第三篇　　动力学

回顾：已讲授静力学、运动学。

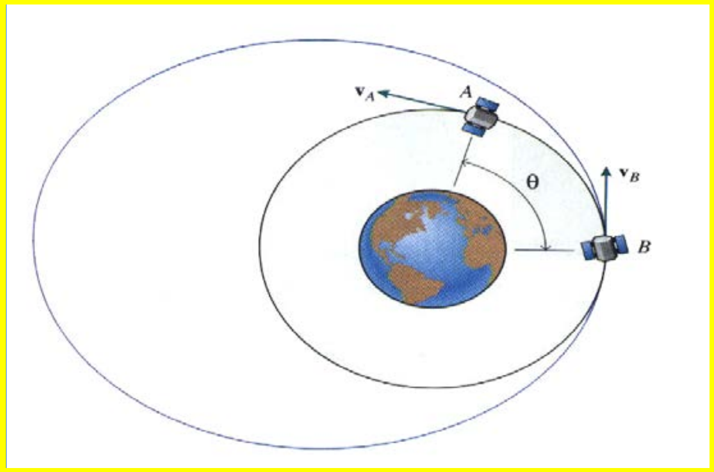
动力学：研究物体的机械运动与作用在物体上的作用力之间的关系。

动力学的研究模型

质点： 质点是具有一定质量而几何形状和尺寸大小可以忽略不计的物体。

质点系： 系统内包含有限或无限个质点，这些质点都具有惯性，并占据一定的空间；质点之间，质点与边界之间，以不同的方式连接，或者附加以不同的约束与物理条件。

刚体： 是质点系的一种特殊情形，其中任意两个质点间的距离保持不变。



当研究飞行器轨道动力学问题时，可将飞行器视为质点。

当研究飞行器姿态动力学时，可将其视为刚体系或质点系。

动力学研究方法上的特点是既要对研究对象进行受力分析，又要进行运动分析，并根据动力学定理建立力和运动之间的定量关系。

第九章　质点运动微分方程

§ 9-1　质点运动微分方程与质点动力学的两类基本问题

理论基础：牛顿定律与微积分

- 第一定律（惯性定律）
- 第二定律　（力与加速度之间的关系的定律）

$$\frac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}t} = ma = \sum_{i=1}^{n} F_i$$

- 第三定律（作用与反作用定律）

适用条件？

第一、二定律：**惯性参考系**

第　三　定律：**任意参考系**

在惯性参考系中，不受外力（受零力系作用）时，质点总保持匀速直线运动状态或相对静止状态。

牛顿及其在力学发展中的贡献

牛顿出生于林肯郡伍尔索朴城的一个中等农户家中。在他出生之前父亲即去世，他不到三岁时母亲改嫁了，他不得不靠他的外祖母养大。

1661年牛顿进入了剑桥大学的三一学院，1665年获文学学士学位。在大学期间他全面掌握了当时的数学和光学。1665-1666的两年期间，剑桥流行黑热病，学校暂时停办，他回到老家。这段时间中他发现了二项式定律，开始了光学中的颜色实验，即白光由7种色光构成的实验，而且由于一次躺在树下看到苹果落地开始思索地心引力问题。在30岁时，牛顿被选为皇家学会的会员，这是当时英国最高科学荣誉。

牛顿及其在力学发展中的贡献

★ 牛顿在光学上的主要贡献是发现了太阳光是由7种不同颜色的光合成的，他提出了光的微粒说。

★ 牛顿在数学上的主要贡献是与莱布尼兹各自独立地发明了微积分，给出了二项式定理。

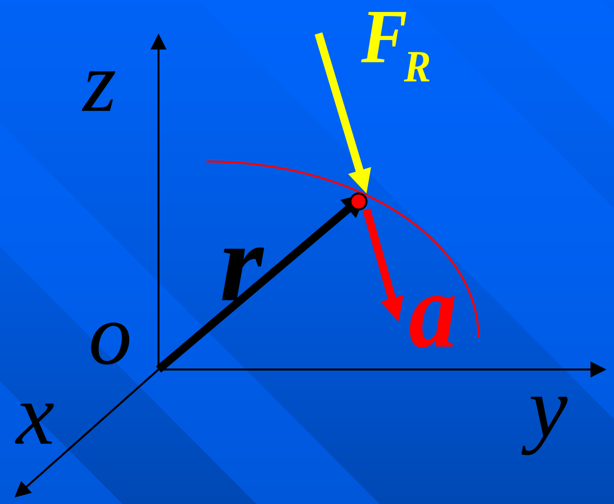
★ 牛顿在力学上最重要的贡献，也是牛顿对整个自然科学的最重要贡献是他的巨著《自然哲学的数学原理》。这本书出版于1687年，书中提出了万有引力理论并且系统总结了前人对动力学的研究成果，后人将这本书所总结的经典力学系统称为牛顿力学。

§ 9-2　质点的运动微分方程

一、矢量形式：

$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{\mathbf{r}}}{\mathrm{d}t^2}=\sum_{i=1}^{n}\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{i}}$$

$$m\vec{\mathbf{a}}=\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{R}}\quad \vec{\mathbf{a}}=\frac{\mathrm{d}^2\vec{\mathbf{r}}}{\mathrm{d}t^2}$$



二、 直角坐标形式：

$$m\ddot{x}=\sum F_x$$

$$m\ddot{y}=\sum F_y$$

$$m\ddot{z}=\sum F_z$$

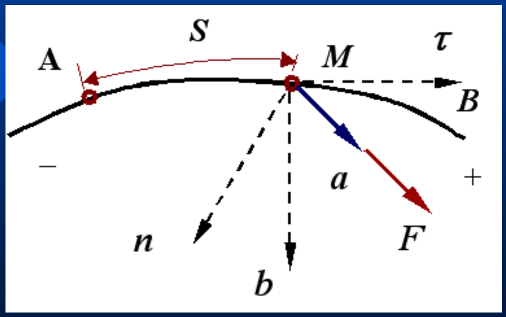
三、 自然坐标形式：

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\vec{\tau}+\frac{v^2}{\rho}\vec{n}=\vec{a}_\tau+\vec{a}_n$$

$$ma_\tau=m\frac{d^2s}{dt^2}=\sum F_\tau$$

$$ma_n=m\frac{\dot{s}^2}{\rho}=\sum F_n$$

$$ma_b=0=\sum F_b$$



§ 9-3 质点动力学的两类基本问题

质点动力学的两类基本问题

$$ma = \sum_{i=1}^{n} F_i$$

质点动力学第一类问题——已知质点的运动，求作用在质点上的力。

质点动力学第二类问题——已知作用在质点上的力，求质点的运动。

$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{\mathbf{r}}}{\mathrm{d}t^2} = \sum_{i=1}^{n}\vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{i}}$$

§21-3 质点动力学的两类基本问题

质点动力学的两类基本问题

$$ma = \sum_{i=1}^{n} F_i$$

质点动力学第一类问题——如果知道质点的运动规律，通过导数运算，求出该质点的速度和加速度，代入质点的运动微分方程，得一代数方程组，即可求解。

质点动力学第二类问题——求解质点动力学的第二类基本问题，如求质点的速度、运动方程等，归结为解微分方程或求积分问题，还需确定相应的积分常数。因此，需按作用力的函数规律进行积分，并根据具体问题的运动条件确定积分常数。

解题步骤：

1、取研究对象画受力图

2、建立坐标系

3、建立质点运动微分方程

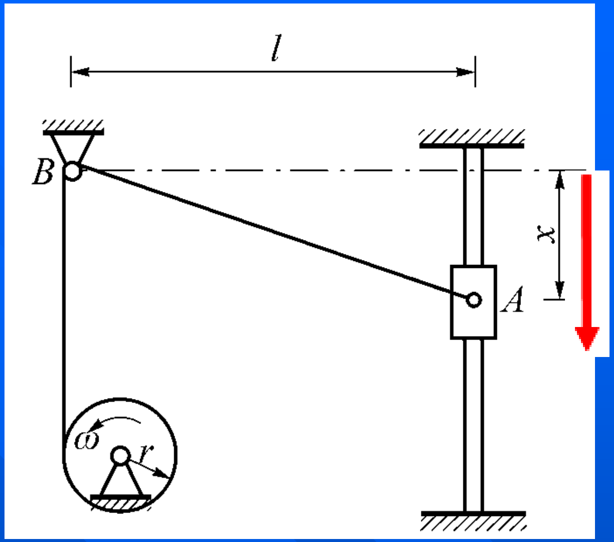
4、求解

此外，还要运用运动学原理分析运动情况。

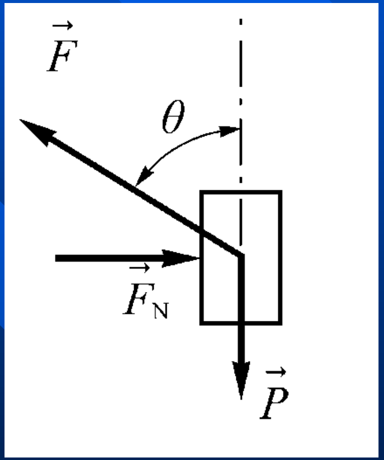
$$\frac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}t} = ma = \sum_{i=1}^{n} F_i$$

第一类问题

在图示机构中，已知套筒A重P，可沿光滑铅垂杆滑动，鼓轮A以匀角速度ω转动。试求绳子拉力与距离x之间的关系。（滑轮B尺寸忽略不计。l、r已知）



解：套筒A受力如图。沿竖直方向的质点运动微分方程为



$$\frac{P}{g}\ddot{x} = P - F\cos\theta$$

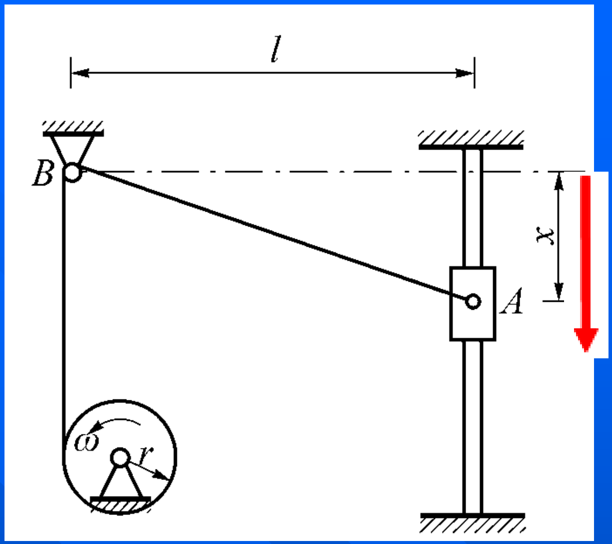
加速度投影为正

$$F = \frac{P}{\cos\theta} - \frac{P}{g\cos\theta}\ddot{x} \qquad \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{l^2 + x^2}}$$

点的运动学原理：

$$x = \sqrt{AB^2 - l^2} \qquad AB^2 = l^2 + x^2$$

在图示机构中，已知套筒A重P，可沿光滑铅垂杆滑动，鼓轮A以匀角速度ω转动。试求绳子拉力与距离x之间的关系。（滑轮B尺寸忽略不计。l、r已知）



$$AB=\sqrt{l^2+x^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}(AB)}{\mathrm{d}t}=\frac{x}{\sqrt{l^2+x^2}}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=r\omega$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=r\omega\frac{\sqrt{l^2+x^2}}{x}$$

$$\ddot{x}=-\frac{r^2\omega^2l^2}{x^3}$$

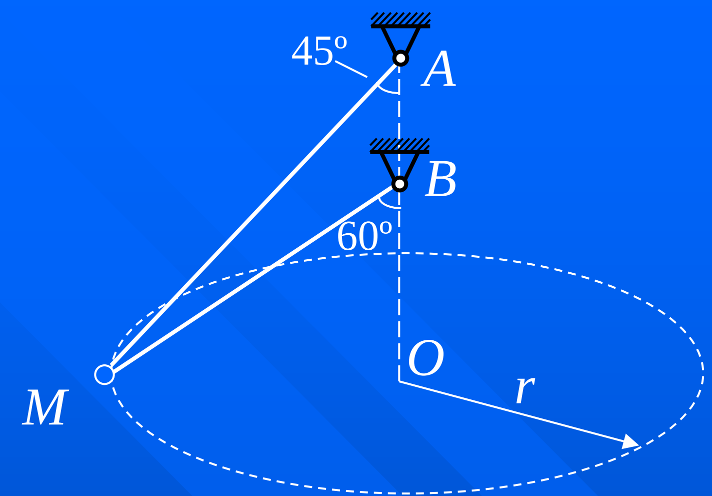
$$F=\underline{\frac{P}{\cos\theta}}-\underline{\frac{P}{g\cos\theta}\ddot{x}}$$

$$\cos\theta=\frac{x}{\sqrt{l^2+x^2}}$$

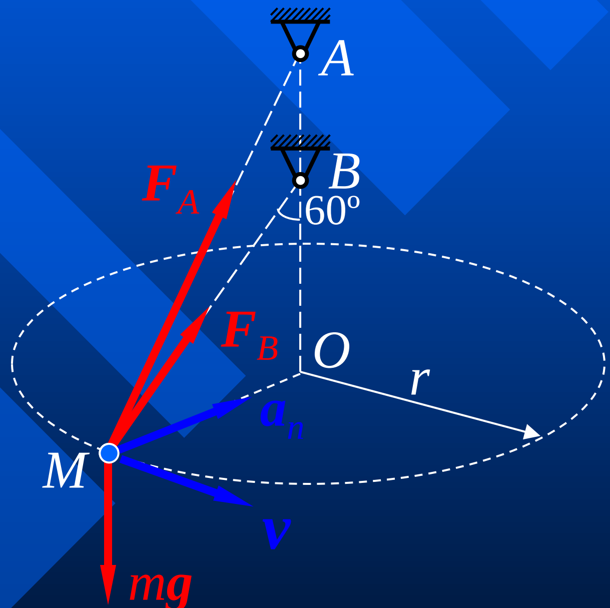
静反力与附加动反力

$$F=\frac{\sqrt{l^2+x^2}}{x}\left(P+\frac{\mathrm{P}r^2\omega^2l^2}{gx^3}\right)$$

例题 质量为1Kg的小球M，用两绳系住，两绳的另一端分别连接在固定点A、B，如图。已知小球以速度$v=2.5$ m/s在水平面内作匀速率圆周运动，圆的半径$r=0.5$ m, 求两绳的拉力。



解： 以小球为研究对象，任一瞬时小球受力如图。

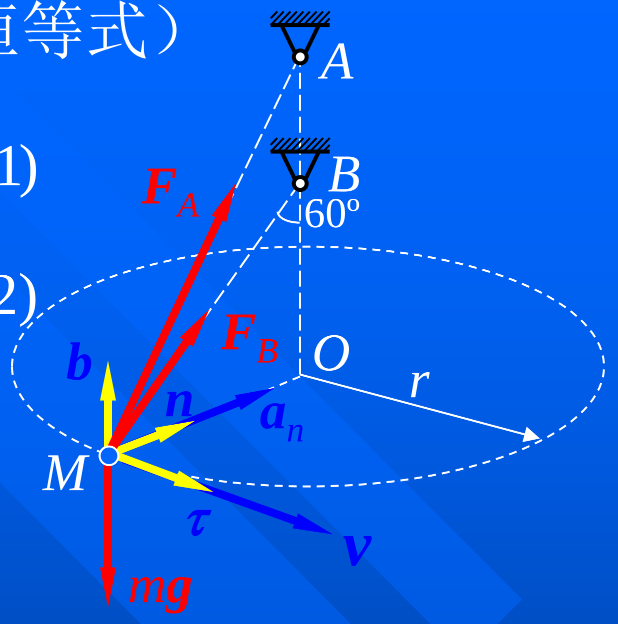


小球在水平面内作匀速率圆周运动。

$$a_\tau=\frac{dv}{dt}=0,\quad a_n=\frac{v^2}{r}=12.5\,m/s^2$$

方向指向O点。

建立自然坐标系得：（注意到切线方向为恒等式）



$$ma_n = m\frac{v^2}{r} = \sum F_n = F_A \sin 45^\circ + F_B \sin 60^\circ \qquad (1)$$

$$ma_b = 0 = \sum F_b = -mg + F_A \cos 45^\circ + F_B \cos 60^\circ \qquad (2)$$

解得： $F_A = 8.65\ \mathrm{N}$， $F_B = 7.38\ \mathrm{N}$

分析：由(1)、(2)式可得：

$$F_A = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}(9.8\sqrt{3} - 2v^2),\ F_B = \frac{2}{\sqrt{3}-1}(2v^2 - 9.8)$$

$$F_A > 0 \ \Rightarrow\ v < \sqrt{4.9\sqrt{3}} = 2.91\,\mathrm{m/s}$$

$$F_B > 0 \ \Rightarrow\ v > \sqrt{4.9} = 2.21\,\mathrm{m/s}$$

因此，只有当 $2.21\mathrm{m/s} < v < 2.91\mathrm{m/s}$ 时，两绳才同时受力。否则将只有其中一绳受力。

第二类问题

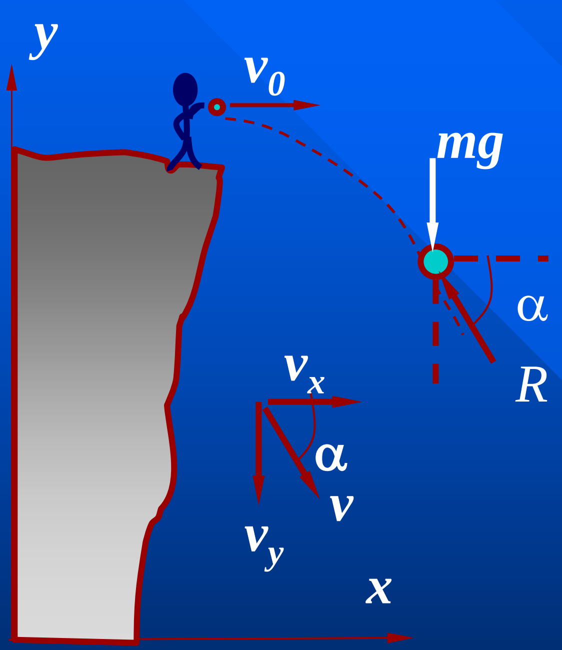
例： 在高为h的悬崖边以v_0的速度平抛一块石子，当空气阻力$R= kmv$（方向与速度方向相反）时,试求：石子的运动方程。

解:

建立微分方程:

$$m\ddot{x} = -R\cos\alpha = -kmv\frac{v_x}{v} = -km\dot{x},$$

$$m\ddot{y} = R\sin\alpha - mg = kmv\frac{v_y}{v} - mg = -km\dot{y} - mg,$$



$$\ddot{x} + k\dot{x} = 0$$

初始条件为：$t=0$,

$v_x=v_0$， $x=0$

$$x = \frac{v_0}{k}(1-e^{-kt}),$$

$$\ddot{y} = -k\dot{y} - g,$$

初始条件为：$t=0$,

$v_y=0$， $y=h$

$$y = h - \frac{g}{k}t + \frac{g}{k^2}(1-e^{-kt}),$$

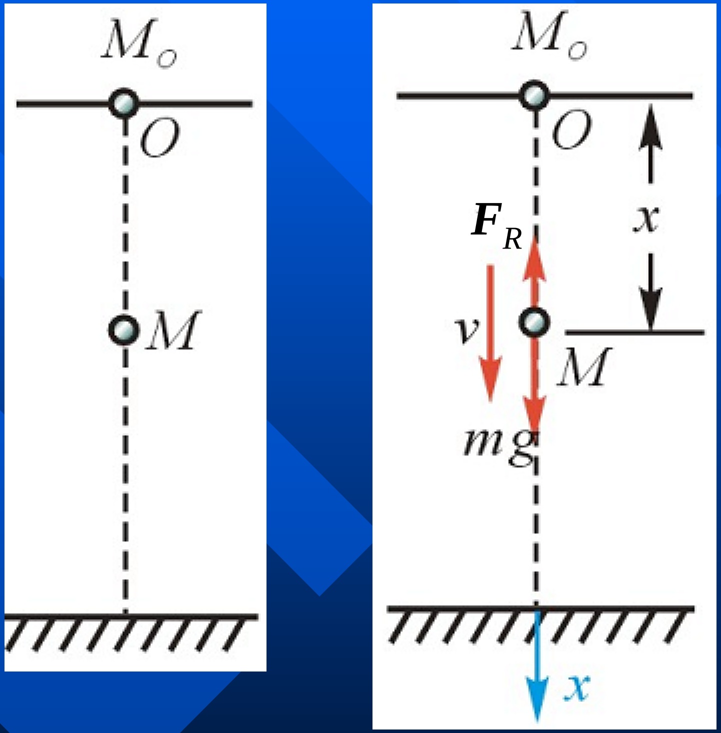
二维运动，运动轨迹未知，直角坐标法，考虑任意时刻t。

第二类问题

例2　　在均匀的静止液体中，质量为m 的物体M 从液面处无初速下沉。设液体阻力$F_R = -\mu v$ ，其中 μ为阻尼系数。试分析该物体的运动规律及其特征。

解：为建立质点 M 的运动微分方程, 将参考坐标系的原点固结在该点的起始位置上，x 轴铅直向下。该质点的受力图如图，则质点M的位移、速度、加速度均设为沿x 轴的正方向。则在任意位置x，建立其运动微分方程为

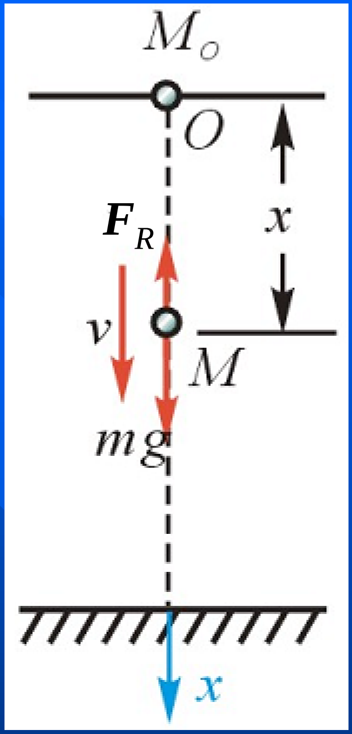
$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = mg - \mu v$$



$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}=mg-\mu v \quad 令 \quad b=\mu/m$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=g-bv$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+bv=g$$



运动的起始条件为：$t=0$时，$v_0=0$，$x_0=0$

$$\int_0^v \frac{\mathrm{d}v}{g-bv}=\int_0^t \mathrm{d}t \Rightarrow v=\frac{g}{b}\left(1-\mathrm{e}^{-bt}\right)$$

$$\int_0^x \mathrm{d}x=\frac{g}{b}\int_0^t (1-\mathrm{e}^{-bt})\,\mathrm{d}t \Rightarrow x=\frac{g}{b}\left[t-\frac{1}{b}(1-\mathrm{e}^{-bt})\right]$$

这就是该物体下沉的运动规律。

$$v=\frac{g}{b}\left(1-\mathrm{e}^{-bt}\right)\qquad t\to\infty\qquad \mathrm{e}^{-bt}\to 0$$

该物体下沉速度将趋近一极限值 $v_{极限}=\frac{g}{b}=\frac{mg}{\mu}$

讨论：由此可以看出在阻尼系数基本相同的情况下（即物体的大小、形状基本相同时），物体的质量越大，它趋近于极限速度所需的时间越长。工程中的选矿、选种工作，就是应用了这个道理。