# 同济大学课程考核试卷（重修卷）
# 2008—2009 学年第一学期

命题教师签名： 审核教师签名：

课号：122010 课名：线性代数 B（重修） 考试考查：考试

此卷选为：期中考试( )、期终考试( )、重修( √ )试卷

年级_____专业__________学号_________姓名__________任课教师________

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | | | | |

（注意：本试卷共七大题，三大张，满分 100 分．考试时间为 120 分钟．要求写出解题过程，否则不予计分）

一、填空与选择（每题 3 分，共 30 分，选择题的选项中只有一个是符合题意的）

1、 已知行列式$\det(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=-2$，则行列式

$\det(3\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1-\alpha_2,\alpha_3+\alpha_1)=$_________.

2、 以$A_{ij}$记行列式第 i 行第 j 列元素的代数余子式，则对

$$D=\begin{vmatrix}1&1&0&0\\0&2&2&0\\0&0&3&3\\4&0&0&4\end{vmatrix},$$

$A_{34}-2A_{33}=$__________.

3、 $\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}^5=$__________.

4、 已知 3 阶方阵 A 的特征值为 1、4、-2，则行列式$\det(A^*+3A^{-1})=$_____________.

5、 设三维向量$\alpha_1=(1,3,1)^T,\alpha_2=(-1,2,2)^T$，$\|\alpha_3\|=2$，$\alpha_3$与$\alpha_1,\alpha_2$都正交，且$\alpha_3$的第一个坐标分量非负，则$\alpha_3=$______________.

6、 实对称矩阵$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & k \end{pmatrix}$正定，则 k 的取值范围为________________.

7、 设四维非零向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$两两正交，则以下结论错误的是____________

A) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关.　　B) $\det(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4) \neq 0$.

C) 矩阵$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$必为正交矩阵.　　D) $\alpha_1+2\alpha_2$与$\alpha_3-\alpha_4$必定正交.

8、 以下关于矩阵特征值的结论叙述错误的是______________

A) 实对称矩阵的特征值均为实数.　　B) 相似的矩阵拥有相同的特征值.

C) 特征值互不相同的矩阵必可对角化.　　D) 可对角化的矩阵特征值必定互不相同.

9、 设 A 为 4 阶方阵，且 R(A)=3，则下列结论叙述错误的是_____________

A) $A^* \neq 0$.　　B) $R(A^*)=1$.

C) 0 是$A$的特征值.　　D) A 的任意三阶子式均非零.

10、已知 X 为四维列向量，矩阵 A 的秩为 2，且非齐次线性方程组 AX=b 有解，S 为该方程的解集，则以下结论错误的是______________.

A) R(A　b)=2　　B) S 作为向量组，其秩为 3.

C) S 关于矩阵的加法和数乘构成 2 维线性空间.　　D) AX=b 与 AX=0 无公共解.

二、（10 分）求解关于 X 的矩阵方程 $AXB-AB=2XB$，其中

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

三、(12 分) 关于 x, y, z 的方程组 $\begin{cases} \mu x+y+z=1 \\ x+\mu y+z=\mu \\ x+y+\mu z=\mu^2 \end{cases}$ 何时有解？当解不唯一时，求出所有的解.

四、(12 分) 求列向量组

$\alpha_1=(1,2,1,4)^T,\alpha_2=(2,0,4,1)^T,\alpha_3=(5,2,9,6)^T,\alpha_4=(0,1,0,1)^T,\alpha_5=(-1,4,-3,5)^T$

的一个最大线性无关组，并用其线性表示其他向量.

五、（15 分）求一个正交矩阵 P，使得在坐标变换$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$下，二次型

$f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$变为标准形，并求出该标准形.

六、（15 分）记$\mathbf{R}^{2\times 2}$为一切二阶方阵全体关于矩阵加法与数乘构成的线性空间，其上的映射

$\mathbf{T}:\mathbf{R}^{2\times 2}\rightarrow \mathbf{R}^{2\times 2}$定义为$\mathbf{T}(\mathbf{A})=\frac{1}{2}(\mathbf{A}+\mathbf{A}^{\mathrm{T}})$

(1) 证明 T 是$\mathbf{R}^{2\times 2}$上的线性变换.

(2) 写出变换 T 在基$\mathbf{M}_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\mathbf{M}_2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\mathbf{M}_3=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\mathbf{M}_4=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$下的矩阵.

(3) 求 T 的像空间 Im T 的维数.

(4) 证明像空间 Im T 为全体二阶对称矩阵.

七、（6分）P为正交矩阵，求证P的实特征值只可能为$\pm 1$.