~~同济大学课程考核试卷(A 卷)~~
~~2017—2018 学年第二学期~~

~~命题教师签名：濮燕敏　　　　审核教师签名：张莉~~

~~课号：122010　　　课名：线性代数 B　　　　　考试考查：考试~~

~~此卷选为：期中考试( )、期终考试(√)、重考( )试卷~~

~~年级_____专业____________学号__________姓名_________任课教师__________~~

~~题号~~	~~一 (30 分)~~	~~二 (10 分)~~	~~三 (10 分)~~	~~四 (8 分)~~	~~五 (16 分)~~	~~六 (12 分)~~	~~七 (14 分)~~	~~总分~~
~~得分~~								

~~(注意：本试卷共七大题，三大张，满分 100 分．考试时间为 120 分钟．要求写出解题过程，否则不予计分，考试不允许使用计算器)~~

一、填空题与选择题~~(每空 3 分，共 30 分,选择题为单选)~~

1、设3阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $|\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=0$，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则

$\left|\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^*\right|=$__________.

2、设 $D_4=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ c & b & d & a \\ d & b & c & a \\ a & b & d & c \end{vmatrix}$，且 a,b,c,d 互不相等，则 $A_{11}+A_{21}+A_{31}+A_{41}=$________.

3、设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$，则 $(\boldsymbol{ABC})^5=$_____________.

4、设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31}-ka_{11} & a_{32}-ka_{12} & a_{33}-ka_{13} & a_{34}-ka_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$，

则使得 $\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{B}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}=$________________.

5、设 $\boldsymbol{A}$ 是4阶方阵，且 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则秩 $R(\boldsymbol{A}^*)=$__________.

6、二次型 $f=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & -4 \\ -10 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ 的矩阵为_______________，该二次型是___________（填 正定 或 负定）二次型.

7、已知3维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$ 也线性无关的充分必要条件是 k ___________.

8、设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶矩阵，则下列结论正确的是_______.

带格式的：无间隔，左
带格式的：左侧： 2 厘米，顶端： 1 厘米，底端： 2.3 厘米，宽度： 21 厘米，高度： 29.7 厘米，页眉到边缘距离： 0 厘米，页脚到边缘距离： 0 厘米，列数：1
带格式的：无间隔
带格式的：无间隔，左
带格式的：无间隔，左
带格式的：无间隔，左
带格式的：无间隔
带格式的：正文，无，行距：单倍行距
带格式的：行距：单倍行距

（A） $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O} \Leftrightarrow \boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 且 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$　　（B） $|\boldsymbol{A}|=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$

（C） $|\boldsymbol{AB}|=0 \Leftrightarrow |\boldsymbol{A}|=0$ 或 $|\boldsymbol{B}|=0$　　（D） $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E} \Leftrightarrow |\boldsymbol{A}|=1$

9、设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶非零实矩阵，且满足任意 $a_{ij}=A_{ij}\left(i,j=1,2,3\right)$，其中 A_{ij} 是元素 a_{ij} 的代数余子式，则① $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵；② $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵；③ $\boldsymbol{A}$ 是不可逆矩阵；④ $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵

中正确的个数为__________.

（A） 1个　　（B） 2 个　　（C） 3 个　　（D） 4 个

二、~~(10 分)~~设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&1&0&8\end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}+3\boldsymbol{E}$，求 $\boldsymbol{X}$.

三、~~（10 分）~~设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-3\\6\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}5\\-5\\a\\11\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\\a\end{pmatrix}$， 问:（1）$a$ 为何值时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关；（2） a 为何值时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关.

四、~~(8 分)~~ 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 实矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，$\lambda\in\mathbb{R}$．已知矩阵 $\boldsymbol{B}=\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$，证明：当 $\lambda>0$ 时，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵.

五、~~(16 分)~~ 设有 n 元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&a&a&\cdots&a\\a&2&a&\cdots&a\\a&a&2&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a&a&a&\cdots&2\end{pmatrix}\quad(a>0),\quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}2\\2\\2\\\vdots\\2\end{pmatrix},$$

（1）求系数矩阵的行列式 $|\boldsymbol{A}|$；（2）a 取何值时，方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解？在有唯一解时，求 x_1 的值；（3）a 取何值时，方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解？并在有无穷多解时求出该方程组的通解.

六、~~(12 分)~~设非空集合$V=\left\{\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}\mid a_{ij}\in\mathbb{R},\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}\right\}$对于矩阵的加法和数乘运算构成线性空间，$\boldsymbol{P}$为可逆矩阵．在$V$中定义映射$T$如下：对任意$\boldsymbol{A}\in V$，$T\left(\boldsymbol{A}\right)=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$，其中$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$为$\boldsymbol{P}$的转置矩阵．（1）验证$T$是$V$上的线性变换；（2）当$n=2$，$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$时，求$T$在$V$的基$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$下的矩阵.

七、~~（14 分）~~设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，其中 $\boldsymbol{x}=\left(x_1,x_2,x_3\right)^{\mathrm{T}}$ 通过正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 化为标准形 $f=y_1^2+y_2^2-y_3^2$，向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=\left(0,1,1\right)^{\mathrm{T}}$ 是方程组 $\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解向量.（1）求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$；（2）求二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}$.