同济大学课程考核试卷（A 卷）
2015—2016 学年第二学期

命题教师签名：　　　　　　　　　　审核教师签名：

课号：**122010**　　　课名：**线性代数 B**　　　考试考查：**考试**

此卷选为：期中考试(　)、期终考试(√)、重考(　)试卷

年级_____专业______________学号__________姓名____________任课教师_____

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

（注意：本试卷共七大题，三大张，满分 100 分．考试时间为 120 分钟。要求写出解题过程，否则不予计分）

一、填空与单项选择题（每小题 3 分，共 24 分）

1、已知 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1), B=(\alpha_1,\alpha_2,\beta_2)$，$\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ 均为三维列向量，且 $|A|=a,|B|=b$，

若 $C=(\alpha_2,\alpha_1,-2\beta_2-\beta_1)$，则 $|C|=$_________.

2、若 A 是 5 阶方阵，且 $|A|=6$, 则 $\left|(\frac{1}{2}A)^{-1}-\frac{1}{3}A^*\right|=$_________.

3、设 A 为三阶矩阵，将 A 的第 2 行加到第 1 行得 B，将 B 的第 1 列的-1 倍加到第 2 列得 C.

记　$P=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则

(A) $C=P^{-1}AP$　　(B)．$C=PAP^{-1}$　　(C)．$C=P^TAP$　　(D)．$C=PAP^T$

4、设 A,B 都是 n 阶非零矩阵，且 $AB=O$，则 A 和 B 的秩_________.

(A)．必有一个等于零；　　　　　　(B)．都小于 n；

(C)．一个小于 n，一个等于 n；　　(D)．都等于 n ・・

5、$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&2&1\\2&1&-1\end{pmatrix}$，则齐次方程 $A^*x=0$ 的通解为_________.

6、已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&0\\2&0&x\end{pmatrix}$ 的一个特征值是 0，则 $x=$_________.

7、已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则向量组（　　）线性无关

(A). $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$　　　(B). $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1-\alpha_3$

(C). $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$　　　(D). $\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3,2\alpha_1-\alpha_2,\alpha_1-\alpha_3$

8、已知 A,B 都是 3 阶方阵且 A 与 B 相似，若 $1,-2$ 为 A 的特征值，B 的迹为 5，则矩阵 B 的全部特征值包括____________。

二、（10 分）

设 $\alpha_1=(1+a,1,1,1)^T,\alpha_2=(2,2+a,2,2)^T,\alpha_3=(3,3,3+a,3)^T,\alpha_4=(4,4,4,4+a)^T$.

问 a 为何值时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 相关？当 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 相关时，求其一个极大无关组，并将其余向量用该极大无关组线性表出。

三、(10 分)已知矩阵 P, X 满足 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $PX = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$,

求矩阵 X .

四、(12 分)已知非齐次方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = -1 \\ ax_1 + x_2 + 3x_3 + bx_4 = 1 \end{cases}$$ 有 3 个线性无关的解。

(1)、证明方程组系数矩阵 A 的秩 $R(A)=2$。

(2)、求 a、b 的值及方程组的通解。

五、(14 分)

设 $P[x]_3$ 为次数不高于 3 次的多项式关于函数线性运算构成的线性空间,定义

$$T\left(f\left(x\right)\right) = f\left(x-1\right) + \frac{d(f(x))}{d(x)}$$

(1) 证明 T 是 $P[x]_3$ 上的线性变换;

(2) 求 T 在基底 $f_1 = 1,\ \mathrm{f}_2 = x,\ f_3 = x^2,\ f_4 = x^3 - x^2$ 下的矩阵.

六、（16 分）已知 A 为二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2-2x_3^2-2x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$ 对应的实对称矩阵,

(1). 写出矩阵 A 并求 A^{10} 的所有元素之和。

(2). 求一个正交变换 $x=Py$，将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准型，并写出标准型。

七、证明题:

(1)（6 分）已知 A 为 n 阶方阵，且 $A^2=E_n$，设 $\alpha_1^T,\alpha_2^T,\cdots,\alpha_s^T$ 为 $A+E_n$ 的行向量组的最大线性无关组；$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 为 $A-E_n$ 的列向量组的最大线性无关组，

证明： 向量组 $\left\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\right\}$ 构成n维向量空间的一组基。

。

(2)（6 分）已知 A 为 $n\times s$ 矩阵，B 为 $n\times t$ 矩阵， 且 $R(A)=s,R(B)=t,A^TB=O$ ，

设 $C=(A,B)$ ，证明齐次方程 $CX=O$ 只有零解。