同济大学课程考核试卷(A 卷)
2010—2011 学年第一学期

命题教师签名：　　　　　　　　　　审核教师签名：

课号：122009　　课名：**线性代数 B**　　　考试考查：**考试**

此卷选为：期中考试( )、期终考试(√)、重修( )试卷

年级_____专业__________学号________姓名____________任课教师____________

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

（注意：本试卷共七大题，三大张，满分 **100** 分．考试时间为 **120** 分钟．要求写出解题过程，否则不予计分）

一、填空与选择题(均为单选题) (27 分)

1、 已知 4 阶方阵 $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 2 & 3 \\ 4 & b & 5 & 6 \\ 7 & 8 & c & 9 \\ 0 & 5 & 4 & d \end{pmatrix}$，函数 $f(x)=|xE-A|$，这里 E 为 4 阶单位阵，则函数 $f(x)$ 中 x^3 项的系数为______a+b+c+d__________.

2、 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$ 均为 4 维列向量，已知 4 阶行列式 $|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1|=m$，又 $|\alpha_1,\alpha_2,\beta_2,\alpha_3|=n$，则 4 阶行列式 $|\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\beta_1+\beta_2|=$_____ $n-m$ _____________.

3、 已知 3 阶方阵 A 满足 $|A+3E|=|A-2E|=|A-E|=0$，其伴随矩阵为 A^*，则行列式 $|A^*|=$____36_______.

4、 已知 α 是 3 维实列向量，且 $\alpha\alpha^T=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，则 $\|\alpha\|=$____ $\sqrt{3}$ ______.

5、设 α 是 R^3 空间中的某一向量，它在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的坐标为 $(x_1,x_2,x_3)^T$，则 α 在基 $\varepsilon_1+k\varepsilon_3,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的坐标是________ $(x_1,x_2,x_3-kx_1)^T$ ______________.

6、 下列关于矩阵乘法的结论中**错误**的是___________B________.

(A). 若矩阵 A 可逆，则 A 与 A^{-1} 可交换

(B). 可逆阵必与初等矩阵可交换

(C). 任一个 n 阶方阵均与 cE_n 可交换，这里 c 为任意常数

(D). 初等矩阵与初等矩阵乘法未必可交换

7、 设 A、B 均为 n 阶方阵，且 $(AB)^2=E$，则下列式子中成立的是____D______.

(A). $AB=E$　　(B). $AB=-E$

(C). $A^2B^2=E$　　(D). $(BA)^2=E$

8、 设 $Ax=b$ 为 n 元非齐次线性方程组，则下面说法中正确的是____C___

(A). 若 $Ax=0$ 只有零解，则 $Ax=b$ 有唯一解

(B). 若 $Ax=0$ 有无穷多个解，则 $Ax=b$ 有无穷多个解

(C). 若 $Ax=b$ 有两个不同的解，则 $Ax=0$ 有无穷多个解

(D). $Ax=b$ 有唯一解 $\Leftrightarrow R(A)=n$

9、 下列向量组中线性无关的是______C_________.

(A). $(1,-1,0,2),(0,1,-1,1),(0,0,0,0)$

(B). $(a,b,c),(b,c,d),(c,d,a),(d,a,b)$

(C). $(a,1,b,0,0),(c,0,d,1,0),(e,0,f,0,1)$

(D). $(1,2,1,5),(1,2,1,6),(1,2,3,7),(0,0,0,1)$

二、(10 分) 已知 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$，求第一行各元素的代数余子式之和.

三、(10 分)参数 a,b 满足什么条件的时候，线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = a \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 3 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = b \end{cases}$

有解？并在有解的情况下，求出它的通解.

四、(15 分)已知 3 阶方阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -k & -1 & k \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$，问参数 k 满足什么条件的时候 A 可以对角化？

并求出可逆阵 P 及对角阵 Λ，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$.

五、(12 分)设向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ k \end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix} -1 \\ k \\ 1 \end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix} -k \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$，问：

(1) 参数 k 为何值时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为向量组的一个最大线性无关组？

(2) 参数 k 为何值时，α_1,α_2 为向量组的一个最大线性无关组？并在此时，求出 α_3,α_4 由最大线性无关组表出的线性表达式.

六、(12 分)设V 为实数域R上全体 2 阶方阵关于矩阵的加法和数乘运算所成的线性空间，在V中定义映射$T:T(X)=X\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，(1) 证明$T$ 是V 中的线性变换，(2) 求线性变换T 在自然基$E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$下的矩阵，(3) 若$a=1,b=2,c=3,d=4$，试求线性变换$T$ 的核$\ker T$与像空间$\operatorname{Im} T$.

七、(1)(7 分)已知A为 3 阶方阵，$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$为$A$的三个不同的特征值，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$分别为相应的特征向量，又$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，试证：$\beta,A\beta,A^2\beta$线性无关.

(2) (7 分)设A为 3 阶实对称阵，且$A^2+2A=0$，又$R(A)=2$，试求出A的全体特征值，并问参数k为何值时，矩阵$A+kE$为正定阵?