回顾：动力学研究对象：质点、质点系、刚体

质点：牛顿三定律（质点运动微分方程）

描述整个质点系运动特征的一些物理量：动量、动量矩、动能

质点系动力学：研究质点系整体运动特征量（动量、动量矩和动能）的变化与作用力间的关系。

主要内容

- **质点系的动量定理**
- **质点系的动量矩定理**
- **质点系的动能定理**

第十章　动量定理

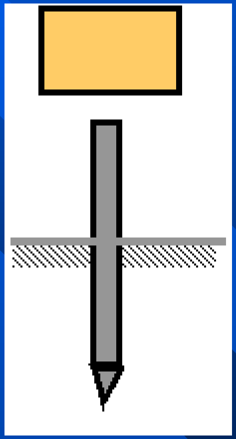
§　10-1　动量、冲量与动量定理

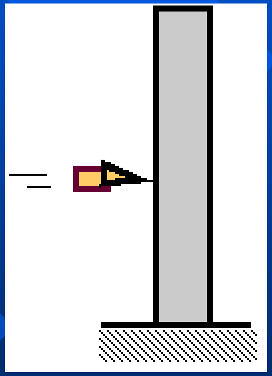
一、动量和冲量

动量——表征物体机械运动强度的一种度量。

质点的动量 —— 质点的质量与质点速度的乘积，称为质点的动量。

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{\upsilon}$$





mv

其中，v为绝对速度。

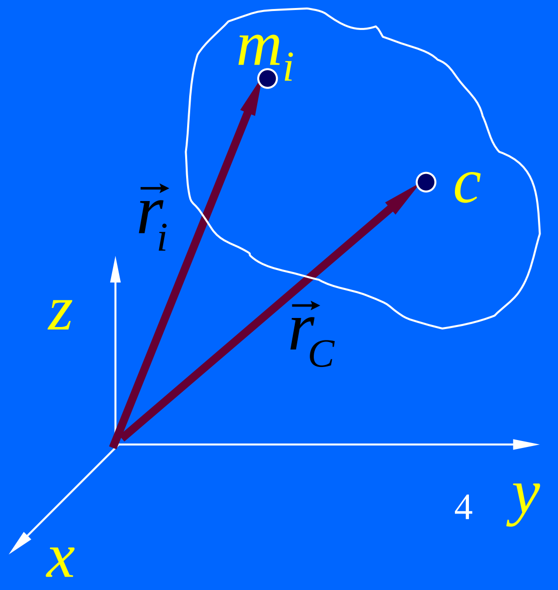
动量是矢量，其方向与质点的速度方向相同。动量在坐标轴上的投影是代数量。

质点系的动量——各质点动量的矢量和，称为质点系的动量。

$$\vec{p} = \mathrm{m}_1\vec{\upsilon}_1 + \mathrm{m}_2\vec{\upsilon}_2 + \cdots + \mathrm{m}_n\vec{\upsilon}_n = \sum \mathrm{m}_i\vec{\upsilon}_i$$

设质点系由n个质点组成，其中第i个质点的质量为m_i，矢径为$\vec{r}_i$，则质点系的质量中心（质心）C的坐标为

$$\vec{r}_\mathrm{C} = \frac{\sum \mathrm{m_i}\,\vec{r}_\mathrm{i}}{\mathrm{m}}$$



显然，均质物体的质心与形心相重合。在地球表面附近，质点系的质心与重心相重合。

$$m\vec{r}_C = \sum m_i \vec{r}_i$$

$$\vec{r}_C = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m}$$

将上式对时间求导数

$$m\frac{d\vec{r}_C}{dt} = m\vec{\upsilon}_C = \sum m_i \vec{\upsilon}_i = \vec{p}$$

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon}_C$$

$$\begin{cases} p_x = \sum_{i=1}^{n} m_i v_{ix} = mv_{cx} \\ p_y = \sum_{i=1}^{n} m_i v_{iy} = mv_{cy} \\ p_z = \sum_{i=1}^{n} m_i v_{iz} = mv_{cz} \end{cases}$$

即质点系的动量等于质点系的总质量与质心速度的乘积。

质点系的动量——各质点动量的矢量和，称为质点系的动量。

$$\boxed{\vec{p}=\mathrm{m}_1\vec{\upsilon}_1+\mathrm{m}_2\vec{\upsilon}_2+\cdots+\mathrm{m}_n\vec{\upsilon}_n=\sum \mathrm{m}_i\vec{\upsilon}_i=m\vec{\upsilon}_C}$$

对于刚体系，应用分割法的思想，则有

$$\vec{p}=\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_{Ci}$$

式中 $\vec{v}_{Ci}$ 表示第i个刚体质心的速度。

冲量——力在一段时间内的累积效应。

设作用于质点（系）的力$\boldsymbol{F}$，作用时间为t，则该力在这段时间内的冲量定义为

常力作用的情况：

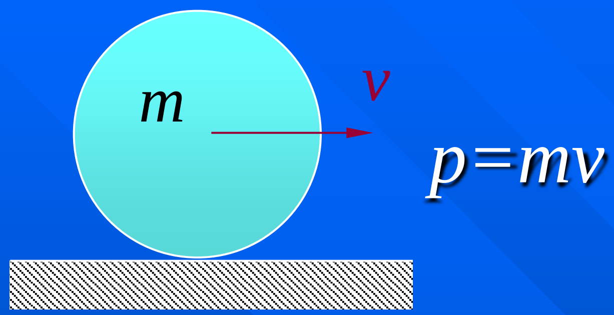
$$\vec{I} = \vec{F}\,\mathrm{t}$$

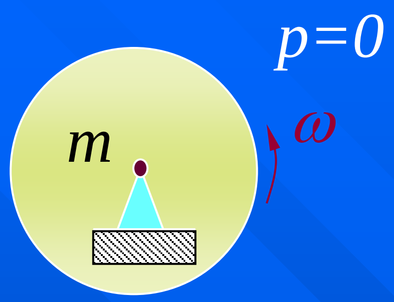
变力作用的情况：

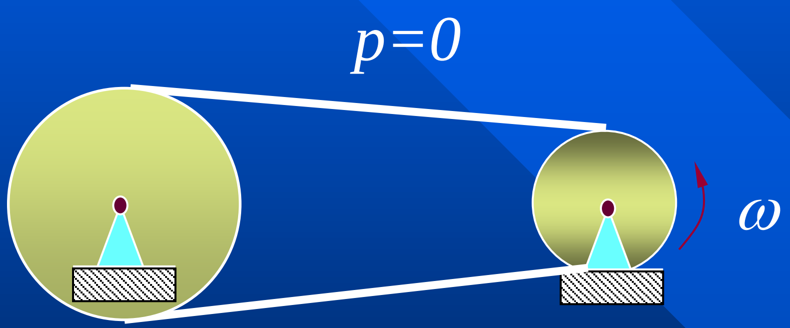
$$\vec{I} = \int_{\mathrm{t}_1}^{\mathrm{t}_2} \vec{F}\,\mathrm{dt}$$

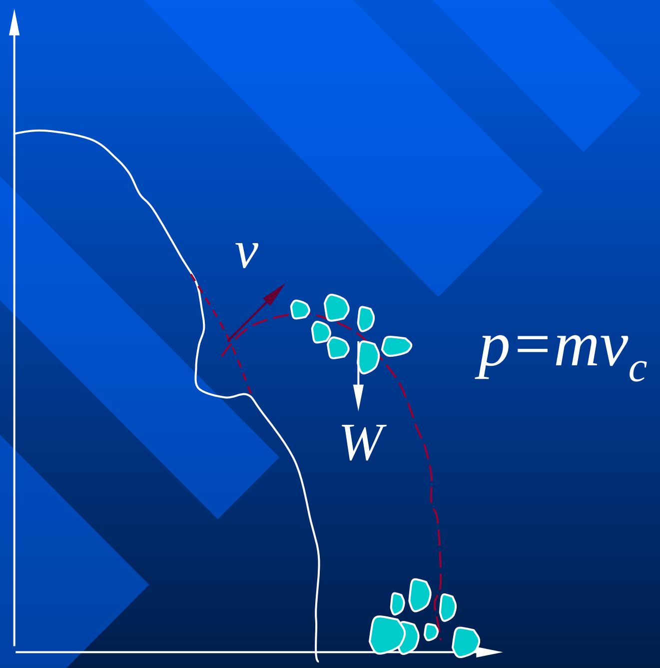
冲量的量纲与动量一致，$d\vec{I} = \vec{F}dt$ 称为元冲量。

例　求下例图所示物体的动量。



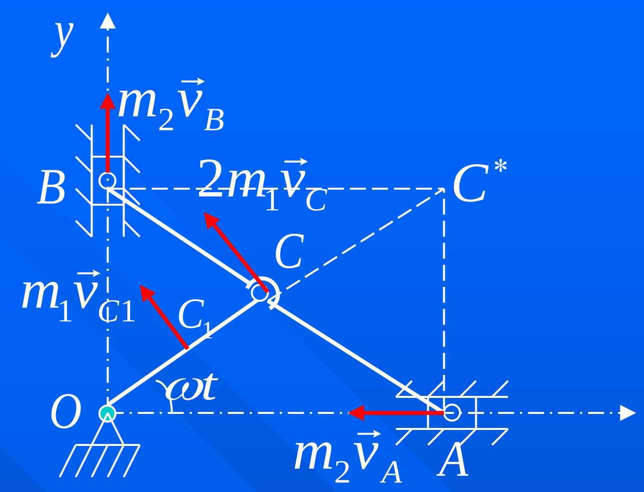






例2、椭圆规机构的规尺AB的质量为$2m_1$，曲柄OC的质量为m_1，滑块A和B的的质量均为m_2。已知$OC=AC=CB=l$。曲柄和规尺均为均质细直杆。

曲柄以角速度ω转动。求机构在如图位置处的动量。



解1：由质点系动量公式有

$$\vec{p}=2m_1\vec{v}_C+m_1\vec{v}_{C1}+m_2\vec{v}_A+m_2\vec{v}_B$$

建立如图直角坐标系，则动量的投影为

$$p_x=-2m_1v_C\sin\omega t-m_1v_{C1}\sin\omega t-m_2v_A$$

$$=-2m_1l\omega\sin\omega t-m_1\frac{l\omega}{2}\sin\omega t-m_2 2l\omega\sin\omega t$$

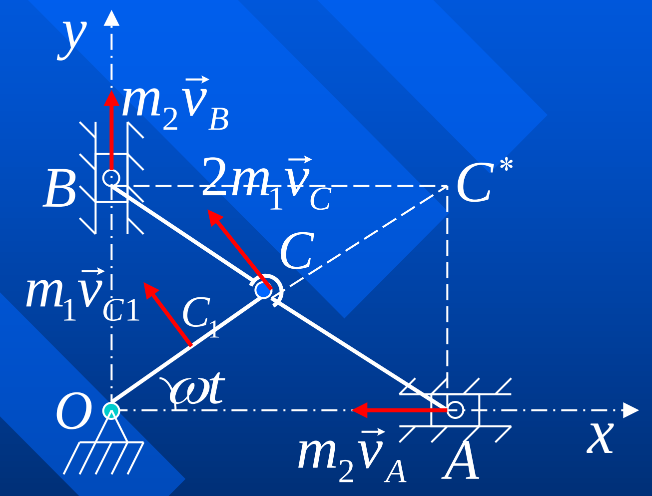
$$=-\frac{l\omega}{2}(5m_1+4m_2)\sin\omega t$$

$$p_y = 2m_1 v_C \cos\omega t + m_1 v_{C1}\cos\omega t + m_2 v_B$$
$$= 2m_1 l\omega\cos\omega t + m_1\frac{l\omega}{2}\cos\omega t + m_2 2l\omega\cos\omega t$$
$$= \frac{l\omega}{2}(5m_1 + 4m_2)\cos\omega t$$

所以机构动量的大小和方向为

$$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} = \frac{l\omega}{2}(5m_1 + 4m_2)$$

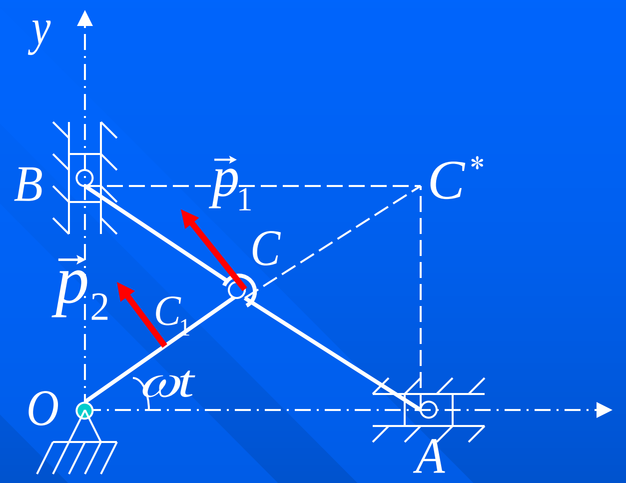
$$\cos(\vec{p},\vec{i}) = \cos\frac{p_x}{p} = \sin\omega t$$



解2：

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_{AB} + \vec{p}_A + \vec{p}_B = 2(m_1 + m_2)\vec{v}_C$$

$$\vec{p}_2 = \vec{p}_{OC} = m_1\vec{v}_{C1}$$



$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_{AB} + \vec{p}_A + \vec{p}_B + \vec{p}_{OC}$$

$$= 2(m_1 + m_2)\vec{v}_C + m_1\frac{\vec{v}_C}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(5m_1 + 4m_2)\vec{v}_C$$

因为 $v_C = l\omega$

得

$$p = \frac{1}{2}(5m_1 + 4m_2)l\omega$$

方向为**C**点速度的方向。

例3、两均质杆*OA*和*AB*质量为*m*，长为*l*，铰接于*A*。图示位置时，*OA*杆的角速度为ω，*AB*杆的角速度亦为ω。求此瞬时系统的动量。

解：由刚体系统的动量公式

$$\vec{p} = m_1\vec{v}_{C_1} + m_2\vec{v}_{C_2}$$

其中：

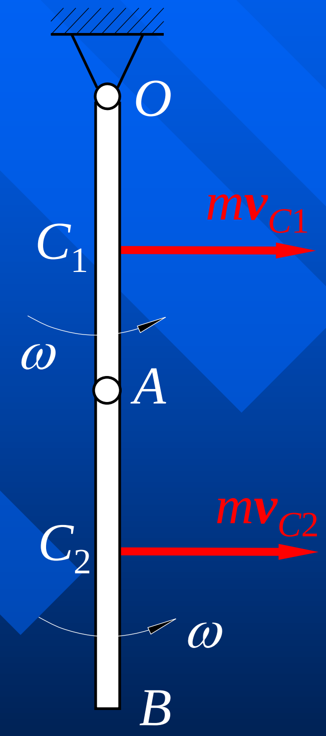
$$v_{C_1} = \frac{l}{2}\omega$$

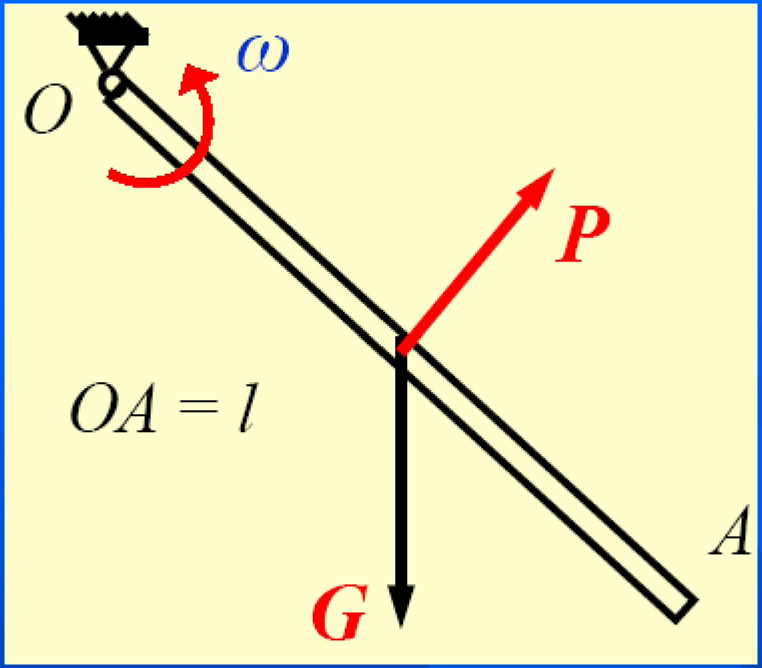
*AB*作平面运动 $\vec{v}_{C_2} = \vec{v}_A + \vec{v}_{C_2A}$

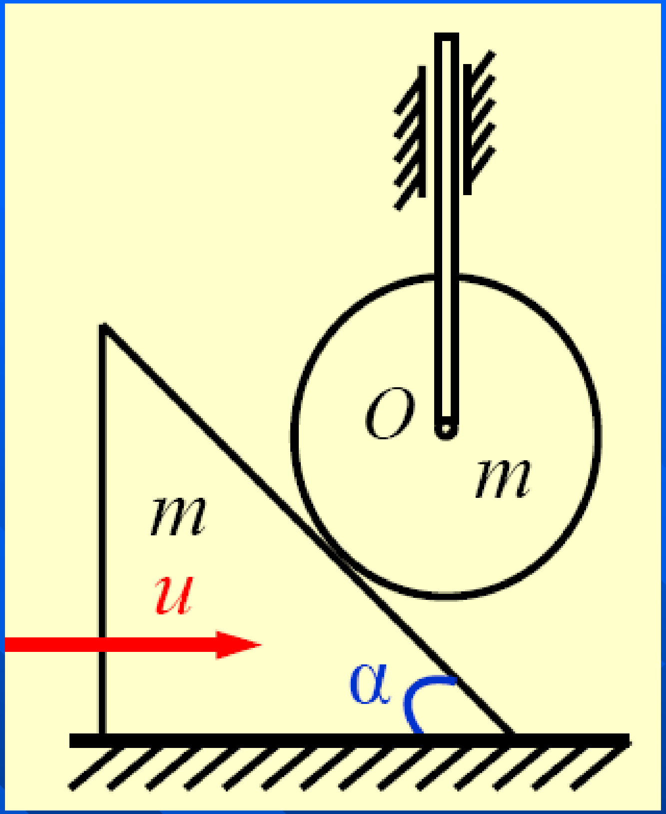
$$v_{C_2} = l\omega + \frac{l}{2}\omega = \frac{3}{2}l\omega$$

$$p = m\frac{l}{2}\omega + m\frac{3}{2}l\omega = 2ml\omega$$

方向水平向右。



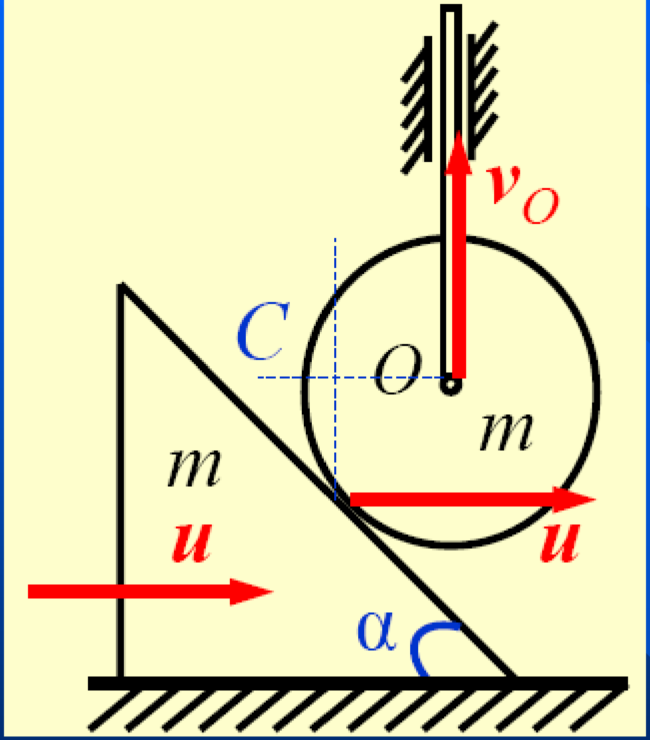


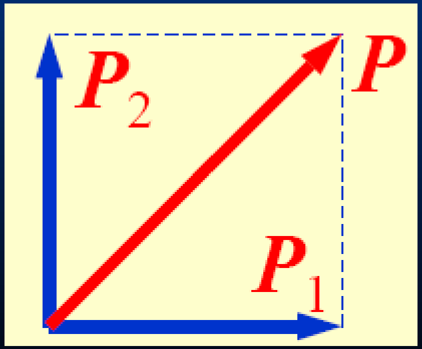


$$p=\frac{ml\omega}{2}=\frac{Gl\omega}{2g}$$

例．已知m，u，α，杆重不计，圆盘沿斜面纯滚动，试求系统的动量。

例．已知m，u，α，杆重不计，圆盘相对于斜面沿其纯滚动， 试求系统的动量。





解：斜面平动，斜面的动量大小为

$$p_1 = mu$$

圆盘作平面运动，瞬心为C。如图有

$$v_O = u$$

圆盘的动量大小为：

$$p_2 = mu$$

系统的动量大小为：

$$p = \sqrt{2}mu$$

二、质点系的动量定理

设质点系由 n 个质点所组成，将每一个质点所受的力分为外力的合力 $\boldsymbol{F}_i$，内力的合力 $\boldsymbol{F}_i^*$。

对于每一个质点

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{m}_i\vec{\upsilon}_i)=\vec{F}_i+\vec{F}_i^* \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

对 n 个方程求和

$$\sum\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{m}_i\vec{\upsilon}_i)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sum\mathrm{m}_i\vec{\upsilon}_i)=\sum\vec{F}_i+\sum\vec{F}_i^*$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\sum\vec{F}_i}$$

质点系的动量定理——质点系动量对时间的变化率等于

（微分形式）　　质点系所受的外力系的矢量和。

投影式

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t} = \sum\limits_{i=1}^{n} F_{ix}^{(\mathrm{e})} \\ \dfrac{\mathrm{d}p_y}{\mathrm{d}t} = \sum\limits_{i=1}^{n} F_{iy}^{(\mathrm{e})} \\ \dfrac{\mathrm{d}p_z}{\mathrm{d}t} = \sum\limits_{i=1}^{n} F_{iz}^{(\mathrm{e})} \end{cases}$$

微分形式

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\sum\vec{F}_i$$

积分形式

$$\vec{p}_2-\vec{p}_1=\sum\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}_i\mathrm{d}t=\sum\vec{I}_i$$

质点系的动量定理——在某个力学过程中，质点系动量的增
（积分形式）　　　　　量等于质点系所受外力冲量的矢量和。
（冲量定理）

冲量定理

投影形式:

$$p_{2x}-p_{1x}=\Sigma m_i v_{2x}-\Sigma m_i v_{1x}=\int_{t_1}^{t_2}\Sigma F_{ix}\mathrm{d}t=\sum I_{ix},$$

$$p_{2y}-p_{1y}=\Sigma m_i v_{2y}-\Sigma m_i v_{1y}=\int_{t_1}^{t_2}\Sigma F_{iy}\mathrm{d}t=\sum I_{iy},$$

$$p_{2z}-p_{1z}=\Sigma m_i v_{2z}-\Sigma m_i v_{1z}=\int_{t_1}^{t_2}\Sigma F_{iz}\mathrm{d}t=\sum I_{iz},$$

讨 论

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\sum\vec{F}_i$$

（1）若恒有 $\sum\vec{F}_i=0$，那么 $\vec{p}_2=\vec{p}_1$ ，即

$$\sum m_i\vec{\upsilon}_i=\text{常矢量}$$

——质点系的动量守恒定理

若作用于质点系的外力矢量和恒等于零，则质点系的动量保持为常量。

$$\frac{\mathrm{d}P_x}{\mathrm{d}t}=\sum F_{ix}$$

（2）若恒有 $\sum \boldsymbol{F}_{ix}=0$，则 $\boldsymbol{p}_{2x}=\boldsymbol{p}_{1x}$，即

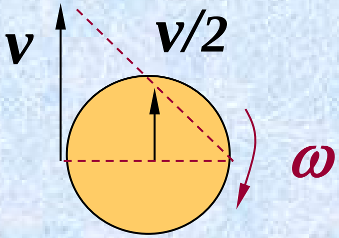
$$\sum m_i\upsilon_{ix}=\text{常量}$$

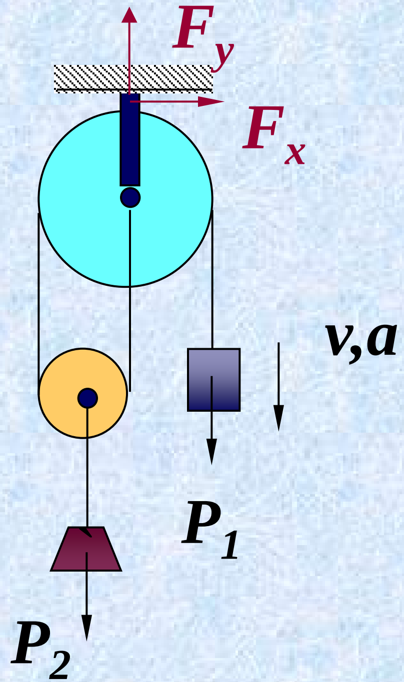
——质点系的动量守恒定理

若作用于质点系的外力系的主矢在某坐标轴上的投影恒等于零，则该质点系的动量在同一轴上的投影保持不变——质点系的动量在该坐标轴方向守恒。

例：图示为起吊机构，已知吊装物体的重量P_1、P_2及P_1下落的加速度a，不计轮子的重量与半径，求支座处的约束反力。

解：将整个系统作为研究对象





$$\frac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t}=\sum F_x=F_x=0$$

$$\frac{\mathrm{d}p_y}{\mathrm{d}t}=\sum F_y$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-\frac{P_1}{g}v+\frac{P_2}{g}\frac{v}{2}\right)=-P_1-P_2+F_y$$

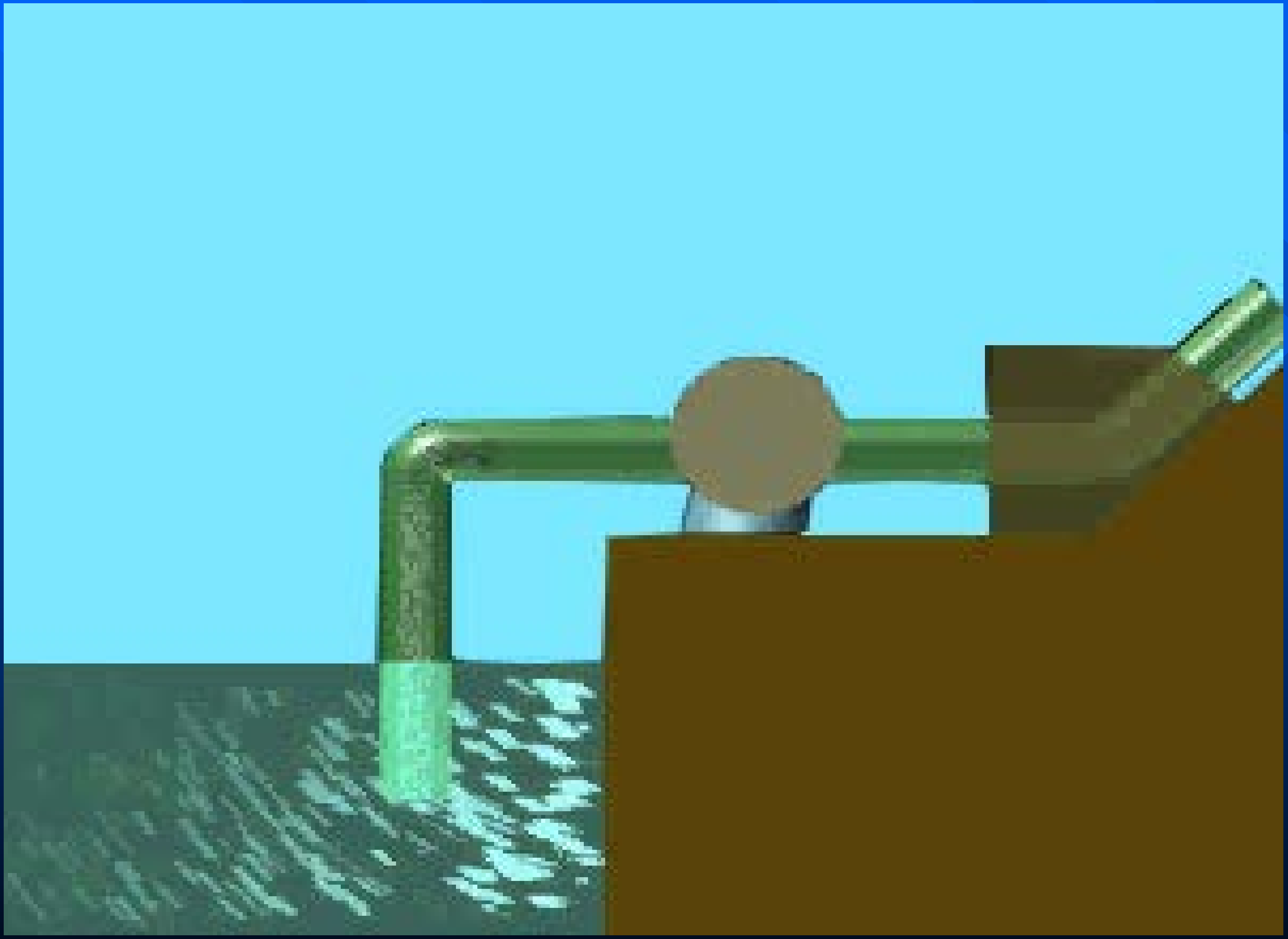
$$F_y=\underline{P_1+P_2}-\underline{\frac{2P_1-P_2}{2g}a}$$

约束反力= 静反力 + 附加 动反力

§ 10-2 质点系动量定理的应用

质点系动量定理的应用

——流体在管道中流动时的附加动压力问题



质点系动量定理的应用

——流体在管道中流动时的附加动压力问题

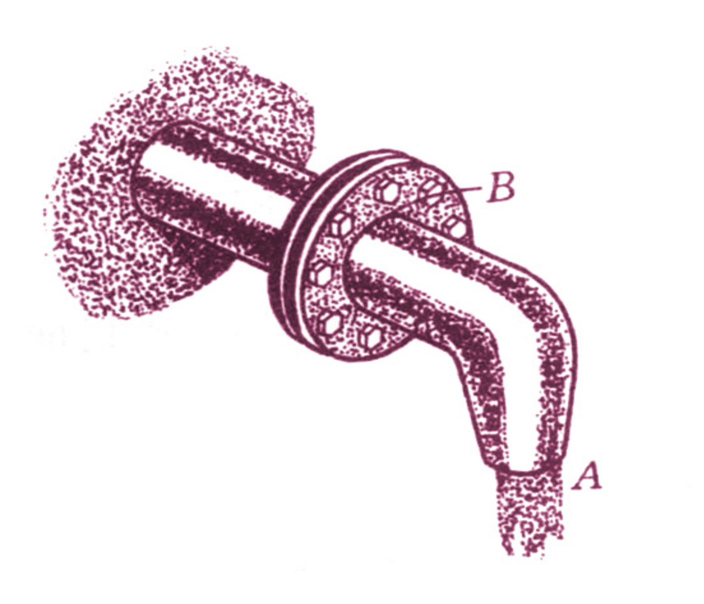
设：流体是理想的、不可压缩的，

流动是定常的。　　流体密度 ρ

体积流量 q_v

定常流动：管道内每点的压强、速度、密度等都不随时间改变的流动。

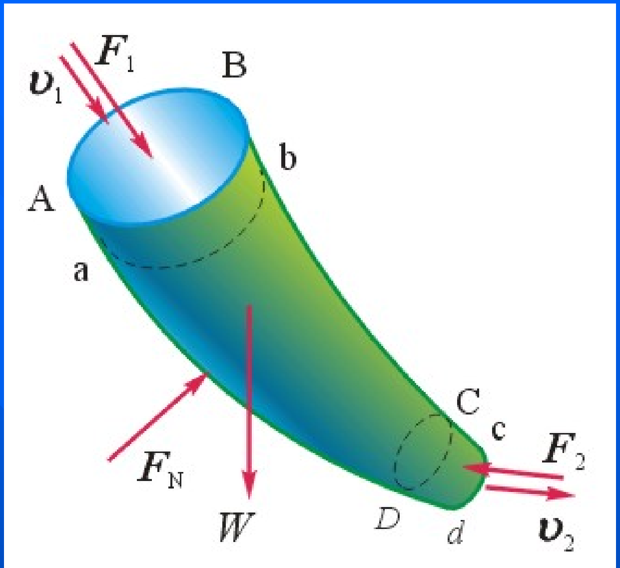
体积流量：流体在单位时间内流经管内任一横截面的流体体积。



特点：

1、速度分布不随时间而变。2、流进和流出管道的流量相等。

以弯曲管道*ABCD*段流体为研究对象，考虑在 d*t* 时间内该段流体动量的变化。



$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_{abcd} - \vec{p}_{ABCD}$$

$$= \left(\underline{\vec{p}_{abCD}} + \vec{p}_{CDdc}\right) - \left(\vec{p}_{ABba} + \underline{\vec{p}_{abCD}}\right)$$

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_{CDdc} - \vec{p}_{ABba}$$

设进口和出口截面处流体速度为 $\vec{v}_1$、$\vec{v}_2$

$$\vec{p}_{ABba} = \rho q_v \Delta t\, \vec{v}_1$$
$$\vec{p}_{CDdc} = \rho q_v \Delta t\, \vec{v}_2$$

$\Longrightarrow$

$$\Delta\vec{p} = \rho q_v \Delta t\left(\vec{v}_2 - \vec{v}_1\right)$$

动量对时间的变化率为

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \rho q_v\left(\vec{v}_2 - \vec{v}_1\right)$$

动量对时间的变化率为

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}=\rho q_v(\vec{\upsilon}_2-\vec{\upsilon}_1)$$

由动量定理

$$\rho qv(\vec{\upsilon}_2-\vec{\upsilon}_1)=\vec{W}+\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_N$$ ——欧拉方程

其中，F_N为管壁反力。

$$\vec{F}_N=\rho q_v(\vec{v}_2-\vec{v}_1)-(\vec{W}+\vec{F}_1+\vec{F}_2)$$

由此可见，管壁反力可分成两部分：静反力和附加动反力。

$$\vec{F}_{Nd}=\rho q_v(\vec{v}_2-\vec{v}_1)$$

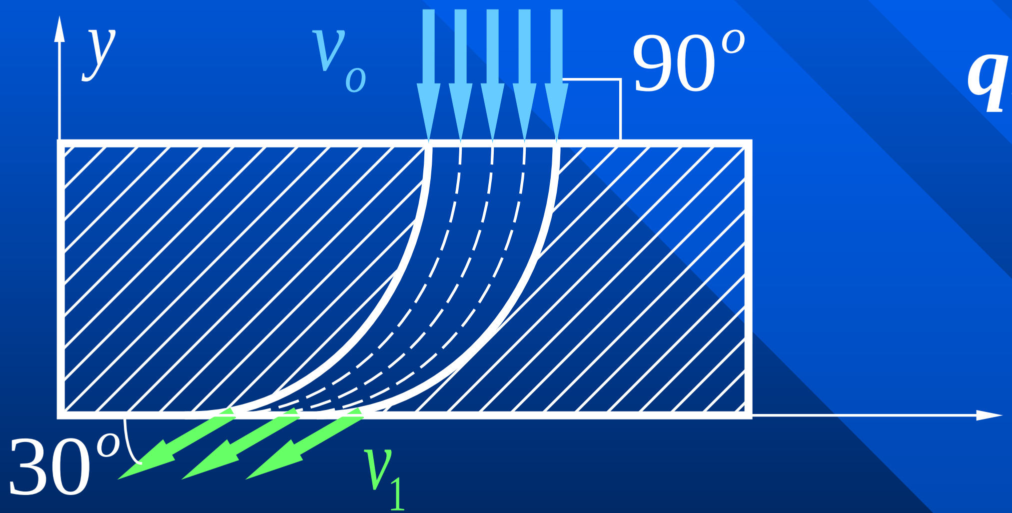
——流体在管道中流动时的附加动反力

流体在管道中流动时对管壁的附加动压力F^*是其反作用力。

$$\vec{F}^*=\rho q_v(\vec{v}_1-\vec{v}_2)$$

其中 ρ为流体密度,q_v为体积流量，$q_v=S_1v_1=S_2v_2$。S_1和 S_2 分别是截面1、2的面积。$\vec{v}_1$，$\vec{v}_2$ 是流体流经截面1、2时的速度。

例　　水流流经固定水道。水道截面逐渐改变，并为对称截面，如图所示。水流入的速度v_o=2m/s，水道进口处横截面积为0.02m^2，水流出的速度v_1=4m/s，方向如图所示。假设水是不可压缩的，水流是定常的。试求水流作用在水道壁上的水平压力。



$$\vec{F}^* = \rho q_v(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)$$

解：建坐标系如图

$$q_v = v_o A_o = v_1 A_1$$

$$= 2\times 0.02 = 0.04m^3/s$$

$$v_{o_x} = 0 \qquad v_{1_x} = -2\sqrt{3}(m/s)$$

$$F_x = q_v\rho(v_{0x} - v_{1x})$$

$$= 80\sqrt{3}\,(N)$$