第16章习题课

习题9　证明开集和闭集的对偶性：

若E为开集，则 E^c 为闭集；

若 E为闭集，则 E^c 为开集.

证明：设E为开集，为证 E^c 为闭集，就要证 E^c 包含所有的边界点. 设 $A\in\partial(E^c)$，易知A也是E的边界点, 所以A的任何邻域内同时含有E和 E^c 的点，所以A不是E的内点. 因为E为开集，所以A不是E的点, 故 $A\in E^c$

下设 E为闭集，我们证明 E^c 为开集.

就是要证明 $E^c=(E^c)^o$. 只要证明 $E^c\subseteq(E^c)^o$.

设 $A\in E^c$， 由于E为闭集记，$A\notin E=E\cup\partial E$,

则存在A的邻域 U(A)不包含E的点,

$\therefore U(A)\subseteq E^c\Rightarrow A\in(E^c)^o$.

注： E是开集当且仅当 E^c 为闭集.

习题10　证明

(1) 若 F_1,F_2 为闭集，则 $F_1\cup F_2$和 $F_1\cap F_2$ 都是闭集；

(2) 若 E_1,E_2 为开集，则$E_1\cup E_2$和 $E_1\cap E_2$都是开集；

(3) 若 F 为闭集，E 为开集，则 $F\setminus E$，$E\setminus F$ 分别为闭集和开集.

证明(1) 设 F_1,F_2 为闭集，要证明 $F_1\cup F_2$ 为闭集.

为此先证明 $\partial(F_1\cup F_2)\subseteq\partial F_1\cup\partial F_2$

设一点A, 若A的任何领域U(A)，有

$$U(A)\cap(F_1\cup F_2)\neq\varnothing,\text{且}\,U(A)\cap(F_1\cup F_2)^c\neq\varnothing$$

$$\Rightarrow[U(A)\cap F_1]\cup[U(A)\cap F_2]\neq\varnothing,$$
$$\text{且}\ U(A)\cap F_1^c\cap F_2^c\neq\varnothing$$

若A不是 F_1 的边界点，则存在A的领域V(A)，使得

$$\mathrm{V}(A)\cap F_1=\varnothing\Rightarrow \mathrm{V}(A)\cap F_2\neq\varnothing.$$

所以A的任何领域W(A)，有

$$W(A)\cap F_2\neq\varnothing,\text{且}\,W(A)\cap F_2^{\,c}\neq\varnothing\Rightarrow A\in\partial F_2$$

有上面的证明，且 $\partial F_1\cup\partial F_2=F_1\cup F_2$ 得到(1).

由(1)和对偶性(9题)，得证（2）.

(3)的证明有(1)和2），以及

$$F\setminus E=F\cap E^c,\ E\setminus F=E\cap F^c.$$

求极限2

(1) $$\lim_{x\to 0, y\to 0} \frac{y^2}{x^2+y^2}$$

解　令 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta,$

$$\frac{y^2}{x^2+y^2}=\sin^2\theta$$

固定 $\theta,$ 极限与该角度有关，故重极限不存在.

易知累次极限分别为0和1，由此也知重极限不存在.

(2) $\lim\limits_{x\to 0, y\to 0}(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$

解　因为 $\left|(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}\right| \le |x+y| \le |x|+|y| \to 0$

所求重极限为0.　　两个累次极限都不存在.

(3) $\lim\limits_{x\to 0, y\to 0}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$

解　令 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$

$$\frac{x^2y^4}{x^2y^4+(x-y)^2}=\frac{\rho^2\cos^2\theta\sin^2\theta}{\rho^2\cos^2\theta\sin^2\theta+(\cos\theta-\sin\theta)^2}$$

极限与θ有关，重积分不存在.　　两个累次极限都是0.

$$(4)\quad \lim_{x\to 0, y\to 0} \frac{x^3+y^3}{x^2+y}$$

解　注意分子是3阶无限小，而分母可以任意接近于0.

$$y=-x^2+kx^3$$

$$\lim_{x\to 0, y=kx^3-x^2} \frac{x^3+(kx^3-x^2)^3}{kx^3}=\frac{1}{k}$$

与k有关，故重积分不存在.

两个累次极限都是0.

(7) $\lim\limits_{x\to 0, y\to 0} \dfrac{e^x - e^y}{\sin xy}$

解　令　$y = x$，极限为0.

再令 $y = -x$，极限为

$$\lim_{x\to 0, y=-x} \frac{e^x - e^{-x}}{-\sin x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 1}{-\sin x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{-x^2} = \infty$$

故重积分不存在.

两个累次极限都不存在.

习题7 求重极限

(1) $$\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$$

解 $$\left|\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}\right| \le \frac{x^2}{x^4}+\frac{y^2}{y^4}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\to 0$$

(2) $$\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} (x^2+y^2)e^{-(x+y)}$$

$$\left|(x^2+y^2)e^{-(x+y)}\right| \le (x^2+y^2)e^{-\sqrt{x^2+y^2}}=\rho^2 e^{-\rho}\to 0$$

(3) $$\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}\left(1+\frac{1}{xy}\right)^{x\sin y}$$

解 取对数，注意到

$$x\sin y\ln(1+\frac{1}{xy})\sim\frac{x\sin y}{xy}=\frac{\sin y}{y}\to 0$$

所以原极限为1.

(4) $$\lim_{(x,y)\to(+\infty,0)}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2/(x+y)}$$

$$\frac{x^2}{x+y}\ln(1+\frac{1}{x})\sim\frac{x^2}{(x+y)x}=\frac{x}{x+y}\to 1$$

所以原极限为e.

习题8 作函数，使得当 $(x,y)\to(+\infty,+\infty)$

(1) 两个累次极限存在而重极限不存在；

(2) 两个累次极限不存在而重极限存在；

(3) 重极限与累次极限都不存在；

(4) 重极限存在，累次极限一个存在，一个不存在.

(1) $\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ (2) $\dfrac{\sin y}{x}+\dfrac{\sin x}{y}$

(3) $\sin x+\sin y$ (4) $\dfrac{\sin x}{y}$

原点处同样问题的函数，可由自变量取倒数得到.

习题1 讨论函数连续性

(2) $f(x,y)=[x+y]$

解：间断点集为所有直线x+y=n, n为整数.

(4) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

解：在整个平面连续. 在原点的连续性由

$$\left|\frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\le\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}\le\frac{x^2+y^2}{2\sqrt{x^2+y^2}}\to 0=f(0,0).$$

$$(5)\ f(x,y)=\begin{cases}0, & x\text{为无理数}\\ y, & x\text{为有理数}\end{cases}$$

解：仅在x-轴连续,即集合$\{(x,0)\in \mathrm{R}^2 : x\in R\}$

考虑点 $P_0(x_0,y_0)$和点列 $P_n(x_n,y_n)$ 且 $P_n\to P_0$

若该点列的横坐标全为无理数，则 $f(P_n)\to 0$

若该点列的横坐标全为有理数，则 $f(P_n)\to y_0$

故只有 $y_0=0, P_0$ 才可能成为连续点, 该点在x-轴上.

而当 $y\to 0, |f(x,y)|\le |y|\to 0$, 故 x-轴上点都是连续点.

在xz 面上，

$$z(x)=\begin{cases}0, & x\text{为无理数}\\ z, & x\text{为有理数}\end{cases}$$

(6) $f(x,y)=\begin{cases} y^2\ln(x^2+y^2), & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$

解：在整个平面连续. 在原点的连续性由

$$\left|y^2\ln(x^2+y^2)\right|\le\left|(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)\right|\to 0= f(0,0).$$

(7) $f(x,y)=\dfrac{1}{\sin x\sin y}$

解：在使分母为0点之外连续.

(8) $f(x,y)=e^{-x/y}$

解：在x-轴之外连续.

习题3 讨论下面函数在(0, 0)的连续性,

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x}{(x^2+y^2)^p}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

解: $x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta,$

$$f(x,y)=\begin{cases}\rho^{1-2/p}\cos\theta, & \rho\neq 0\\ 0, & \rho=0\end{cases}$$

易知当且仅当 $p>\dfrac{1}{2},\ f(x,y)\to 0$

函数在(0, 0)点连续.

习题6 设 $f(x,y),(x,y)\in[a,b]\times[c,d]$ 连续,

函数列 $\{\varphi_k(x)\}$ 在[a, b]上一致收敛, $\varphi_k(x)\in[c,d],k\geq 1.$

则函数列 $\{F_k(x)=f(x,\varphi_k(x))\}$ 在[a, b]上也一致收敛.

证: 因函数f 在$[a,b]\times[c,d]$ 连续, 因而一致连续,

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$ 当 $|x-x'|<\delta,|y-y'|<\delta$

有 $$|f(x,y)-f(x',y')|<\varepsilon.$$

设 $\varphi_k(x)\rightrightarrows\varphi(x)$, 下证 $f(x,\varphi_k(x))\rightrightarrows f(x,\varphi(x)).$

对上述 $\varepsilon,\delta,\exists N,$当$k>N,|\varphi_k(x)-\varphi(x)|<\delta,\ x\in[a,b].$

$$\therefore|f(x,\varphi_k(x))-f(x,\varphi(x))|<\varepsilon,$$

$$\Rightarrow f(x,\varphi_k(x))\rightrightarrows f(x,\varphi(x)).$$

习题9 设 $f(x,y)=\dfrac{1}{1-xy},(x,y)\in[0,1)\times[0,1).$

证明该函数连续，但不是一致连续.

证：连续性来自于初等函数的连续性.

考虑点列对 $P_n(1-\dfrac{1}{n},1-\dfrac{1}{n}),Q_n(1-\dfrac{2}{n},1-\dfrac{2}{n})$

其距离趋于0，但是

$$|f(P_n)-f(Q_n)|=\left|\frac{n^2}{2n-1}-\frac{4n^2}{4n-1}\right|\to\infty$$

不趋于0，因此函数不是一致连续的.

习题10 设 $f(x,y),\ (x,y)\in R^2$

当一个变量固定，对另一个变量连续，当x固定，

关于y单调。证明f连续.

证：固定 $P_0(x_0,y_0)$. $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$ 固定ε,δ

当 $|x-x_0|\le\delta,|y-y_0|\le\delta,$ 使得(*),(**)都成立

$$f(x_0,y_0)-\varepsilon<f(x_0,y)<f(x_0,y_0)+\varepsilon,\quad (*)$$

上式对 $y=y_0\pm\delta$ 也成立. 进一步下面的不等号都成立，

$$f(x,y)\le f(x,y_0\pm\delta)<f(x_0,y_0\pm\delta)+2\varepsilon<f(x_0,y_0)+3\varepsilon\ (**)$$

上式中 $y_0\pm\delta$ 取同一个，来自（*）. 因为固定x后，

$f(x,y)$ 关于y单调，单增或单减；

$$f(x,y) \le f(x,y_0 \pm \delta) < f(x_0,y_0 \pm \delta) + 2\varepsilon < f(x_0,y_0) + 3\varepsilon \ (**)$$

第二个不等式来自于 $f(x,y_0 \pm \delta)$ 对x的连续性;

第三个不等式来自于 $f(x_0,y)$ 对y的连续性.

类似地有

$$f(x,y) > f(x_0,y_0) - 3\varepsilon$$

从而 $\lim\limits_{x \to x_0, y \to y_0} f(x,y) = f(x_0,y_0).$

总复习题1　设E为平面上的有界闭集,

d(E)为E的直径, 证明$\exists P_1, P_2 \in E$，$d(E) = \rho(P_1, P_2)$.

证：　$d(E) = \sup\{\rho(P,Q) : P,Q \in E\}$.

记 $P(s,t),Q(u,v) \Rightarrow \rho(P,Q) = \sqrt{(s-u)^2 + (t-v)^2}$

$E \times E$　为有界闭集,

四元函数　$\rho(P,Q) = \rho(s,t,u,v)$

为连续函数，可以取得最大值, 就是d(E).

总复习题2 设 $f(x,y)=\frac{1}{xy}, r=\sqrt{x^2+y^2}, k>1,$

$$D_1=\{(x,y):\frac{x}{k}\le y\le kx\}, D_2=\{(x,y):x>0,y>0\}.$$

分别讨论极限 $I_i=\lim\limits_{r\to+\infty,(x,y)\in D_i} f(x,y), i=1,2.$

证：第二个集合为第一象限，第一个为其子集.

$$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta,\ f(x,y)=\frac{1}{r^2\sin\theta\cos\theta},$$

$$(x,y)\in D_1 \Rightarrow arc\tan\frac{1}{k}\le\theta\le\arctan k\Rightarrow I_1=0$$

分别沿路径 $y=x, y=\frac{1}{x}$ 取极限，极限不同，

从而第二个极限不存在.

总复习题5 设在有界开集E上 f 一致连续，证明

(1) 可以将 f 连续延拓到E的边界；

(2) f 在E上有界.

证(1) 设 $P_0 \in \partial E, P_n \in E, P_n \to P_0.$

由于f 在E上一致连续，易知 $f(P_n)$

是一个Cauchy列，故极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f(P_n)$ 存在，故定义

$f(P_0) = \lim\limits_{n\to\infty} f(P_n).$ 易知该极限与点列{p_n}无关.

进一步可知延拓后的函数在E的边界也连续.

(2) 由f 在集 $E \cup \partial E$ 连续，因而f有界，故在E也有界.

总复习题7 设$f(t)$在区间(a, b)内连续可导，函数

$$F(x,y)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}, & x\neq y\\ f'(x), & x=y\end{cases}$$

定义在$D=(a,b)\times(a,b)$，证明对任何 $c\in(a,b)$

$$\lim_{x\to c,y\to c}F(x,y)=f'(c).$$

证 $$F(x,y)=\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=f'(y+\theta(x-y)),\theta\in(0,1)$$

当 $(x,y)\to(c,c)$

$$F(x,y)-f'(c)=f'(y+\theta(x-y))-f'(c)\to 0.$$