2012—2013 学年第二学期 A 卷

年级______专业______________学号______________姓名__________任课教师__________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

（注意：本试卷共八大题，三大张，满分 100 分. 考试时间为 120 分钟. 解答题要求写出解题过程，否则不予计分）

一、(24 分)填空与单选题.

1、设 A 和 B 都是 n 阶方阵，A^* 是 A 的伴随矩阵，如果 $|A|=2$，$|B|=-3$，则行列式

$|2A^*B^{-1}|=$____________.

2、设3阶方阵 A 与 B 相似，其中 $B=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$，则 $A^8-6400E=$__________.

3、设三元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为 2，η_1,η_2,η_3 是它的三个解向量，其中 $\eta_1=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$，

$\eta_2+\eta_3=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，则该方程组的通解是 $x=$________________.

4、设 a 是实数，如果集合 $V=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\middle| x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{R}, x_1+2x_2+3x_3+4x_4=a\right\}$ 关于向量的线性运算成为线性空间，其中 $\mathbb{R}$ 是实数集，则 $a=$__________.

5、设3阶方阵 $A=\begin{pmatrix}2&0&1\\3&1&x-2\\4&0&5\end{pmatrix}$ 可相似对角化，则 $x=$____________.

6、设 A 是 n 阶可逆矩阵，则下列______________恒成立.

(A) $(2A)^{-1}=2A^{-1}$　　　　　(B) $(2A)^*=2A^*$

(C) $(2A^{-1})^T=(2A^T)^{-1}$　　(D) $\left[(A^{-1})^{-1}\right]^T=\left[(A^T)^{-1}\right]^{-1}$

7、设 A 为 n 阶方阵，其中 $n\geq 2$，如果存在 n 维非零列向量 α 和 β，使得 A 的伴随矩阵 $A^*=\alpha\beta^T$，则齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解空间维数为____________.

(A) $n-1$　　(B) 1　　(C) n　　(D) 0

8、设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是 n 阶实对称正定矩阵，则下面说法错误的是____________.

(A) A 的各阶子式都是恒正的　　(B) A 的正惯性指数为 n

(C) 对于 $i=1,2,\cdots,n$，恒有 $a_{ii}>0$　　(D) 行列式 $|A+E|>1$

二、(10 分) 设 4 阶行列式 $D=\begin{vmatrix}2&1&-1&1\\1&3&-4&1\\1&1&2&1\\1&1&3&5\end{vmatrix}$ 的 (i,j) 元的代数余子式为 A_{ij}，求 $A_{13}+A_{23}+4A_{33}+A_{43}$.

三、(10 分) 设矩阵 A,B,X 满足方程 $AXA+BXB=AXB+BXA+E$，其中 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，求矩阵 X.

四、(10分) λ 取何值时，非齐次线性方程组 $\begin{cases}(1-2\lambda)x_1+(1-\lambda)x_2+x_3=\lambda+1\\(1-\lambda)x_1+(1-\lambda)x_2+x_3=1\\x_1+x_2+(1-\lambda)x_3=1\end{cases}$

(1)有惟一解；(2)无解；(3)有无穷多个解？在有无穷多个解时求出其通解.

五、(10分)已知向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}9\\6\\-7\end{pmatrix}$ 与向量组 $\beta_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$，$\beta_2=\begin{pmatrix}a\\2\\1\end{pmatrix}$，

$\beta_3=\begin{pmatrix}b\\1\\0\end{pmatrix}$ 有相同的秩，且 β_3 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，求 a,b 的值.

六、(12 分) 设有二次型 $f(x)=x^T Ax$，其中 $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$，$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. 用正交变换 $x=Py$ 将该二次型化为标准形.

七、(12 分) 设 V 是所有 2 阶实矩阵关于矩阵的线性运算构成的线性空间. 取 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，定义映射 $T:V\to V$，使得对任意的 $X\in V$，有 $T(X)=AX-XA$.

(1) 证明 T 是线性空间 V 中的线性变换.

(2) 求 T 在 V 的基

$$B_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad B_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad B_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad B_4=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

下的矩阵.

八、(12 分) 证明题.

(1) 设方阵 A 为实斜对称矩阵，即满足 $A^T = -A$. 证明 $E - A^2$ 是正定对称矩阵.

(2) 设α_1,α_2分别是矩阵A关于特征值1和2的特征向量，向量α_3满足$A\alpha_3=2\alpha_1+\alpha_3$，证明向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关.