重积分 1

积分本质上是某种形式的求和. 在一元函数积分学中，我们用定积分解决曲边梯形的面积、直杆的质量、旋转体的体积等问题. 本章和下一章，通过学习多元函数积分理论，我们将能处理更复杂对象的面积、体积、质量等问题. 此处所谓的“更复杂”有两个含义：一是对象从 1 维变为 2 维以及 3 维，为此我们引入二重积分和三重积分的概念；二是对象从平直变成弯曲，也就是说从直线上的积分变为曲线和曲面上的积分. 本章重点介绍二重和三重积分，下一章会介绍曲线和曲面积分.

1.1 二重积分的概念

矩形上的积分

本节所说矩形是指两个闭区间的直积. 设 $Q = I \times J = [a,b] \times [c,d]$ 是一个矩形，函数 f 在 Q 上有定义，我们的目标是定义 f 在 Q 上的积分.

仿照区间上的积分，我们对 I, J 做划分

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,\quad c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d.$$

记 $I_i = [x_{i-1}, x_i], J_j = [y_{j-1}, y_j], Q_{ij} = I_i \times J_j$, 则我们得到 Q 的一个网格划分

$$G = \{Q_{ij} = I_i \times J_j | i = 1, \cdots, n, j = 1, \cdots, m.\}$$

网格 G 的模定义为

$$\|G\| = \max_{i,j} \operatorname{diam}(Q_{ij}).$$

任取 $P_{ij} \in Q_{ij}$, 构成一个采样 $P = \{P_{ij}\}$, 定义 **Riemann 和**

$$R(f, G, P) = \sum_{i,j} f(P_{ij}) A(Q_{ij}),$$

其中 $A(Q_{ij})$ 是矩形 Q_{ij} 的**面积**，也记作 ΔA_{ij}, 它等于 $\Delta x_i \Delta y_j$.

矩形上的积分

设函数 f 在矩形 Q 上有定义，若极限 $\lim\limits_{\|G\| \to 0} R(f, G, P)$ 存在，则称 f 在 Q 上 **Riemann 可积**，前述极限称为 f 在 Q 上的**二重积分** (简称积分)，记作 $\int_Q f(x,y)dA$ 或 $\int_Q f(x,y)dxdy$, 即

$$\int_Q f(x,y)dA = \lim_{\|G\| \to 0} \sum_{i,j} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A_{ij}.$$

所有 Q 上 Riemann 可积函数构成的集合记作 $R(Q)$.

与一元函数定积分一样，上述积分也有明显的几何意义和物理意义. 考虑空间中以曲面 $z = f(x,y)$ 为顶、以 Q 为底的曲顶柱体，积分 $\int_Q f dA$

可看作它的体积；如果将 Q 看作一片平面板材，其密度为 f，则 $\int_Q f dA$ 就是该板材的质量.

类似一元函数积分的 Darboux 定理，矩形上的积分也成立 Darboux 定理. 仅考虑有界函数. 记

$$M_{ij} = \sup_{Q_{ij}} f, \quad m_{ij} = \inf_{Q_{ij}} f,$$

则 f 在 Q 上关于网格 G 的 **Darboux 上和**与 **Darboux 下和**分别定义为

$$U(f,G) = \sum_{i,j} M_{ij} A(Q_{ij}), \quad L(f,G) = \sum_{i,j} m_{ij} A(Q_{ij}).$$

Darboux 积分定理 (I)

设函数 f 在矩形 Q 上有界，则 $\lim_{\|G\|\to 0} U(f,G)$ 和 $\lim_{\|G\|\to 0} L(f,G)$ 都存在，且

$$\lim_{\|G\|\to 0} U(f,G) = \inf_G U(f,G), \quad \lim_{\|G\|\to 0} L(f,G) = \sup_G L(f,G).$$

Darboux 上和与下和的极限分别称为函数的**上积分**与**下积分**，依次记作

$$\overline{\int_Q} f(x,y)dA = \inf_G U(f,G), \quad \underline{\int_Q} f(x,y)dA = \sup_G L(f,G).$$

依据 Darboux 积分定理 (I)，我们有可积的充要条件：

Darboux 积分定理 (II)

设 f 是矩形 Q 上的有界函数，则下述几条等价：

- $f \in R(Q)$;
- $\overline{\int_Q} f(x,y)dA = \underline{\int_Q} f(x,y)dA$;
- $\forall \epsilon > 0, \exists G : \Omega(f,G) := U(f,G) - L(f,G) < \epsilon$.
- $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \|G\| < \delta : \Omega(f,G) < \epsilon$.

利用 Darboux 定理，二重积分有着与定积分类似的性质.

可积函数的代数封闭性

若 $f, g \in R(Q), \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, 则 $\lambda f + \mu g, f \cdot g, |f| \in R(Q)$，且有积分的线性性

$$\int_Q (\lambda f + \mu g) dA = \lambda \int_Q f dA + \mu \int_Q g dA.$$

证明概要. 可积性可以通过 Darboux 积分定理 (II) 的第三条证明. 积分的线性性可以直接通过 Riemann 和证明. □

仿照定积分的区间可加性，同样可以证明二重积分的矩形可加性.

积分的矩形可加性

设 $Q=[a,b]\times[c,d]$. 任取 $p\in(a,b)$, 记 $Q'=[a,p]\times[c,d]$, $Q''=[p,b]\times[c,d]$, 则 $f\in R(Q)$ 的充要条件是 $f\in R(Q')$ 且 $f\in R(Q'')$. 可积时成立矩形可加性公式

$$\int_Q f dA=\int_{Q'} f dA+\int_{Q''} f dA.$$

证明概要. 此处与定积分的区间可加性的唯一不同点在于：Q' 的网格与 Q'' 的网格未必能合并成 Q 的网格. 但可以通过加细，使之成为 Q 的网格，而随着加细 $\Omega(f,G)$ 时减小的. □

面积的概念

为了讨论一般集合 E 上的积分，我们需要仔细处理面积的概念. 严格来说，下面将要介绍的“面积”应当称为 Jordan 容度 (content)，在实分析课程中它会被推广为 Lebesgue 测度 (measure).

面积

设有界集 E 包含于矩形 Q. 若 E 的特征函数 $\chi_E\in R(Q)$，则称 E **可求面积**，其面积定义为

$$A(E):=\int_Q \chi_E dA.$$

需要指出，E 的面积与矩形 Q 的选取无关. 事实上，若 $E\subset Q', E\subset Q''$，则 $E\subset Q_0=Q'\cap Q''$. 注意到 χ_E 在 Q_0 之外为零，故而根据积分的矩形可加性可知 $\chi_E\in R(Q')$ 等价于 $\chi_E\in R(Q_0)$，并且 $\int_{Q'}\chi_E dA=\int_{Q_0}\chi_E dA$. 对于 Q'' 和 Q_0 有同样的结果. 进而，$\chi_E\in R(Q')$ 等价于 $\chi_E\in R(Q'')$，并且 $\int_{Q'}\chi_E dA=\int_{Q''}\chi_E dA$.

亦可从 Darboux 和的角度来理解面积. 注意到 $U(\chi_E,G)$ 是网格 G 中与 E 相交的小矩形面积之和，而 $L(\chi_E,G)$ 是网格 G 中含于 E 的小矩形面积之和. 因此可以把

$$A^*(E):=\overline{\int_Q}\chi_E dA,\quad A_*(E):=\underline{\int_Q}\chi_E dA.$$

分别称为 E 的**外面积**和**内面积**. 于是，E **可求面积的充要条件是外面积等于内面积**.

为了说明面积概念的不平凡，我们有必要举一个不可求面积的例子. 考虑 $Q=[0,1]\times[0,1]$ 上的有理点 (两个坐标都是有理数) 集合 E, 易见恒有 $U(\chi_E,G)=1, L(\chi_E,G)=0$, 进而 $A^*(E)=1, A_*(E)=0$, 所以 E 不可求面积.

集合是否可求面积与其边界密切相关. 取足够大的矩形 Q 包含 E，考虑 Q 的网格 G，使得 E 和 Q 的边界之间至少相差一圈矩形. 考察那些与 E 相交但又不含于 E 的小矩形，不难发现它们覆盖 ∂E. [1] 因此，$A^*(\partial E)\le U(\chi_E,G)-L(\chi_E,G)$. 另一方面，与 E 相交的矩形或者含于 E

1: 事实上，若边界点 P 未被覆盖，则它必然属于某个完全含于 E 的小矩形, 并且只能位于该小矩形的边上 (否则 P 是内点). 若 P 是顶点，则顶点处的其他 3 个矩形中至少有一个不含于 E，而 P 又被那个矩形覆盖；若 P 不是顶点，则它必然被所在边另一侧的小矩形覆盖.

或者与 ∂E 相交，故而 $U(\chi_E, G) \le U(\chi_{\partial E}, G) + L(\chi_E, G)$. 由此可以证明 $A^*(E) - A_*(E) = A^*(\partial E)$.

> 有界集可求面积的充要条件是它的边界面积为零.

面积为零的集合称为 **Jordan 零集/零面积集**. 鉴于它们的重要性，我们举一些常见的例子.

- 线段是零面积集. 进而多边形可求面积.
- 若 $f \in R([a,b])$, 则它的图像曲线 G_f 具有零面积. 事实上，根据可积的充要条件，对于任意的 $\epsilon > 0$，存在划分，使得 $\sum_j \omega_j \Delta x_j < \epsilon$. 记 $I_j = [x_{j-1}, x_j]$, 则矩形列

  $$I_j \times [\inf_{I_j} f, \sup_{I_j} f]$$

  覆盖 G_f，且它们的面积和是 $\sum_j \omega_j \Delta x_j$.
  进而，连续函数图像作为曲边的曲边梯形是可求面积的.
- 若参数曲线 $\boldsymbol{r}(t) \in C^1([0,1]; \mathbb{R}^2)$ 满足 $|\boldsymbol{r}'| \le M$, 则它的像也是零面积集. 事实上，设 (t_j) 是 $[0,1]$ 的 n 等分点，则当 $t \in [t_{j-1}, t_j]$ 时，成立

  $$|\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}(t_j)| \le M|t - t_j| \le M/n.$$

  这意味着以 $\boldsymbol{r}(t_j)$ 为中心，以 $2M/n$ 为边长的正方形列可以覆盖曲线，而这些正方形的总面积为 $4M^2/n$, 随着 $n \to \infty$, 它趋于零.
  进而，由有限条 C^1 曲线围成（作为边界）的区域是可求面积的.

显然只能在可求面积集上讨论积分，不然我们甚至无法讨论常值函数 1 的积分! 方便起见，记所有可求面积集组成的集合为 $\mathscr{M}$.

> **可求面积集的代数性质**
>
> 设 $E, F \in \mathscr{M}$，则 $E \cap F, E \cup F, E - F \in \mathscr{M}$, 且成立面积可加性公式
>
> - $A(E \cup F) = A(E) + A(F) - A(E \cap F)$;
> - $A(E - F) = A(E) - A(E \cap F)$.

证明. 不妨假设 E, F 都含于某个矩形 Q.

(1) 注意到 $\chi_{E\cap F} = \chi_E \chi_F$, $\chi_{E\cup F} = \chi_E + \chi_F - \chi_{E\cap F}$, $\chi_{E-F} = \chi_E - \chi_{E\cap F}$, 利用可积函数的代数性质，可知 $\chi_{E\cap F}, \chi_{E\cup F}, \chi_{E-F} \in R(Q)$. 进而 $E \cap F, E \cup F, E - F$ 都可求面积.

(2) 对 (1) 中后两个关系式的两端在 Q 上积分，可得所需证明的两个面积可加性公式. □

可求面积集上的积分

设 E 是一个可求面积集，f 在 E 上有定义. 取足够大的矩形 Q 包含 E, 若 $f\chi_E \in R(Q)$，则称 f 在 E 上 Riemann 可积，其积分定义为

$$\int_E f dA := \int_Q f \cdot \chi_E dA.$$

在 E 上可积的函数构成的集合记作 $R(E)$. 注意，根据积分的矩形可加性，上述定义与 Q 的选取无关. 如无特殊说明，**今后出现的积分域都默认是可求面积的**.

可积性的零面积判定法
若有界函数 f 的不连续点集 S 是 Jordan 零集，则它 $f \in R(E)$.

证明. 取矩形 Q 包含 E, 需证 $f\chi_E \in R(Q)$. 注意到 $f\chi_E$ 的不连续点只有两种: (1) E 的边界点; (2) E 的内点且是 f 的不连续点. 两者面积均为零，所以 $f\chi_E$ 的不连续点是 Jordan 零集. 因此我们只需证明 $E = Q$ 的情形.

任意给定 $\epsilon > 0$. 由于 $A(S) = 0$，故而存在网格 G，使得 $U(\chi_S, G) < \epsilon$. 将网格 G 的小矩形分为两类：与 S 相交的记作 $\{S_k\}$，其余的记作 $\{C_k\}$. 于是，

$$\sum_k A(S_k) = U(\chi_S, G) < \epsilon.$$

另一方面，由于函数 f 在有界闭集 $C := \cup_k C_k$ 上一致连续，所以可把 C 加细为 $\cup_j C'_j$, 使得 f 在每个 C'_j 上的振幅 $\omega^f(C'_j)$ 小于 ϵ，从而

$$\sum_j \omega^f(C'_j)A(C'_j) \le \epsilon \sum_j A(C'_j) \le \epsilon A(Q).$$

把 C 的加细延拓至 Q，得到 G 的加细 G'. 相应地，$\{S_k\}$ 被加细为 $\{S'_j\}$，并且

$$\sum_j \omega^f(S'_j)A(S'_j) \le 2\|f\| \sum_j A(S'_j) = 2\|f\| \sum_k A(S_k) \le 2\|f\|\epsilon.$$

从而,

$$\Omega(f, G') = \sum_j \omega^f(S'_j)A(S'_j) + \sum_j \omega^f(C'_j)A(C'_j) \le (2\|f\| + A(Q))\epsilon.$$

根据 Darboux 定理可知 $f \in R(Q)$. □

下面的定理表明，在 Jordan 零集上修改一个函数的取值，不会改变它的可积性和积分值.

积分与零面积集无关
设 $f \in R(E)$，g 在 E 上有界. 如果在一个 Jordan 零集 F 之外成立 $f = g$，则 $g \in R(E)$ 且 $\int_E f dA = \int_E g dA$. 特别地，若 E 本身就是 Jordan 零集，取 $f = 0$, 则总有 $g \in R(E)$ 且 $\int_E g dA = 0$.

证明. 不妨假设 E 是矩形. 对于网格 G，函数 f 和 g 仅在与 F 相交的小矩形有差别，因此

$$|U(f, G) - U(g, G)| \le (\|f\| + \|g\|)U(\chi_F, G).$$

由于 $A(F) = 0$，所以 $U(\chi_F, G) \to 0 (\|G\| \to 0)$. 因此，上式中令 $\|G\| \to 0$ 可得

$$\left| \overline{\int_E} f dA - \overline{\int_E} g dA \right| \le 0.$$

令 $\epsilon \to 0$，可知

$$\overline{\int_E} f dA = \overline{\int_E} g dA.$$

同理可知两者的下积分也相等. 故而根据 Darboux 定理知 $g \in R(E)$，且与 f 的积分相同. □

可积函数的代数性质

若 $f, g \in R(E), \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, 则 $\lambda f + \mu g, fg, |f| \in R(E)$，且

$$\int_E (\lambda f + \mu g) dA = \lambda \int_E f dA + \mu \int_E g dA.$$

证明. 取矩形 Q 包含 E，则 $f\chi_E, g\chi_E \in R(Q)$, 根据矩形上可积函数的代数性质，有 $(\lambda f + \mu g)\chi_E = \lambda f\chi_E + \mu g\chi_E \in R(Q)$, 且

$$\begin{aligned}\int_E (\lambda f + \mu g) dA &= \int_Q (\lambda f + \mu g)\chi_E dA = \int_Q (\lambda f\chi_E + \mu g\chi_E) dA \\ &= \lambda \int_Q f\chi_E dA + \mu \int_Q g\chi_E dA = \lambda \int_E f dA + \mu \int_E g dA.\end{aligned}$$

类似可得其他结论. □

积分的区域可加性

若 $f \in R(E)$ 且 $f \in R(F)$, 则 $f \in R(E \cap F)$ 且 $f \in R(E \cup F)$，并有

$$\int_{E\cup F} f dA = \int_E f dA + \int_F f dA - \int_{E\cap F} f dA.$$

特别地，$E \cap F$ 是 Jordan 零集，则

$$\int_{E\cup F} f dA = \int_E f dA + \int_F f dA.$$

证明. 取矩形 Q 使得 $E \cup F \subset Q$.

(1) 注意到 $f\chi_{E\cap F} = f\chi_E \cdot \chi_F$. 由于 $f\chi_E, \chi_F \in R(Q)$, 故而它们的乘积也可积，进而 $f \in R(E \cap F)$.

(2) 利用 $f\chi_{E\cup F} = f\chi_E + f\chi_F - f\chi_{E\cap F}$ 可知 $f \in R(E \cup F)$. 对该关系式积分就得到需证等式. □

下面的几个积分估计是简单的，证明留给读者.

积分的估计

- **(保序性)** 若 $f, g \in R(E)$ 且 $f \le g$, 则 $\int_E f dA \le \int_E g dA$.
- **(绝对值不等式)** 若 $f \in R(E)$, 则 $\left|\int_E f dA\right| \le \int_E |f| dA$.
- **(积分中值定理)** 若 $E \in \mathscr{M}$ 是连通闭集，且 $f \in C(E)$，则存在 $P \in E$ 使得 $\int_E f dA = f(P)A(E)$.

1.2 Fubini 定理

相对于定积分而言，二重积分的计算是非常困难的，主要的方法是在合适的坐标系下把二重积分化为二次积分，逐步求出重积分.

我们先从几何角度来获得直觉. 简单起见，假设积分区域 $Q = [a,b] \times [c,d]$ 是矩形，f 是 Q 上的非负函数，考虑二重积分

$$\int_Q f(x,y)dA.$$

假如 f 具有良好的光滑性，那么上述积分可以看作以曲面 $z = f(x,y)$ 为顶的曲顶柱体的体积. 下面我们用平行截面法来推导这个体积. 用平面 $x = x_0$ 截曲顶柱体，得到一个曲边梯形，它的面积是

$$A(x_0) = \int_c^d f(x_0, y)dy.$$

随着 x_0 在 $[a,b]$ 上变动，我们得到一个截面积函数

$$A(x) = \int_c^d f(x,y)dy.$$

根据平行截面求体积法，曲顶柱体的体积可以写做

$$\int_Q f(x,y)dA = \int_a^b A(x)dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx.$$

上式右端的积分称为先对 y、后对 x 的**二次积分 (累次积分)**. 如果用与 y 轴垂直的平行平面去截，就可以得到另一种次序的二次积分.

这样，我们把二重积分化为了二次积分. 这一方法在数学上是否真的成立？Fubini 定理给出了肯定的回答.

Fubini 定理 (I)

设 $f \in R(Q)$，其中 $Q = [a,b] \times [c,d]$，那么

$$\int_Q f(x,y)dA = \int_a^b \left(\overline{\int_c^d} f(x,y)dy \right) dx = \int_a^b \left(\underline{\int_c^d} f(x,y)dy \right) dx.$$

特别地，如果 $f \in C(Q)$, 则成立

$$\int_Q f(x,y)dA = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy.$$

图 1.1. Guido Fubini (1879-1943). 意大利数学家. 他在 1907 年证明了一般测度空间上的 Fubini 定理. 连续函数版本可以追溯到 Euler.
https://en.wikipedia.org/wiki/File:Guido_Fubini.jpg

证明. 记 $\Phi(x) = \overline{\int_c^d} f(x,y)dy, \phi(x) = \underline{\int_c^d} f(x,y)dy$.

取划分 $X : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, Y : c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d$. 进而得到 Q 的划分 $G : Q_{ij} = I_i \times J_j = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$. 记 $M_{ij} = \sup_{Q_{ij}} f$,

$m_{ij} = \inf_{Q_{ij}} f$, 对任意 $x \in I_i$，有

$$\Phi(x) \le U(f(x,\cdot), Y) = \sum_j \sup_{y \in I_j} f(x,y) \cdot \Delta y_j \le \sum_j M_{ij} \Delta y_j,$$
$$\phi(x) \ge L(f(x,\cdot), Y) = \sum_j \inf_{y \in I_j} f(x,y) \cdot \Delta y_j \ge \sum_j m_{ij} \Delta y_j.$$

于是

$$U(\Phi, X) = \sum_i \sup_{x \in I_i} \Phi(x) \cdot \Delta x_i \le \sum_{i,j} M_{ij} \Delta y_j \Delta x_i = U(f, G),$$
$$L(\phi, X) = \sum_i \inf_{x \in I_i} \phi(x) \cdot \Delta x_i \ge \sum_{i,j} m_{ij} \Delta y_j \Delta x_i = L(f, G).$$

注意到 $\phi \le \Phi$, 我们有

$$L(f,G) \le L(\phi, X) \le L(\Phi, X) \le U(\Phi, X) \le U(f,G),$$

$$L(f,G) \le L(\phi, X) \le U(\phi, X) \le U(\Phi, X) \le U(f,G).$$

当 $\|X\| \to 0$ 时，取恰当的 Y 使得 $\|G\| \to 0$. 进而，上式的极限表明 $\Phi, \phi \in R([a,b])$，且它们的积分都等于 f 的重积分.

如果 f 连续，则关于单变量也连续，从而上下积分就是定积分. □

例 1.2.1 计算 $I = \int_Q x \sin(xy) dA$，其中 $Q = [1,2] \times [0, \pi]$.

解. 应用富比尼定理，可得

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \left(\int_0^\pi x \sin(xy) dy \right) dx = \int_1^2 \left(-\cos(xy)|_{y=0}^{\pi} \right) dx \\ &= \int_1^2 (1 - \cos \pi x) dx = 1. \end{aligned}$$

下面我们换一种积分次序

$$I = \int_0^\pi \left(\int_1^2 x \sin(xy) dx \right) dy.$$

内层的积分可以用分部积分计算

$$\begin{aligned} \int_1^2 x \sin(xy) dx &= -\frac{1}{y} \int_1^2 x d \cos(xy) \\ &= -\frac{1}{y} \left[x \cos(xy)|_{x=1}^2 - \int_1^2 \cos(xy) dx \right] \\ &= -\frac{1}{y} \left[x \cos(xy)|_{x=1}^2 - \frac{1}{y} \sin(xy)|_{x=1}^2 \right] \\ &= -\frac{2\cos 2y - \cos y}{y} + \frac{\sin 2y - \sin y}{y^2} \\ &= -\frac{d}{dy} \left[\frac{\sin 2y - \sin y}{y} \right]. \end{aligned}$$

所以，二次积分是

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi}\left(\int_1^2 x\sin(xy)dx\right)dy \\
&= -\int_0^{\pi}\frac{d}{dy}\left[\frac{\sin 2y-\sin y}{y}\right]dy = -\left[\frac{\sin 2y-\sin y}{y}\right]\Bigg|_{y=0}^{\pi} = 1.
\end{aligned}
$$

可以看到，两种次序的二次积分差异很大，求解时要灵活选择. □

前面的 Fubini 定理针对的是矩形区域，它还能推广到 x 型区域和 y 型区域. 所谓 x **型区域**是指形如

$$X = \{(x,y)|a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$$

的区域，也就是由直线 $x=a, x=b$ 和曲线 $y=\varphi_1(x), y=\varphi_2(x)$ 围成的区域. 类似地，y **型区域**是指形如

$$Y = \{(x,y)|c \le y \le d,\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\}$$

的区域，也就是由直线 $y=c, y=d$ 和曲线 $x=\psi_1(y), x=\psi_2(y)$ 围成的区域. 下面说明 x 型区域上的 Fubini 定理.

设 $f \in C(X)$，$\varphi_1, \varphi_2 \in C([a,b])$. 不妨假设 $c \le \varphi_1, \varphi_2 \le d$. 记 $Q=[a,b]\times[c,d]$，则

$$\int_X f dA = \int_Q f\chi_X dA.$$

注意，对于任意 $x_0 \in [a,b]$, $f(x_0,y)\chi_X(x_0,y)$ 至多只有两个间断点 $y=\varphi_1(x_0), \varphi_2(x_0)$,因此 $f(x_0,y)\chi_X(x_0,y) \in R([c,d])$. 于是利用矩形上的Fubini 定理，可得

$$\int_Q f\chi_X dA = \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\chi_X(x,y)dy\right)dx.$$

再注意到 $f(x_0,y)\chi_X(x_0,y)$ 在 $[\varphi_1(x_0), \varphi_2(x_0)]$ 之外为零, 在 $[\varphi_1(x_0), \varphi_2(x_0)]$ 上就是 $f(x_0,y)$，所以

$$\int_c^d f(x_0,y)\chi_X(x_0,y)dy = \int_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)} f(x_0,y)dy.$$

从而可得更一般的 Fubini 定理.

Fubini 定理 (II)

设函数 $f \in C(D)$.

- 如果 $D=\{(x,y)|a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$ 是 x 型区域，其中 φ_1, φ_2 是连续函数，那么

$$\int_D f(x,y)dA = \int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right)dx.$$

- 如果 $D=\{(x,y)|c \le y \le d,\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\}$ 是 y 型区域，其

中 ψ_1, ψ_2 是连续函数，那么

$$\int_D f(x,y)dA = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \right) dy.$$

因为大多数区域总可以划分为若干个 x 型区域和 y 型区域，所以上面的 Fubini 定理基本解决了一般区域上重积分的计算问题.

例 1.2.2 设区域 D 由 $x = 2, y = 1, y = x$ 三条直线围成, 求重积分 $I = \int_D xydA$.

解. 积分区域 D 既是 x 型的也是 y 型的.

如果把它看做 x 型的，那么可以按如下方式将其化为累次积分. 首次，D 上的点的横坐标的变动范围是区间 $[1, 2]$. 其次，在区间 $[1, 2]$ 上任意取定一个 x 值，则 D 上以这个 x 值为横坐标的点在一段直线上，这段直线平行于 y 轴，该线段上点的纵坐标从 $y = 1$ 变到 $y = x$. 从而，利用富比尼定理，可得

$$I = \int_1^2 \left(\int_1^x xydy \right) dx = \int_1^2 \left(x \cdot \frac{1}{2}(x^2 - 1) \right) dx = \frac{9}{8}.$$

类似地，如果把它看做 y 型区域，那么 D 上的点的纵坐标的变动范围是区间 $[1, 2]$，相应地，取定 y 之后 x 的变动范围是 $[y, 2]$. 于是，所求重积分也可以按以下的二次积分计算

$$I = \int_1^2 \left(\int_y^2 xydx \right) dy = \int_1^2 \left(y \cdot \frac{1}{2}(4 - y^2) \right) dy = \frac{9}{8}.$$

本题中，两种累次积分的计算难度差别不大. □

例 1.2.3 设区域 D 由 $y = x - 2, x = y^2$ 围成, 求重积分 $I = \int_D xydA$.

解. 积分区域 D 同样既是 x 型也是 y 型. 把它看做 y 型区域是方便的

$$I = \int_{-1}^2 \left(\int_{y^2}^{y+2} xydx \right) dy = \int_{-1}^2 \left(y \cdot \frac{1}{2}\left((y+2)^2 - y^4\right) \right) dy = \frac{45}{8}.$$

如果把 D 看做 x 型区域，那么它的下方边界曲线的函数表达式是分段的，所以我们要把 D 以直线 $x = 1$ 为界分为左右两部分 D_1, D_2，这两部分可以写做

$$D_1 = \{(x,y) | 0 \le x \le 1,\ -\sqrt{x} \le y \le \sqrt{x}\},$$

$$D_2 = \{(x,y) | 1 \le x \le 4,\ x - 2 \le y \le \sqrt{x}\}.$$

于是积分可以表示为

$$I = \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} xydy \right) dx + \int_1^4 \left(\int_{x-2}^{\sqrt{x}} xydy \right) dx.$$

后续计算留作练习. □

例 1.2.4 计算重积分 $I=\int_D y\sqrt{1+x^2-y^2}dA$，其中区域 D 由 $x=-1, y=1, y=x$ 围成.

解. 本题函数与区域都有较好的对称性，我们先利用对称性将它化简. 如图所示，把 D 分为四个三角形. 记被积函数 $f(x,y)=y\sqrt{1+x^2-y^2}$，那么 f 在 D_1, D_2 上的取值关于 y 轴是对称的，也就是说 D_1, D_2 上的两个曲顶柱体的体积是一样的 $\int_{D_1} f(x,y)dA=\int_{D_2} f(x,y)dA$. 另一方面，在 D_3, D_4 上，函数关于 x 轴相差一个符号 $f(x,-y)=-f(x,y)$，因此 D_3, D_4 上的两个曲顶柱体的代数体积相消，即 $\int_{D_3} f(x,y)dA=-\int_{D_4} f(x,y)dA$. 故而

$$\begin{aligned}I=&\int_{D_1} f(x,y)dA+\int_{D_2} f(x,y)dA\\&+\int_{D_3} f(x,y)dA+\int_{D_4} f(x,y)dA=2\int_{D_1} f(x,y)dA.\end{aligned}$$

注意到 D_1 由 $x=0, x=1, y=x$ 围成，如果把它看做 x 型区域，那么

$$\begin{aligned}I&=2\int_{D_1} f(x,y)dA=2\int_0^1\left(\int_x^1 f(x,y)dy\right)dx\\&=2\int_0^1\left(\int_x^1 y\sqrt{1+x^2-y^2}dy\right)dx=\int_0^1\left(\int_x^1 \sqrt{1+x^2-y^2}d(y^2)\right)dx\\&=\int_0^1\left(-\frac{2}{3}\left(1+x^2-y^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_{y=x}^1\right)dx=\frac{2}{3}\int_0^1(1-x^3)dx=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

如果把 D_1 看做 y 型区域，那么 $I=2\int_0^1\left(\int_0^y y\sqrt{1+x^2-y^2}dx\right)dy$. 这个积分的计算相对繁琐，留作练习. □

上述几个例子说明，在化二重积分为二次积分时，为了计算简便，需要选择恰当的二次积分的次序. 这时，既要考虑积分区域 D 的形状，又要考虑被积函数 $f(x,y)$ 的特性. 在计算过程中也要充分利用对称性进行化简.

Fubini 定理的另一个应用是用**交换积分次序**的方法计算累次积分. 如果 D 既是 x 型区域也是 y 型区域，那么成立

$$\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right)dx=\int_c^d\left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx\right)dy.$$

若其中一端计算困难，则可将其转化为另一端进行求解.

例 1.2.5 计算 $I=\int_0^\pi\left(\int_y^\pi \frac{\sin x}{x}dx\right)dy$.

解. 这个二次积分的内层积分没有初等表达式，我们来交换它的积分次序. 根据 Fubini 定理，它可以看做一个二重积分，积分区域 D 由 $x=\pi, y=0, y=x$ 围成，

$$I=\int_0^\pi\left(\int_y^\pi \frac{\sin x}{x}dx\right)dy=\int_D \frac{\sin x}{x}dA.$$

因为 D 也是 x 型区域，所以右端的重积分也可以写做

$$\int_D \frac{\sin x}{x} dA = \int_0^\pi \left(\int_0^x \frac{\sin x}{x} dy \right) dx = \int_0^\pi \sin x dx = 2.$$

这样，通过交换积分次序，我们得到 $I = 2$. □

例 1.2.6 计算 $I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx (0 < a < b)$.

解. 这个定积分可以化为二次积分 $I = \int_0^1 \left(\int_a^b x^y dy \right) dx$. 注意到函数 x^y 连续，所以可应用 Fubini 定理

$$I = \int_a^b \left(\int_0^1 x^y dx \right) dy = \int_a^b \frac{1}{y+1} dy = \ln \frac{b+1}{a+1}.$$

我们用了二维的方法解决了一维的问题! □

1.3 二重积分换元法

在定积分里，换元法是一种重要的方法. 对二重积分，也有类似的**换元法**. 这种方法通常也称为**坐标变换法**.

假设 D 是 xy 平面上的一个良好的区域，f 在 D 上可积. 根据 Fubini 定理，计算重积分 $\int_D f dA$ 的方法是将它化为累次积分. 但很多情况下累次积分并不容易计算，这意味着此时直角坐标系可能并不适配，需要寻找其它合适的坐标系来计算重积分.

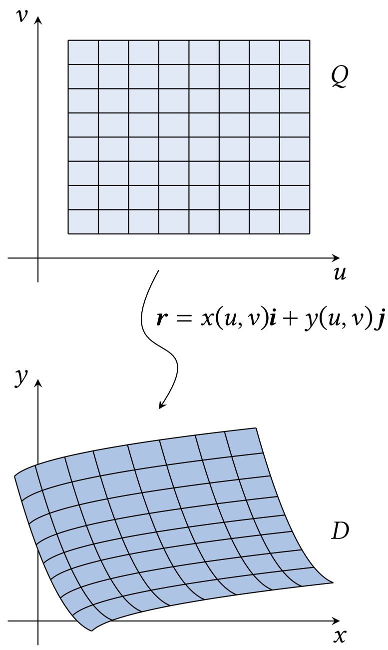


图 1.2. 坐标变换. 在 xy 平面上的 uv 坐标系本质上是从 uv 平面到 xy 平面的一个映射.

假设 uv 是平面上的另一个（曲线）坐标系，那么它与直角坐标系之间有**坐标变换公式**

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v).$$

也就是说，给定 uv 坐标 (u_0, v_0)，它所代表的点是 $(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0))$. 本质上，上述坐标变换是从 uv 平面到 xy 平面的向量值函数（如图1.2）

$$\boldsymbol{r}(u, v) = x(u, v)\boldsymbol{i} + y(u, v)\boldsymbol{j}.$$

如果把 v 固定，那么 $\boldsymbol{r}(u, v)$ 就是平面上以 u 为参数的曲线，称为 u 线；类似地，把 u 固定的曲线称为 v 线. 它们形成了平面上的 uv **坐标曲线**.

为了讨论方便，假设 $\boldsymbol{r}$ 恰好把一个矩形 Q 微分同胚到 D，即

$$\boldsymbol{r} : Q \to D$$

是一个双射，并且 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}^{-1}$ 都连续可微. 如果对 Q 做网格划分 $G = \{Q_{ij}\}$，则相应的 u 线、v 线将 D 划分为 $\{D_{ij}\}$. 若记 $m_{ij} = \inf_{D_{ij}} f, M_{ij} = \sup_{D_{ij}} f$，则

$$\sum_{ij} m_{ij} A(D_{ij}) \le \int_D f dx dy = \sum_{i,j} \int_{D_{ij}} f dx dy \le \sum_{ij} M_{ij} A(D_{ij}).$$

下面来估计 $A(D_{ij})$. 注意到 D_{ij} 是个曲边四边形，它的四个顶点为 $\boldsymbol{r}(u_i,v_j)$，$\boldsymbol{r}(u_i+\Delta u_i,v_j)$，$\boldsymbol{r}(u_i,v_j+\Delta v_j)$ 和 $\boldsymbol{r}(u_i+\Delta u_i,v_j+\Delta v_j)$. 根据

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}(u_i+\Delta u_i,v_j)-\boldsymbol{r}(u_i,v_j)&=\boldsymbol{r}_u(u_i,v_j)\Delta u_i+o(\Delta u_i)\approx\boldsymbol{r}_u(u_i,v_j)\Delta u_i,\\ \boldsymbol{r}(u_i,v_j+\Delta v_j)-\boldsymbol{r}(u_i,v_j)&=\boldsymbol{r}_v(u_i,v_j)\Delta v_j+o(\Delta v_j)\approx\boldsymbol{r}_v(u_i,v_j)\Delta v_j,\end{aligned}$$

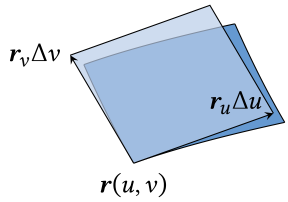


图 1.3. 曲边四边形近似是平行四边形，它的面积 $\approx|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|\Delta u\Delta v$.

可见小区域 D_{ij} 近似于 $\boldsymbol{r}_u(u_i,v_j)\Delta u_i$ 和 $\boldsymbol{r}_v(u_i,v_j)\Delta v_j$ 确定的平行四边形. 所以它的面积近似为[2]

$$A(D_{ij})=|(\boldsymbol{r}_u\Delta u_i)\times(\boldsymbol{r}_v\Delta v_j)|+o(\|G\|^2)=|\det\big(J_{\boldsymbol{r}}(u_i,v_j)\big)|\Delta u_i\Delta v_j+o(\|G\|^2),$$

其中

$$\det(J_{\boldsymbol{r}})=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}.$$

因此

$$\sum_{ij}m_{ij}A(D_{ij})=\sum_{ij}m_{ij}|\det\big(J_{\boldsymbol{r}}(u_i,v_j)\big)|\Delta u_i\Delta v_j+o(1).$$

$$\sum_{ij}M_{ij}A(D_{ij})=\sum_{ij}M_{ij}|\det\big(J_{\boldsymbol{r}}(u_i,v_j)\big)|\Delta u_i\Delta v_j+o(1).$$

令 $\|G\|\to0$, 上边两式的右端都趋向于积分

$$\int_Q f(\boldsymbol{r}(u,v))|\det(J_{\boldsymbol{r}}(u,v))|dudv.$$

这样我们就得到二重积分的坐标变换公式.

二重积分的坐标变换公式

$$\int_{\boldsymbol{r}(Q)}f(x,y)dxdy=\int_Q f(\boldsymbol{r}(u,v))|\det(J_{\boldsymbol{r}}(u,v))|dudv.$$

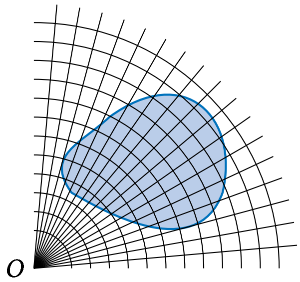
上述公式本质上表明：计算重积分时，我们可以按照一般的曲线坐标网划分区域，而并非必须要用直角坐标网. 直观上，可以这么记忆这个公式：如果用直角坐标网划分区域，那么面积元是 $dA=dxdy$，而用曲线坐标网划分区域时，面积元为 $dA=|\det(J_{\boldsymbol{r}}(u,v))|dudv$. 换言之，重积分的坐标变换公式其实就是面积元的计算公式

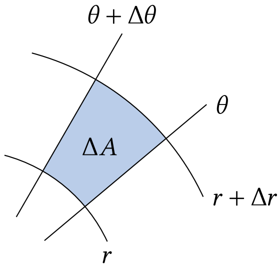
$$dA=dxdy=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv.$$

我们用极坐标来印证上述公式. 如图所示，用以极点为中心的一族 r 为常数的同心圆、以及从极点出发的一族 θ 为常数的射线，把 D 分成 N 个小闭区域. 除了包含边界点的一些小区域外，绝大部分的小区域的面积是

$$\Delta A=\frac12(r+\Delta r)^2\Delta\theta-\frac12r^2\Delta\theta=\left(r+\frac12\Delta r\right)\Delta r\Delta\theta=r\Delta r\Delta\theta+o(\Delta r\Delta\theta).$$

2: 此式证明较为繁琐，可以查阅其他书籍.





也就是说，面积元在极坐标下可以写做

$$dA = rdrd\theta.$$

此公式是非常直观的. 因为 r 为常数的曲线与 θ 为常数的曲线是互相正交的，也就是说它们形成的是**正交网线**. 所以当网格很密集的时候，每一小块可以近似的看做矩形，它的边长分别是 Δr 和 $r\Delta\theta$, 因此 $\Delta A \approx r\Delta r\Delta\theta$，进而面积元 $dA = rdrd\theta$.

现在我们使用上面的坐标变换公式. 根据 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$，可得

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

因此，$dA = dxdy = rdrd\theta$. 这与直接的估计是吻合的.

需要指出的是，使用极坐标时，$r = 0$ 时变换不是微分同胚. 但是，去掉一个 Jordan 零集（比如有限个点或有线条曲线），不会改变二重积分的值. 所以，在使用坐标变换公式时，只要在去掉一个 Jordan 零集后，变换 $\boldsymbol{r}$ 是微分同胚即可.

例 1.3.1 计算 $I = \int_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dxdy$，其中 D 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 所围成的闭区域.

解. 采用广义极坐标 $x = ar\cos\theta, y = br\sin\theta$. 那么区域 D 对应的 $r\theta$ 范围是 $S = \{(r,\theta)|0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi\}$. 根据

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -ar\sin\theta \\ b\sin\theta & br\cos\theta \end{vmatrix} = abr,$$

可得

$$\begin{aligned} I &= \int_S \sqrt{1 - r^2} abrdrd\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \sqrt{1 - r^2} abrdr \right) d\theta = \frac{2}{3}\pi ab. \end{aligned}$$

□

例 1.3.2 求由直线 $x + y = c$，$x + y = d$，$y = ax$，$y = bx (0 < c < d, 0 < a < b)$ 所围成的闭区域 D 的面积.

解. 作变换 $u=x+y, v=y/x$，则 uv 的区域 $Q=[c,d]\times[a,b]$. 反解出 $x=\frac{u}{1+v}, y=\frac{uv}{1+v}$，可得

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{u}{(1+v)^2}>0.$$

因此

$$\begin{aligned}I&=\int_Q\frac{u}{1+v^2}dudv=\int_c^d\left(\int_a^b\frac{u}{(1+v)^2}dv\right)du\\&=\int_c^d udu\cdot\int_a^b\frac{dv}{(1+v)^2}=\frac{(d^2-c^2)(b-a)}{2(1+a)(1+b)}.\end{aligned}$$

□

例 1.3.3 计算 $I=\int_D e^{(x-y)/(x+y)}dxdy$，其中 D 是由 x 轴、y 轴和直线 $x+y=1, x+y=2$ 所围成的梯形.

解. 作变换 $u=x-y, v=x+y$，则 $x=\frac{1}{2}(u+v), y=\frac{1}{2}(v-u)$. 此时，$uv$ 对应的范围 S 由 $u+v=0, u-v=0, v=1, v=2$ 围成. 计算 Jacobi 行列式，得

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}x_u & x_v\\ y_u & y_v\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1/2 & 1/2\\ -1/2 & 1/2\end{vmatrix}=\frac{1}{2}.$$

所以

$$\begin{aligned}I&=\int_S e^{u/v}\cdot\frac{1}{2}dudv=\frac{1}{2}\int_1^2\left(\int_{-v}^{v}e^{u/v}du\right)dv\\&=\frac{1}{2}\int_1^2 v(e-e^{-1})dv=\frac{3}{4}(e-e^{-1}).\end{aligned}$$

□

极坐标计算二重积分

本目重点介绍极坐标下的二重积分计算问题. 极坐标比较适配于以下几种区域:

- **双曲边扇形**$D:\alpha\le\theta\le\beta, \varphi_1(\theta)\le r\le\varphi_2(\theta)$.
  在区间 $[\alpha,\beta]$ 上任意取定一个 θ 值. 对应于这个 θ 值，D 上的点的极径 r 从 $\varphi_1(\theta)$ 变到 $\varphi_2(\theta)$. 这样就可看出，极坐标系中的二重积分化为二次积分的公式为

$$\int_D f(x,y)dA=\int_\alpha^\beta\left(\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr\right)d\theta.$$

- **曲边扇形**$D:\alpha\le\theta\le\beta, 0\le r\le\varphi(\theta)$.
  它是 $\varphi_1=0$ 的特殊双曲边扇形，应用上面的公式，可得

$$\int_D f(x,y)dA=\int_\alpha^\beta\left(\int_0^{\varphi(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr\right)d\theta.$$

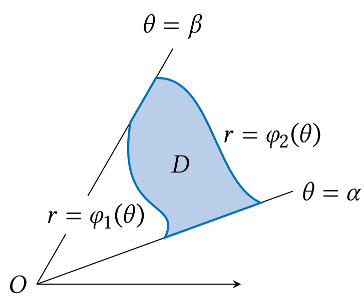


图 1.4. 双曲边扇形. 这种区域的特征是，从原点出发的射线，被区域截得部分是一条线段.

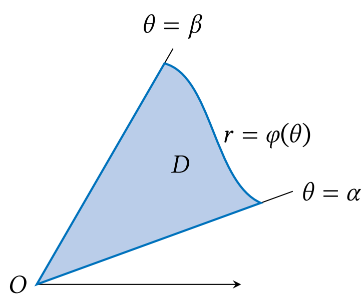


图 1.5. 曲边扇形. 当双曲边扇形的一条曲边退化为极点时，就变成曲边扇形.

- **星形区域** $D: 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq \varphi(\theta)$，其中 $\varphi(0) = \varphi(2\pi)$. 它是特殊的取遍扇形，其边界曲线围绕原点一周，所以

$$\int_D f(x,y)dA = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\varphi(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr \right) d\theta.$$

特别地，如果取函数 $f = 1$，那么所得公式就是极坐标下的面积公式.

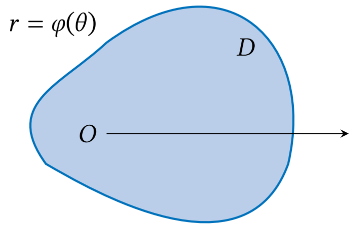


图 1.6. 星形区域. 如果把边界看做不透光的墙，那么从原点发出的光线可以照亮这个区域.

例 1.3.4 试求双扭线围成区域 $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ 的面积.

解. 双扭线的极坐标方程是 $r^2 = a^2\cos 2\theta$，这里 θ 的范围是 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$. 因为左右两块对称，所以总面积是右侧部分 D 的 2 倍.

$$\begin{aligned} A &= 2\int_D r dr d\theta = 2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{\sqrt{a^2\cos 2\theta}} r dr \right) d\theta \\ &= a^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta d\theta = a^2. \end{aligned}$$

如果用上册的面积公式，可以得到同样的结果. □

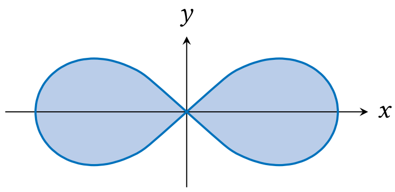


图 1.7. 双扭线.

例 1.3.5 试求 Viviani 体的体积，即球体 $x^2+y^2+z^2 \leq R^2$ 含在圆柱面 $x^2+y^2 = Rx$ 内部区域的体积.

解. 记 $f(x,y) = \sqrt{R^2-x^2-y^2}$，$D = \{(x,y) | x^2+y^2 \leq Rx\}$. 根据对称性，所求体积是以 xy 平面为底、以 $z = f(x,y)$ 为顶的曲顶柱体体积的两倍，

$$V = 2\int_D f(x,y)dA = 2\int_D \sqrt{R^2-x^2-y^2} dA.$$

根据区域 D 和函数 f 的特征，我们用极坐标来计算. 这样

$$V = 2\int_D f(x,y)dA = 2\int_D \sqrt{R^2-r^2} r dr d\theta.$$

现在把它化为累次积分. 注意到，极角的范围是 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$，而给定角度 θ 之后，极径的范围是 $[0, R\cos\theta]$，所以

$$\begin{aligned} V &= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{R\cos\theta} \sqrt{R^2-r^2} r dr \right) d\theta = \frac{2R^3}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - |\sin\theta|^3\right) d\theta \\ &= \frac{4R^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - (\sin\theta)^3\right) d\theta = \frac{4R^3}{3} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right). \end{aligned}$$

我们还可以得到一个有趣的推论. 由于球的体积是 $\frac{4}{3}\pi R^3$，所以挖去两个维维安尼体之后的体积是 $\frac{16}{9}R^3$，它的系数是有理数. □

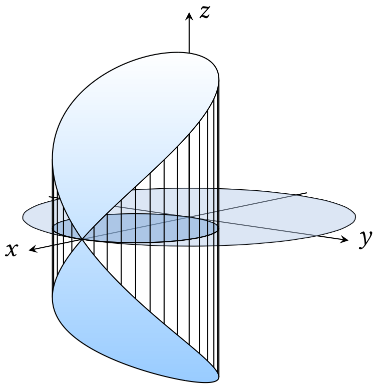


图 1.8. Viviani 体

例 1.3.6 证明 Gauss 积分公式 $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

证明. 记 $I(R)=\int_{-R}^{R}e^{-x^2}dx$, $R>0$. 那么 $I=\lim_{R\to+\infty}I(R)$. 下面我们用重积分的办法来估计 $I(R)$. 因为定积分的值与积分变量的符号无关，所以

$$[I(R)]^2=\int_{-R}^{R}e^{-x^2}dx\cdot\int_{-R}^{R}e^{-y^2}dy.$$

记 $D_R=[-R,R]\times[-R,R]$，利用 Fubini 定理，上式右端可以写成重积分

$$\int_{-R}^{R}e^{-x^2}dx\cdot\int_{-R}^{R}e^{-y^2}dy=\int_{D_R}e^{-(x^2+y^2)}dA.$$

极坐标对于函数 $e^{-(x^2+y^2)}$ 是合适的，但是对区域 D_R 并不合适，下面我们对区域进行放缩. 记 $B_\rho=\{(x,y)|x^2+y^2\le\rho^2\}$，那么 $B_R\subset D_R\subset B_{\sqrt{2}R}$，由于被积函数大于零，所以

$$\int_{B_R}e^{-(x^2+y^2)}dA\le\int_{D_R}e^{-(x^2+y^2)}dA\le\int_{B_{\sqrt{2}R}}e^{-(x^2+y^2)}dA.$$

现在我们用极坐标来计算圆上的积分

$$\begin{aligned}\int_{B_\rho}e^{-(x^2+y^2)}dA&=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\rho}e^{-r^2}rdr\right)d\theta\\&=\int_0^{2\pi}d\theta\cdot\int_0^{\rho}e^{-r^2}rdr=\pi(1-e^{-\rho^2}).\end{aligned}$$

所以,

$$\pi(1-e^{-R^2})\le[I(R)]^2=\int_{D_R}e^{-(x^2+y^2)}dA\le\pi(1-e^{-2R^2}).$$

令 $R\to+\infty$，即得 $I^2=\pi$，进而 $I=\sqrt{\pi}$. □

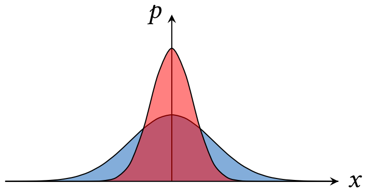


图 1.9. 正态分布又名 Gauss 分布，是非常重要的一种统计模型. 期望为 μ、标准差为 σ 的正态分布密度函数是

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

根据 Gauss 积分公式，易知

$$\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)dx=1.$$

图中所示两条曲线的 μ 均为 0，σ 分别是 0.5 和 0.25.

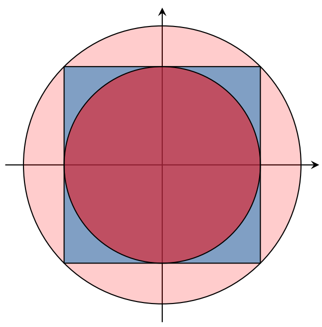


图 1.10. 正方形可以用内切圆和外接圆夹逼.

1.4 三重积分

三重积分的概念

三重积分基本精神与二重积分是一致的. 其实，依照二重积分可以直接写出 n 重积分的定义, 但为了避免符号的繁琐，我们仅简单介绍三重积分.

设 f 在长方体 $Q=[a,b]\times[c,d]\times[u,v]$ 上有定义. 作划分

$$a=x_0<\cdots<x_n=b,\ c=y_0<\cdots<y_m=b,\ u=z_0<\cdots<z_l=v.$$

相应地, 得到 Q 的一个划分 $G=\{Q_{ijk}\}$，其中

$$Q_{ijk}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]\times[z_{j-1},z_j].$$

任取点 $P_{ijk}\in Q_{ijk}$, 得采样点集 $P=\{P_{ijk}\}$, f 的 RIemann 和为

$$R(f,G,P)=\sum_{i,j,k}f(P_{ijk})\Delta x_i\Delta y_j\Delta z_k.$$

三重积分定义为

$$\int_Q f dV = \lim_{\|G\|\to 0} R(f, G, P).$$

若上述极限存在，则称 f 在 Q 上**可积**，记作 $f \in R(Q)$.

设 $\Omega \subset Q$, 若 χ_Ω 在 Q 上可积，则称 Ω **可求体积**, 其**体积**定义为

$$V(\Omega) := \int_Q \chi_\Omega dV.$$

进一步可以定义可求体积集上的积分

$$\int_\Omega f dV = \int_Q f \chi_\Omega dV.$$

如果把 Ω 看做一个空间物体，把 f 看做 Ω 的密度函数，那么上述积分就是 Ω 的**质量**. 这一观点非常有助于理解三重积分，之后我们会经常使用.

在直角坐标系中，通常也把**体积微元** dV 记作 $dxdydz$，把三重积分写做

$$\int_\Omega f(x, y, z) dxdydz.$$

三重积分性质与二重积分基本相同，比如线性性、绝对值不等式、中值定理等结果在三重积分里仍然成立. 此处不再赘述.

Fubini 定理

重积分的核心算法是利用 Fubini 定理把它化为累次积分. 三重积分 Fubini 定理的证明与二重积分是雷同的，下面我们只给出结果.

Fubini 定理 (III)

设 f 在长方体区域 $Q = [a, b] \times [c, d] \times [u, v]$ 上连续,记 $R = [a, b] \times [c, d]$, 那么

$$\int_Q f(x, y, z) dV = \int_u^v \left(\int_R f(x, y, z) dA_{xy} \right) dz \tag{4.1}$$

$$= \int_R \left(\int_u^v f(x, y, z) dz \right) dA_{xy} \tag{4.2}$$

$$= \int_u^v \left(\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y, z) dx \right) dy \right) dz. \tag{4.3}$$

这里 dA_{xy} 表示 xy 平面上的面积元素，在没有歧义的情况下也可简记为 dA.

公式 (4.1) 和 (4.2) 分别称为**截面法公式**和**柱线法公式**. 如果把 f 看做密度函数，那么可以从物体质量的角度来理解上述公式.

- **截面法公式**. 用竖坐标为 z 的平面去截长方体，所得截面的质量是 $m(z) = \int_R f(x, y, z) dA_{xy}$，再将所有截面的质量累加，就得到立体的质量 $m = \int_u^v m(z) dz$.

- **柱线法公式**. 过点 $(x,y,0)$ 且平行于 z 轴的直线含在 Q 内的部分是一条线段，它的质量是 $m(x,y)=\int_u^v f(x,y,z)dz$. 把所有这些线段的质量累加就得到物体的质量 $m=\int_R m(x,y)dA_{xy}$.
- 把公式 (4.1) 的内层二重积分化为二次积分，就可以得到公式 (4.3).

如果按 x 轴或 y 轴做截面或柱线，可以得到类似的公式. 所以，按不同方向公式 (4.1) 和 (4.2) 各有 3 种，而按不同的积分次序三次积分 (4.3) 有 6 种.

利用上述定理,我们可以直接计算长方体区域上的积分.

例 1.4.1 计算 $I=\int_Q xyz^2dV$, 其中 $Q=[0,1]\times[1,2]\times[-1,1]$.

解. 根据 Fubini 定理，有

$$
\begin{aligned}
I&=\int_{-1}^{1}\left(\int_{1}^{2}\left(\int_{0}^{1}xyz^2dx\right)dy\right)dz=\int_{-1}^{1}\left(\int_{1}^{2}\left(\frac{1}{2}x^2yz^2|_{x=0}^{1}\right)dy\right)dz\\
&=\int_{-1}^{1}\left(\int_{1}^{2}\frac{1}{2}yz^2dy\right)dz=\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{4}y^2z^2|_{y=1}^{2}\right)dz\\
&=\int_{-1}^{1}\frac{3}{4}z^2dz=\frac{1}{4}z^3|_{z=-1}^{1}=\frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

事实上，此处被积函数变量分离，我们可以把三次积分直接写为

$$
I=\int_0^1 xdx\cdot\int_1^2 ydy\cdot\int_{-1}^{1}z^2dz=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{2}.
$$

□

类似于二重积分，长方体区域上的 Fubini 定理也能推广到更一般的区域上. 先来考虑**柱形区域**

$$
\Omega=\{(x,y,z)|(x,y)\in D,\varphi_1(x,y)\le z\le\varphi_2(x,y)\},
$$

这里 D 是平面上的有界闭区域，叫做 Ω 的**投影区域**，而 φ_1 和 φ_2 则是定义在 D 上的连续函数. 此时，可重新表示 Fubini 定理的柱线法公式.

Fubini 定理 (IV) （柱线法）

设 f 在区域 $\Omega=\{(x,y,z)|(x,y)\in D,\varphi_1(x,y)\le z\le\varphi_2(x,y)\}$ 上连续，那么

$$
\int_\Omega f(x,y,z)dV=\int_D\left(\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)}f(x,y,z)dz\right)dA_{xy}.
$$

如果柱体的方向平行于 x 轴或 y 轴，也有类似的公式，留作练习.

例 1.4.2 计算 $I=\int_\Omega xdV$, 其中 Ω 是平面 $x+2y+z=1$ 与三个坐标平面围成的四面体.

解. 闭区域 Ω 可以看做沿 z 方向的柱体，其投影区域

$$D=\{(x,y)|x\le 0, y\ge 0, x+2y\le 1\}$$

由直线 $x=0, y=0, x+2y=1$ 围成. 这个柱体的顶曲面是 $\varphi_2(x,y)=1-x-2y$，它的底曲面是 $\varphi_1(x,y)=0$. 于是，根据柱线法公式，有

$$I=\int_D\left(\int_0^{1-x-2y}xdz\right)dA=\int_D x(1-x-2y)dA.$$

然后，我们可以用二重积分的 Fubini 定理来计算右端的积分.

$$\begin{aligned}\int_D x(1-x-2y)dA&=\int_0^1\left(\int_0^{\frac{1}{2}(1-x)}x(1-x-2y)dy\right)dx\\&=\frac{1}{4}\int_0^1(x-2x^2+x^3)dx=\frac{1}{48}.\end{aligned}$$

因此，所求积分 $I=\frac{1}{48}$. 注意到 Ω 也可以看做 x 方向或 y 方向的柱体，读者也可以用这两种角度来计算积分. □

在熟练的情况下，上题化累次积分的过程可以写为一步

$$I=\int_0^1\left(\int_0^{\frac{1}{2}(1-x)}\left(\int_0^{1-x-2y}xdz\right)dy\right)dx.$$

一般地，如果柱体的投影区域是 x 型区域，那么它可以写做

$$\Omega=\{(x,y,z)|a\le x\le b,\psi_1(x)\le y\le\psi_2(x),\varphi_1(x,y)\le z\le\varphi_2(x,y)\}.$$

这样，Ω 上的三重积分可以直接化为三次积分.

$$\int_\Omega f(x,y,z)dV=\int_a^b\left(\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)}\left(\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)}f(x,y,z)dz\right)dy\right)dx.$$

如果柱体的投影区域是 y 型区域

$$\Omega=\{(x,y,z)|c\le y\le d,\phi_1(y)\le x\le\phi_2(y),\varphi_1(x,y)\le z\le\varphi_2(x,y)\}.$$

那么，Ω 上的三重积分可以写为

$$\int_\Omega f(x,y,z)dV=\int_c^d\left(\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)}\left(\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)}f(x,y,z)dz\right)dx\right)dy.$$

除了柱体之外，另一种常见的立体是**夹在两个平行平面间的几何体**，用与上下两个平面平行的平面去截它，得到的都是二维连通区域. 所以，这种立体可以表示为

$$\Omega=\{(x,y,z)|u\le z\le v,(x,y)\in D_z\}.$$

这里 D_z 就是用竖坐标为 z 的平面截 Ω 所得的二维区域（在 xy 平面上的投影）. 此时，可以重写 Fubini 定理的截面法公式.

Fubini 定理 (V) （截面法）

设 f 在区域 $\Omega = \{(x,y,z) | u \le z \le v, (x,y) \in D_z\}$ 上连续，那么

$$\int_\Omega f(x,y,z)dV = \int_u^v \left(\int_{D_z} f(x,y,z)dA_{xy} \right) dz.$$

例 1.4.3 计算 $I = \int_\Omega z^2 dV$, 其中 Ω 是椭球 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1$.

解. 易知，Ω 夹在 $z = -c$ 和 $z = c$ 之间，并且截面 $D_z = \{(x,y) | \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1 - \frac{z^2}{c^2}\}$. 所以

$$I = \int_{-c}^c \left(\int_{D_z} z^2 dA \right) dz = \int_{-c}^c z^2 \cdot \pi ab \left(1 - \frac{z^2}{c^2} \right) dz = \frac{4}{15}\pi abc^3.$$

对称地，也可得到 $\int_\Omega x^2 dV = \frac{4}{15}\pi a^3 bc$ 及 $\int_\Omega y^2 dV = \frac{4}{15}\pi ab^3 c$. □

例 1.4.4 牟合方盖是两个半径相同的圆柱体垂直相交的部分，即 $M = \{(x,y,z) | y^2 + z^2 \le R^2, z^2 + x^2 \le R^2\}$. 试计算 M 的体积.

解. 如图所示，牟合方盖位于 $z = -R$ 和 $z = R$ 之间，垂直与 z 轴的截面 D_z 是正方形，其边长为 $2\sqrt{R^2 - z^2}$. 所以

$$\begin{aligned} V = \int_M dV &= \int_{-R}^R \left(\int_{D_z} dA \right) dz = \int_{-R}^R A(D_z) dz \\ &= \int_{-R}^R 4(R^2 - z^2) dz = \frac{16}{3} R^3. \end{aligned}$$

□

三重积分的坐标变换

假设 u, v, w 是空间中的另一个坐标系，它与直角坐标系的关系可以写做

$$\boldsymbol{r}(u,v,w) = (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)).$$

如果用 u, v, w 坐标曲面划分空间，那么对 u, v, w 取微小增量 $\Delta u, \Delta v, \Delta w$ 后形成的六面体近似可以看做一个由 $\boldsymbol{r}_u \Delta u$,$\boldsymbol{r}_v \Delta v$ 和 $\boldsymbol{r}_w \Delta w$ 确定的平行六面体，它的体积为

$$\Delta V \approx |[\boldsymbol{r}_u \Delta u, \boldsymbol{r}_v \Delta v, \boldsymbol{r}_w \Delta w]| = |[\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v, \boldsymbol{r}_w]| \Delta u \Delta v \Delta w.$$

注意到右端的混合积就是雅可比行列式

$$[\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v, \boldsymbol{r}_w] = \det(J_r) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)},$$

所以在 uvw 坐标系中体积微元可以写为

$$dV = |\det(J_{\boldsymbol{r}})|dudvdw = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| dudvdw.$$

故而，下面的**三重积分坐标变换公式**是自然的.

$$\int_{\boldsymbol{r}(Q)} f(x,y,z)dxdydz = \int_Q f(\boldsymbol{r}(u,v,w)) \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| dudvdw$$

例 1.4.5 求椭球体 $\Omega = \{(x,y,z)|\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$ 的体积.

解. 根据三重积分的定义，体积为 $V = \int_\Omega dV$. 做坐标变换

$$x = au, \quad y = bv, \quad z = cw.$$

则雅可比行列式

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = abc.$$

此时 u,v,w 的变化范围是 $S = \{(u,v,w)|u^2+v^2+w^2 \leq 1\}$. 根据坐标变换公式，有

$$V = \int_S abc\, dudvdw = abc \int_{u^2+v^2+w^2\leq 1} dudvdw = \frac{4}{3}\pi abc.$$

□

柱坐标系计算三重积分

所谓的**柱面坐标系**就是把直角坐标系里的横坐标和纵坐标表达为极坐标，而竖坐标保持不变. 换言之，空间直角坐标系与柱面坐标系之间的变换公式是

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ z = z. \end{cases}$$

这里 (x,y,z) 是点的直角坐标，(r,θ,z) 是它的**柱面坐标**. 柱面坐标系中三个坐标的变化范围是

$$0 \leq r < +\infty, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty.$$

在柱面坐标系下，r 为常数的点集构成以 z 轴为轴的圆柱面，θ 为常数的点集构成过 z 轴的半平面，而 z 为常数的点集构成与 xy 平面平行的平面. 它们互相正交. 直接计算表明

柱坐标体积元公式

$$dV = rdrd\theta dz.$$

事实上，也能直观地看出此公式. 由于坐标曲面互相正交，所以由 r,θ,z 各取微小增量 $\Delta r, \Delta\theta, \Delta z$ 形成的小柱体近似是个长方体，它底面的两条

边长分别是 Δr 和 $r\Delta\theta$，它的高是 Δz. 于是，这个小柱体的体积近似为 $\Delta V \approx r\Delta r\Delta\theta\Delta z$.

例 1.4.6 计算 $I = \int_\Omega z dV$，其中 Ω 是曲面 $z = x^2 + y^2$ 和平面 $z = 4$ 围成的有界闭区域.

解. 化为极坐标之后，所求积分为

$$I = \int_\Omega zrdrd\theta dz.$$

为了将其化为累次积分，我们用截面法来确定范围. 注意到 z 的范围是 $0 \le z \le 4$. 如果用竖坐标为 z 的平面截 Ω, 那么 x, y 的范围是 $x^2 + y^2 \le z$, 写为极坐标就是

$$0 \le r \le \sqrt{z},\ \ 0 \le \theta \le 2\pi.$$

所以，重积分可化为

$$\int_\Omega zrdrd\theta dz = \int_0^4 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\sqrt{z}} zrdr \right) d\theta \right) dz = \frac{64}{3}\pi.$$

也可以用柱线法来做. 注意到 Ω 的投影区域是 $x^2 + y^2 \le 4$，换做极坐标就是

$$0 \le r \le 2,\ \ 0 \le \theta \le 2\pi.$$

过 (r, θ) 做柱线，易知 Ω 中的点的竖坐标变化范围是

$$r^2 \le z \le 4.$$

这样，重积分也可以写做

$$\int_\Omega zrdrd\theta dz = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 \left(\int_{r^2}^4 zrdz \right) dr \right) d\theta = \frac{64}{3}\pi.$$

可以看到，柱面坐标法的本质就是把截面法或柱线法得到的二重积分化为极坐标. □

球面坐标系计算三重积分

相对于柱面坐标系而言，把直角坐标系变成球面坐标系可以说是真正的三维空间的坐标变换.

我们知道半径为 R 的球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 可以用经度纬度参数化

$$x = R\sin\varphi\cos\theta,\ y = R\sin\varphi\sin\theta,\ z = R\cos\varphi.$$

如果让 R 遍历 $[0, +\infty)$，那么这族球面就会扫过空间中每个点. 因此，我们可以这样来描述空间中的点：该点位于以原点为球心、以 ρ 为半径的球面上，方向是 $(\sin\varphi\cos\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\varphi)$. 也就是说，我们可以用 ρ, φ, θ 来确定空间中的点

$$\begin{cases} x = \rho\sin\varphi\cos\theta, \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta, \\ z = \rho\cos\varphi. \end{cases}$$

这就是直角坐标系与**球面坐标系**的变换公式，其中 (ρ,φ,θ) 称为点的**球面坐标**，它们的变化范围是

$$0 \le \rho < +\infty,\ \ 0 \le \varphi \le \pi,\ \ 0 \le \theta \le 2\pi.$$

球面坐标系的三组坐标曲面也是相互正交的，它们分别是 ρ 为常数的球面、φ 为常数的锥面以及 θ 为常数的半平面. 根据它们的正交性，用它们划分区域之后，每块小区域可以近似看做长方体. 考虑由 ρ,φ,θ 各取微小增量 $\Delta\rho,\Delta\varphi,\Delta\theta$ 所形成的近似长方体，它的径向长度是 $\Delta\rho$，沿经线长度是 $\rho\Delta\varphi$，沿纬线长度 $\rho\sin\varphi\Delta\theta$，所以它的体积近似为

$$\Delta V \approx \rho^2 \sin\varphi \Delta\rho\Delta\varphi\Delta\theta.$$

这与用 Jacobi 行列式计算的结果是一致的.

球坐标体积元公式
$$dV = \rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta.$$

比较适用球坐标计算的区域是**曲顶圆锥体**

$$\Omega = \{(\rho,\varphi,\theta) | 0 \le \varphi \le \alpha,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le \rho \le \rho(\varphi,\theta)\}$$

其中 $\rho = \rho(\varphi,\theta)$ 就是锥体的顶曲面. 曲顶圆锥体上的积分可以化为

$$\begin{aligned}&\int_\Omega F(\rho,\varphi,\theta)\rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta \\ &\qquad = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\alpha}\left(\int_0^{\rho(\varphi,\theta)} F(\rho,\varphi,\theta)\rho^2\sin\varphi d\rho\right)d\varphi\right)d\theta.\end{aligned}$$

特别地，如果 $\alpha = \pi$，那么 Ω 就是包含原点的一张封闭曲面围成的区域. 比如以原点为球心、R 为半径的球可以写做

$$B_R = \{(\rho,\varphi,\theta) | 0 \le \varphi \le \pi,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le \rho \le R\},$$

它的体积可以按如下方式计算

$$\begin{aligned}V(B_R) = \int_{B_R} dV &= \int_{B_R} \rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\left(\int_0^{R}\rho^2\sin\varphi d\rho\right)d\varphi\right)d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi \cdot \int_0^R \rho^2 d\rho = \frac{4}{3}\pi R^3.\end{aligned}$$

下面再来看一个例子.

例 1.4.7 设半径为 R 的球面与半顶角为 α 的内接锥面所围成的立体的体积.

解. 建立直角坐标系，把球面置于 $x^2+y^2+(z-R)^2 = R^2$，把锥面置于 $z = \cot\alpha\sqrt{x^2+y^2}$. 所求区域是个曲顶圆锥体，它的顶曲面是球面，这

个球面的球面坐标方程是

$$\rho = 2R\cos\varphi.$$

根据锥面的半顶角，可以把区域写为

$$\Omega = \{(\rho,\varphi,\theta)|0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le \varphi \le \alpha,\ 0 \le \rho \le 2R\cos\varphi\}.$$

所以，该立体的体积是

$$\begin{aligned}
V(\Omega) = \int_\Omega dV &= \int_\Omega \rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^\alpha\left(\int_0^{2R\cos\varphi}\rho^2\sin\varphi d\rho\right)d\varphi\right)d\theta \\
&= 2\pi\cdot\int_0^\alpha\left(\int_0^{2R\cos\varphi}\rho^2\sin\varphi d\rho\right)d\varphi \\
&= 2\pi\cdot\int_0^\alpha\left(\frac{8R^3}{3}(\cos\varphi)^3\sin\varphi\right)d\varphi \\
&= \frac{4\pi R^3}{3}\left(1-(\cos\alpha)^4\right).
\end{aligned}$$

读者可以尝试用柱面坐标和直角坐标来计算此体积，进而体会不同坐标系的便捷程度. □

1.5 重积分的应用

二重积分可以用来计算曲顶柱体的体积、平面薄板的质量，三重积分可以用来计算空间物体的质量. 本节中我们讨论重积分更多的应用.

曲面的面积

设曲面 Σ 是连续可偏导函数 $f(x,y)$ 的图像 $\boldsymbol{r}(x,y) = (x,y,f(x,y))$, $(x,y)\in D$. 用平行于坐标轴的直线网把 D 分为若干的小区域，除了边界部分外，大部分小区域是矩形. 以这些小矩形的边界为准线做平行与 z 轴的柱面，这些柱面把曲面 Σ 划分为若干的小曲面片. 考虑 (x,y) 取增量 $(\Delta x,\Delta y)$ 对应的小矩形截下的四边形曲面片. 这个小曲面片的四个顶点是 $\boldsymbol{r}(x,y),\boldsymbol{r}(x+\Delta x,y),\boldsymbol{r}(x,y+\Delta y),\boldsymbol{r}(x+\Delta x,y+\Delta y)$. 根据可微性

$$\boldsymbol{r}(x+\Delta x,y)-\boldsymbol{r}(x,y)\approx r_x(x,y)\Delta x,\quad \boldsymbol{r}(x,y+\Delta y)-\boldsymbol{r}(x,y)\approx r_y(x,y)\Delta y,$$

所以，这个四边形曲面片近似可以看做由 $\boldsymbol{r}_x\Delta x$ 和 $\boldsymbol{r}_y\Delta y$ 确定的平行四边形，从而它的面积 $\Delta A\approx|(\boldsymbol{r}_x\Delta x)\times(\boldsymbol{r}_y\Delta y)|$. 因为

$$\boldsymbol{r}_x\times\boldsymbol{r}_y = \begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 0 & f_x\\ 0 & 1 & f_y\end{vmatrix} = -f_x\boldsymbol{i}-f_y\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k},$$

所以

$$\Delta A\approx|\boldsymbol{r}_x\times\boldsymbol{r}_y|\Delta x\Delta y = \sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}\,\Delta x\Delta y.$$

故而，曲面 Σ 的面积可以近似看做

$$A(\Sigma) \approx \sum_{i,j} \sqrt{1 + f_x^2(x_i, y_j) + f_y^2(x_i, y_j)}\, \Delta x_i \Delta y_j.$$

也就是说，曲面 Σ 的面积可以表示为二重积分.

函数图像的面积

设曲面 Σ 是定义在 D 上的连续可偏导函数 f 的图像，那么它的**面积**是

$$A(\Sigma) = \int_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dxdy.$$

换言之，**曲面的面积元**是

$$dA = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dxdy.$$

例 1.5.1 计算半径为 R 的球面的面积.

解. 上半球面是函数 $f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 的图像. 直接计算可得

$$\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

因此，上半球面的面积为

$$A_+ = \int_{x^2+y^2 \leq R^2} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dxdy.$$

注意到右端被积函数无界，所以是个反常的二重积分，应当看做 $x^2 + y^2 \leq a^2$ 上的积分，再令 $a \to R^-$ 即可. 即便如此，我们仍然可以用极坐标来计算它.

$$\begin{aligned} A_+ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2 - r^2}} r dr \right) d\theta \\ &= 2\pi R \cdot \int_0^R \frac{1}{\sqrt{R^2 - r^2}} r dr = 2\pi R^2. \end{aligned}$$

所以整个球面的面积是 $A = 2A_+ = 4\pi R^2$. □

前面关于函数图像面积的推导方法对参数曲面也是适用的. 假设 Σ 是参数曲面

$$\boldsymbol{r}(u, v) = x(u, v)\boldsymbol{i} + y(u, v)\boldsymbol{j} + z(u, v)\boldsymbol{k}, \quad (u, v) \in Q.$$

按照 u 线 v 线可以把曲面划分为若干小曲面片，每个小曲面片可以近似的看做 $\boldsymbol{r}_u \Delta u$ 和 $\boldsymbol{r}_v \Delta v$ 确定的平行四边形的，所以面积近似为 $\Delta A \approx |(\boldsymbol{r}_u \Delta u) \times (\boldsymbol{r}_v \Delta v)|$. 若记夹角 $\langle \boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v \rangle = \theta$，则有

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|^2 = |\boldsymbol{r}_u|^2 |\boldsymbol{r}_v|^2 \sin^2\theta &= |\boldsymbol{r}_u|^2 |\boldsymbol{r}_v|^2 - |\boldsymbol{r}_u|^2 |\boldsymbol{r}_v|^2 \cos^2\theta \\ &= |\boldsymbol{r}_u|^2 |\boldsymbol{r}_v|^2 - |\boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{r}_v|^2. \end{aligned}$$

习惯上，我们记

$$E = \boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{r}_u,\quad F = \boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{r}_v,\quad G = \boldsymbol{r}_v \cdot \boldsymbol{r}_v.$$

于是

$$\Delta A \approx |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|\Delta u\Delta v = \sqrt{EG - F^2}\,\Delta u\Delta v.$$

因此，曲面 Σ 的面积可近似为

$$A(\Sigma) \approx \sum_{i,j} \sqrt{E(u_i, v_j)G(u_i, v_j) - F^2(u_i, v_j)}\,\Delta u_i\Delta v_j.$$

所以, 参数曲面的面积可以看做参数区域 Q 上的二重积分.

参数曲面的面积

设曲面 Σ 的参数化是 $\boldsymbol{r}(u, v) \in C^1(Q; \mathbb{R}^3)$，则其面积是

$$A(\Sigma) = \int_Q |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| dudv = \int_Q \sqrt{EG - F^2}\,dudv.$$

等价地，参数曲面的面积元是

$$dA = |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| dudv = \sqrt{EG - F^2}\,dudv.$$

例 1.5.2 假设地球是半径为 R 的标准球体. 试计算南纬 30° 以北区域的面积.

解. 我们用球面的参数化

$$\boldsymbol{r} = (R\sin\varphi\cos\theta, R\sin\varphi\sin\theta, R\cos\varphi).$$

所求区域的参数范围是

$$0 \le \varphi \le \frac{2}{3}\pi,\quad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

直接计算易得

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_\varphi &= (R\cos\varphi\cos\theta, R\cos\varphi\sin\theta, -R\sin\varphi),\\
\boldsymbol{r}_\theta &= (-R\sin\varphi\sin\theta, R\sin\varphi\cos\theta, 0).
\end{aligned}$$

进而

$$E = \boldsymbol{r}_\varphi \cdot \boldsymbol{r}_\varphi = R^2,\quad F = \boldsymbol{r}_\varphi \cdot \boldsymbol{r}_\theta = 0,\quad G = \boldsymbol{r}_\theta \cdot \boldsymbol{r}_\theta = R^2(\sin\varphi)^2.$$

所以，南纬 30° 以北区域的面积是

$$\begin{aligned}
A &= \int_S \sqrt{EG - F^2}\,d\varphi d\theta\\
&= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{2}{3}\pi} R^2 \sin\varphi d\varphi \right) d\theta = 3\pi R^2.
\end{aligned}$$

□

质心

设有一平面薄片，占有 xy 平面上的闭区域 D，它在点 (x,y) 处的面密度为 $\rho(x,y)$. 把 D 划分为小区域 $D_j(j=1,\cdots,N)$，每块的面积记为 ΔA_j，. 在每块上任取采样点 $P_j(x_j,y_j)\in D_j$, 那么 D_j 的质量 $\Delta m_j \approx \rho(x_j,y_j)\Delta A_j$，它对 x 轴和 y 轴的**静矩**（**一阶矩**）分别为

$$y_j\rho(x_j,y_j)\Delta A_j,\quad x_j\rho(x_j,y_j)\Delta A_j.$$

因此，整块薄片对 x 轴和 y 轴的**静矩**分别是

$$M_x = \lim_{d\to 0}\sum_j y_j\rho(x_j,y_j)\Delta A_j = \int_D y\rho(x,y)dA,$$
$$M_y = \lim_{d\to 0}\sum_j x_j\rho(x_j,y_j)\Delta A_j = \int_D x\rho(x,y)dA.$$

而薄片的总质量是

$$m = \lim_{d\to 0}\sum_j \rho(x_j,y_j)\Delta A_j = \int_D \rho(x,y)dA.$$

所谓**质心**，就是把质量集中在该点时，产生的静矩与 (??) 和 (??) 相等. 也就是说，薄片的质心 $(\bar{x},\bar{y})$ 应满足 $M_x=\bar{y}m, M_y=\bar{x}m$. 把质量和静矩代入，就得到质心公式.

平面薄片的质心

$$\bar{x}=\frac{M_y}{m}=\frac{\int_D x\rho(x,y)dA}{\int_D \rho(x,y)dA},\quad \bar{y}=\frac{M_x}{m}=\frac{\int_D y\rho(x,y)dA}{\int_D \rho(x,y)dA}.$$

如果薄片密度均匀,即 ρ 为常数,那么质心就是区域的**形心**.

平面区域的形心

$$\bar{x}=\frac{1}{A(D)}\int_D x\,dA,\quad \bar{y}=\frac{1}{A(D)}\int_D y\,dA.$$

例 1.5.3 有一块以 $(0,0),(1,0),(0,2)$ 为顶点的三角形薄片，它的密度函数是 $\rho(x,y)=1+3x+y$. 求它的质心.

解. 这块三角形区域 D 由直线 $x=0, y=0, y=2-2x$ 围成. 所以这块薄片的质量为

$$m=\int_D(1+3x+y)dA=\int_0^1\left(\int_0^{2-2x}(1+3x+y)dy\right)dx$$
$$=4\int_0^1(1-x^2)dx=\frac{8}{3}.$$

它的两个静矩是

$$
\begin{aligned}
M_y &= \int_D x(1+3x+y)dA = \int_0^1 \left(\int_0^{2-2x} x(1+3x+y)dy \right) dx \\
&= 4\int_0^1 (x-x^3)dx = 1, \\
M_x &= \int_D y(1+3x+y)dA = \int_0^1 \left(\int_0^{2-2x} y(1+3x+y)dy \right) dx \\
&= \frac{2}{3}\int_0^1 (7-9x-3x^2+5x^3)dx = \frac{11}{6}.
\end{aligned}
$$

这样，根据质心公式可得质心为 $(\bar{x},\bar{y}) = \frac{1}{m}(M_y, M_x) = (\frac{3}{8}, \frac{11}{16})$. □

例 1.5.4 求位于两圆 $r = 2\cos\theta$ 和 $r = 4\cos\theta$ 之间的区域的形心.

解. 两圆所夹区域记为 D，它的面积 $A(D) = 3\pi$. 根据对称性，容易发现形心的纵坐标 $\bar{y} = 0$. 它的横坐标为

$$
\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{1}{A(D)}\int_D x dA = \frac{1}{3\pi}\int_D r\cos\theta r dr d\theta \\
&= \frac{1}{3\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{2\cos\theta}^{4\cos\theta} r^2\cos\theta dr \right) d\theta \\
&= \frac{56}{9\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^4 d\theta = \frac{112}{9\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^4 d\theta.
\end{aligned}
$$

利用 Wallis 公式，得 $\bar{x} = \frac{7}{3}$. 所以区域的形心是 $(\frac{7}{3}, 0)$. □

仿照平面区域的讨论，也可以推导出三维物体的质心和三维区域的形心，我们直接给出它们的公式.

空间物体的质心

$$
\bar{x} = \frac{\int_\Omega x\rho(x,y,z)dV}{\int_\Omega \rho(x,y,z)dV},\ \bar{y} = \frac{\int_\Omega y\rho(x,y,z)dV}{\int_\Omega \rho(x,y,z)dV},\ \bar{z} = \frac{\int_\Omega z\rho(x,y,z)dV}{\int_\Omega \rho(x,y,z)dV}.
$$

空间区域的形心

$$
\bar{x} = \frac{1}{V(\Omega)}\int_\Omega x\,dV,\ \bar{y} = \frac{1}{V(\Omega)}\int_\Omega y\,dV,\ \bar{z} = \frac{1}{V(\Omega)}\int_\Omega z\,dV.
$$

例 1.5.5 求均匀的半椭球体 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1 (z \ge 0)$ 的质心.

解. 把半椭球体记作 Ω，质心记为 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$. 根据对称性，易知 $\bar{x} = \bar{y} = 0$.

下面计算 $\bar{z}$. 我们知道 Ω 的体积是 $\frac{2}{3}\pi abc$，静矩是

$$\begin{aligned}\int_\Omega z dV &= \int_0^c \left(\int_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1-\frac{z^2}{c^2}} z dx dy \right) dz \\ &= \int_0^c z\cdot \pi ab(1-\frac{z^2}{c^2}) dz = \frac{1}{4}\pi abc^2.\end{aligned}$$

所以质心的竖坐标是 $\bar{z} = (\frac{1}{4}\pi abc^2)/(\frac{2}{3}\pi abc) = \frac{3}{8}c$, 它与 a, b 无关. □