同济大学《微积分》（上）测验试卷一

2023—2024 学年第一学期

年级_______专业_________学号____________姓名__________得分______________

（ **注意： 解答题要求写出解题过程** ）

一．填空题（每题 6 分，共 30 分）

1. 当 $x \to 0$ 时，无穷小 $\alpha = \dfrac{x^2 - \sin x^2}{\ln\left(1+x^2\right)}, \beta = \sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-x^4}, \gamma = x - \arctan x$，从低阶到高阶的排列顺序为_________________.（β,γ,α）

2. 曲线 $y = x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ 的渐近线方程是________________. ________________.（$y = x+1$）

3. 极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\cos\sqrt{x}\right)^{1/x} =$ ______________________________.（$\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$）

4. 设 $F(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 2x}{x}, & x > 0, \\ a, & x = 0, \\ \dfrac{\mathrm{e}^{bx}-1}{\ln(1-2x)}, & x < 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a+b=$ ______________.（-2）

5. 设 $f(x)$ 仅在点 $x=a$ 处不连续，$g(x)$ 仅在点 $x=b(a\neq b)$ 处不连续，则函数 $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$【B】.

A. 一定连续　　B 一定不连续　　C 有一个间断点　　D 有两个间断点

二、 解答题（每题 12 分，共 60 分）

6. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x - \sin x\cos x\cos 2x}{x^3}$.

解　因 $\sin x\cos x\cos 2x = \dfrac{1}{4}\sin 4x$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x\cos x\cos 2x}{x^3} = \frac{1}{4}\cdot\frac{4^3}{6} = \frac{8}{3}$$

7. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2x} + \cdots + \mathrm{e}^{nx}}{n}\right)^{1/x}$.

解　因 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{kx}-1}{x} = k$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}}{n}\right)^{1/x}$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\left(1 - \frac{\mathrm{e}^x - 1 + \mathrm{e}^{2x} - 1 + \cdots + \mathrm{e}^{nx} - 1}{n}\right)^{n/\left(\mathrm{e}^x-1+\mathrm{e}^{2x}-1+\cdots+\mathrm{e}^{nx}-1\right)}\right]^{\frac{\mathrm{e}^x-1+\mathrm{e}^{2x}-1+\cdots+\mathrm{e}^{nx}-1}{nx}}$$

$= \mathrm{e}^{\frac{n+1}{2}}$.

8. 设 $x_1 = \sqrt{6}, x_{n+1} = \sqrt{6+x_n}\,(n\geq 1)$，证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求此极限.

解　因 $x_1 = \sqrt{6} < 3$，若 $x_n < 3$，则 $x_{n+1} = \sqrt{6+x_n} < 3$，所以 $x_n < 3\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$，

又：易得 $\{x_n\}$ 单增，所以极限存在，记 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = a$，可得 $a=3$.

9. 设 $f(x) = \lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t - \sin x}}$，求 $f(x)$ 的间断点并判定其类型.

解　$f(x) = \lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}} = \mathrm{e}^{\frac{x}{\sin x}}$，所以 $x=0$ 为第一类可去间断点，

$x = k\pi(k\neq 0)$ 为第二类间断点.

三、证明题（共 10 分）

1. 叙述闭区间上连续函数的介值定理，并用零点定理证明介值定理.

解　⑴若 $f(x)$ 在闭区间上连续，则 $f(x)$ 可取遍介于最大值和最小值中的一切值

⑵任取 $\mu\in[m,M]$，令 $F(x) = f(x) - \mu$，则 $F(x)$ 在闭区间上连续，且 $F_{\min}\geq 0$，

$F_{\max}\geq 0$，所以，由零点定理，函数 $F(x)$ 零点存在，即存在 $F(x_0) = 0$，即

$f(x_0) = \mu$.