) = (y^2, y)$, $-1 \leq y \leq 1$. 此时参数方向与曲线定向一致. 根据参数化公式, 有

$$I = \int_{-1}^1 y^2 \cdot y \cdot d(y^2) = 2 \int_{-1}^1 y^4 dy = \frac{4}{5}.$$

□

例 1.2.2 按以下两种路径计算 $I = \int_C (1 + y^2) dx$, 其中 C 为: (1) 半径为 a 、圆心为原点、按逆时针方向绕行的上半圆周; (2) 从点 $A(a, 0)$ 沿 x 轴到点 $B(-a, 0)$ 的直线段.

解. 我们应用参数公式来计算.

- (1) 将上半圆周参数化为 $(a \cos \theta, a \sin \theta), 0 \leq \theta \leq \pi$, 参数方向与曲线定向一致.

$$I = \int_0^\pi [1 + (a \sin \theta)^2] d(a \cos \theta) = -2a - \frac{4}{3}a^3.$$

- (2) 直线段可直接用横坐标 x 参数化 $(x, 0), -a \leq x \leq a$, 参数方向与曲线定向相反, 起点参数 $x = a$ 、终点参数 $x = -a$.

$$I = \int_a^{-a} (1 + 0) dx = -2a.$$

□

从上例可见, 虽然两条积分路径的起点和终点一样, 但第二类曲线积分并不相同. 然而对于一类特殊的向量场, 其第二类曲线积分仅与起点和终点有关, 与积分路径无关, 这类向量场就是**保守场**.

保守场

如果向量场 F 是函数 f 的梯度场, 即 $F = \nabla f$, 则称 F 为**保守场**, 而 f 称为 F 的**势函数**.

- ▶ 如果 $F = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ 是一个平面保守场, 那么存在函数 $f(x, y)$ 使得 $P = f_x, Q = f_y$.
- ▶ 如果 $F = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$ 是一个空间保守场, 那么存在函数 $f(x, y, z)$ 使得 $P = f_x, Q = f_y, R = f_z$.

如果用微分形式来描述, 那么 $Pdx + Qdy$ 或者 $Pdx + Qdy + Rdz$ 是函数 f 的全微分 df .

对于保守场的第二类曲线积分, 成立下面的曲线积分基本定理.

曲线积分基本定理 (Newton-Leibniz 公式)

设 f 连续可偏导, 定向曲线 $C^+ : \mathbf{r}(t)(\alpha \leq t \leq \beta)$ 连续可微, 则

$$\int_{C^+} \nabla f \cdot d\mathbf{r} = \int_{C^+} df = f(\mathbf{r}(\beta)) - f(\mathbf{r}(\alpha)). \quad (2.13)$$

特别地, 保守场的曲线积分与路径无关, 只与起点和终点有关.

证明. 此定理对二维和三维都成立 (事实上任意维数均可), 我们仅对二维情形做出证明. 根据参数化公式

$$\int_{C^+} \nabla f \cdot d\mathbf{r} = \int_\alpha^\beta \left(f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t) \right) dt.$$

另一方面, 根据链式法则, 有

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t).$$

故而, 根据定积分的 Newton-Leibniz 公式, 可得

$$\begin{aligned}\int_{C^+} \nabla f \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^\beta \left(\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) \right) dt \\ &= f(x(\beta), y(\beta)) - f(x(\alpha), y(\alpha)).\end{aligned}$$

可以看出上述证明与维数无关, 三维情形同样适用. \square

例 1.2.3 试利用曲线积分的 Newton-Leibniz 公式计算 $\int_C 2xydx + x^2dy$, 其中 C 的起点是 $A(0,0)$ 、终点是 $B(1,1)$. 并分别沿着下述三条曲线计算该积分: (1) 沿抛物线 $y = x^2$ 从 A 到 B ; (2) 沿抛物线 $x = y^2$ 从 A 到 B ; (3) 沿折线段 APB 从 A 到 B , 其中 $P(1,0)$.

解. 容易发现 $2xydx + x^2dy = d(x^2y)$ 是全微分, 所以

$$\int_C 2xydx + x^2dy = \int_C d(x^2y) = x^2y|_A^B = 1.$$

下面按三条路径来验证结果.

(1) 把横坐标 x 当作参数, 曲线定向与 x 正向一致.

$$\int_C 2xydx + x^2dy = \int_0^1 2x^3dx + x^2d(x^2) = \int_0^1 4x^3dx = 1.$$

(2) 把纵坐标 y 当作参数, 曲线定向与 y 正向一致.

$$\int_C 2xydx + x^2dy = \int_0^1 2y^3d(y^2) + y^4dy = \int_0^1 5y^4dx = 1.$$

(3) 把折线分两段计算.

$$\int_C 2xydx + x^2dy = \int_{AP} 2xydx + x^2dy + \int_{PB} 2xydx + x^2dy.$$

第一项 AP 段可参数化为 $(x, 0), x \in [0, 1]$; 第二项 PB 段可参数化为 $(1, y), y \in [0, 1]$. 所以

$$\begin{aligned}\int_{AP} 2xydx + x^2dy &= \int_0^1 2x \cdot 0 \cdot dx + x^2 \cdot d0 = 0, \\ \int_{PB} 2xydx + x^2dy &= \int_0^1 21 \cdot y \cdot d1 + 1^2 \cdot dy = 1.\end{aligned}$$

两者相加即得 $\int_C 2xydx + x^2dy = 1$. \square

例 1.2.4 在力 $F = (y, x, xz)$ 的作用下, 质点沿螺旋线 $C: \mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ 从 $t = 0$ 处移动到了 $t = \pi$ 处, 求力 F 所做的功.

解. 所做的功为第二类曲线积分

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C (y, x, xz) \cdot (dx, dy, dz) = \int_C ydx + xdy + xzdz.$$

起点是 $A(1, 0, 0)$, 终点为 $B(-1, 0, \pi)$. 注意到 $ydx + xdy = d(xy)$, 可以直接用曲线积分基本定理

$$\int_C ydx + xdy = xy|_A^B = 0.$$

因此

$$W = \int_C xzdz = \int_0^\pi \cos t \cdot t \cdot dt = -2.$$

此例表明, 在做参数化之前可以尝试先把简单部分积出来. \square

例 1.2.5 计算 $I = \int_C (z-y)dx + (x-z)dy + (x-y)dz$, 其中曲线 C 为 $x^2 + y^2 = 1$ 和 $z = x^2 - y^2$ 的交线, 从 z 轴正向看取顺时针方向.

解. 注意到 C 是封闭曲线, 首尾相同, 因此如果能应用曲线积分基本定理, 那么积分必为零. 而本题的微分形式可以写为

$$(z-y)dx + (x-z)dy + (x-y)dz = d(zx) - d(zy) - ydx + xdy.$$

因此

$$I = \int_C d(zx) - d(zy) - ydx + xdy = \int_C (-ydx + xdy).$$

下面用参数公式计算右端项. 把曲线 C 参数化为 $\mathbf{r} = (\cos t, \sin t, \cos 2t)$, 此时曲线的定向是 t 的负方向, 所以

$$I = \int_{2\pi}^0 (-\sin t \cdot d \cos t + \cos t \cdot d \sin t) = \int_{2\pi}^0 1 dt = -2\pi.$$

\square

1.3 Green 公式

Green 公式揭示了平面区域上的二重积分与此区域边界曲线上的第二类曲线积分之间的深刻联系, 它是 Newton-Leibniz 公式的二维推广, 由 George Green 在研究电磁理论的过程中发展而来.

从数学角度而言, 如果要推广 Newton-Leibniz 公式, 一个自然的选择是计算

$$\iint_D P_y dx dy, \quad \iint_D Q_x dx dy.$$

假设 D 是 x 型区域, 且 $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x)\}$. 根据 Fubini 定理和 Newton-Leibniz 公式, 可得

$$\begin{aligned} \iint_D P_y dx dy &= \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} P_y(x, y) dy \right) dx \\ &= \int_a^b (P(x, d(x)) - P(x, c(x))) dx. \end{aligned}$$

将 ∂D 沿着逆时针定向依次分为四段定向曲线 C_1, C_2, C_3, C_4 . 曲线 C_1 可



图 1.3. George Green (1793-1841), 英国数学物理学家、磨坊主, 为电磁学建立了数学理论. 在其 1828 年的论文 *An Essay On the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism* 中, 出现了 Green 公式的最初形式. Green 从他父亲那里继承了一家磨坊, 一直经营至去世. 图中所示为 1986 年翻新的 Green 家族磨坊, 现已成为诺丁汉当地的一个科学中心.

以参数化为 $(x, c(x))$, $x \in [a, b]$, 曲线定向与 x 正向一致, 所以

$$\int_{C_1} P dx = \int_a^b P(x, c(x)) dx.$$

曲线 C_2 上 $x = b$ 为常数, 所以 $\int_{C_2} P dx = 0$. 类似地, $\int_{C_4} P dx = 0$. 曲线 C_3 可以参数化为 $(x, d(x))$, $a \leq x \leq b$. 此时曲线定向与 x 正向相反, 从而

$$\int_{C_3} P dx = \int_b^a P(x, d(x)) dx = - \int_a^b P(x, d(x)) dx.$$

于是,

$$\begin{aligned} \int_C P dx &= \int_{C_1} P dx + \int_{C_2} P dx + \int_{C_3} P dx + \int_{C_4} P dx \\ &= \int_a^b P(x, c(x)) dx - \int_a^b P(x, d(x)) dx = - \iint_D P_y dx dy. \end{aligned}$$

类似可得.³

$$\iint_D Q_x dx dy = \int_C Q dy.$$

将 P, Q 的结果相加即得 Green 公式

$$\iint_D (Q_x - P_y) dx dy = \int_C P dx + Q dy.$$

此处 C 定向逆时针.

Green 公式 I

设闭区域 D 的边界是一条分段光滑的闭曲线 C , 函数 $P(x, y)$ 和 $Q(x, y)$ 在 D 上连续可偏导, 取 C 的定向为逆时针, 则

$$\iint_D (Q_x - P_y) dx dy = \int_C P dx + Q dy. \quad (3.1)$$

证明. 把 D 可以分割为有限个小区域 D_1, \dots, D_N , 并且每个小区域都是 x 型, 则

$$- \iint_D P_y dx dy = - \sum_{j=1}^N \iint_{D_j} P_y dx dy = \sum_{j=1}^N \int_{\partial D_j} P dx.$$

注意, 小区域的边界 ∂D_j 有些部分是大区域 D 的边界, 另一些部分则是新增的分割曲线. 但是, 分割曲线必然是两个相邻小区域的公共边界, 它在这两个小区域上的定向恰好相反, 进而曲线积分互相抵消. 因此, 所有分割曲线上的第二类曲线积分总和为零. 也就是说, 所有 ∂D_j 上的积分之和最后剩下的是 ∂D 上的积分,

$$- \iint_D P_y dx dy = \sum_{j=1}^N \int_{\partial D_j} P dx = \int_{\partial D} P dx.$$

类似可得 Q 的部分.

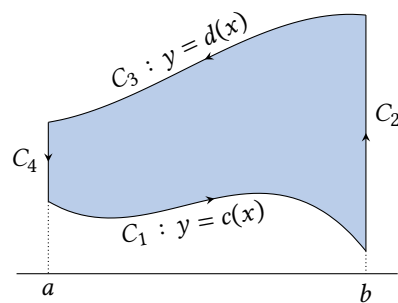


图 1.4. 将 x 型区域的边界分为四段定向曲线 C_1, C_2, C_3, C_4 , 依次计算每一段上的曲线积分.

3: P, Q 的公式之所以相差一个负号, 原因是若把 xy 面沿着 $y = x$ 翻转之后, 曲线 C 的定向也反转了!

□

我们对符号再略作说明. 由于 C 是闭曲线, 所以在它上的曲线积分也常常记作

$$\oint_C Pdx + Qdy.$$

此外, 由于 C 是 D 的边界, 所以 Green 公式也常写为

$$\iint_D (Q_x - P_y) dxdy = \oint_{\partial D} Pdx + Qdy. \quad (3.2)$$

Green 公式还可以进一步推广到有“洞”的区域. 如果区域内部的任意闭曲线都可以在此区域内连续收缩为一个点, 区域就没有“洞”, 则称其**单连通**; 反之, 则称其**复连通**.

单连通区域的边界就是一条曲线, 而复连通区域的边界则有多条曲线. 无论单连通区域还是复连通区域, 它们边界曲线的自然定向都遵循**左手法则**: 当某人沿边界运动时, 若区域位于其左侧, 则其前进方向是边界的正方向. 因此, 复连通区域外围的边界曲线以逆时针为正向, 区域里面的边界(洞的边界)以顺时针为正向. 也就是说, 简单闭曲线作为区域里面洞的边界时, 其定向与自然定向相反.

如果复连通区域只有有限个洞, 那么可以用有限条曲线把它划分为若干个单连通小区域, 进而得到复连通区域上的 Green 公式.



图 1.5. 复连通区域

Green 公式 II

设复连通有界闭区域 D 的边界由有限条分段光滑的简单闭曲线构成, 函数 $P(x, y)$ 和 $Q(x, y)$ 在 D 上连续可偏导, 则

$$\iint_D (Q_x - P_y) dxdy = \int_{\partial D} Pdx + Qdy. \quad (3.3)$$

若取 $P = -y, Q = x$, 则由 Green 公式可得面积公式.

$$A(D) = \iint_D dxdy = \frac{1}{2} \int_{\partial D} xdy - ydx. \quad (3.4)$$

例 1.3.1 计算 $I = \oint_C xy^2 dy - x^2 y dx$, 其中 C 是圆周 $x^2 + y^2 = R^2$, 取自然定向.

解. 我们用 Green 公式来求解. 把圆周 C 围成的区域记作 D , 则

$$I = \iint_D (x^2 + y^2) dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^R r^3 dr d\theta = \frac{1}{2} \pi R^4.$$

此积分可以直接用参数公式计算, 留作练习. □

例 1.3.2 计算 $I = \int_C x dy$, 这里 $C: y = \sqrt{1-x^2}$ 是上半单位圆周, 方向自右往左.

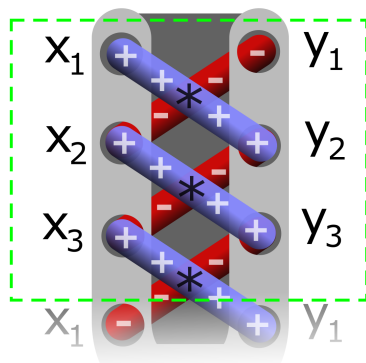


图 1.6. 鞋带公式. 设 P 是多边形区域, 其边界是闭折线 $M_1 M_2 \cdots M_n$, 其中 $M_1 = M_n$. 如果每个点的坐标为 $M_j(x_j, y_j)$, 那么多边形 P 的面积为

$$A(P) = \frac{1}{2} \left| \sum_{j=1}^{n-1} (x_j y_{j+1} - y_j x_{j+1}) \right|.$$

这是面积公式 (3.4) 的离散形式, 可以用来近似计算一个区域的面积.

解. 从 $(-1, 0)$ 到 $(1, 0)$ 的有向线段记作 L , 则 $C + L$ 围成半个圆盘 D , 进而

$$\int_{C+L} xdy = \iint_D dx dy = \frac{1}{2}\pi.$$

注意到 L 上 $y = 0$, 所以 $\int_L xdy = 0$, 进而 $\int_C xdy = \int_{C+L} xdy = \frac{1}{2}\pi$. \square

例 1.3.3 计算 $I = \oint_C \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$, 其中 C 是不通过原点的简单闭曲线, 取自然定向.

解. 设 C 围成的区域为 D . 记 $P = -y/(x^2 + y^2), Q = x/(x^2 + y^2)$, 直接计算可得

$$Q_x = P_y = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

- ▶ 如果原点不在 D 内, 那么 P, Q 在 D 上连续可偏导, 可以应用 Green 公式.

$$I = \iint_D (Q_x - P_y) dx dy = 0.$$

- ▶ 如果原点含于 D 内, 那么 P, Q 在 D 上有不可微点, 不能直接应用 Green 公式. 此时, 取足够小的 $r > 0$, 使得圆周 $\Gamma: x^2 + y^2 = r^2$ 包含在 D 内. 那么, C 和 $-\Gamma$ 围成的区域 D^* 不含原点, 从而 P 和 Q 在 D^* 上满足 Green 公式条件. 因此

$$\oint_{C-\Gamma} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \iint_{D^*} (Q_x - P_y) dx dy = 0.$$

所以

$$I = \oint_C \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \oint_{\Gamma} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}.$$

对 Γ 做参数化 $(r \cos t, r \sin t), 0 \leq t \leq 2\pi$, 容易求得上述曲线积分为 $I = 2\pi$. 还可以再次利用 Green 公式

$$I = \frac{1}{r^2} \oint_{\Gamma} xdy - ydx = \frac{2}{r^2} \iint_{x^2 + y^2 \leq r^2} dx dy = 2\pi.$$

因此, 积分 I 可以判断原点是否被简单闭曲线所包围 (参见图 1.7). \square

例 1.3.4 计算 $I = \iint_D y dx dy$, 这里区域 D 由 x 轴和曲线 $C: \mathbf{r}(t) = (2t - t^3, t - t^2), t \in [0, 1]$ 围成.

解. 容易发现 C 在 x 轴上方, 且没有自交点. 把从 $\mathbf{r}(0) = (0, 0)$ 到 $\mathbf{r}(1) = (1, 0)$ 的有向线段记作 L , 那么 L 和 $-C$ 围成区域 D , 于是

$$I = -\frac{1}{2} \oint_{L-C} y^2 dx = \frac{1}{2} \int_C y^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (t - t^2)^2 d(2t - t^3) = \frac{2}{105}.$$

可见, 我们也能用曲线积分来计算二重积分. \square

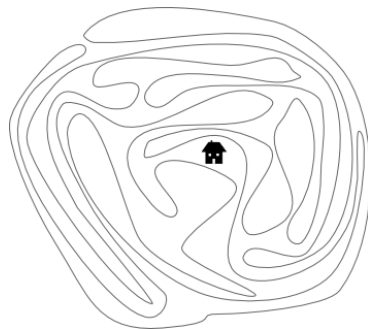


图 1.7. 小屋在篱笆内还是篱笆外?

Green 公式的向量形式

在多元函数微分学中, 我们介绍了梯度的概念, 它可以看做一个微分算子作用在函数上得到的向量值函数, 这个微分算子被称为 **Hamilton 算子**. 空间中的 Hamilton 算子 ∇ 可以看做向量型微分算子

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}. \quad (3.5)$$

它作用在 $f(x, y, z)$ 上就得到函数 f 的梯度

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k} = \text{grad } f.$$

对于二元函数 $g(x, y)$, 我们可以视其为不依赖于竖坐标的三元函数, 它也可以用 Hamilton 算子作用, 结果同样是梯度

$$\nabla g = \frac{\partial g}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial g}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial g}{\partial z}\mathbf{k} = \frac{\partial g}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial g}{\partial y}\mathbf{j} = \text{grad } g.$$

所以, 我们把二元函数的梯度看做三元函数梯度的特殊情形, 不再单论.

下面介绍 Hamilton 算子对向量场的作用. 设有连续可微的向量场

$$\mathbf{F} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k},$$

Hamilton 算子与它的点积和叉积定义为

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = P_x + Q_y + R_z, \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ P & Q & R \end{vmatrix} \\ &= (R_y - Q_z)\mathbf{i} + (P_z - R_x)\mathbf{j} + (Q_x - P_y)\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

前者称为向量场 \mathbf{F} 的**散度**, 通常也写为 $\text{div } \mathbf{F}$; 后者称为向量场 \mathbf{F} 的**旋度**, 可写为 $\text{rot } \mathbf{F}$ 或 $\text{curl } \mathbf{F}$.

▶ $\text{div } \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}$	(散度)
▶ $\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}$	(旋度)

Green 公式将会告诉我们它们的名称的由来.

我们可以把平面向量场 $\mathbf{F} = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ 看做特殊的空间向量场, 那么它的散度和旋度分别为

$$\text{div } \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = P_x + Q_y, \quad (3.8)$$

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = (Q_x - P_y)\mathbf{k}. \quad (3.9)$$

利用前述概念, 我们可以把 Green 公式表述为向量场的形式.

Green 公式的向量形式

设 D 是平面上的有界闭区域, 它的边界由有限条分段光滑的简单闭曲线构成, 边界曲线的**单位外法向量** (指向区域外侧的单位法向

量) 记作 \mathbf{n}_0^+ . 如果平面向量场 \mathbf{F} 在 D 上连续可偏导, 则成立

► 平面散度定理

$$\iint_D \nabla \cdot \mathbf{F} dA = \iint_D \operatorname{div} \mathbf{F} dA = \int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_0^+ ds.$$

► 平面旋度定理

$$\iint_D (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} dA = \iint_D \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} dA = \int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

证明. 旋度定理的证明是直接的, 只要代入旋度的定义即可. 下面证明散度定理. 按照边界的定向, 将 ∂D 弧长参数化为 $\mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j}$, 那么 $\mathbf{r}'(s) = x'(s)\mathbf{i} + y'(s)\mathbf{j}$ 就是指向往正方向的单位切向量 $\boldsymbol{\tau}_0^+$. 因为区域在边界左侧, 所以将 $\mathbf{r}'(s)$ 顺时针转动 $\pi/2$ 就得到边界的单位外法向

$$\mathbf{n}_0 = y'(s)\mathbf{i} - x'(s)\mathbf{j}.$$

设 $\mathbf{F} = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$, 则

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_0^+ ds &= \int_{\partial D} (P(x(s), y(s))y'(s) - Q(x(s), y(s))x'(s)) ds \\ &= \int_{\partial D} (-Q\mathbf{i} + P\mathbf{j}) \cdot (x'(s)\mathbf{i} + y'(s)\mathbf{j}) ds \\ &= \int_{\partial D} Pdy - Qdx = \iint_D (P_x + Q_y) dx dy = \iint_D \operatorname{div} \mathbf{F} dA. \end{aligned}$$

这里第三个等式用的是第一类曲线积分与第二类曲线积分的关系式 (2.11). \square

注意, $\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_0^+ ds$ 衡量了向量场 \mathbf{F} 自 D 往外发散的量, 而 $\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ 衡量了向量场 \mathbf{F} 环绕 D 旋转的量, 所以, 上述定理是“散度”和“旋度”两个名称的来源.

微分形式的原函数

前面已经说过, $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ 称为微分形式. 方便起见, 我们用希腊字母来表示它们, 比如 $\omega = Pdx + Qdy$. 如果 P, Q 连续或连续可微, 那么就称微分形式 ω 连续或连续可微.

如果存在函数 f 使得 $\omega = df$, 则称 f 是微分形式 ω 的**原函数**. 原函数的集合称为**不定积分**, 记作 $\int \omega = f + C$, 其中 C 是任意常数.

原函数存在定理

设微分形式 $\omega = Pdx + Qdy$ 在平面开区域 D 上连续. 那么, ω 在 D 上存在原函数的充要条件是, 它在 D 中的第二类曲线积分仅与起点和终点有关, 而与路径无关.

证明. 先来证明必要性. 如果 ω 存在原函数 f , 那么根据曲线积分基本定理, 有

$$\int_C \omega = \int_C df = f(B) - f(A),$$

其中 A, B 分别是 C 的起点和终点. 显然, 积分与路径无关.

下面来证明充分性. 因为积分与路径无关, 所以此时可以把第二类曲线积分简写为

$$\int_C \omega = \int_A^B \omega.$$

在区域 D 内取定一个基准点 $P_0(x_0, y_0)$, 定义如下函数

$$f(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \omega. \quad (3.10)$$

我们来证明 f 就是 ω 的原函数. 注意到 P, Q 连续, 所以若能证明 $f_x = P, f_y = Q$, 那么 f 就具有连续偏导数, 进而可微并且 $df = Pdx + Qdy$. 为了证明 $f_x = P$, 取足够小的 Δx , 使得从 (x, y) 到 $(x + \Delta x, y)$ 的线段 L 落在 D 内, 从而

$$\begin{aligned} \Delta_x f &= f(x + \Delta x, y) - f(x, y) \\ &= \int_{(x_0, y_0)}^{(x + \Delta x, y)} \omega - \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \omega = \int_L \omega. \end{aligned}$$

把线段 L 参数化为 $(x + t\Delta x, y), t \in [0, 1]$, 其定向与 t 的正向相同. 于是

$$\int_L \omega = \int_0^1 P(x + t\Delta x, y) d(x + t\Delta x) = \Delta x \cdot \int_0^1 P(x + t\Delta x, y) dt.$$

因 P 连续, 由积分中值定理, 存在 $0 < \tau < 1$, 使得

$$\frac{\Delta_x f}{\Delta x} = \int_0^1 P(x + t\Delta x, y) dt = P(x + \tau\Delta x, y).$$

令 $\Delta x \rightarrow 0$ 可得 $f_x(x, y) = P(x, y)$. 同理可得 $f_y(x, y) = Q(x, y)$. □

Poincare 引理

设 G 是单连通开区域, 微分形式 $\omega = Pdx + Qdy$ 在 G 上连续可微. 那么, ω 在 G 上存在原函数的充要条件是 $P_y = Q_x$.

证明. 如果 ω 有原函数 f , 那么 $f_x = P, f_y = Q$. 因为 P, Q 连续可微, 所以根据克莱洛定理可知 $P_y = f_{xy} = f_{yx} = Q_x$.

反之, 如果 ω 满足 $P_y = Q_x$, 我们证明 ω 有原函数. 根据上一个定理, 只需证明 ω 的积分与路径无关即可. 注意到区域 G 单连通, 所以起点和终点一样的两条曲线 L_1, L_2 会围成若干个含于 G 的区域 $\{D_j\}$. 在每个区域上应用 Green 公式, 可得

$$\int_{\partial D_j} \omega = \iint_{D_j} (Q_x - P_y) dx dy = 0.$$

注意到 $L_1 - L_2$ 就是这些边界 ∂D_j 的代数和, 因此

$$\int_{L_1} \omega - \int_{L_2} \omega = \int_{L_1 - L_2} \omega = \sum_j \int_{\pm \partial D_j} \omega = 0.$$

平面保守场

微分形式 $\omega = Pdx + Qdy$ 存在原函数等价于向量场 $F = Pi + Qj$ 是保守场. 因此, 在单连通区域上, 向量场 F 是保守场的充要条件是它的旋度为零 $\nabla \times F = 0$.

可积性条件

寻找 $\omega = Pdx + Qdy$ 的原函数本质上是求解偏微分方程组

$$\begin{cases} f_x(x, y) = P(x, y), \\ f_y(x, y) = Q(x, y). \end{cases}$$

Poincare 引理意味方程有解的条件是 $P_y = Q_x$, 这个条件称为方程的**可积性条件**.

所以, ω 的积分与路径无关, 进而它有原函数. \square

例 1.3.5 试问 $\omega = xy^2dx + x^2ydy$ 是否有原函数? 若有请求之.

解. 设 $P = xy^2, Q = x^2y$, 显然它们在全平面上满足 $P_y = Q_x$. 而全平面自然是单连通区域, 所以 ω 在整个平面上存在原函数. 记 $O(0, 0), M(x, 0), P(x, y)$, 则可以沿定向折线 OMP 计算原函数

$$f(x, y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} \omega = \int_{OM} \omega + \int_{MP} \omega = 0 + \int_0^y x^2 y dy = \frac{1}{2} x^2 y^2.$$

所以 $\int \omega = \frac{1}{2} x^2 y^2 + C$. \square

例 1.3.6 试选择恰当的区域, 求解 $\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$ 的原函数.

解. 设 $P = -y/(x^2 + y^2), Q = x/(x^2 + y^2)$, 则在 $E^* = \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ 恒成立 $Q_x = P_y$. 但 E^* 不是单连通区域, 不能应用庞加莱引理. 下面考虑右半平面 $H: x > 0$. 在 H 上, 可以用曲线积分来求解原函数. 选基点 $A(1, 0)$, 取坐标折线 AMP , 其中 $M(x, 0), P(x, y)$, 则

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_{(1,0)}^{(x,y)} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \int_{AM} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} + \int_{MP} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} \\ &= 0 + \int_0^y \frac{xdy}{x^2 + y^2} = \arctan \frac{y}{x}. \end{aligned}$$

因此在右半平面 H 上, 成立 $\int \omega = \arctan \frac{y}{x} + C$. \square

1.4 第一类曲面积分

本节开始我们将讨论二维弯曲空间上的积分, 也就是曲面积分. 先来回顾一下曲面的基本知识. 设 Σ 是一张参数曲面

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}, \quad (u, v) \in S. \quad (4.1)$$

它的法向量和单位法向量可以取做

$$\mathbf{n} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v, \quad \mathbf{n}_0 = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}. \quad (4.2)$$

它的面积元素是

$$dA = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv = \sqrt{EG - F^2} du dv \quad (4.3)$$

其中 $E = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u, F = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v, G = \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v$. 如果曲面 Σ 是函数 $f(x, y)$ 的图像, 其中 $(x, y) \in D$, 那么它可以用横坐标和纵坐标参数化为

$$\mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(x, y)\mathbf{k}, \quad (x, y) \in D. \quad (4.4)$$

进而, 它的法向量和面积元可以表示为

$$\mathbf{n} = -f_x \mathbf{i} - f_y \mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad dA = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy. \quad (4.5)$$

第一类曲面积分可以从曲面构件的质量问题引出. 设正则参数曲面 $\Sigma: \mathbf{r}(u, v), (u, v) \in S$, 它在 (x, y, z) 点的密度为 $f(x, y, z)$. 与计算曲线构件的质量类似, 可按以下步骤推导曲面构件的质量 m .

作划分 将参数区域 S 划分为 S_1, \dots, S_N . 相应地, 曲面 Σ 被分割为 N 个小曲面片 $\Sigma_1, \dots, \Sigma_N$. 每个小曲面片的面积记为 ΔA_j .

取近似 把小曲面片 Σ_j 看做密度均匀, 任取样本点 $M_j = \mathbf{r}(u_j, v_j) \in \Sigma_j$, 那么 Σ_j 的质量约为 $f(M_j)\Delta A_j$, 进而整个曲面的质量约为

$$m \approx \sum_{j=1}^N f(M_j)\Delta A_j. \quad (4.6)$$

求极限 记 λ 为所有小曲面片的最大直径, 那么极限

$$m = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{j=1}^N f(M_j)\Delta A_j \quad (4.7)$$

可视为 Σ 的质量.

这样, 我们可以写出第一类曲面积分的定义.

第一类曲面积分

设函数 f 在曲面 Σ 上有定义, 把极限 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{j=1}^N f(M_j)\Delta A_j$ 称为 f 在曲面 Σ 上的第一类曲面积分, 写做

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dA = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{j=1}^N f(M_j)\Delta A_j. \quad (4.8)$$

下面来推导它的计算公式. 设曲面连续可微, 根据积分中值定理, 有

$$\Delta A_j = \iint_{S_j} |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|_{(\mu_j, v_j)} \Delta u_j \Delta v_j,$$

其中 $(\mu_j, v_j) \in S_j$. 再假设 f 连续, 那么

$$f(M_j) = f(\mathbf{r}(\mu_j, v_j)) + o(1).$$

进而

$$\sum_{j=1}^N f(M_j)\Delta A_j = \sum_{j=1}^N f(\mathbf{r}(\mu_j, v_j)) |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|_{(\mu_j, v_j)} \Delta u_j \Delta v_j + o(1).$$

取极限即得

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dA = \iint_S f(\mathbf{r}(u, v)) |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv. \quad (4.9)$$

这样, 我们就把左端在曲面 Σ 上的积分转化为了右端在 uv 的参数区域 S 上的二重积分. 对于分片光滑曲面上的积分, 只要把它分解为各个光

滑部分计算即可. 因此成立下述参数公式

第一类曲面积分的参数公式

设曲面 $\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$, $(u, v) \in S$ 分片光滑, 并且函数 $f(x, y, z)$ 连续, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dA = \iint_S f(\mathbf{r}(u, v)) |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv. \quad (4.10)$$

可以看出, 此公式的关键在于曲面面积元的参数表示

$$dA = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv.$$

特别地, 如果曲面是函数 $\phi(x, y)$, $(x, y) \in D$ 的图像, 那么

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dA = \iint_D f(x, y, \phi(x, y)) \sqrt{1 + \phi_x^2 + \phi_y^2} dx dy. \quad (4.11)$$

根据参数公式, 二重积分的线性性、可加性、保号性、中值定理等性质可以传递给第一类曲面积分.

例 1.4.1 计算 $I = \iint_{\Sigma} xyz dA$, 其中 Σ 是平面 $x = 0, y = 0, z = 0$ 及 $x + y + z = 1$ 围成的四面体的外表面.

解. 整个表面在平面 $x = 0, y = 0, z = 0$ 及 $x + y + z = 1$ 上的部分依次记为 $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ 及 Σ_4 . 则

$$I = \iint_{\Sigma} xyz dA = \iint_{\Sigma_1} xyz dA + \iint_{\Sigma_2} xyz dA + \iint_{\Sigma_3} xyz dA + \iint_{\Sigma_4} xyz dA.$$

注意到被积函数 xyz 在三个坐标面上为零, 因此

$$\iint_{\Sigma_1} xyz dA = \iint_{\Sigma_2} xyz dA = \iint_{\Sigma_3} xyz dA = 0.$$

而 Σ_4 可以看做函数 $z = 1 - x - y$ 的图像, 其中 xy 的范围是 $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x$. 易知, 面积元素为

$$dA = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy = \sqrt{3} dx dy.$$

因此,

$$\begin{aligned} I &= \iint_D xy(1-x-y) \cdot \sqrt{3} dx dy \\ &= \sqrt{3} \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} xy(1-x-y) dy \right) dx = \frac{\sqrt{3}}{6} \int_0^1 x(1-x)^3 dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{6} \int_0^1 (1-t)t^3 dt = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) = \frac{\sqrt{3}}{120}. \end{aligned}$$

□

例 1.4.2 计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} \frac{dA}{z}$, 其中 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 位于平面 $z = h (0 < h < R)$ 上方的球冠部分.

解. 如果把曲面看做函数图像, 那么函数为 $z(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, 参数区域为 $D: x^2 + y^2 \leq R^2 - h^2$. 从而

$$\iint_{\Sigma} \frac{dA}{z} = \iint_D \frac{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} = \iint_D \frac{R dx dy}{R^2 - x^2 - y^2}.$$

利用极坐标可得

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \frac{dA}{z} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{R^2 - h^2}} \frac{R}{R^2 - r^2} r dr d\theta \\ &= 2\pi R \int_0^{\sqrt{R^2 - h^2}} \frac{1}{R^2 - r^2} r dr = 2\pi R \ln \frac{R}{h}. \end{aligned}$$

如果把球面参数化为 $\mathbf{r}(\varphi, \theta) = (R \sin \varphi \cos \theta, R \sin \varphi \sin \theta, R \cos \varphi)$, 那么 $\varphi \in [0, \arccos \frac{h}{R}]$, $\theta \in [0, 2\pi]$, 且

$$dA = \sqrt{EG - F^2} d\varphi d\theta = R^2 \sin \varphi d\varphi d\theta.$$

进而所求积分为

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \frac{dA}{z} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\arccos \frac{h}{R}} \frac{1}{R \cos \varphi} \cdot R^2 \sin \varphi d\varphi d\theta \\ &= 2\pi R \int_0^{\arccos \frac{h}{R}} \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} d\varphi = 2\pi R \ln \frac{R}{h}. \end{aligned}$$

□

例 1.4.3 求半径为 R 的均匀半球壳的质心.⁴

解. 不妨假设半球壳为曲面 $\Sigma: z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. 根据对称性易知重心的横坐标 \bar{x} 和纵坐标 \bar{y} 都是 0. 下面计算竖坐标, 仍然采用参数方式.

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \frac{1}{A(\Sigma)} \iint_{\Sigma} z dA = \frac{1}{2\pi R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} R \cos \varphi \cdot R^2 \sin \varphi d\varphi d\theta \\ &= \frac{\pi R^3}{2\pi R^2} = \frac{R}{2}. \end{aligned}$$

□

4: 与平面构件、曲线构件类似, 曲面构件的质心公式为

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\iint_{\Sigma} x \rho(x, y, z) dA}{\iint_{\Sigma} \rho(x, y, z) dA}, \\ \bar{y} &= \frac{\iint_{\Sigma} y \rho(x, y, z) dA}{\iint_{\Sigma} \rho(x, y, z) dA}, \\ \bar{z} &= \frac{\iint_{\Sigma} z \rho(x, y, z) dA}{\iint_{\Sigma} \rho(x, y, z) dA}, \end{aligned}$$

其中 $\rho(x, y, z)$ 是密度函数. 如果取 $\rho = 1$, 那么所得质心即为形心.

例 1.4.4 计算 $I = \iint_{\Sigma} \frac{dA}{x^2 + y^2 + z^2}$, 其中 $\Sigma: x^2 + y^2 = R^2, 0 \leq z \leq H$.

解. 用柱面坐标可以把曲面 Σ 参数化为

$$\mathbf{r}(\theta, z) = R \cos \theta \mathbf{i} + R \sin \theta \mathbf{j} + z \mathbf{k}, \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad z \in [0, H].$$

则 $\mathbf{r}_\theta = -R \sin \theta \mathbf{i} + R \cos \theta \mathbf{j}$, $\mathbf{r}_z = \mathbf{k}$, 所以 $E = R^2, F = 0, G = 1$, 进而 $dA = R d\theta dz$. 于是, 所求积分为

$$\begin{aligned} I &= \int_0^H \int_0^{2\pi} \frac{1}{R^2 + z^2} \cdot R d\theta dz \\ &= 2\pi \int_0^H \frac{R dz}{R^2 + z^2} = 2\pi \arctan \frac{H}{R}. \end{aligned}$$

也可以尝试用函数图像的方式来计算, 留作练习. \square

例 1.4.5 计算 $I = \iint_{\Sigma} x^2 dA$, 其中 $\Sigma: (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = R^2$.

解. 根据对称性, 容易发现 $\iint_{\Sigma} (x-1) dA = 0$. 因此

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Sigma} [(x-1) + 1]^2 dA = \iint_{\Sigma} [(x-1)^2 + 2(x-1) + 1] dA \\ &= \iint_{\Sigma} (x-1)^2 dA + 4\pi R^2. \end{aligned}$$

再次利用对称性, 可知

$$\iint_{\Sigma} (x-1)^2 dA = \iint_{\Sigma} (y-1)^2 dA = \iint_{\Sigma} (z-1)^2 dA.$$

因此

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (x-1)^2 dA &= \frac{1}{3} \iint_{\Sigma} [(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2] dA \\ &= \frac{R^2}{3} \iint_{\Sigma} dA = \frac{4}{3} \pi R^4. \end{aligned}$$

所以 $I = 4\pi R^2 + \frac{4}{3} \pi R^4$. \square

1.5 第二类曲面积分

第二类曲面积分源自于**通量**的概念. 所谓通量, 是指单位时间内通过一定面积的某种物理量, 例如流量、电通量或磁通量等. 单位面积上的通量可以用来衡量该物理量的输送强度. 显然, 通量描述的是一种穿越曲面、从一侧流向另一侧的动态过程, 因此只有**双侧曲面**才具有讨论通量的意义.

我们通常遇到的曲面大多是双侧的, 比如水平面具有上、下两个方向, 球面则区分为内侧与外侧. 然而, 也确实存在**单侧曲面**, 其中最著名的例子就是 **Möbius 带**. 一只小虫若在 Möbius 带上爬行, 可以在不越过边界的情况下遍历整张曲面, 说明其并无明确的“正反”之分. 为了便于讨论通量, 本节将仅限于研究**双侧曲面**的情形.

由于通量描述的是物理量从曲面一侧流向另一侧的过程, 因此**第二类曲面积分**也涉及**定向**问题. 所谓**双侧曲面的定向**, 是指选定其中一侧作为**正侧**, 从而可以明确考察从负侧流向正侧的通量. 对于光滑的双侧曲面, 其每一侧上都可以定义一个连续变化的法向量场. 因此, 曲面的定向也可以等效地表述为: 选定一个**连续的法向量场**作为曲面的正方向. 类似于曲线的情形, 曲面也存在一种**自然定向**: 若以上下论, 则上侧



图 1.8. August Ferdinand Möbius (1790-1868), 德国数学家. 1858 年, 莫比乌斯和约翰·李斯丁发现了单侧曲面. 图源: wiki

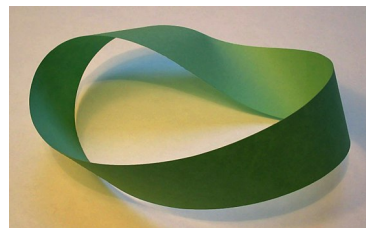


图 1.9. Möbius 带

为正;若以左右论,则**右侧**为正;若以前后论,则**前侧**为正;若以内外论,则**外侧**为正.

下面我们通过讨论通量的计算,来引出第二类曲面积分的概念. 设稳定流动的流体的**速度场**是

$$\mathbf{v} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}. \quad (5.1)$$

它的密度分布为 $\rho(x, y, z)$. 给定光滑的参数曲面 Σ

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}, \quad (u, v) \in S. \quad (5.2)$$

取定法向的曲面记作 (Σ, \mathbf{n}) , 不妨设 $\mathbf{n} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$.⁵ 下面来计算流体从曲面 Σ 的负侧流向正侧的通量 Φ .

5: 此时, 称参数 uv 与曲面的定向一致.

作划分 将参数区域 S 划分为 S_1, \dots, S_N . 相应地, 曲面 Σ 被分割为 N 个小曲面片 $\Sigma_1, \dots, \Sigma_N$. 每个小曲面片的面积记为 ΔA_j .

取近似 把小曲面片 Σ_j 近似看做平面, 任取样本点 $M_j = \mathbf{r}(u_j, v_j) \in \Sigma_j$, 那么 Σ_j 的单位法向量可看做 $\mathbf{n}_0(M_j)$, 曲面片上的速度场可视为 $\mathbf{v}(M_j)$. 因此, 单位时间内通过 Σ_j 的流体质量是 $\rho(M_j)\mathbf{v}(M_j) \cdot \mathbf{n}_0(M_j)\Delta A_j$, 进而流经整张曲面的通量约为

$$\Phi \approx \sum_{j=1}^N \rho(M_j)\mathbf{v}(M_j) \cdot \mathbf{n}_0(M_j)\Delta A_j. \quad (5.3)$$

求极限 记 λ 为所有小曲面片的最大直径, 那么极限

$$\Phi = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{j=1}^N \rho(M_j)\mathbf{v}(M_j) \cdot \mathbf{n}_0(M_j)\Delta A_j = \iint_{\Sigma} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA. \quad (5.4)$$

就是单位时间内流体经过曲面流向正侧的通量. 这个通量就称为 $\rho \mathbf{v}$ 在曲面 Σ 上的第二类曲面积分.

因为 $\rho \mathbf{v}$ 仍然是个向量场, 不妨记为 \mathbf{F} . 这样我们就可以给出一般向量场 \mathbf{F} 的通量的概念, 即便 \mathbf{F} 不再具有前述物理意义.

通量/第二类的曲面积分

设向量场 $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ 在光滑的定向曲面 (Σ, \mathbf{n}_0) 上有定义, 极限

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{j=1}^N \mathbf{F}(M_j) \cdot \mathbf{n}_0(M_j)\Delta A_j$$

称为 \mathbf{F} 在曲面 Σ 的通量 (第二类曲面积分), 写做

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_0 dA = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{j=1}^N \mathbf{F}(M_j) \cdot \mathbf{n}_0(M_j)\Delta A_j. \quad (5.5)$$

把 $\mathbf{n}_0 dA$ 称为**有向面积元**, 记作 $d\mathbf{A}$, 这样上述积分也可写为

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}.$$

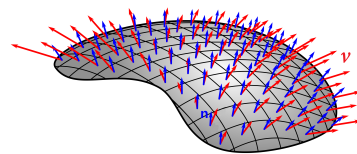


图 1.10. 通量. 图源: wiki

从此处的定义看, 第二类曲面积分其实就是函数 $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_0$ 在曲面 Σ 上的第一类曲面积分. 注意到, 当参数与定向一致时, 定侧的单位法向量是

$$\mathbf{n}_0 = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|},$$

因此利用第一类曲面积分的参数化公式 (4.10), 可得第二类曲面积分的参数公式.

第二类曲面积分的参数公式 (参数与定向一致)

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_0 dA = \iint_S \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) dudv = \iint_S [\mathbf{F}, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v] dudv. \quad (5.6)$$

等价地, 有向面积元可以写为

$$dA = (\mathbf{r}_u du) \times (\mathbf{r}_v dv) = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \cdot dudv. \quad (5.7)$$

如果曲面 Σ 分片光滑, 那么可以逐片计算其通量, 并且每一片上都可应用上述参数化公式.

例 1.5.1 设 $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$, Σ 是长方体 $Q = [0, a] \times [0, b] \times [0, c]$ 的外表面. 求 \mathbf{F} 在 Σ 上的通量.

解. 将曲面的上下左右前后 6 个表面依次记作 U, D, L, R, F, B . 因为各个表面平行于相应的坐标面, 所以都可以直接用坐标参数化. 比如上面 U 可以参数化为 $\mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + c\mathbf{k}, (x, y) \in [0, a] \times [0, b]$, 它的单位外法向量为 $\mathbf{n}_0 = \mathbf{k}$, 面积元为 $dA = dxdy$. 这样, 在 U 上 $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_0 = z^2 = c^2$, 进而的积分为

$$\iint_U \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_0 dA = \int_0^a \int_0^b c^2 dxdy = abc^2.$$

对于下面 D , 参数化可取 $\mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 0\mathbf{k}, (x, y) \in [0, a] \times [0, b]$. 需要注意的是, 此时的单位外法向量为 $\mathbf{n}_0 = -\mathbf{k}$, 面积元仍是 $dA = dxdy$. 从而 D 上 $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_0 = -z^2 = 0$ 且

$$\iint_D \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_0 dA = \int_0^a \int_0^b 0 dxdy = 0.$$

依次讨论, 可得 6 个面上的通量.

\square	\mathbf{n}_0	$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_0$	dA	$\iint_{\square} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_0 dA$
U	\mathbf{k}	$z^2 = c^2$	$dxdy$	abc^2
D	$-\mathbf{k}$	$-z^2 = 0$	$dxdy$	0
R	\mathbf{j}	$y^2 = b^2$	$dzdx$	ab^2c
L	$-\mathbf{j}$	$-y^2 = 0$	$dzdx$	0
F	\mathbf{i}	$x^2 = a^2$	$dydz$	a^2bc
B	$-\mathbf{i}$	$-x^2 = 0$	$dxdy$	0

将 6 项积分相加, 即得所求通量 $\Phi = abc(a + b + c)$. □

例 1.5.2 设 $F = xyz\mathbf{k}$, Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 外侧在 I, V 卦限部分. 求 F 在 Σ 上的通量.

解. 把球面参数化为

$$\mathbf{r}(\varphi, \theta) = (\sin \varphi \cos \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi), \quad \varphi \in [0, \pi], \quad \theta \in [0, \pi/2].$$

注意到单位球面的单位外法向量就是位置向量 $\mathbf{n}_0 = \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, 并且面积元为 $dA = \sin \varphi d\varphi d\theta$. 因此

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_0 dA = \iint_{\Sigma} xyz^2 dA \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi} \cos \theta \sin \theta (\sin \varphi)^2 (\cos \varphi)^2 \cdot \sin \varphi d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\cos \theta \cdot \int_0^{\pi} (1 - (\cos \varphi)^2)(\cos \varphi)^2 d\cos \varphi = \frac{2}{15}. \end{aligned}$$

□

如果曲面是函数图像, 那么用直角坐标做参数化是自然的. 此时, 曲面积分可以化为曲面在坐标面的投影上的二重积分, 所以这种方法也称为**投影法**.

第二类曲面积分 合一投影法

如果曲面 Σ 是函数的图像, 我们把它的前侧、右侧、上侧称为正侧, 相应的定向曲面记作 $+\Sigma$, 相反定向的曲面记作 $-\Sigma$. 那么对于向量场 $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$, 成立以下结论.

- ▶ 若 Σ 是函数 $z = z(x, y), (x, y) \in D_{xy}$ 的图像, 上侧为正, 则

$$\iint_{\pm\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \pm \iint_{D_{xy}} (-Pz_x - Qz_y + R) dx dy. \quad (5.8)$$

- ▶ 若 Σ 是函数 $y = y(z, x), (z, x) \in D_{zx}$ 的图像, 右侧为正, 则

$$\iint_{\pm\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \pm \iint_{D_{zx}} (-Py_x + Q - Ry_z) dz dx. \quad (5.9)$$

- ▶ 若 Σ 是函数 $x = x(y, z), (y, z) \in D_{yz}$ 的图像, 前侧为正, 则

$$\iint_{\pm\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \pm \iint_{D_{yz}} (P - Qx_y - Rx_z) dy dz. \quad (5.10)$$

证明. 以第一种情形为例进行证明. 此时曲面参数化为

$$\mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z(x, y)\mathbf{k}, \quad (x, y) \in D_{xy}.$$

易知 $\mathbf{n} = \mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = (-z_x, -z_y, 1)$ 指向上方, 由 (5.7) 知

$$d\mathbf{A} = (\mathbf{r}_x dx) \times (\mathbf{r}_y dy) = (-z_x \mathbf{i} - z_y \mathbf{j} + \mathbf{k}) dx dy. \quad (5.11)$$

所以代入公式 (5.6), 可得对上侧的曲面积为

$$\iint_{+\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = + \iint_{D_{xy}} (-Pz_x - Qz_y + R) dx dy.$$

添加负号即得对下侧的积分. \square

例 1.5.3 设 $\mathbf{F} = (z^2 + x)\mathbf{i} - z\mathbf{k}$, Σ 是旋转抛物面 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ 位于 $z = 2$ 下方的部分, 取下侧. 求 \mathbf{F} 在 Σ 上的通量.

解. 用合一投影法. 函数是 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, 投影区域为 $D: x^2 + y^2 \leq 4$. 注意到定向朝下, 所以

$$\begin{aligned} I &= - \iint_D (-(z^2 + x)z_x - z) dx dy \\ &= \iint_D \left(\left(\frac{1}{4}(x^2 + y^2)^2 + x \right) x + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \right) dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left(\frac{1}{4}r^5 \cos \theta + r^2(\cos \theta)^2 + \frac{1}{2}r^2 \right) r dr d\theta \\ &= 2\pi \int_0^2 r^3 dr = 8\pi. \end{aligned}$$

也可用柱面坐标参数化 $\mathbf{r}(r, \theta) = r \cos \theta \mathbf{i} + r \sin \theta \mathbf{j} + \frac{1}{2}r^2 \mathbf{k}$, 留作练习. \square

对坐标的曲面积分 *

第二类曲面积分时常写为另一种形式, 这也是“对坐标的曲面积分”这一名称的由来. 现在我们来介绍这种写法. 假设 Σ 是函数 $f(x, y)$, $(x, y) \in D$ 的图像, 取上侧. 考虑 $\mathbf{F} = R(x, y, z)\mathbf{k}$ 在 Σ 上的通量. 根据合一投影公式 (5.8), 有

$$\iint_{\pm\Sigma} R\mathbf{k} \cdot d\mathbf{A} = \pm \iint_D R(x, y, f(x, y)) dx dy. \quad (5.12)$$

鉴于此, 习惯上把相应的第二类曲面积分记作

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z)\mathbf{k} \cdot d\mathbf{A} = \iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy. \quad (5.13)$$

请注意 (5.13) 仅是一种记号, 其右端与 (5.12) 右端的涵义完全不同:

- ▶ 前者在 D 上积分, 后者在 Σ 上积分.
- ▶ 前者是二元函数 $R(x, y, f(x, y))$ 的积分, 后者是三元函数 $R(x, y, z)$ 的积分.
- ▶ 前者的 $dx dy$ 是 xy 平面上的面积元素, 恒正; 后者的 $dx dy$ 是 $d\mathbf{A}$ 的第三个分量 $\mathbf{k} \cdot d\mathbf{A}$, 也就是 $d\mathbf{A}$ 在 xy 面上的代数投影, 定向朝上时它是正的, 定向朝下时它是负的.

类似地, 记

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z)\mathbf{i} \cdot d\mathbf{A} = \iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz, \quad (5.14)$$

$$\iint_{\Sigma} Q(x, y, z)\mathbf{j} \cdot d\mathbf{A} = \iint_{\Sigma} Q(x, y, z) dz dx. \quad (5.15)$$

与 (5.13) 中的 $dx dy$ 一样, 上两式的 $dy dz = \mathbf{i} \cdot d\mathbf{A}$ 和 $dz dx = \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A}$ 是 $d\mathbf{A}$ 的前两个分量, 分别是 $d\mathbf{A}$ 在 yz 面和 xz 面上的代数投影: 取前侧时 $dy dz$ 为正, 取后侧时 $dy dz$ 为负; 取右侧时 $dz dx$ 为正, 取左侧时 $dz dx$ 为负. 本质上, 我们把有向面元记作了

$$d\mathbf{A} = dy dz \mathbf{i} + dz dx \mathbf{j} + dx dy \mathbf{k}. \quad (5.16)$$

由于 (5.13)-(5.15) 的右端可以依次看做对坐标 xy 、坐标 yz 、坐标 zx 的积分, 所以第二类曲面积分也称为对坐标的曲面积分.

对坐标的曲面积分

向量场 $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ 在定向曲面 Σ 上的第二类曲面积分也写做

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \iint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy. \quad (5.17)$$

对于 (5.17) 的计算, 可以用合一投影法或者直接用公式 (5.6). 也可以用分面投影的方式, 按以下公式逐项计算.

对坐标的曲面积分 分面投影法

- ▶ 若 Σ 是函数 $z = z(x, y), (x, y) \in D_{xy}$ 的图像, 上侧为正, 则

$$\iint_{\pm \Sigma} R(x, y, z) dx dy = \pm \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy. \quad (5.18)$$

- ▶ 若 Σ 是函数 $x = x(y, z), (y, z) \in D_{yz}$ 的图像, 前侧为正, 则

$$\iint_{\pm \Sigma} P(x, y, z) dy dz = \pm \iint_{D_{yz}} P(x(y, z), y, z) dy dz. \quad (5.19)$$

- ▶ 若 Σ 是函数 $y = y(z, x), (z, x) \in D_{zx}$ 的图像, 右侧为正, 则

$$\iint_{\pm \Sigma} Q(x, y, z) dz dx = \pm \iint_{D_{zx}} Q(x, y(z, x), z) dz dx. \quad (5.20)$$

例 1.5.4 计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} (z+x) dy dz + z dx dy$, 其中 Σ 是平面 $x+y+z=2$ 位于第一卦限部分的上侧.

解. 将 I 分为两项, 用分面投影的方式计算. 对于 $I_x = \iint_{\Sigma} (z+x) dy dz$, 把曲面看做 $x = 2-y-z$ 的图像, 投影区域为 $D_{yz}: 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 2-y$. 由于定向朝前, 所以

$$\begin{aligned} I_x &= \iint_{D_{yz}} (z+2-y-z) dy dz = \int_0^2 \left(\int_0^{2-y} (2-y) dz \right) dy \\ &= \int_0^2 (2-y)^2 dy = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

对于 $I_z = \iint_{\Sigma} z dx dy$, 把曲面看做 $z = 2-x-y$ 的图像, 投影区域为

$D_{xy} : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2-x$. 由于定向朝上, 所以

$$\begin{aligned} I_y &= \iint_{D_{xy}} (2-x-y) dx dy = \int_0^2 \left(\int_0^{2-x} (2-x-y) dy \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 (2-x)^2 dx = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

故而 $I = I_x + I_z = 4$. \square

1.6 Gauss 公式与散度定理

Gauss 公式是 Newton-Leibniz 公式在三维空间中的推广, 它揭示了空间闭区域上的三重积分与其边界曲面上的曲面积分之间的内在联系. 逻辑上, 如果你理解了 Green 公式, 那么 Gauss 公式是平凡的.



图 1.11. Mikhail Vasilyevich Ostrogradsky (1801-1862), 俄国理论力学学派的创始人和彼得堡数学学派的奠基者之一. 散度定理最早由拉格朗日发现, Gauss 在 1813 年证明了部分特殊情形, 1826 年奥斯特罗格拉茨基给出了一般性证明.
https://en.wikipedia.org/wiki/File:PGRS_2_069_Ostrogradski_-_crop.jpg

Gauss 公式 散度定理

设分片光滑的闭曲面 Σ 围成空间闭区域 Ω , 曲面 Σ 定向朝外. 如果向量场 $F = Pi + Qj + Rk$ 在 Ω 上连续可偏导, 则成立 Gauss 公式

$$\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy = \iiint_{\Omega} (P_x + Q_y + R_z) dx dy dz. \quad (6.1)$$

其向量场的形式就是空间散度定理

$$\iint_{\Sigma} F \cdot dA = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot F dV. \quad (6.2)$$

换言之, 向量场 F 沿 Σ 往外的通量等于 F 在 Σ 所围区域上的各点散度之和.

证明. 假设区域 Ω 是与 z 轴平行的柱状区域, 即

$$\Omega = \{(x, y, z) | (x, y) \in D, b(x, y) \leq z \leq t(x, y)\}.$$

其顶曲面 $z = t(x, y)$ 记作 Σ_t , 底曲面 $z = b(x, y)$ 记作 Σ_b , 侧面记作 Σ_s , 都取外侧. 根据富比尼定理,

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} R_z dV &= \iint_D \left(\int_{b(x,y)}^{t(x,y)} R_z(x, y, z) dz \right) dx dy \\ &= \iint_D (R(x, y, t(x, y)) - R(x, y, b(x, y))) dx dy \\ &= \iint_D R(x, y, t(x, y)) dx dy - \iint_D R(x, y, b(x, y)) dx dy. \end{aligned}$$

因为顶曲面取上侧、底曲面取下侧, 所以根据第二类曲面积分的分面投影公式, 有

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_t} R(x, y, z) dx dy &= \iint_D R(x, y, t(x, y)) dx dy, \\ \iint_{\Sigma_b} R(x, y, z) dx dy &= - \iint_D R(x, y, b(x, y)) dx dy. \end{aligned}$$

代入前式, 可得

$$\iiint_{\Omega} R_z dV = \iint_{\Sigma_t} R dx dy + \iint_{\Sigma_b} R dx dy.$$

再者, 注意到侧面 Σ_s 的单位外法向量 \mathbf{n}_0^+ 垂直于 z 轴, 所以

$$\iint_{\Sigma_s} R dx dy = \iint_{\Sigma_s} R \mathbf{k} \cdot d\mathbf{A} = \iint_{\Sigma_s} R \mathbf{k} \cdot \mathbf{n}_0^+ dA = 0. \quad (6.3)$$

因为 $\Sigma = \Sigma_t + \Sigma_b + \Sigma_s$, 根据可加性, 有

$$\iiint_{\Omega} R_z dV = \iint_{\Sigma_t} R dx dy + \iint_{\Sigma_b} R dx dy + \iint_{\Sigma_s} R dx dy = \iint_{\Sigma} R dx dy. \quad (6.4)$$

如果 Ω 同时也是平行 x 轴和 y 轴的柱状区域, 那么

$$\iiint_{\Omega} P_x dV = \iint_{\Sigma} P dy dz, \quad \iiint_{\Omega} Q_y dV = \iint_{\Sigma} Q dz dx. \quad (6.5)$$

把 (6.4) 和 (6.5) 的各项相加, 就得到 (6.1). 也就是说, 如果区域 Ω 沿着三个坐标轴方向都是柱状区域, 那么成立 Gauss 公式.

对于一般形状的区域, 用曲面将它划分为若干个上述类型的区域, 在每个小区域上应用 Gauss 公式. 再注意到, 用来划分的辅助曲面一定是两个小区域的公共边界, 相应的两个外法向相反, 从而第二类曲面积分相消. 所以, 各个小区域上的 Gauss 公式累加之后即得原区域上的 Gauss 公式. \square

例 1.6.1 设稳定流动的流体的密度分布 ρ 和流速场 \mathbf{v} 均有一阶连续偏导数, 记 $\mathbf{F} = \rho \mathbf{v}$. 设 Σ_t 为球心在 P 、半径为 t 的球面, 它围成的球体记作 B_t . 证明:

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(P) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{V(B_t)} \iint_{\Sigma_t} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}. \quad (6.6)$$

证明. 因为 \mathbf{F} 有一阶连续偏导数, 所以 $\operatorname{div} \mathbf{F}$ 连续, 因此根据积分中值定理, 有

$$\frac{1}{V(B_t)} \iiint_{B_t} \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \operatorname{div} \mathbf{F}(P_t), \quad P_t \in B_t.$$

从而, 结合散度公式 (6.2) 可得

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{F}(P) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \operatorname{div} \mathbf{F}(P_t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{V(B_t)} \iiint_{B_t} \operatorname{div} \mathbf{F} dV \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{V(B_t)} \iint_{\Sigma_t} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}. \end{aligned}$$

\square

上例表明, 向量场 \mathbf{F} 在点 P 的散度就是 P 点附近单位时间单位体积内所产生的流量. 如果 $\operatorname{div} \mathbf{F}(P) > 0$, 则表明 P 是源, 流体在此创生; 如果 $\operatorname{div} \mathbf{F}(P) < 0$, 则表明 P 是汇, 流体在此湮灭; 如果 $\operatorname{div} \mathbf{F} \equiv 0$, 则在流动过程中液体总量守恒, 这种场称为无源场.

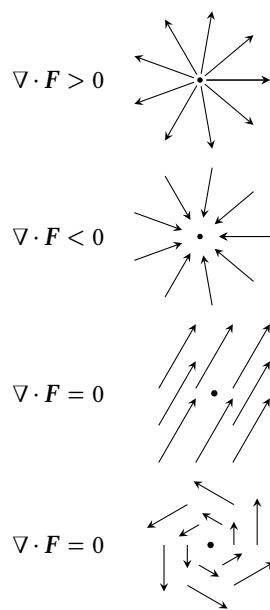


图 1.12. 散度与向量场的结构

例 1.6.2 计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} (x-y)dx dy + (y-z)xdy dz$, 其中 Σ 为柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 及平面 $z = 0$ 和 $z = 3$ 所围成的空间闭区域 Ω 的整个边界曲面的外侧.

解. 我们应用 Gauss 公式来计算.

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\Omega} [(x-y)_z + ((y-z)x)_x] dV = \iiint_{\Omega} (y-z) dV \\ &= - \iiint_{\Omega} z dV = - \int_0^3 \left(\iint_{D_z} z dx dy \right) dz = -\frac{9}{2}\pi. \end{aligned}$$

这里第三个等式用到了 y 在积分区域上是个奇函数, 所以积分为零. \square

例 1.6.3 计算 $I = \iint_{\Sigma} x dy dz$, Σ 是半球面 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 的上侧.

解. 添加赤道面 Π , 取上侧. 则 $\Sigma - \Pi$ 围成半球体 Ω , 可应用 Gauss 公式.

$$\iint_{\Sigma - \Pi} x dy dz = \iiint_{\Omega} dx dy dz = \frac{2}{3}\pi R^3.$$

因为 Π 的法向量是 \mathbf{k} , 所以

$$\iint_{\Pi} x dy dz = \iint_{\Pi} x \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} dA = 0.$$

进而 $I = \frac{2}{3}\pi R^3$. \square

例 1.6.4 设函数 f, g 在有界闭区域 Ω 上二阶连续可偏导, 证明:

$$\iiint_{\Omega} f \Delta g dV = \iint_{\partial\Omega} f \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} dA - \iiint_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g dV, \quad (6.7)$$

其中 \mathbf{n} 是 $\partial\Omega$ 的单位外法向量.

证明. 注意到 $\Delta g = \nabla \cdot \nabla g$, 则

$$\nabla \cdot (f \nabla g) = \nabla f \cdot \nabla g + f \nabla \cdot \nabla g = \nabla f \cdot \nabla g + f \Delta g.$$

根据散度定理, 立得

$$\begin{aligned} \iint_{\partial\Omega} f \nabla g \cdot d\mathbf{A} &= \iiint_{\Omega} \nabla \cdot (f \nabla g) dV \\ &= \iiint_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g dV + \iiint_{\Omega} f \Delta g dV. \end{aligned}$$

代入 $\nabla g \cdot d\mathbf{A} = \nabla g \cdot \mathbf{n} dA = \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} dA$ 即得. \square

这一公式通常被称为 **Green 第一公式**. 由于证明过程只用到了散度定理, 因此二重积分也有类似的公式.

1.7 Stokes 公式与旋度定理

Stokes 公式是 Green 公式的曲面版本, 它把曲面上的积分与曲面的边界曲线上的积分联系起来. 比起 Green 公式和 Gauss 公式, Stokes 公式可以说是 Newton-Leibniz 公式的一种本质性推广, 因为即便给出公式, 我们也很难直觉上接受它.

现在想象一下我们要处理向量场 \mathbf{v} 沿定向曲线 C 的环流量 $\oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$. 如果 C 是平面曲线, 那么 Green 公式表明它可以转化为曲线所围区域上的某个积分. 当 C 是一条空间曲线时, 一个自然的猜测是上述环流量会等于 C 所围曲面上的某个积分.

方便起见, 假设 C 所围曲面 Σ 是光滑函数 $f(x, y)$ 的图像, 其中 $(x, y) \in D$. 把 ∂D 按逆时针参数化为 $x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} (\alpha \leq t \leq \beta)$, 那么曲线 C 的参数化是

$$x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + f(x(t), y(t))\mathbf{k} \quad (\alpha \leq t \leq \beta).$$

根据曲线积分的参数化公式, 环流量可以表示为

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} &= \oint_C Pdx + Qdy + Rdz \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} Px' dt + Qy' dt + R(f_x x' + f_y y') dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} (P + Rf_x)x' dt + (Q + Rf_y)y' dt \\ &= \int_{\partial D} [P(x, y, f) + R(x, y, f)f_x] dx \\ &\quad + [Q(x, y, f) + R(x, y, f)f_y] dy. \end{aligned}$$

这样, 我们把空间环流量转化成了平面环流量. 从而, Green 公式就有了用武之地. 直接计算可得

$$\begin{aligned} & [Q(x, y, f) + R(x, y, f)f_y]_x - [P(x, y, f) + R(x, y, f)f_x]_y \\ &= -(R_y - Q_z)f_x - (P_z - R_x)f_y + (Q_x - P_y). \end{aligned}$$

于是, 根据 Green 公式, 有

$$\oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_D [-(R_y - Q_z)f_x - (P_z - R_x)f_y + (Q_x - P_y)] dx dy.$$

此结果与曲面 Σ 有何瓜葛? 但愿你还记得第二类曲面积分的合一投影法. 如果取 Σ 的定向朝上, 则有

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} (R_y - Q_z) dy dz + (P_z - R_x) dz dx + (Q_x - P_y) dx dy \\ &= \int_D [-(R_y - Q_z)f_x - (P_z - R_x)f_y + (Q_x - P_y)] dx dy. \end{aligned}$$

回顾旋度的定义 (其实这里才是它真正的出生地), 有

$$\nabla \times \mathbf{v} = (R_y - Q_z)\mathbf{i} + (P_z - R_x)\mathbf{j} + (Q_x - P_y)\mathbf{k}.$$

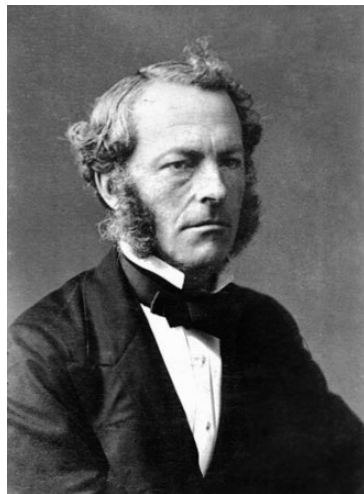


图 1.13. George Gabriel Stokes (1819-1903), 英国 (爱尔兰) 物理学家、数学家. 威廉·汤姆森 (开尔文勋爵) 最早发现了“斯托克斯公式”, 并写信告诉了斯托克斯. 作为剑桥大学的卢卡斯数学教授, 斯托克斯把此公式作为剑桥大学的考题, 公式因此得名.

<https://en.wikipedia.org/wiki/File:Ggstokes.jpg>

百年

- 1762 Lagrange 在研究流体力学的过程中发现了散度定理.
- 1813 Gauss 在讨论引力场时重新发现散度定理, 并证明了部分情形.
- 1828 Green 在研究电磁理论时, Green 再次发现散度定理.
- 1831 Ostrogradsky 给出了散度定理的首个证明, 并将其应用于热流.
- 1845 Thomson 发现的 Green 的工作, 大加推广.
- 1846 Cauchy 首次写下了 Green 公式的现代版本.
- 1850 Stokes Thomson 发现旋度定理, 并告知 Stokes. Stokes 将其作为剑桥大学的考题, 广为人知.
- 1851 Riemann 在其博士论文中证明了 Green 公式.
- 1861 Hankel 证明了 Stokes 定理.

故而

$$\oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\Sigma} \nabla \times \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}.$$

这就是 Stokes 公式, 也称为旋度定理.

Stokes 公式 旋度定理

设 C 为分段光滑的空间有向闭曲线, Σ 是以 C 为边界的分片光滑的有向曲面, C 的正向与 Σ 的侧符合右手规则. 若向量场 $\mathbf{v} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ 在曲面 Σ (连同边界 C) 上一阶连续可偏导, 则

$$\begin{aligned} \oint_C Pdx + Qdy + Rdz \\ = \iint_{\Sigma} (R_y - Q_z)dydz + (P_z - R_x)dzdx + (Q_x - P_y)dxdy. \end{aligned} \quad (7.1)$$

它的向量场形式就是旋度定理

$$\oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\Sigma} \nabla \times \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}. \quad (7.2)$$

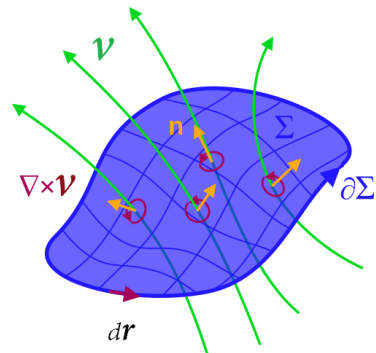


图 1.14. 旋度定理

证明. 前面已经推导了函数图像的情形. 对于一般的曲面, 可以将其划分为若干片, 使得每片均可看做某个方向的函数图像, 最终累加即可. \square

例 1.7.1 记 $C_t(\mathbf{n}_0)$ 是圆心在 P 、半径为 t 的圆周, 并且圆周所在平面垂直于单位向量 \mathbf{n}_0 , 此圆周的定向与 \mathbf{n}_0 满足右手法则. 证明: 对光滑向量场 \mathbf{v} 成立

$$\text{rot } \mathbf{v}(P) \cdot \mathbf{n}_0 = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi t^2} \oint_{C_t(\mathbf{n}_0)} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} \quad (7.3)$$

证明. 圆周 $C_t(\mathbf{n}_0)$ 所围的圆盘记作 $B_t(\mathbf{n}_0)$, 以 \mathbf{n}_0 为它的定向. 根据积分中值定理, 存在 $P_t \in B_t(\mathbf{n}_0)$, 使得

$$\frac{1}{\pi t^2} \iint_{B_t(\mathbf{n}_0)} \text{rot } \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\pi t^2} \iint_{B_t(\mathbf{n}_0)} (\text{rot } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_0) dA = \text{rot } \mathbf{v}(P_t) \cdot \mathbf{n}_0.$$

利用旋度定理可得

$$\text{rot } \mathbf{v}(P_t) \cdot \mathbf{n}_0 = \frac{1}{\pi t^2} \iint_{B_t(\mathbf{n}_0)} \text{rot } \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\pi t^2} \oint_{C_t(\mathbf{n}_0)} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}.$$

令 $t \rightarrow 0^+$ 即得结论. 由此可见, 绕着向量场的旋度方向环流量最大. \square

例 1.7.2 设 $\mathbf{v} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$. 求 \mathbf{v} 沿着 C 的环流量, 其中 C 为平面 $x + y + z = 1$ 被三个坐标面所截成的三角形的整个边界, 它的正向与这个三角形上侧的法向量之间符合右手规则.

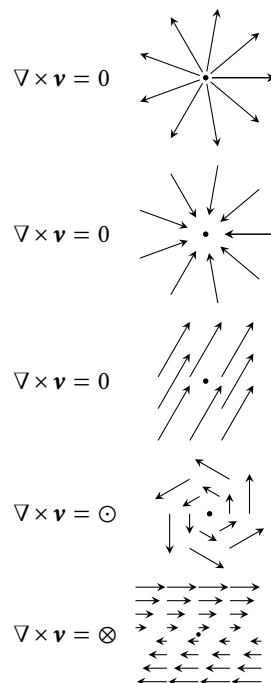


图 1.15. 向量场的结构与旋度

解. 所求环流量为 $I = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$. 应用旋度定理, 有

$$I = \iint_{\Sigma} \nabla \times \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}.$$

这里 Σ 就是 C 围成的平面三角形, 定向朝上. 易知

$$\nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ z & x & y \end{vmatrix} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

而平面 $x + y + z = 1$ 朝上的单位法向量为 $\mathbf{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$. 因此

$$I = \iint_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_0) dA = \sqrt{3}A(\Sigma).$$

而三角形 Σ 的面积为 $A(\Sigma) = \sqrt{3}/2$, 所以所求环流量为 $I = 3/2$. \square

微分形式的原函数

在介绍 Green 公式的时候, 我们研究了平面上的微分形式 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ 的原函数的存在性. 利用斯托克斯公式, 我们可以研究空间中的微分形式

$$\omega = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz \quad (7.4)$$

的原函数的存在性, 也就是说, 寻找函数 f 使得 $\omega = df$. 下面的原函数存在定理仍然成立.

原函数存在定理

设微分形式 $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ 在空间开区域 Ω 上连续. 那么, ω 在 Ω 上存在原函数的充要条件是, 它在 Ω 中的第二类曲线积分仅与起点和终点有关, 而与路径无关.

该定理的证明与二维情形基本一致, 留作练习. 值得指出的是, ω 的原函数依旧可以通过下面的曲线积分得到

$$f(x, y, z) = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} Pdx + Qdy + Rdz. \quad (7.5)$$

单连通区域上的庞加莱引理在空间中也成立, 只是条件略微复杂.

Poincare 引理

设 G 是空间单连通开区域, 微分形式 $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ 在 G 上连续可微. 那么, ω 在 G 上存在原函数的充要条件是 $R_y - Q_z = P_z - R_x = Q_x - P_y = 0$.

证明. 如果 $\omega = df$, 那么 $f_x = P, f_y = Q, f_z = R$. 根据 Clairaut 定理可知 $P_y = f_{xy} = Q_x, R_y = f_{yz} = Q_z, P_z = f_{zx} = R_x$.

下面证明充分性, 仅需证明积分与路径无关. 任取两条起点和终点相同的曲线 C_1 和 C_2 . 因为区域单连通, 所以 C_1 可以连续变化到 C_2 , 运动轨迹形成一张曲面 Σ . 在 Σ 上应用斯托克斯定理可得

$$\int_{C_1-C_2} \omega = \iint_{\Sigma} (R_y - Q_z)dydz + (P_z - R_x)dzdx + (Q_x - P_y)dxdy = 0.$$

所以 $\int_{C_1} \omega = \int_{C_2} \omega$, 积分与路径无关, 进而存在原函数. \square

将庞加莱引理写为向量场的版本, 即得

保守场与无旋场

单连通区域上, 向量场是保守场等价于它是无旋场. 也就是说, 存在 f 使得 $\mathbf{v} = \nabla f$ 的充要条件是 $\nabla \times \mathbf{v} = 0$.

例 1.7.3 验证 $\mathbf{v} = (y+z)\mathbf{i} + (z+x)\mathbf{j} + (x+y)\mathbf{k}$ 是保守场, 并求其势函数.

解. 向量场 \mathbf{v} 的旋度为

$$\nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}.$$

根据庞加莱引理, 它是保守场. 它的一个原函数可以用积分表示为

$$f(x, y, z) = \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz.$$

因为积分与路径无关, 我们选取折线 $OABP$, 其中 $O(0,0,0)$, $A(x,0,0)$, $B(x,y,0)$, $P(x,y,z)$. 于是

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \int_0^x (0+0)dx + \int_0^y (0+x)dy + \int_0^z (x+y)dz \\ &= xy + zx + zy. \end{aligned}$$

所以 \mathbf{v} 的势函数为 $xy + yz + zx + C$, 其中 C 是任意常数. 也就是说

$$\int (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz = xy + yz + zx + C.$$

\square