2013-2014 学年第一学期期末考试 A 卷

一、 填空题与选择题(27 分)

1、已知 4 阶方阵 $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 2 & 3 \\ 4 & b & 5 & 6 \\ 7 & 8 & c & 9 \\ 0 & 5 & 4 & d \end{pmatrix}$，函数 $f(x)=|xE-A|$，E 为 4 阶单位阵，则函数 $f(x)$ 中 x^3 项的系数为____________.

2、设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$ 均为 4 维列向量，已知 4 阶行列式 $|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1|=m$，又 $|\alpha_1,\alpha_2,\beta_2,\alpha_3|=n$，则 4 阶行列式 $|\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\beta_1+\beta_2|=$____________.

3、已知 3 阶方阵 A 满足 $|A+3E|=|A-2E|=|A-E|=0$，其伴随矩阵为 A^*，则行列式 $|A^*|=$____________.

4、α 是 3 维实列向量，且 $\alpha\alpha^T=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，则 $\|\alpha\|=$____________.

5、设 α 是 R^3 空间中的某一向量，它在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的坐标为 $(x_1,x_2,x_3)^T$，则 α 在基 $\varepsilon_1+k\varepsilon_3,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的坐标是____________.

6、下列关于矩阵乘法的结论中错误的是____________.

（A）若矩阵 A 可逆，则 A 与 A^{-1} 可交换

（B）可逆阵必与初等矩阵可交换

（C）任一个 n 阶方阵均与 cE_n 可交换，这里 c 为任意常数

（D）初等矩阵与初等矩阵乘法未必可交换

7、设 A、B 均为 n 阶方阵，且 $(AB)^2=E$，则下列式子中成立的是____________.

$(A).AB=E$　　　　$(B).AB=-E$

$(C).A^2B^2=E$　　　　$(D).(BA)^2=E$ ( )

8、设 $Ax=b$ 为 n 元非齐次线性方程组，则下面说法中正确的是________

(A).若 $Ax=0$ 只有零解，则 $Ax=b$ 有唯一解

(B).若 $Ax=0$ 有无穷多个解，则 $Ax=b$ 有无穷多个解

(C).若 $Ax=b$ 有两个不同的解，则 $Ax=0$ 有无穷多个解

(D).$Ax=b$ 有唯一解 $\Longleftrightarrow R(A)=n$

二、(10 分)已知 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$，求第一行各元素的代数余子式之和.

三、(10 分) 参数 a,b 满足什么条件的时侯，线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1 \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=a \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=b \end{cases}$ 有解？

并在有解的情况下，求出它的通解.

四、（15分）已知3阶方阵$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & -2\\ -k & -1 & k\\ 4 & 2 & -3\end{pmatrix}$，问参数$k$满足什么条件的时候$A$可以对角化？并求出可逆阵$P$及对角阵$\Lambda$，使得$P^{-1}AP=\Lambda$.

五、（12分）设向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\k\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\k\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-k\\1\\-1\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\4\\5\end{pmatrix}$，问：参数$k$为何值时，$\alpha_1,\alpha_2$为向量组的一个最大线性无关组？并在此时，求出$\alpha_3,\alpha_4$由最大线性无关组表出的线性表达式.

六、（12 分）设 V 为实数域 R 上全体 2 阶方阵关于矩阵的加法和数乘运算所成的线性空间，在 V 中定义映射 $T: T(X)=X\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，

(1)证明 T 是 V 中的线性变换；

(2)求线性变换 T 在自然基 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 下的矩阵；

(3)若 $a=1,b=2,c=3,d=4$，试求线性变换 T 的核 $\ker T$ 与像空间 $\operatorname{Im} T$.

七、(14 分)(1)(7 分)已知 A 为 3 阶方阵，$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 为 A 的三个不同的特征值，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 分别为相应的特征向量，又 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，试证：$\beta,A\beta,A^2\beta$ 线性无关.

(2)(7 分)设 A 为 3 阶实对称阵，且 $A^2+2A=0$，又 $R(A)=2$，试求出 A 的全体特征值，并问参数 k 为何值时，矩阵 $A+kE$ 为正定阵?

2013-2014 学年第一学期期末考试 A 卷参考答案

一、填空与选择题(均为单选题)(27 分)

1.【正解】-1

【学解】$f(x)=\begin{vmatrix} x-a & -1 & -2 & -3 \\ -4 & x-b & -5 & -6 \\ -7 & -8 & x-c & -9 \\ 0 & -5 & -4 & x-d \end{vmatrix}$,因此包含$x^3$的项为$-(x-a)(x-b)(x-c)$,

故系数为-1

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 1】行列式的定义。

2.【正解】$n-m$

【学解】$|\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\beta_1+\beta_2|=|\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\beta_1|+|\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\beta_2|=-|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1|+|\alpha_1,\alpha_2,\beta_2,\alpha_3|=n-m$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 1】行列式的性质。

3.【正解】36

【学解】有题可得A有特征根$-3,2,1$,从而$|A|=-6,|A^*|=|A|^2=36$

【考点延伸】伴随矩阵,特征多项式。

4.【正解】$\sqrt{3}$

【学解】$\alpha=(a,b,c)^T,\alpha\alpha^T=\begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ba & b^2 & bc \\ ca & cb & c^2 \end{pmatrix}\Rightarrow a^2=b^2=c^2=1$,故$\|\alpha\|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{3}$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 4】矩阵的乘积运算,《考试宝典》【知识点 10】向量的模。

5.【正解】$(x_1,x_2,x_3-kx_1)^T$

【学解】$(\varepsilon_1+k\varepsilon_3,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}$,故$\alpha$在$\varepsilon_1+k\varepsilon_3,\varepsilon_2,\varepsilon_3$下的坐标为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -k & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=(x_1,x_2,x_3-kx_1)$$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点15】基本线性变换，过渡矩阵。

6.【正解】B

【学解】A可逆，则$AA^{-1}=A^{-1}A=E$；可逆矩阵与初等矩阵未必可交换，

例如$A=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix},P=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,则$AP=\begin{pmatrix}0&1&0\\2&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}\neq PA=\begin{pmatrix}0&2&0\\1&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}$故不可交换。

【考点延伸】《考试宝典》【知识点4】矩阵的乘积运算，初等矩阵。

7.【正解】D

【学解】$(AB)^2=ABAB=E\Rightarrow A,B$可逆,故$BAB=A^{-1},BABA=E=(BA)^2$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点5】矩阵的逆，《考试宝典》【知识点4】矩阵的乘积运算。

8.【正解】C

【学解】$Ax=b$有两个不同解时,说明$|A|=0$,因此$Ax=0$有无穷多个解。

【考点延伸】《考试宝典》【知识点16】线性方程组的解的结构。

9.【正解】C

【学解】$\begin{pmatrix}a&c&e\\1&0&0\\b&d&f\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\a&c&e\\b&d&f\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,$R=3$,故线性无关。

【考点延伸】《考试宝典》【知识点11】向量组的线性相关与线性无关。

二.【学解】所求和为

$$D_n'=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&2&0&\cdots&0\\1&0&3&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&0&0&\cdots&n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{n}&1&1&\cdots&1\\0&2&0&\cdots&0\\0&0&3&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&n\end{vmatrix}=n!\left(1-\frac{1}{2}-\cdots-\frac{1}{n}\right)$$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点2】行列式展开。

三.【学解】$\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\3&2&1&1&-3&a\\0&1&2&2&6&3\\5&4&3&3&-1&b\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&-5&a-2\\0&1&2&2&6&3-a\\0&0&0&0&0&a\\0&0&0&0&0&b-a-2\end{pmatrix}$

$a=0,b=2$ 时线性方程组有解

此时，得到通解 $x=c_1\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}5\\-6\\0\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\3\\0\\0\\0\end{pmatrix}$，其中 c_i 均为任意常数

【考点延伸】《考试宝典》【题型 1】线性方程组的解。

四.【学解】$|A-\lambda E|=(1-\lambda)(1+\lambda)^2$，得三个特征值为 $1,-1,-1$ $\lambda=-1$ 时，

$(A-\lambda E)x=0$ 应有 2 个线性无关的解.

$(A-\lambda E)\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}2&1&-1\\0&k&k\\0&0&0\end{pmatrix}$，故 $k=0$ 时 A 可以对角化.

$\lambda=-1$ 时，解 $(A+E)x=0$ 得 $\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$

$\lambda=1$ 时，解 $(A-E)x=0$ 得 $\xi_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，故 $P=\begin{pmatrix}-1&1&1\\2&0&0\\0&2&1\end{pmatrix}$，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&&\\&-1&\\&&1\end{pmatrix}$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 20】矩阵的相似对角化。

五.【学解】$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\rightarrow\begin{pmatrix}1&-1&-k&1\\0&k+1&k+1&3\\0&k+1&k^2-1&5-k\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&-1&-k&1\\0&k+1&k+1&3\\0&0&(k-2)(k+1)&2-k\end{pmatrix}$

(1) $k\neq1,k\neq2$ 时 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为向量组的一个最大线性无关组

(2) $k=2$ 时 α_1,α_2 为向量组的一个最大线性无关组，$\alpha_3=-\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_4=2\alpha_1+\alpha_2$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 12】最大线性无关组。

六.【学解】(1)$T(X+Y)=(X+Y)\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=X\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}+Y\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=T(X)+T(Y)$

$T(kX)=kX\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=kT(X)$

(2) $T(E_{11})=E_{11}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\0&0\end{pmatrix}=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})\begin{pmatrix}a\\b\\0\\0\end{pmatrix}$

$$T(E_{12})=E_{12}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c&d\\0&0\end{pmatrix}=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})\begin{pmatrix}c\\d\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$T(E_{22})=E_{22}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\c&d\end{pmatrix}=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})\begin{pmatrix}0\\0\\c\\d\end{pmatrix}$$

$$T(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})\begin{pmatrix}a&c&0&0\\b&d&0&0\\0&0&a&c\\0&0&b&d\end{pmatrix}$$

(3) $\ker T=\left\{X\mid X\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=0\right\}=O$， $\operatorname{Im}T=\left\{Y\mid X\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=Y\right\}=V$

【考点延伸】线性变换的核与像空间。

七.【学解】(1). $A\beta=A(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3$， $A^2\beta=A^2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=\lambda_1^2\alpha_1+\lambda_2^2\alpha_2+\lambda_3^2\alpha_3$

$$\Rightarrow(\beta,A\beta,A^2\beta)=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3,\lambda_1^2\alpha_1+\lambda_2^2\alpha_2+\lambda_3^2\alpha_3)$$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&\lambda_1&\lambda_1^2\\1&\lambda_2&\lambda_2^2\\1&\lambda_3&\lambda_3^2\end{pmatrix}=CK$$

又$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，且$K$可逆，故$\beta,A\beta,A^2\beta$线性无关.

(2) $A^2+2A=0\Rightarrow\lambda^2+2\lambda=0$，则$A$的特征值只能是0或-2，又由$A$对称知$A$可以对角化，而$R(A)$=2，故$A$的特征值是0，-2，-2. 则$A+kE$的特征值只能是$k,k-2$，故$k>2$时$A$正定.

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 12】向量组的线性无关性，《考试宝典》【知识点 24】正定矩阵。