同济大学课程考核试卷(A 卷)
2011—2012 学年第一学期

命题教师签名：　　　　　　　　审核教师签名：

课号：　　　　课名：线性代数 B　　　　考试考查：考试

此卷选为：期中考试(√)、期终考试( )、重考( )试卷

年级_____专业__________学号_________姓名________任课教师_________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

（注意：本试卷共八大题，三大张，满分 100 分．考试时间为 100 钟.要求写出解题过程，否则不予计分）

一、填空题与选择题(每空 3 分，共 24 分, 选择题为单选)

1、行列式$\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&1&1\end{vmatrix}$中$a_{21}$的代数余子式$A_{21}=$___1___.

2、矩阵$C=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&4&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0&-2\\1&-5&3\\2&-1&7\end{pmatrix}$中的元素$c_{23}=$___75___.

3. 设 A，B，C 均为 n 阶矩阵(n>1)，下列命题正确的是___B___.

(A). $\left(A-A^T\right)^T=A-A^T$　　(B). $|AB|=|B^TA|$,

(C). $(A-B)(A+B)=A^2-B^2$　　(D). $AB=AC$ 且 $A\neq 0$ 则 $B=C$

4、设n阶方阵A,B,C满足等式 $ABC=E$ （E为单位矩阵），则等式___A___成立.

(A). $BCA=E$　(B). $BAC=E$　(C). $ACB=E$　(D). $CBA=E$

5、设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}b_1&b_2&b_3\\a_1+3c_1&a_2+3c_2&a_3+3c_3\\c_1&c_2&c_3\end{pmatrix},P_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$$

则有___C___

(A). $P_2AP_1=B$　(B). $P_1AP_2=B$　(C). $P_2P_1A=B$　(D). $AP_1P_2=B$

6、设 3 阶矩阵A的伴随矩阵为A^*，$|A|=\frac{1}{2}$，则$\left|(3A)^{-1}-2A^*\right|=$__$-\frac{16}{27}$__.

7、 已知方阵A满足$A^3-A-E=O$，则$(A-E)^{-1}=$__A^2+A__.

8、设A是$m\times n\left(m<n\right)$.矩阵，$C$是$n$阶可逆矩阵，秩$R(A)=r$，秩$R(AC)=r_1$，则__C__.

(A). $n>r_1>r$，　(**B**). $r_1>r>n$，　(C). $r=r_1$，　(D). $r_1=n$

二、(12 分) 行列式$D=\begin{vmatrix}1&3&5&7\\2&4&6&8\\1&3&-3&0\\1&1&1&1\end{vmatrix}$　求 $2A_{11}+4A_{12}-2A_{13}+A_{14}$.

解: $2A_{11}+4A_{12}-2A_{13}+A_{14}=D'=\begin{vmatrix}2&4&-2&1\\2&4&6&8\\1&3&-3&0\\1&1&1&1\end{vmatrix}$

$$D'=\begin{vmatrix}2&4&-2&1\\2&4&6&8\\1&3&-3&0\\1&1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&0&0&0\\2&4&6&8\\1&3&-3&0\\1&1&1&1\end{vmatrix}=0$$

三、(6 分）已知A为 3 阶方阵，P为 3 阶可逆阵，且满足$PAP^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，求$A^{100}$.

解: 由$PAP^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$知

$$PA^{100}P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{100}=E_3,$$

故$A^{100}=P^{-1}E_3P=E_3$

四、(6 分)设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&1&4\\2&-1&0\end{pmatrix}$， 求 A^{-1}.

解:方法 1: $B=\begin{pmatrix}0&1&2&1&0&0\\1&1&4&0&1&0\\2&-1&0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&0&2&-1&1\\0&1&0&4&-2&1\\0&0&1&-\frac{3}{2}&1&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

故 $A^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1&1\\4&-2&1\\-\frac{3}{2}&1&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

方法 2: $|A|=2$，$A^*=\begin{pmatrix}4&-2&2\\8&-4&2\\-3&2&-1\end{pmatrix}$

$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\begin{pmatrix}2&-1&1\\4&-2&1\\-\frac{3}{2}&1&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

五、(12 分)设 $\begin{cases}-2x_1+x_2+x_3=a_1\\x_1-2x_2+x_3=a_2\\x_1+x_2-2x_3=a_3\end{cases}$，证明这个方程组有解的充分必要条件是 $\sum_{i=1}^{3}a_i=0$

证: 方程组增广矩阵 $B\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}-2&1&1&a_1\\0&-3&3&a_1+2a_2\\0&0&0&a_1+a_2+a_3\end{pmatrix}$,

则 $R(A)=2$， \

而 $R(B)=2$ 当且仅当 $a_1+a_2+a_3=0$,\ 因方程组有解当且仅当 $R(A)=R(B)$,

故这个方程组有解的充分必要条件是 $\sum_{i=1}^{3}a_i=0$

六、(10 分)设 $A=\begin{pmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\\c_1&c_2\end{pmatrix}$ ， $B=\begin{pmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{pmatrix}$,

(1). 求 AB ; (2). 求行列式 $|AB|$.

解 (1).

$$AB=\begin{pmatrix}a_1x_1+a_2x_2&a_1y_1+a_2y_2&a_1z_1+a_2z_2\\b_1x_1+b_2x_2&b_1y_1+b_2y_2&b_1z_1+b_2z_2\\c_1x_1+c_2x_2&c_1y_1+c_2y_2&c_1z_1+c_2z_2\end{pmatrix}$$

(2). 由 $R(AB)\le\min\{R(A),R(B)\}\le R(A)\le 2$.

故 AB 不是满秩的，故 $|AB|=0$

七、(本题 15 分)设 n 阶方阵 A,B 满足 $A+B=AB$

(1). 证明 $A-E$ 可逆且其逆阵为 $B-E$.

(2). 若 $B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&4\end{pmatrix}$，求 A.

(3). 等式 $AB=BA$ 是否成立？为什么？

(1) 证：由 $A+B=AB$ 及 $(A-E)(B-E)=AB-A-B+E$ 知 $(A-E)(B-E)=E$ \

故 $A-E$ 可逆且其逆阵为 $B-E$.

(2). 由 $A+B=AB$ 知 $A(B-E)=B$，而 $B-E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$ 可逆，

故 $A=B(B-E)^{-1}$

$$=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&\frac{3}{2}&0\\0&0&\frac{4}{3}\end{pmatrix}$$

(3). 等式 $AB=BA$ 成立.

由 $(A-E)(B-E)=(A-E)(B-E)=E$，

故 $AB-A-B+E=BA-B-A+E$

故 $AB=BA$

八、(15分)设线性方程组 $\begin{cases}x_1-x_2+2x_3=-1\\-x_1+x_2+\lambda x_3=-\lambda^2+2\\\lambda x_1+x_2+x_3=1\end{cases}$，问当 λ 取何值时，

(1). 此方程组有唯一解？

(2). 此方程组无解？

(3). 此方程组有无穷多解？

解：$B=(A,b)=\begin{pmatrix}1&-1&2&-1\\-1&1&\lambda&-\lambda^2+2\\\lambda&1&1&1\end{pmatrix}$

$$|A|=\begin{vmatrix}1&-1&2\\-1&1&\lambda\\\lambda&1&1\end{vmatrix}=-(\lambda+2)(1+\lambda)$$

(1) 当 $\lambda\neq-2$ 且 $\lambda\neq-1$ 时，A 可逆，此方程组有唯一解.

(2)

当 $\lambda=-2$ 时，

$$B=\begin{pmatrix}1&-1&2&-1\\-1&1&-2&-2\\-2&1&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&-3&0\\0&1&-5&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

此时 $R(A)=2, R(B)=3$，方程组无解

(3).

当 $\lambda=-1$ 时，

$$B=\begin{pmatrix}1&-1&2&-1\\-1&1&-1&1\\-1&1&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&-1&0&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

此时 $R(A)=R(B)=2<3$，方程组有无穷多解.