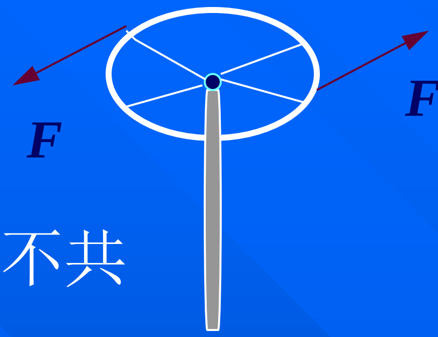
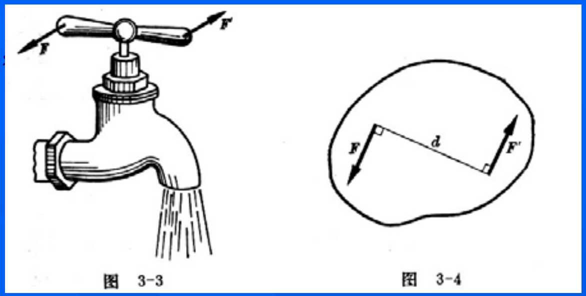
二、力偶与力偶系



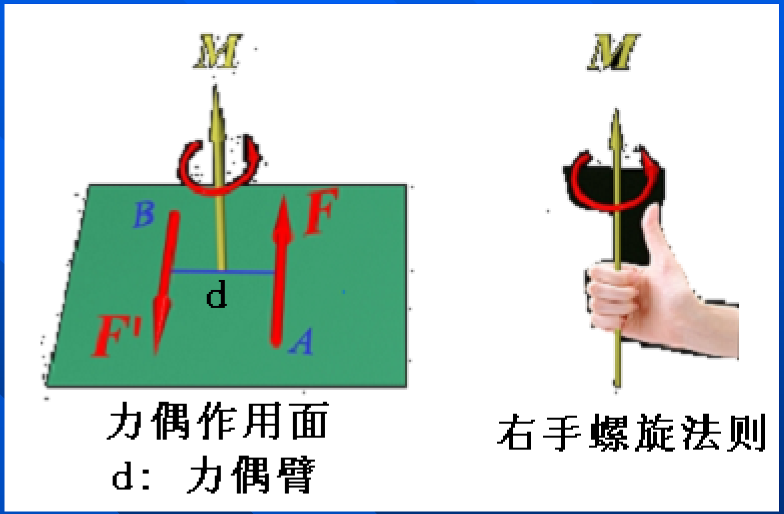


（1）力偶及力偶矩矢量

1）力偶：等值、反向、不共线的一对平行力。

2）力偶作用面：力偶中两个力的作用线所决定的平面。

3）力偶臂：两力作用线间的垂直距离。



4）空间内力偶的三要素：

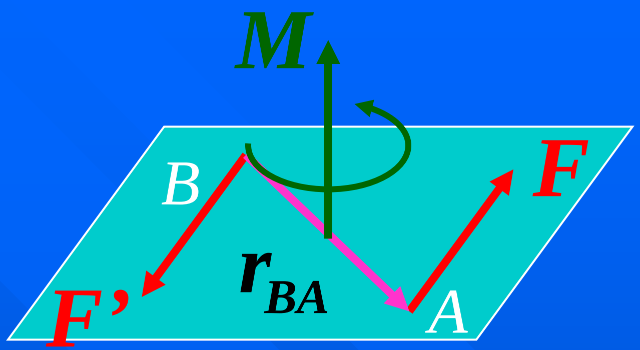
a) 力偶中力的大小F与力偶臂d的乘积Fd；

b) 力偶作用面在空间的方位；

c) 力偶在作用面内的转向。

空间内力偶定义为矢量，称为力偶矩矢量（力偶矩矢）：

$$\vec{M} = \vec{r}_{BA} \times \vec{F}$$

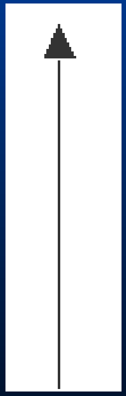


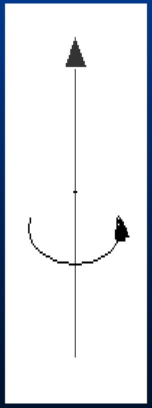
力偶矩矢量的大小：

$$\left|\vec{M}\right| = F \cdot d$$

力偶矩矢量的方向：根据右手螺旋法则确定。

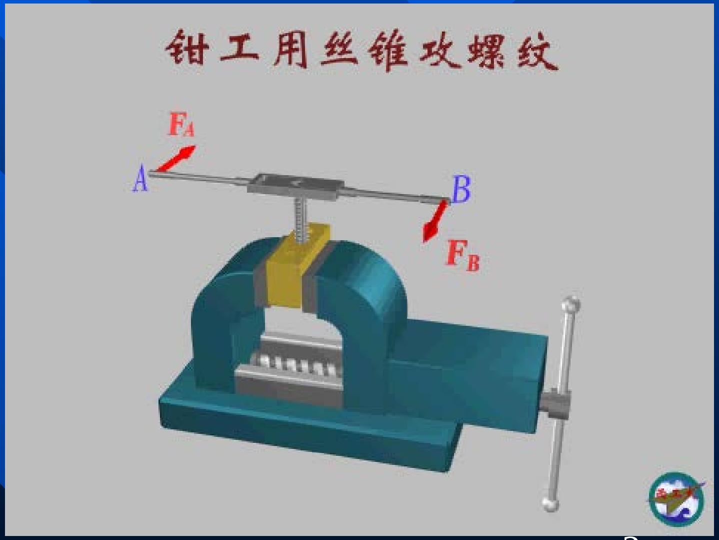
力偶矩矢量的表示方法：



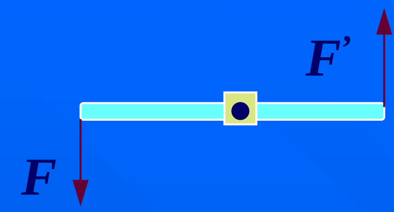


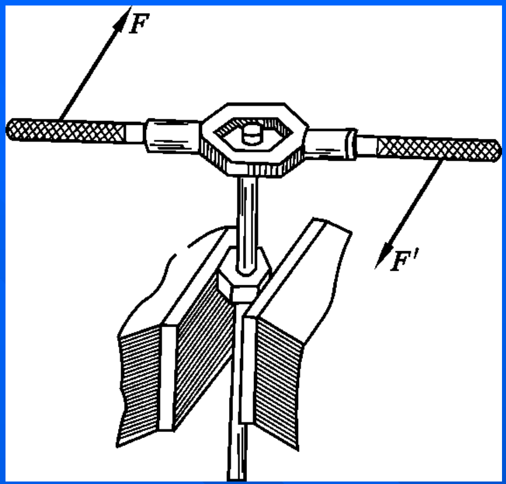
力偶矩矢量的单位：

N·m或k N·m



平面内的力偶定义为代数量：

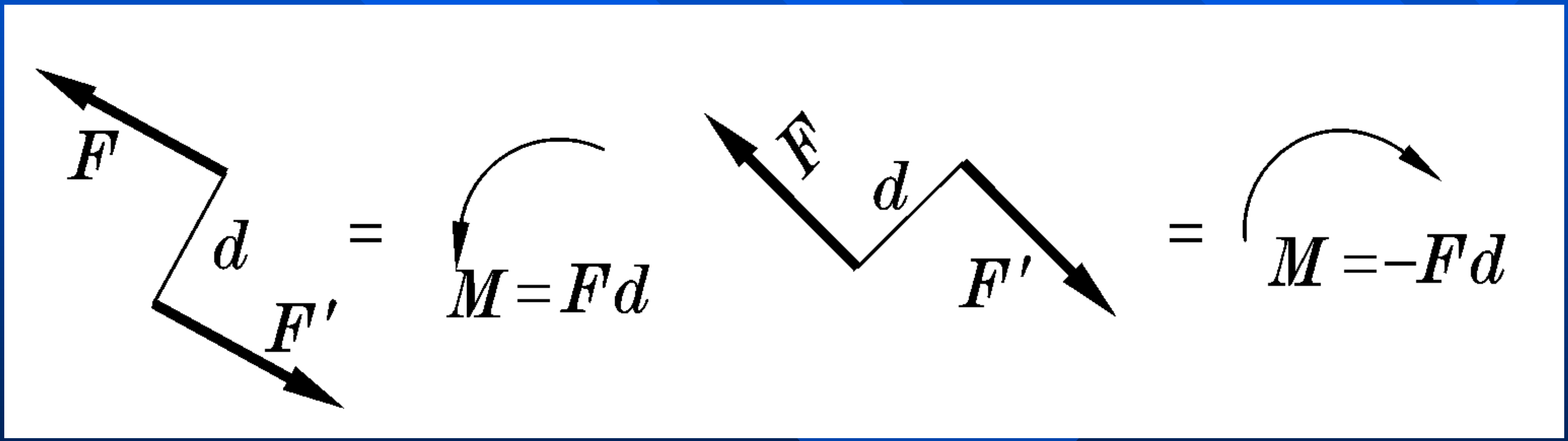




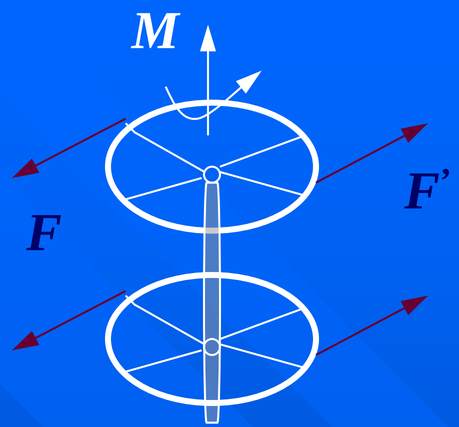
M= ± F· d

（M= + F· d或M= — F· d）

(通常规定：逆时针为正，顺时针为负)



（2）力偶的性质



1）力偶的等效性质：

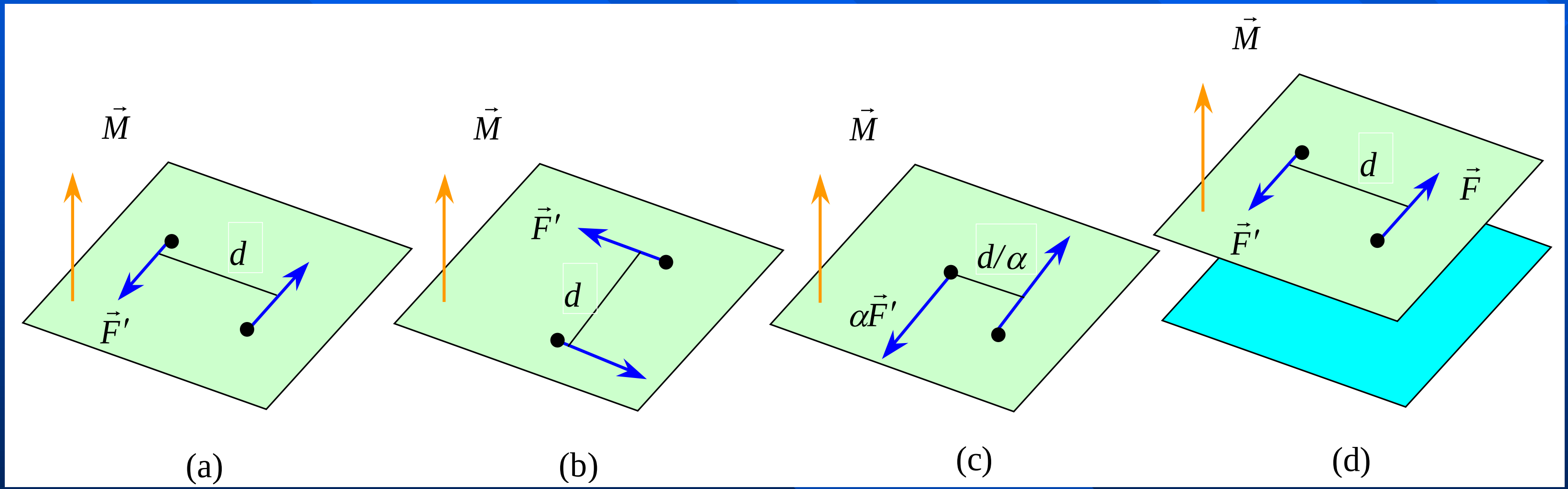
力偶对刚体的作用完全取决于力偶矩矢量。两个力偶，只要其力偶矩矢量相等，则它们对刚体的作用等效。力偶可在其作用平面内移动或从一个平面移到另一个平面中去。因此力偶是一个自由矢量。

2）力偶在力学中是和力并列的基本物理量；

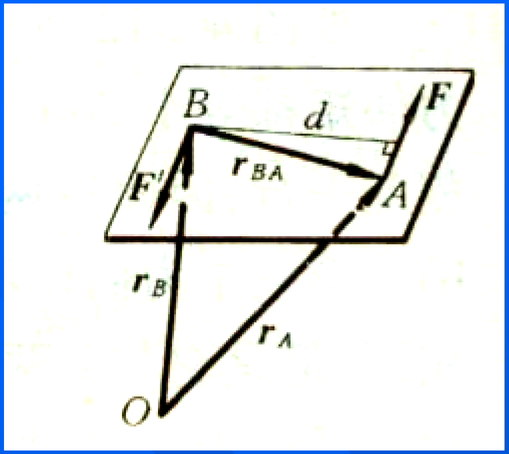
力偶不能和一个力等效，因此力偶不能和一个力平衡，而只能与力偶平衡。力偶中的两个力在任一轴上投影的代数和为零，但力偶不是平衡力系。

3）力偶（力偶中的两力）对空间任意点之矩之和恒等于力偶矩矢量，而与矩心位置无关；（证明如下）

• 力偶的等效性说明：在不改变力偶三要素的前提下，力偶可在其作 用面内任意移动，因此，只要力偶矩大小不变，可改变力与力偶臂大小，而不改变力偶对刚体的效应。



证明如下：

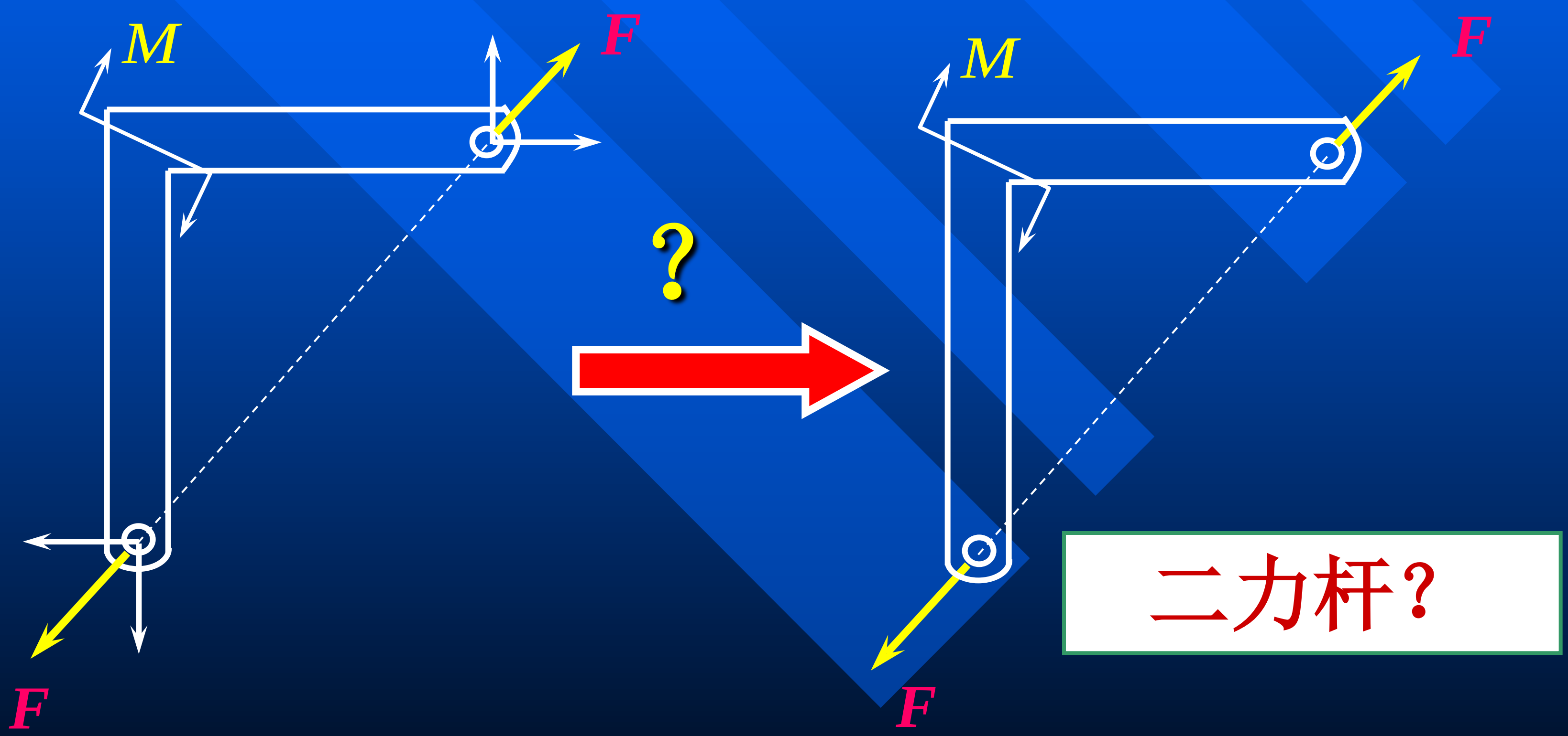


如图所示，组成力偶的两个力F和F'对空间任一点O之矩的矢量和为 $\vec{M}_O(\vec{F},\vec{F}')=\vec{M}_O(\vec{F})+\vec{M}_O(\vec{F}')=\vec{r}_A\times\vec{F}+\vec{r}_B\times\vec{F}'$

式中r_A与r_B分别为由点O到二力作用点A、B的矢径。因F=- F‘，故上式可写为 $\vec{M}_O(\vec{F},\vec{F}')=\vec{r}_A\times\vec{F}+\vec{r}_B\times\vec{F}'=(\vec{r}_A-\vec{r}_B)\times\vec{F}=\vec{r}_{BA}\times\vec{F}$

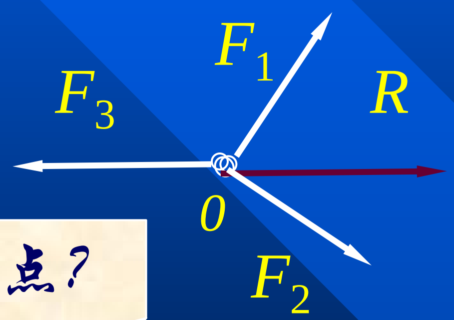
显见， $\vec{r}_{BA}\times\vec{F}$ 的大小等于Fd，方向与力偶（F，F'）的力偶矩矢M一致。由此可见，力偶对空间任一点的矩矢都等于力偶矩矢，与矩心位置无关。

思考：如果平衡的刚体上除了二个力作用外，还作用有力偶矩，是否还是二力体（二力构件、二力杆）？

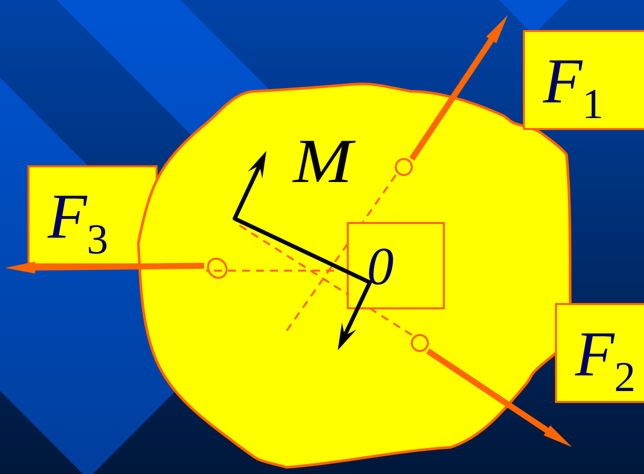


思考：

如果平衡的刚体上除了三个共面力作用外，还作用有力偶矩，三力平衡汇交定理是否成立？

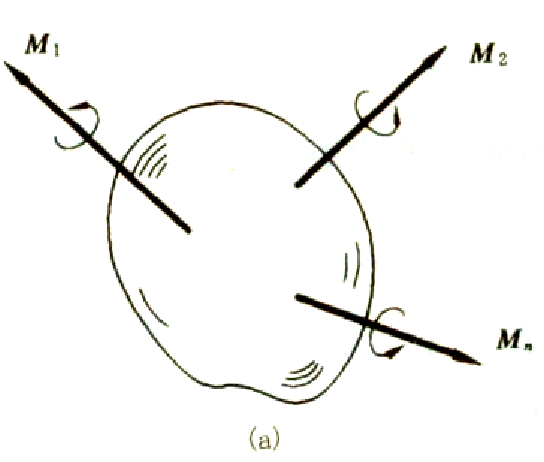


共面且汇交于一点？

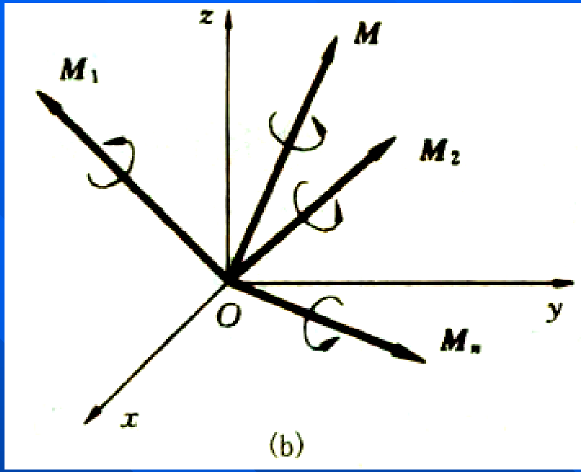


（3）力偶系的简化

力偶系：作用在刚体上的一群力偶。



(a)



(b)

设刚体上作用有由n个力偶组成的任意力偶系，其力偶矩矢分别为M_1,M_2，…，M_n，如图所示。根据力偶矩矢是自由矢量的性质，可将各力偶矩矢平移到O点得到一个汇交于O点的力偶矩矢量系。由汇交矢量系的合成规则可求得力偶系的合力偶矩矢M，如图所示。

$$\vec{M}=\vec{M}_1+\vec{M}_2+\cdots+\vec{M}_n=\sum\vec{M}_i$$

即任意力偶系可合成为一合力偶，且合力偶矩矢等于各分力偶矩矢的矢量和。

$$M=\sqrt{[M]_{\mathrm{x}}^2+[M]_{\mathrm{y}}^2+[M]_{\mathrm{z}}^2}=\sqrt{(\sum[M_i]_{\mathrm{x}})^2+(\sum[M_i]_y)^2+(\sum[M_i]_z)^2}$$

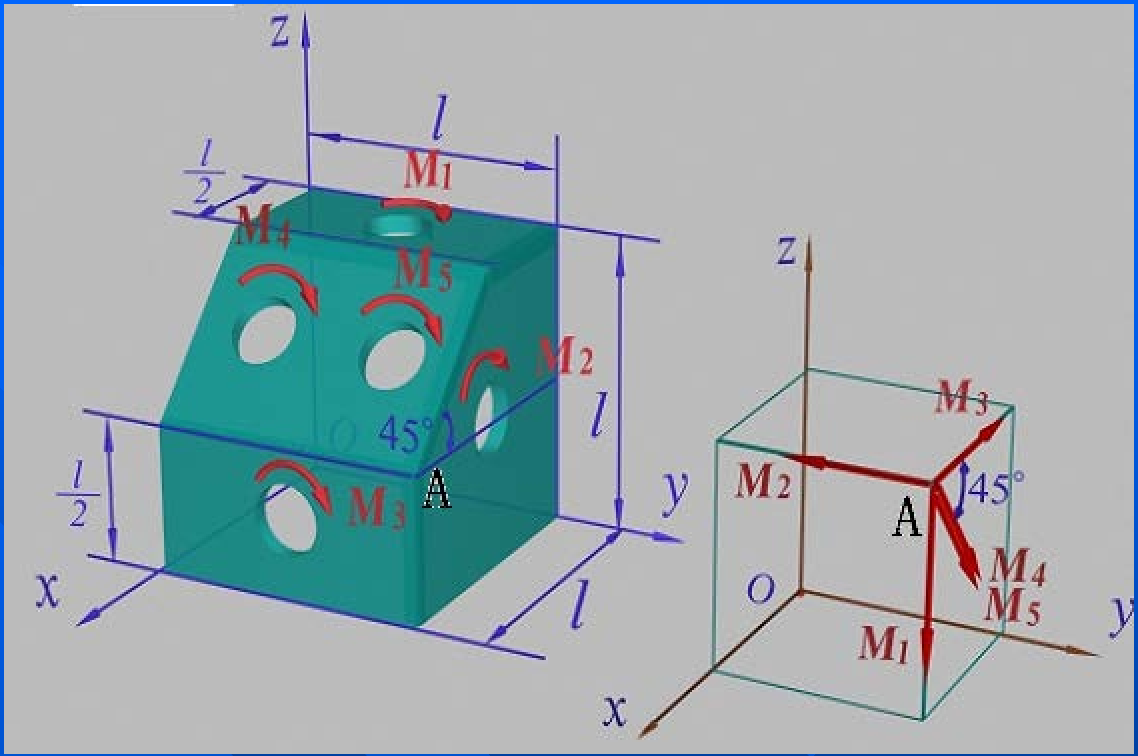
方向余弦

$$\begin{cases}\cos(M, i)=[\mathrm{M}]_x/M\\ \cos(M, j)=[\mathrm{M}]_y/M\\ \cos(M, k)=[\mathrm{M}]_z/M\end{cases}$$

对于平面力偶系，$M=M_1+M_2+\cdots+M_n=\sum M_i$

即平面力偶系合力偶之矩等于各分力偶之矩的代数和。

例3－4：工件如图所示，它的四个面上同时钻五个孔，每个孔所受的切削力偶矩均为80 N·m。求工件所受合力偶矩矢量的大小和方向。



解：　将作用在四个面上的力偶用力偶矩矢量表示，并平移到*A*点。

可得合力偶在三根坐标轴上的投影分别为

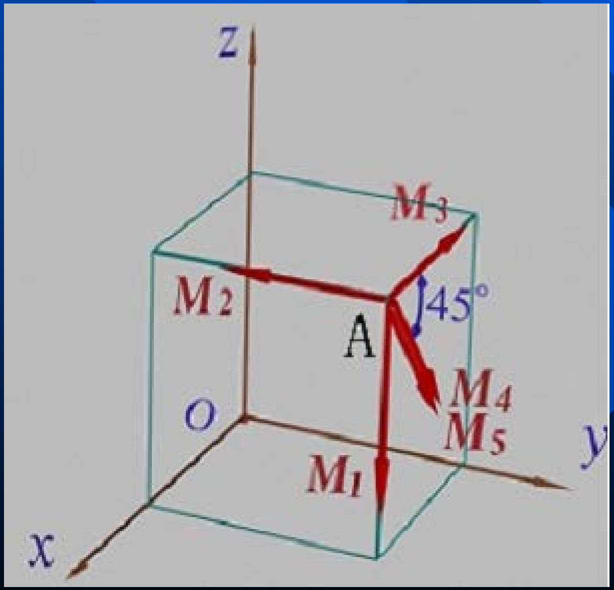
$$M_x = -M_3 - M_4 \cos 45^\circ - M_5 \cos 45^\circ = -193.1 \ \mathrm{N \cdot m}$$

$$M_y = -M_2 = -80 \ \mathrm{N \cdot m}$$

$$M_z = -M_1 - M_4 \cos 45^\circ - M_5 \cos 45^\circ = -193.1 \ \mathrm{N \cdot m}$$

所以，合力偶矩矢量为：

合力偶 $\vec{M} = -193.1\vec{i} - 80\vec{j} - 193.1\vec{k} \ (\mathrm{N \cdot m})$



合力偶矩矢量也可以表示为：

合力偶矩矢的大小

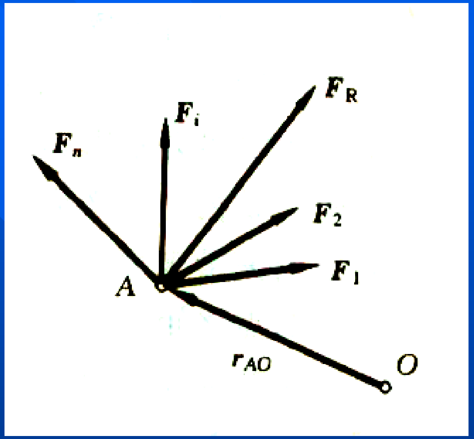
$$M=\sqrt{M_x^2+M_y^2+M_z^2}=284.6\ \mathrm{N\cdot m}$$

合力偶矩矢的方向余弦

$$\cos(\vec{M},\vec{i})=-0.6786$$
$$\cos(\vec{M},\vec{j})=-0.2811$$
$$\cos(\vec{M},\vec{k})=-0.6786$$

三、 合力矩定理

设F_R为空间汇交力系（F_1，F_2，F_3，…，F_n）的合力，该力系中各力分别对空间任一点O取矩，设O到汇交点A的矢径为r_{AO},则有



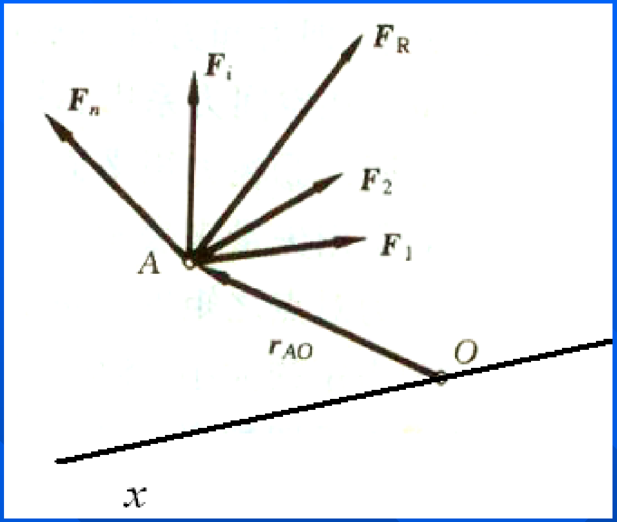
$$\vec{M}_O(\vec{F}_i)=\vec{r}_{AO}\times\vec{F}_i\ (i=1,2,3,\dots,n)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{M}_O(\vec{F}_i)=\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_{AO}\times\vec{F}_i=\vec{r}_{AO}\times\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i=\vec{r}_{AO}\times\vec{F}_R=\vec{M}_O(\vec{F}_R)$$

汇交力系的合力对任一点之矩等于该力系中各分力对该点之矩的矢量和。这称为汇交力系的合力矩定理。

过点O任取一轴x，将上式两边投影于x轴，根据力矩关系定理，可得

$$[\sum_{i=1}^{n}\vec{M}_O(\vec{F}_i)]_x=[\vec{M}_O(\vec{F}_R)]_x$$



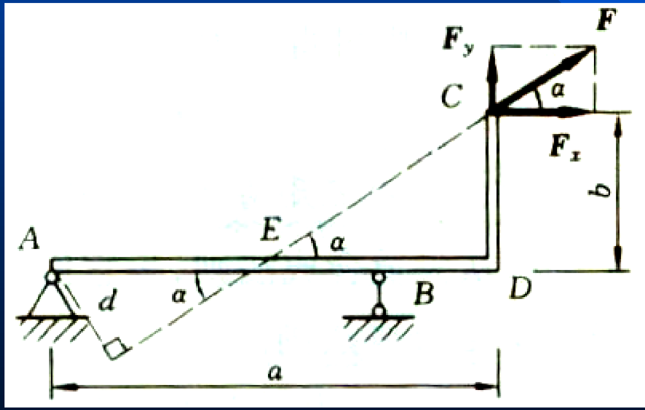
$$\sum_{i=1}^{n}M_x(\vec{F}_i)=M_x(\vec{F}_R)$$

汇交力系的合力对任一根轴的矩等于该力系中各分力对该轴的矩的代数和, 这也称为汇交力系的合力矩定理。

说明：

1. 以上合力矩定理是针对空间汇交力系而言的，对空间任意力系（一般力系），若其能简化为一合力R，则可以证明，该力系合力对空间某点（某轴）之矩等于力系中各力对同点（同轴）之矩的矢量和（代数和），这称为**空间任意力系（一般力系）的合力矩定理**。

2. 在力矩的计算中，当力臂的求解较为复杂时，可将该力分解为两个相互垂直的分力，再用合力矩定理定理来求解。



$$
\begin{aligned}
M_A(F) &= M_A(F_x)+M_A(F_y)\\
&= -F_x\cdot b+F_y\cdot a\\
&= -F\cos\alpha\cdot b+F\sin\alpha\cdot a
\end{aligned}
$$

四、合力矩定理的应用

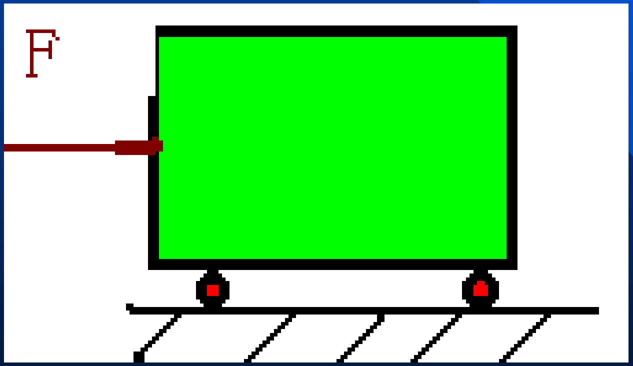
（1） 求线分布荷载的合力

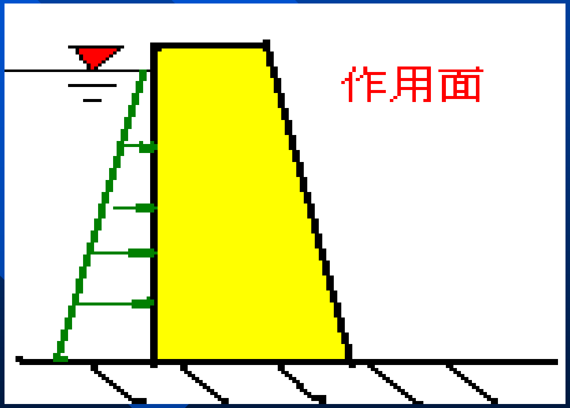
荷载：工程结构所承受的主动力。例如：物体的重力、水压力、风力等等。

荷载可分为：集中荷载（集中力）、分布荷载（分布力）

力的作用位置可抽象成一个几何点——集中荷载

力的作用位置具有一定大小范围——分布荷载





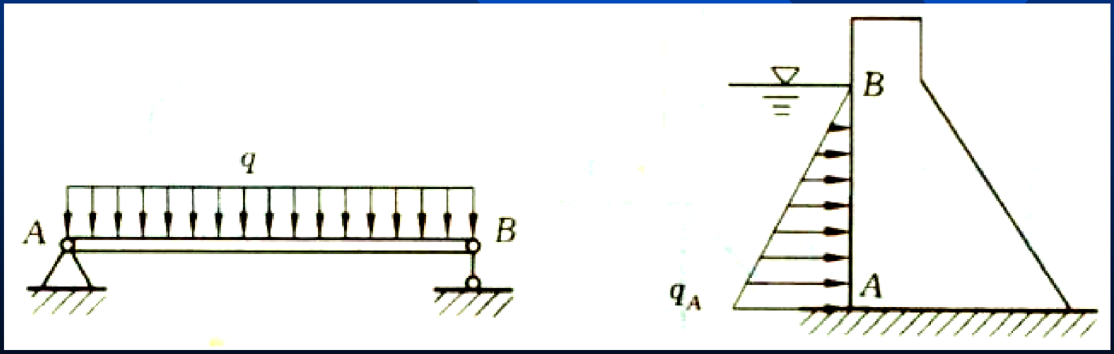
分布荷载的分类：体荷载、面荷载、线荷载

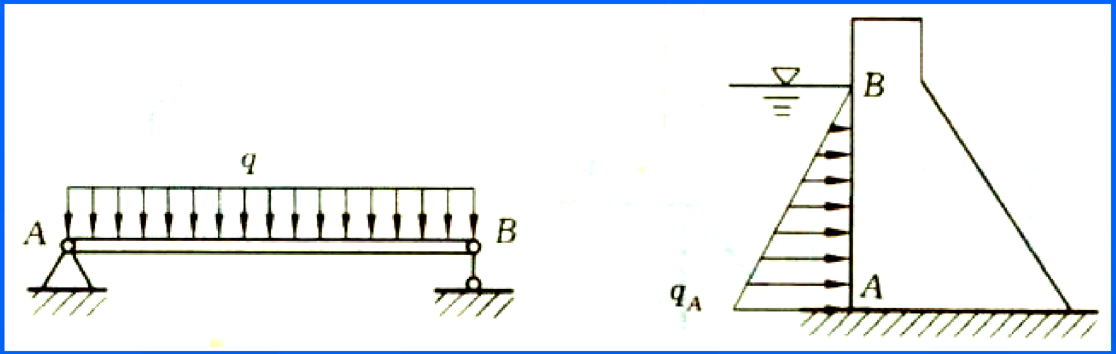
1）当荷载分布于某一体积上时，称为体荷载；（例如重力荷载）

2）当荷载分布于某一面积上时，称为面荷载；（例如楼板承受的荷载）

3）当荷载分布于某一狭长形状的体积或面积上时，则可简化为沿其长度方向中心线分布的线荷载。

平面结构的线荷载常见的是沿某一直线连续分布的同向平行线荷载（平面平行力系）。作用于构件单位长度上的荷载的大小称为线荷载集度，常用符号q表示，单位为N/m或kN/m。





线载荷集度乘以相应的长度单位后才是力（荷载）。

均布荷载：荷载是均匀分布的（q为常数）；

非均布荷载：荷载不是均匀分布的（q不是常数）；

荷载图：表示荷载分布情况的图。

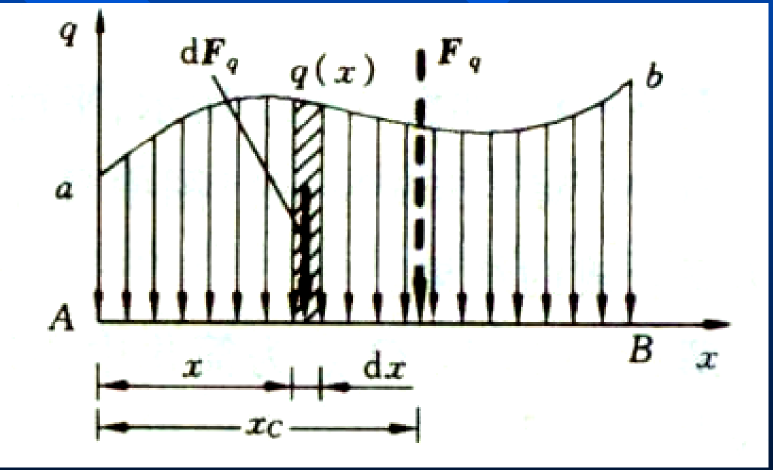
作用在微段dx上分布力系合力的大小为

$$dF_q = q(x)dx$$

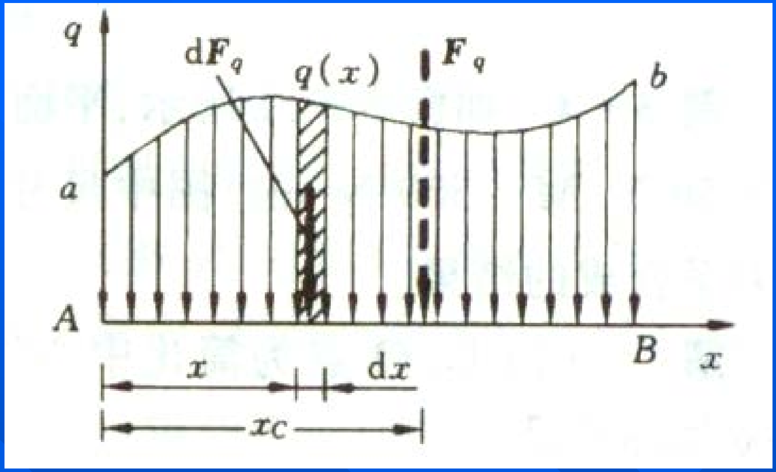
合力大小为

$$F_q = \int_A^B dF_q = \int_A^B q(x)dx$$

＝AB段上荷载图形的面积



该合力的位置可用合力矩定理求解。



$$M_A(\vec{F}_R) = \sum M_A(\vec{F}_i)$$

$$-F_q \cdot x_C = -\int_A^B dF_q \cdot x = -\int_A^B q(x) \cdot x dx$$

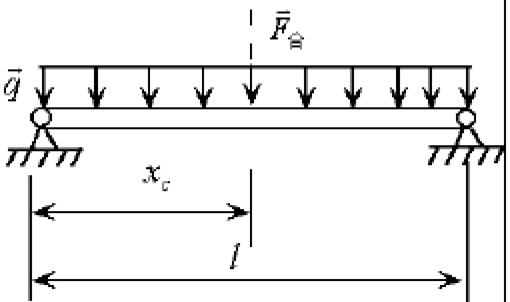
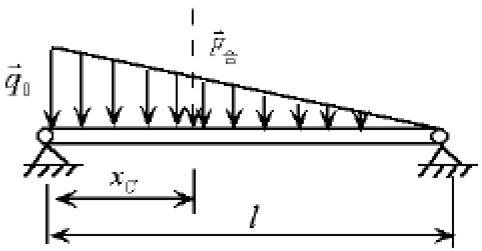
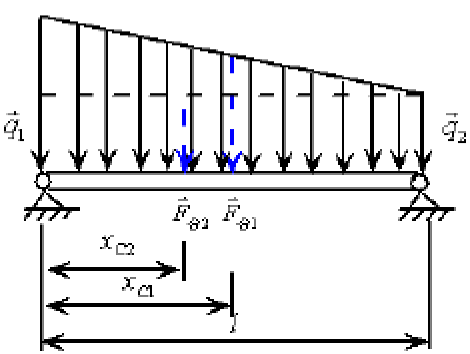
$$x_C = \frac{\int_A^B q(x) \cdot x dx}{F_q} \qquad F_q = \int_A^B dF_q = \int_A^B q(x) dx$$

这就是线段*AB*上荷载图形形心的*x*坐标。

结论： 沿直线垂直于该直线的同向线荷载，其合力的大小等于荷载图的面积，合力方向与原荷载相同，合力作用线通过荷载图的形心。

平行力系的合成结果：是一个合力。

几种常见的线分布载荷：（见下表）

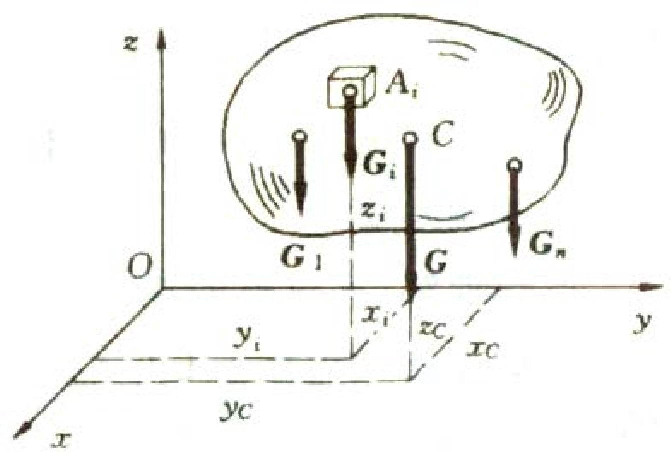
序号	分布载荷的形式	合力的大小	合力的作用线位置	说明
1	 矩形分布（均布）载荷	$F_{合}=ql$	$x_c=\frac{l}{2}$	合力大小等于分布载荷所围成的面积，合力作用线通过由分布载荷所围成的面积的形心
2	 三角形分布载荷	$F_{合}=\frac{1}{2}q_0 l$	$x_c=\frac{l}{3}$	同上
3	 梯形分布载荷	$F_{合1}=q_2 l$ $F_{合2}=\frac{1}{2}(q_1-q_2)l$	$x_{c1}=\frac{l}{2}$ $x_{c2}=\frac{l}{3}$	通常，将梯形分割成一个矩形和一个三角形，分别计算 $F_{合1}$、$F_{合2}$ 的大小和作用线位置。

五、重心、形心与质心

重心与质心、形心都是力学中常常遇到的基本概念。

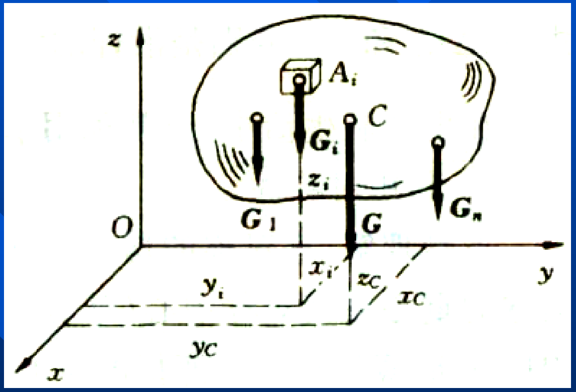
1. 重心

任何物体都可认为是由微小部分组成的。在地面及其附近的物体，它的各微小部分都受到重力作用，基本上可认为组成一个空间平行力系，该平行力系的合力即为物体受到的重力，通过实验我们知道，无论该物体如何放置，其重力总通过一个确定的点，该点就是该物体的重心。



可用合力矩定理求出物体重心位置。

为了确定物体重心的位置，可将它分为许多小块（设为n块），并分别以G_1、G_2、⋯、G_n表示各小块的重量。若建立直角坐标系$Oxyz$（如图所示），则可用(x_1,y_1,z_1)、(x_2,y_2,z_2)、⋯(x_n,y_n,z_n)等分别表示各小块重心的位置。显然，各小块所受重力G_1、G_2、⋯、G_n的合力G即为整个物体所受的重力，而无论怎样放置物体，重力G的作用线均必通过某点C，该点即为物体的重心。根据合力矩定理可知，物体的重力G对x轴之矩等于各小块的重力对x轴之矩的代数和，即



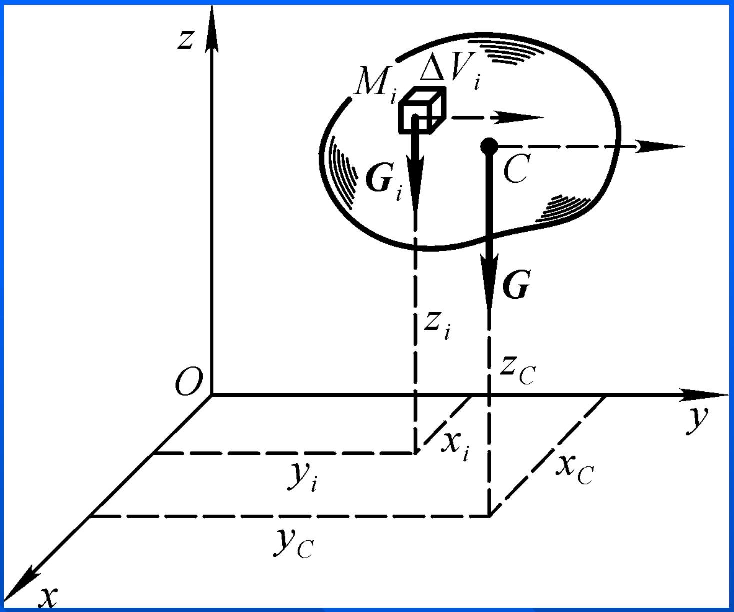
$$-Gy_C=-G_1y_1-G_2y_2-\cdots-G_ny_n=-\sum_{i=1}^{n}G_iy_i$$

$$y_C=\frac{\sum G_iy_i}{G}$$

以y轴为矩轴（对y轴取矩），同理可得：

$$x_C=\frac{\sum G_ix_i}{G}$$

为求重心坐标*Zc*，考虑到重心在物体内的位置是确定的，可将物体连同坐标系*Oxyz*一起绕x轴顺时针旋转九十度，使y轴向下，这样各小块的重力Gi以及总重力*G*都与*y*至平行且同向，这也相当于将各重力及其合力按逆时针方向转九十度，使之与*y*轴平行且同向（如图中虚线所示），这时，再对*x*轴取矩，同理可得：



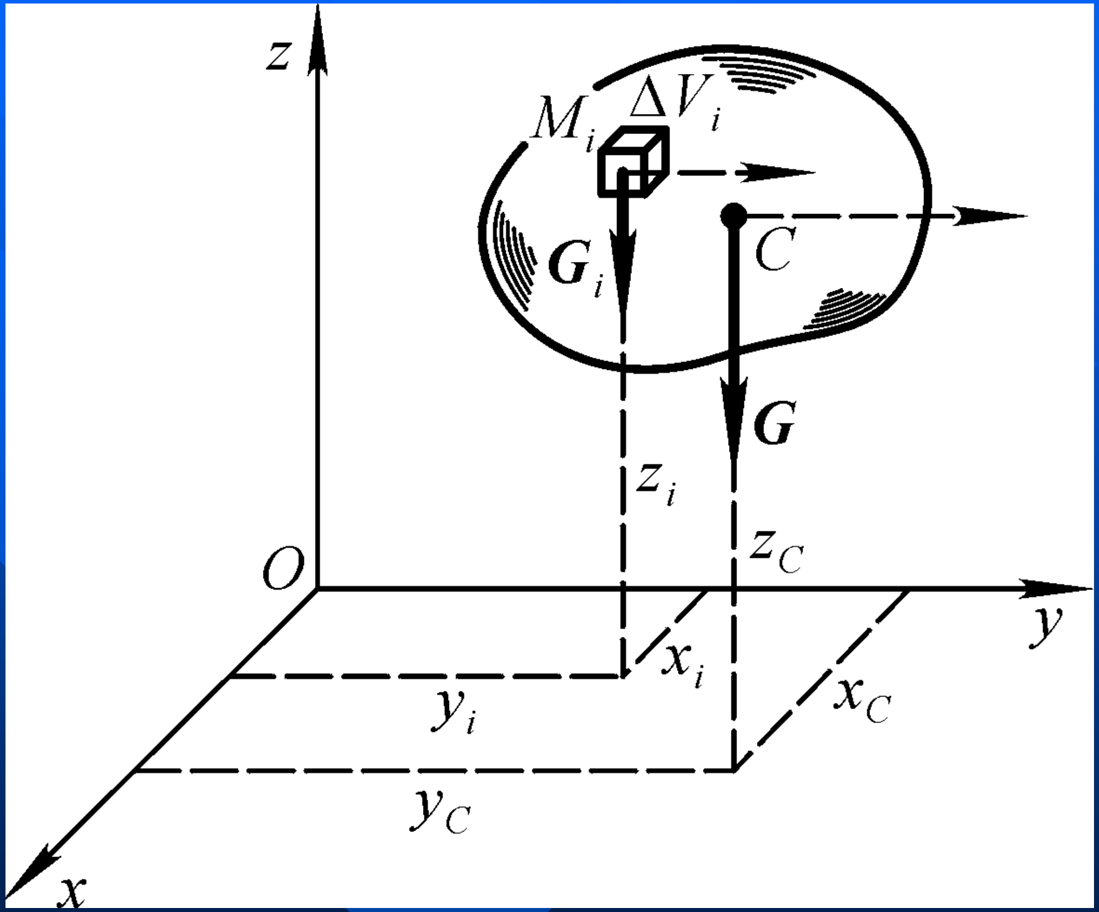
$$z_C = \frac{\sum G_i z_i}{G}$$

故有一般物体的重心的坐标表达式：

$$x_C = \frac{\sum G_i x_i}{G}$$

$$y_C = \frac{\sum G_i y_i}{G}$$

$$z_C = \frac{\sum G_i z_i}{G}$$



物体分割的越多，每一小块的体积越小，重心位置的计算越精确，在极限情况下，可用积分计算。

均质物体的重心公式

均质物体的密度 $\rho=$ 常量，　故有

$$x_C=\frac{\sum x_i \Delta V_i}{V}\qquad y_C=\frac{\sum y_i \Delta V_i}{V}\qquad z_C=\frac{\sum z_i \Delta V_i}{V}$$

对于连续物体其积分形式为

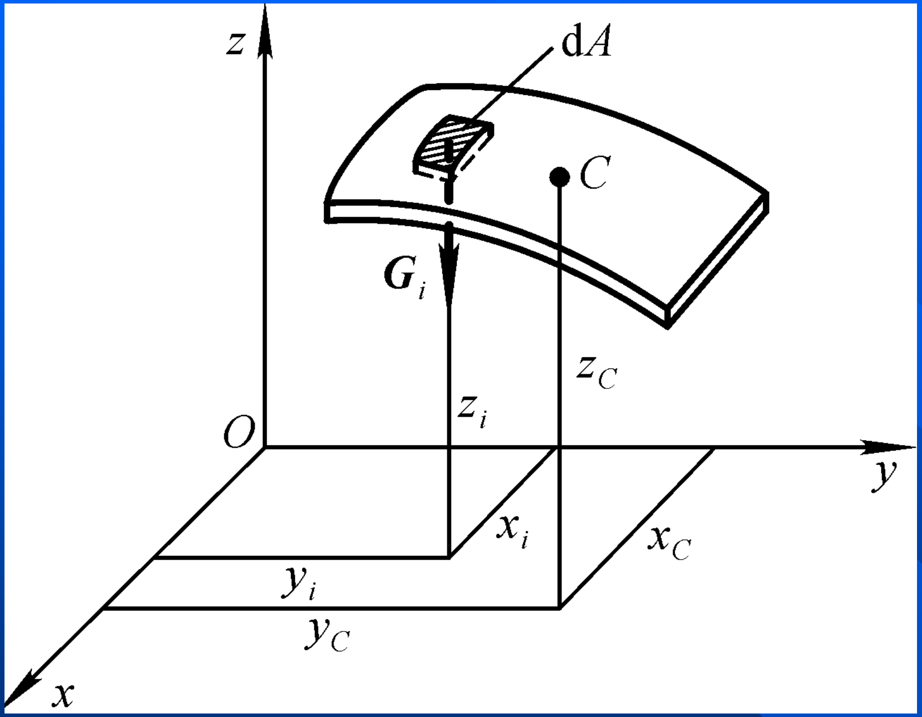
$$x_C=\frac{\int_V x\mathrm{d}V}{V}\qquad y_C=\frac{\int_V y\mathrm{d}V}{V}\qquad z_C=\frac{\int_V z\mathrm{d}V}{V}$$

其中，x,y,z是*微体积dV的重心坐标*，V为均质物体总体积。

事实上，上式就是该均质物体的形心计算公式（形心：由物体的几何形状和尺寸所决定的物体的几何中心）。因此，*均质物体* 的重心和形心是重合的。

若该均质物体是均质的等厚度的薄壳（或曲面），将微面积dA代替上式中的dV，可得

■ 均质等厚薄板或薄壳的重心公式



$$x_C=\frac{\sum x_i\Delta A_i}{A}$$

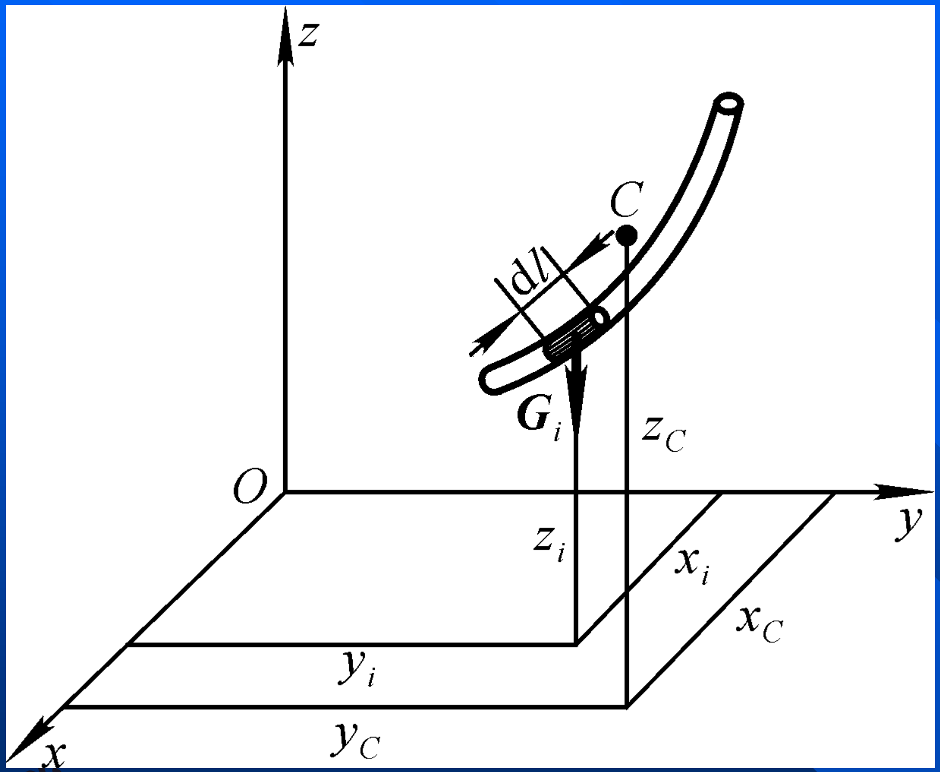
$$y_C=\frac{\sum y_i\Delta A_i}{A}$$

$$z_C=\frac{\sum z_i\Delta A_i}{A}$$

或

$$x_C=\frac{\int_A x\mathrm{d}A}{A}\qquad y_C=\frac{\int_A y\mathrm{d}A}{A}\qquad z_C=\frac{\int_A z\mathrm{d}A}{A}$$

■ 均质等截面细杆（线）的重心公式



$$x_C = \frac{\sum x_i \Delta l_i}{l}$$

$$y_C = \frac{\sum y_i \Delta l_i}{l}$$

$$z_C = \frac{\sum z_i \Delta l_i}{l}$$

或

$$x_C = \frac{\int_l x \mathrm{d}l}{l} \qquad y_C = \frac{\int_l y \mathrm{d}l}{l} \qquad z_C = \frac{\int_l z \mathrm{d}l}{l}$$

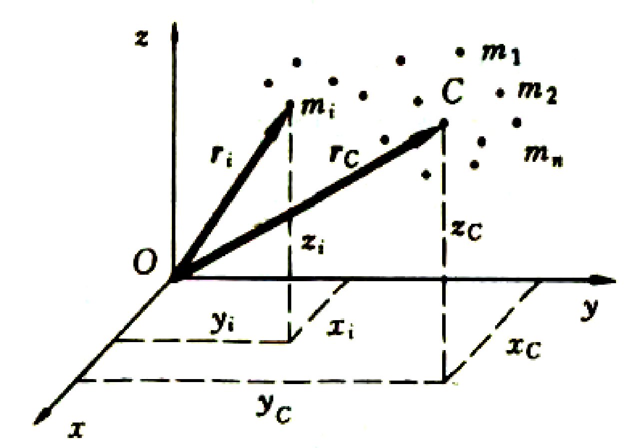
- 重心与形心是两个不同的概念，重心与重力场有关，而形心与重力场无关。对***均质物体***而言，重心与形心重合。
- 对刚体而言，重心的位置是确定的，但重心的坐标值则随不同的坐标系而变化，因此，只有设定坐标系，重心坐标才有意义。

2. 质点系的质心

质点系：有限个或无限个相互联系并组成运动整体的一群质点。

质心：质点系中各质点按其质量在质点系总质量中所占比例分布的平均位置。

设由n个质点所组成的质点系中任一质点的质量为m_i，相对于某一固定点O的矢径为r_i，如图所示。各质点的质量的总和m就是整个质点系的质量，则由矢径r_C所确定的一个几何点C称为该质点系的质量中心，简称质心。



$$\vec{r}_C = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m}$$

将上式投影到直角坐标系的三个轴上，则得质心的坐标为

$$x_C = \frac{\sum m_i x_i}{m} \quad y_C = \frac{\sum m_i y_i}{m} \quad z_C = \frac{\sum m_i z_i}{m}$$

质心：$x_C = \dfrac{\sum m_i x_i}{m}$ $y_C = \dfrac{\sum m_i y_i}{m}$ $z_C = \dfrac{\sum m_i z_i}{m}$

重心：$x_C = \dfrac{\sum G_i x_i}{G}$ $y_C = \dfrac{\sum G_i y_i}{G}$ $z_C = \dfrac{\sum G_i z_i}{G}$

若将式中各式等号右端的分子与分母同乘以重力加速度g，就得到质点系的重心公式。可见，**在地面附近的质点系，其质心与重心重合**。但是质心和重心是不同的概念。质心完全取决于质点系的质量分布情况，而与所受的力无关，它随质点系的存在而存在；重心只在地面附近，质点系受到重力作用时才存在，它是质点系各质点所受重力的合力作用点，失重物体无重心。因此质心概念的适用范围远较重心广泛。

对于地面附近的均质物体，形心、质心、重心合一。

常用的求物体重心的方法：

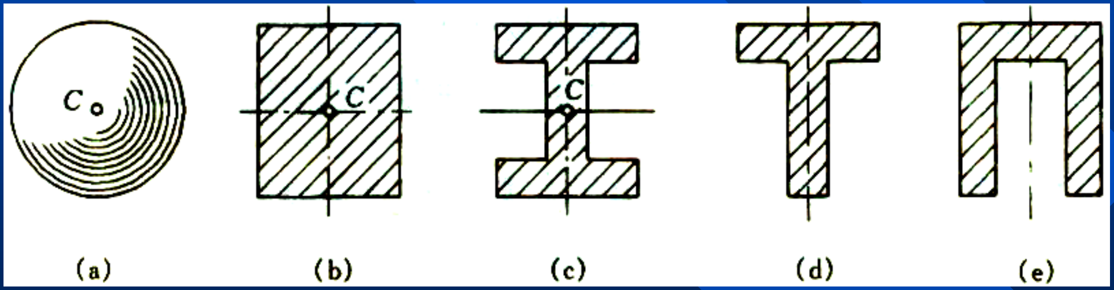
1. 积分法

求不规则形状物体的形心，可将形体分割成无限多个微小形体，利用数学积分的方法求解。

2. 查表法

几种常用的简单形体的中心位置见书上。

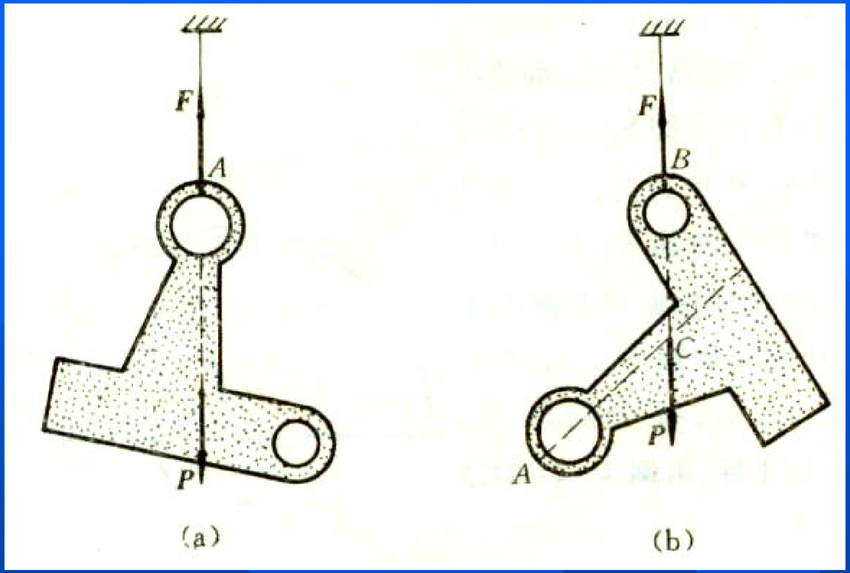
3. 对称法：凡具有对称面、对称轴、对称中心的均质物体，其重心或形心必在对称面、对称轴、对称中心上。



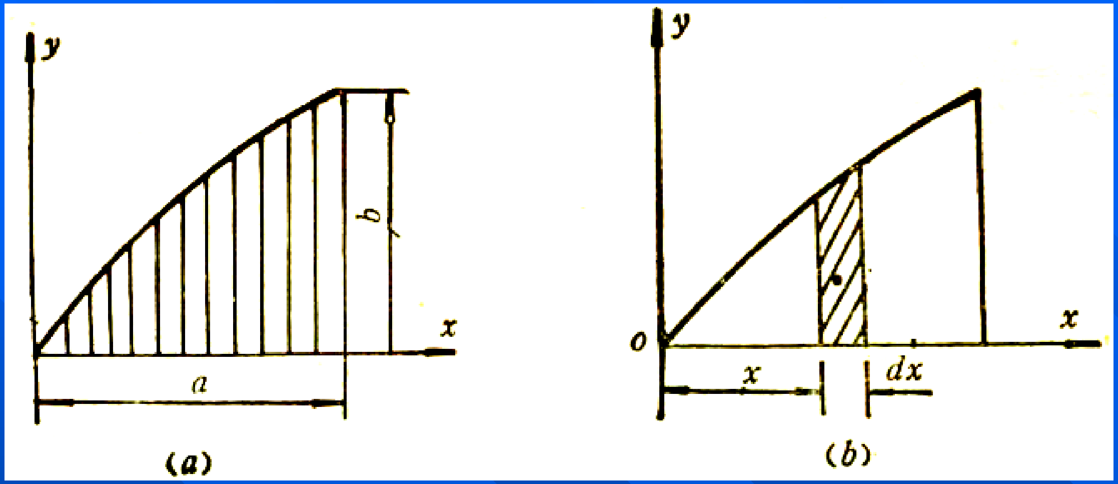
4. 组合法

（1）分割法　（2）负面积（体积）法

5. 悬挂法（实验方法）



例：如图（*a*）所示，抛物线$x=ky^2$的顶点在坐标原点。求抛物线与x轴所围成的面积的重心坐标。



解：根据抛物线方程抛物线$x=ky^2$和图（*a*）所示的边界条件确定常数*k*。当$x=a$时$y=b$，则有

$$a = kb^2 \qquad k = \frac{a}{b^2} \qquad y = \frac{b}{\sqrt{a}} x^{\frac{1}{2}}$$

由（*b*）图所示，取微面积

$$dA = ydx = \frac{b}{\sqrt{a}} x^{\frac{1}{2}} dx$$

$$A=\int dA=\int_0^a ydx=\int_0^a \frac{b}{\sqrt{a}}x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{2}{3}ab$$

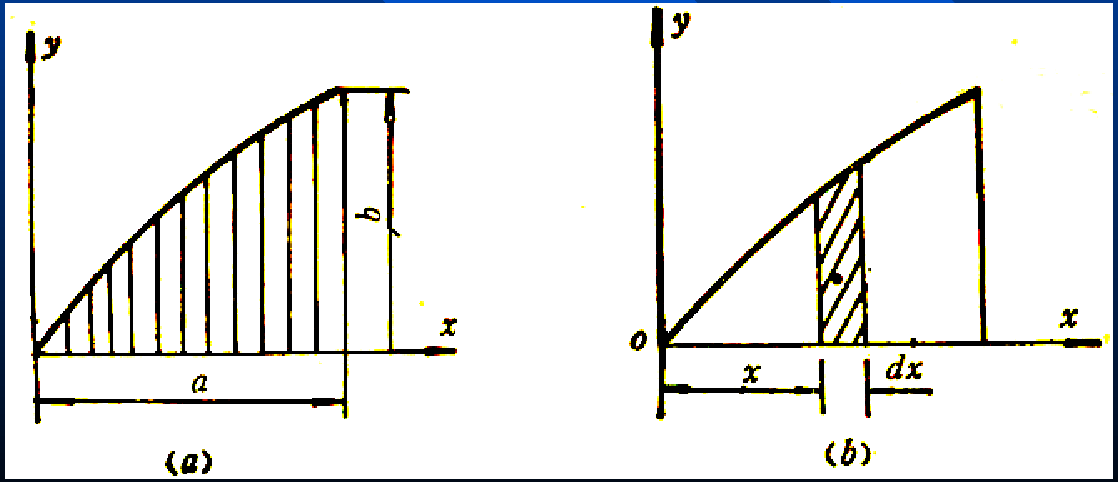
$$x_c=\frac{\int_A xdA}{\int_A dA}=\frac{\int_0^a yxdx}{\frac{2}{3}ab}=\frac{\int_0^a \frac{b}{\sqrt{a}}x\cdot x^{\frac{1}{2}}dx}{\frac{2}{3}ab}=\frac{3}{5}a$$

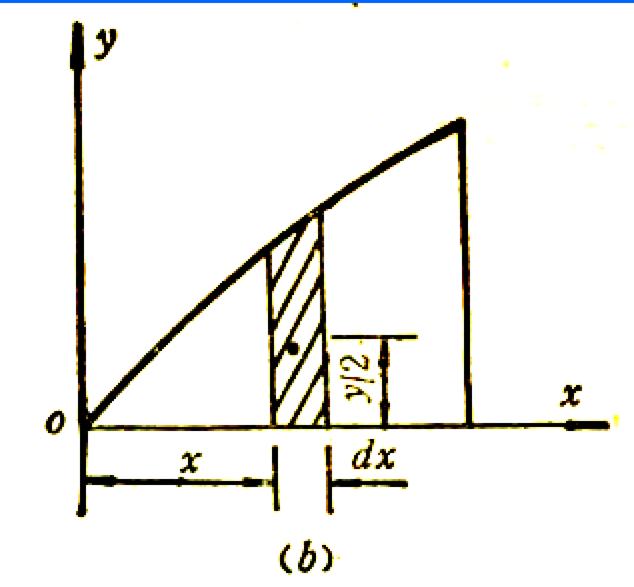
$$y_c=\frac{\int_A ydA}{\int_A dA}=\frac{\int_0^a y\cdot ydx}{\frac{2}{3}ab}=\frac{\int_0^a \frac{b^2}{a}xdx}{\frac{2}{3}ab}=\frac{3}{4}b$$

$$x_C=\frac{\int_A x\mathrm{d}A}{A}$$

$$y_C=\frac{\int_A y\mathrm{d}A}{A}$$

讨论：以上计算是否正确？为什么？





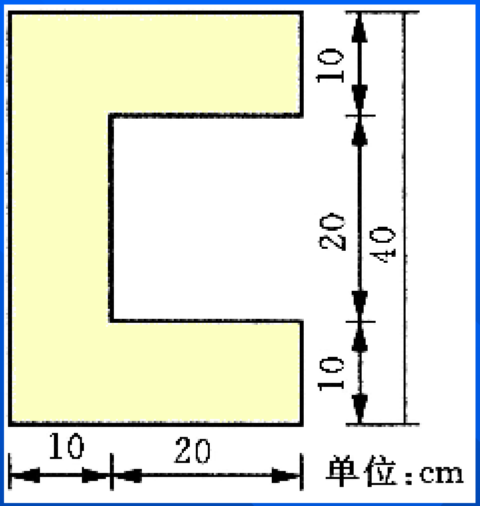
$$y_c = \frac{\int_A y\,dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^a \frac{y}{2}\cdot y\,dx}{\frac{2}{3}ab} = \frac{\int_0^a \frac{b^2}{2a}x\,dx}{\frac{2}{3}ab} = \frac{3}{8}b$$

分割法：

若一些形状复杂的均质物体可看成是几个重心位置已知的简单形体的组合，则可将物体分割成有规律的几个物体，利用重心坐标公式求解该物体的重心，这种方法称为分割法。

$$x_C = \frac{\sum x_i \Delta V_i}{V} \qquad y_C = \frac{\sum y_i \Delta V_i}{V} \qquad z_C = \frac{\sum z_i \Delta V_i}{V}$$

例2：图示槽钢横截面，求此截面重心的位置。



解：（1）分割法

建坐标系如图。

由对称性，$y_c=0$，

再分割成为重心位置已知的3个矩形。

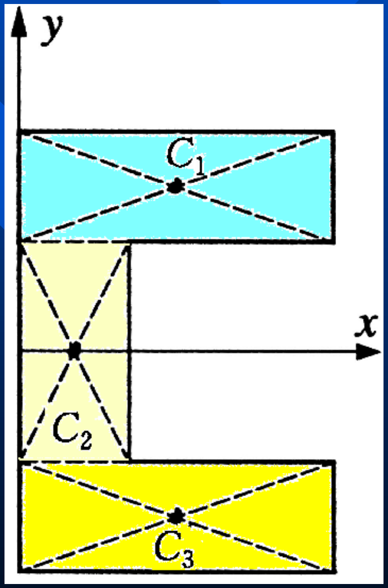
$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i x_i}{A}$$

$A_1=30\cdot10=300\text{cm}^2$，$x_1=15\text{cm}$；

$A_2=20\cdot10=200\text{cm}^2$，$x_2=5\text{cm}$；

$A_3=30\cdot10=300\text{cm}^2$，$x_3=15\text{cm}$；

$$x_C = \frac{A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3}{A_1 + A_2 + A_3} = 12.5\text{cm}$$



若是三维问题，还要求z_c。

负面积法：有些物体的形状可看成是从某一个重心位置已知的形体上挖出了另一个重心位置已知的形体而构成，则只要把挖取部分的面积作为负值代入重心坐标公式同样可求出重心，这种方法称为负面积法。

（2）负面积法

建坐标系如图。

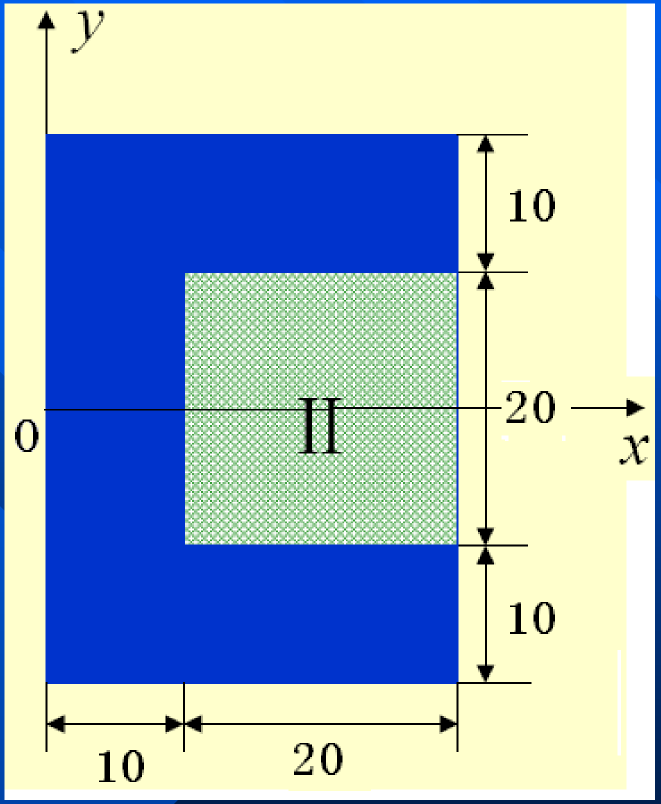
由对称性，$y_c=0$，

$A_1=30\times40=1200cm^2$，$x_1=15cm$

$A_2=-20\times20=-400cm^2$，$x_2=20cm$

$$x_C=\frac{\sum_{i=1}^{n}A_ix_i}{A}$$

$$x_C=\frac{A_1x_1+A_2x_2}{A_1+A_2}=\frac{1200\times15+(-400)\times20}{1200+(-400)}=12.5cm$$

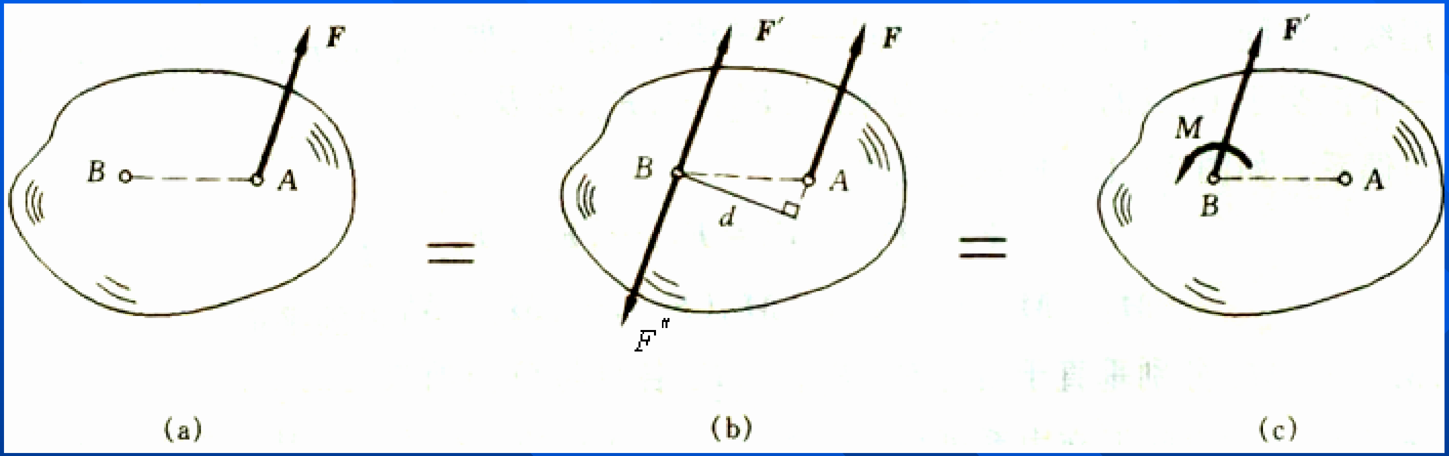


与分割法结果相同。

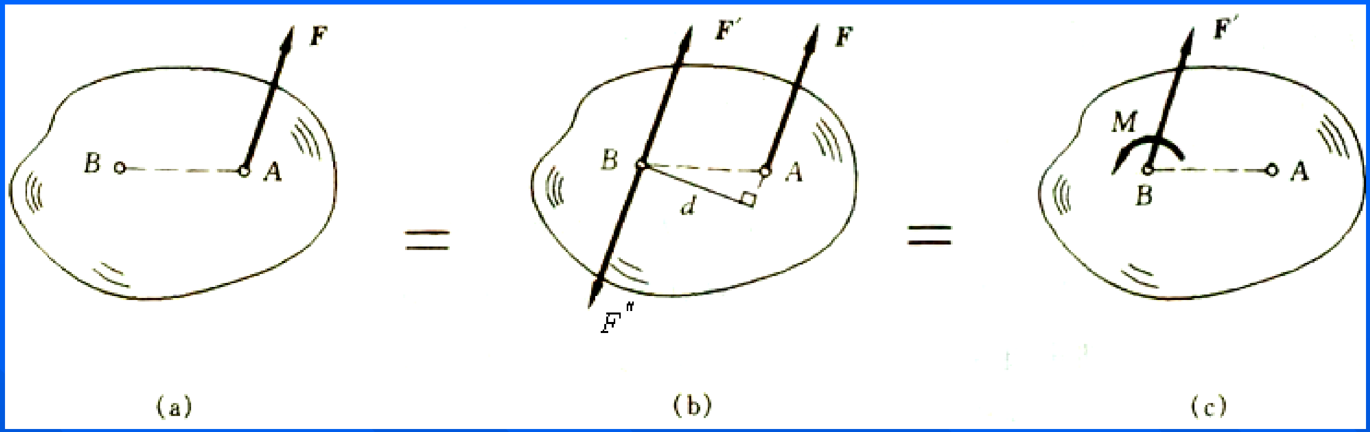
以上例题均为二维问题，对三维问题可同理求解（负体积法）。

四、力线平移定理（力的平移定理）

由力的性质可知：在刚体内，力沿其作用线滑移，其作用效应不改变。如果将力的作用线平行移动到另一位置，其作用效应将发生改变，其原因是力的转动效应与力的位置有直接的关系。



设在刚体上的A点作用着一个力F（图（a）)，现欲将其平移到刚体的任一点B。为此，根据加减平衡力系公理，在B点加上一对平衡力F′和F″，并使其作用线与力F平行、大小与力F的大小相等，即令F′=F″=F，如图（b)所示。



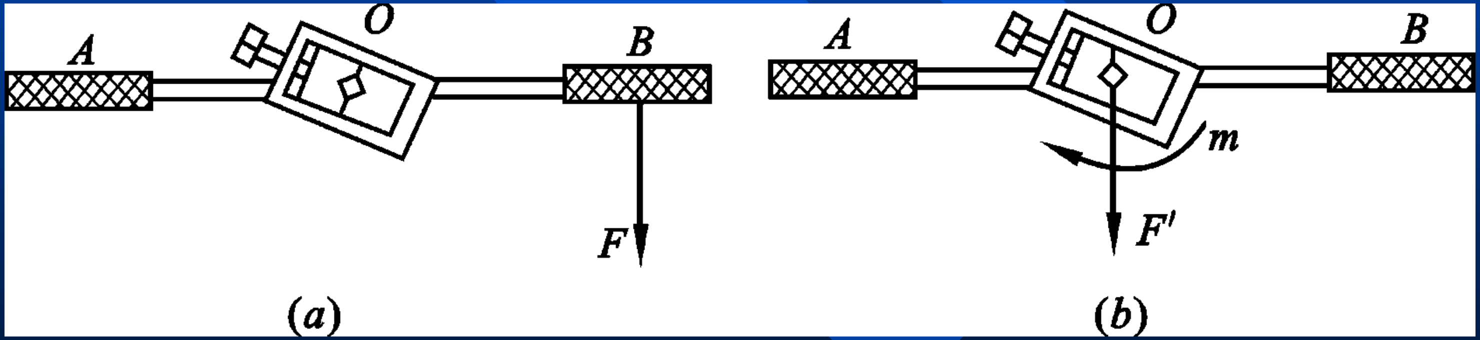
显然力F和F″组成了一个力偶，因此可以认为若要把作用在A点的力F平移到B点而保持对刚体的作用效应不变，就必须附加一个力偶（F，F″)，由图 (c)可见，力偶（F,F″）的力偶矩等于原力F对O点之矩，即

$$M=Fd=m_B\,(F)$$

作用于刚体上某点的力，可以平移到同一刚体上的任一点，但必须同时附加一力偶，其力偶矩等于该力对平移点之矩。这称为力的平移定理。显然这仅对刚体成立。

为什么不允许用一只手扳动扳手呢?

因为作用在扳手AB上一端的力F与作用在O点的一个力F′和一个力偶矩为m的力偶等效。这个力偶使丝锥转动，而这个力F′却将引起丝锥弯曲，这就很容易将螺纹攻坏；如果用力过大，丝锥就可能折断。因此，这样操作是不允许的。



一个力平移的结果可得到同平面的一个力和一个力偶.反之同平面的一个力F和一个力偶矩为M 的力偶也一定能合成为一个大小和方向与力F相同的力F'其作用点到力作用线的距离为：

哪一侧：由$M_0(F)$与M转向相同定.

$$d = \frac{|M|}{F}$$