同济大学课程考核试卷

2023—2024 学年第二学期

命题教师签名：　　　　　　　　　　审核教师签名：

课号：50005900024　　课名：数学分析(下)　　考试考查：考试

此卷选为：期中考试(　)、期终考试(　)、重考(　)试卷

年级 一 班级号______ 学号______ 姓______ 任课教师 李雨生

题号	一	二
得分		

(注意：本试卷共两大题，9 小题，3 大张，满分 100 分．考试时间为 90 分钟．所有解答和证明题要求写出解题过程，否则不予计分)

89

一、计算题（40 分）

1. (10 分) 设 $z = x^2 \ln y, x = \frac{u}{v}, y = 3u - 2v$, 求 $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$.

$$\frac{\partial z}{\partial u} = Z_x X_u + Z_y Y_u = 2x\ln y \cdot \frac{1}{v} + \frac{x^2}{y} \cdot 3 = \frac{2u}{v^2}\ln(3u-2v) + \frac{3u^2}{(3u-2v)v^2}$$

10

$$\frac{\partial z}{\partial v} = Z_x X_v + Z_y Y_v = 2x\ln y\left(-\frac{u}{v^2}\right) + \frac{x^2}{y}(-2) = -2\frac{u^2}{v^3}\ln(3u-2v) - 2\frac{u^2}{(3u-2v)v^2}$$

2. (10 分) 计算 $f(x,y,z) = xyz$ 在沿点 $A(5,1,2)$ 到点 $B(9,4,14)$ 的方向 $\overrightarrow{AB}$ 上的方向导数.

$\overrightarrow{AB} = \vec{n} = (4,3,12)$ $\begin{cases} \cos\alpha = \frac{4}{13} \\ \cos\beta = \frac{3}{13} \\ \cos\gamma = \frac{12}{13} \end{cases}$

10

$\begin{cases} f_x = yz & f_x(5,1,2) = 2 \\ f_y = xz & f_y(5,1,2) = 10 \\ f_z = xy & f_z(5,1,2) = 5 \end{cases}$

$$f_{\vec{n}} = f_x\cos\alpha + f_y\cos\beta + f_z\cos\gamma = \frac{4}{13}yz + \frac{3}{13}xz + \frac{12}{13}xy$$

$$= \frac{98}{13}$$

3. （10 分）（1）计算曲面$z=\arctan\frac{y}{x}$在点$\left(1,1,\frac{\pi}{4}\right)$切平面方程和法线方程;

(2)计算曲线$2x^2+3y^2+z^2=9, z^2=3x^2+y^2$在点$(1,-1,2)$处的切线和法平面.

(1) 切平面 $z-z_0=\frac{-y_0}{x_0^2+y_0^2}(x-x_0)+\frac{x_0}{x_0^2+y_0^2}(y-y_0)$

$\Rightarrow z-\frac{\pi}{4}=-\frac{1}{2}(x-1)+\frac{1}{2}(y-1) \Rightarrow y-x-2z+\frac{\pi}{2}=0$

法向量 $\vec{n}=(-1,1,-2)$ 法线 $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-\frac{\pi}{4}}{-2}$

10

(2) $\begin{cases}4x\,dx+6y\,dy+2z\,dz=0\\ 6x\,dx+2y\,dy-2z\,dz=0\end{cases}$ 法向量分别为 $\begin{cases}(2x,3y,z)=(2,-3,2)=\vec{n}_1\\ (3x,y,-z)=(3,-1,-2)=\vec{n}_2\end{cases}$

则切向量 $\vec{l}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 2 & -3 & 2\\ 3 & -1 & -2\end{vmatrix}=(8,10,7)$ 则切线 $\frac{x-1}{8}=\frac{y+1}{10}=\frac{z-2}{7}$

法平面 $8(x-1)+10(y+1)+7(z-2)=0$

4. （10 分）计算$f(x,y)=e^{2x}(x+y^2+2y)$的极值.

$f_x(x,y)=e^{2x}(2x+2y^2+4y+1)=0$
$f_y(x,y)=e^{2x}(2y+2)=0$ $\Rightarrow \begin{cases}x=\frac{1}{2}\\ y=-1\end{cases}$

$f_{xx}(x,y)=e^{2x}(4x+4y^2+8y+4)$ $f_{xx}(\frac{1}{2},-1)=2e>0$

$f_{yy}(x,y)=2e^{2x}$ $f_{yy}(\frac{1}{2},-1)=2e$

$f_{yx}(x,y)=4(y+1)e^{2x}$ $f_{yx}(\frac{1}{2},-1)=0$

$\Rightarrow (f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2)>0.$ $f_{xx}>0$ 则极小值为 $f(\frac{1}{2},-1)=-\frac{1}{2}e$

无极大

10.

二、简答与证明题（60 分）

1. （10 分）方程 $xy + z\ln y + e^{xz} = 1$ 在点 $(0,1,1)$ 的某邻域内能否确定出某一个变量为另外两个变量的函数？若能，请给出证明；若不能，请说明理由.

10

能 ①显然，$F(x,y,z) = xy + z\ln y + e^{xz} - 1$ 在 $(0,1,1)$ 某邻域内连续

② $F(0,1,1)=0$ ③ $F_x = y + ze^{xz}$，$F_y = x + \frac{z}{y}$ $F_z = \ln y + xe^{xz}$ 在 $(0,1,1)$ 邻域内连续

$(y+ze^{xz})dx + (x+\frac{z}{y})dy + (\ln y + xe^{xz})dz = 0$

$\Rightarrow 2dx + dy + 0dz = 0$

$F_x = 2$ $F_y = 1$. $F_z = 0$ 则 x 可以写作 y,z 的函数 $dx = -\frac{1}{2}dy + 0dz$

y 可以写作 x,z 函数. $dy = -2dx + 0dz$

但 $F_z=0$，则 z 不可写作 x,y 的函数.

2. （10 分）计算函数 $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ 在条件

$$ax + by + cz = 1 \quad (a,b,c > 0)$$

下的最小值.

$L(x,y,z,\lambda) = x^2+y^2+z^2 + \lambda(ax+by+cz-1)$

10

$$\begin{cases} L_x = 2x + \lambda a = 0 \\ L_y = 2y + \lambda b = 0 \\ L_z = 2z + \lambda c = 0 \\ L_\lambda = ax+by+cz = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = k$

$\Rightarrow (a^2+b^2+c^2)k = 1$ $k = \frac{1}{a^2+b^2+c^2}$

$$\begin{cases} x_0 = \frac{a}{a^2+b^2+c^2} \\ y_0 = \frac{b}{a^2+b^2+c^2} \\ z_0 = \frac{c}{a^2+b^2+c^2} \end{cases}$$

显然 $ax+by+cz=1$ 时 $f(x,y,z)$ 无最大值，有最小值，则唯一极值点即为最小值.

$f(x_0,y_0,z_0) = \frac{a^2+b^2+c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2} = \frac{1}{a^2+b^2+c^2}$

3. （14 分）已知下述等式成立

$$\int_0^{+\infty} e^{-at^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}a^{-\frac{1}{2}}\quad (a>0),$$

(1) 证明 $\int_0^{+\infty} t^2e^{-at^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{4}a^{-\frac{3}{2}}$；

(2) 计算积分 $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-a^2x^2}-e^{-b^2x^2}}{x^2}dx$；

(1) $\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}dx$ 令 $x=at^2\Rightarrow dx=2at\,dt\Rightarrow\Gamma(s)=2a^s\int_0^{+\infty}t^{2s-1}e^{-at^2}dt$

由题可得 $\Gamma(\frac{1}{2})=2a^{\frac{1}{2}}\int_0^{+\infty}e^{-at^2}dt=2a^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}a^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{\pi}$

$\int_0^{+\infty}t^2e^{-at^2}dt=\frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{2a^{\frac{3}{2}}}=\frac{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}{2a^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{\pi}}{4}a^{-\frac{3}{2}}$

10

(2) $\frac{e^{-a^2x^2}-e^{-b^2x^2}}{x^2}=\int_{a^2}^{b^2}e^{-yx^2}dy$

原 $=\int_0^{+\infty}dx\int_{a^2}^{b^2}e^{-yx^2}dy$

① e^{-yx^2} 连续，且 $|e^{-yx^2}|<|e^{-a^2x^2}|$ 而 $\int_0^{+\infty}e^{-a^2x^2}dx$ 收敛，

则由M判别法 $\int_0^{+\infty}e^{-yx^2}dx$ 在 $[a^2,b^2]$ 一致收敛，则积分次序可交换

原 $=\int_{a^2}^{b^2}dy\int_0^{+\infty}e^{-yx^2}dx=\int_{a^2}^{b^2}\frac{\sqrt{2}}{2}y^{-\frac{1}{2}}dy=\sqrt{2}\sqrt{y}\Big|_{a^2}^{b^2}=\sqrt{2}(b-a)$

4. (14 分) 设 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=e^t+2t, \\ y=\sin t-t, \end{cases}$ 确定，

(1) 计算 $\frac{d^2y}{dx^2}$;

(2) 任取 $x_0\in\mathbb{R}$, 定义 $x_{n+1}=y(x_n)\ (n\geq 0)$，证明 $\{x_n\}$ 收敛.

7

(1) $\frac{dy}{dt}=\cos t-1 \quad \frac{dx}{dt}=e^t+2$

$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{\cos t-1}{e^t+2}$

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\cos t-1}{e^t+2}\right)=\frac{d1}{\frac{dx}{dt}}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\cos t-1}{e^t+2}\right)$

$=\frac{1}{e^t+2}\cdot\frac{-\sin t(e^t+2)-e^t(\cos t-1)}{(e^t+2)^2}=-\frac{e^t(\sin t+\cos t-1)+2\sin t}{(e^t+2)^2}$

(2) $\frac{dy}{dx}=\frac{\cos t-1}{e^t+2}\leq 0$，$y$关于$x$单减，且$y$与$x$一一对应，$y$关于$t$单减

$\frac{dx}{dt}=e^t+2>0$ 则 $x(t)$单增，任取$x_0\in R \Longleftrightarrow$ 任取 $t_0\in R$

则有一x_n对应一t_n，证明 x_n收敛 $\rightleftharpoons$ 证明 t_n收敛.

$x_{n+1}=y(x_n) \rightleftharpoons e^{t_{n+1}}+2t_{n+1}=\sin t_n-t_n \rightleftharpoons x(t_{n+1})=y(t_n)$

若$\{t_n\}$收敛 $\lim\limits_{n\to\infty}t_n=t$ 则 $e^t+2t=\sin t-t \quad e^t+3t-\sin t=0$

令$\varphi(t)=e^t+3t-\sin t \quad \varphi'(t)=e^t+3-\cos t>0 \quad \varphi(t)$单增 $\varphi(-\frac{\pi}{2})<0 \quad \varphi(0)>0$.

有且仅有t_0令$\varphi(t)=0$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty}t_n=t_0$，成立，则$\{x_n\}$收敛于 t_0

5. （12 分）证明:

(1) 利用两类曲线解法的关系证明 $\left|\int_L Pdx + Qdy\right| \leq \ell M$，其中$\ell$为曲线 L 的弧长，

而$M = \max\limits_{(x,y)\in \widehat{AB}} \sqrt{P^2+Q^2}$;

(2) 利用上述不等式估计积分：$I_R = \int_{x^2+y^2=R^2} \frac{ydx-xdy}{(x^2+xy+y^2)^2}$ ；

(3) 证明 $\lim_{R\to+\infty} I_R = 0$.

(1) 令任一点的方向单位向量为 $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ $\alpha\in[0,2\pi]$

$\int_L Pdx+Qdy=\int_L(P\cos\alpha+Q\sin\alpha)ds$

当 $\alpha\in[0,2\pi]$，$P\cos\alpha+Q\sin\alpha=\sqrt{P^2+Q^2}\sin(\alpha+\varphi)\leq\sqrt{P^2+Q^2}$

$\Rightarrow \int_L Pdx+Qdy\leq\int_L\sqrt{P^2+Q^2}\,ds\leq M\int_L ds=Ml$

(2) $P=\frac{y}{(x^2+xy+y^2)^2}$ $Q=-\frac{x}{(x^2+xy+y^2)^2}$ $l=2\pi R$

$\sqrt{P^2+Q^2}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+xy+y^2)^2}=\frac{R}{(R^2+xy)^2}$ $x=R\cos\theta, y=R\sin\theta, \theta\in[0,2\pi]$

$xy=R^2\sin2\theta\cdot\frac{1}{2}\geq-\frac{1}{2}R^2 \Rightarrow \sqrt{P^2+Q^2}\leq\frac{R}{(\frac{1}{2}R^2)^2}=\frac{4}{R^3}=M$

$|I_R|\leq\frac{4}{R^3}\cdot2\pi R=\frac{8\pi}{R^2}$

12

(3) $|I_R|\leq\frac{8\pi}{R^2}$

$0\leq\lim\limits_{R\to+\infty}|I_R|\leq\lim\limits_{R\to+\infty}\frac{8\pi}{R^2}=0$

则 $\lim\limits_{R\to+\infty} I_R=0$