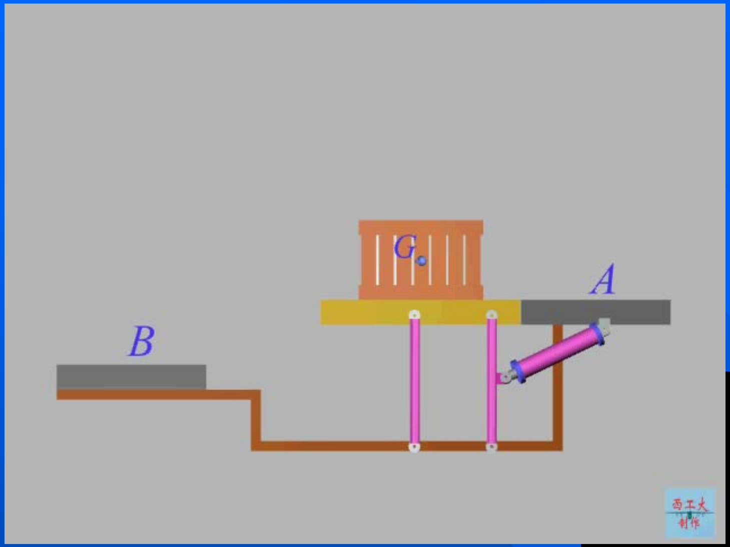
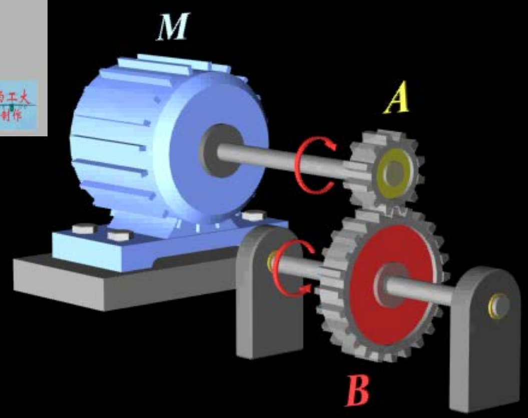
刚体



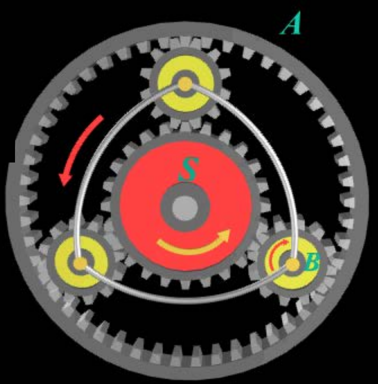
- 平行移动

- 定轴转动



电动机带动的齿轮系统

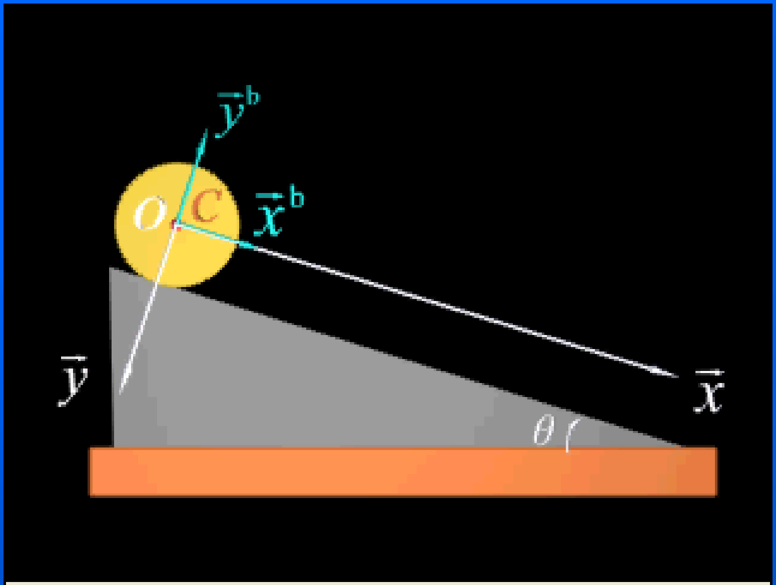
- 平面运动



行星轮机构

圆盘作滚动

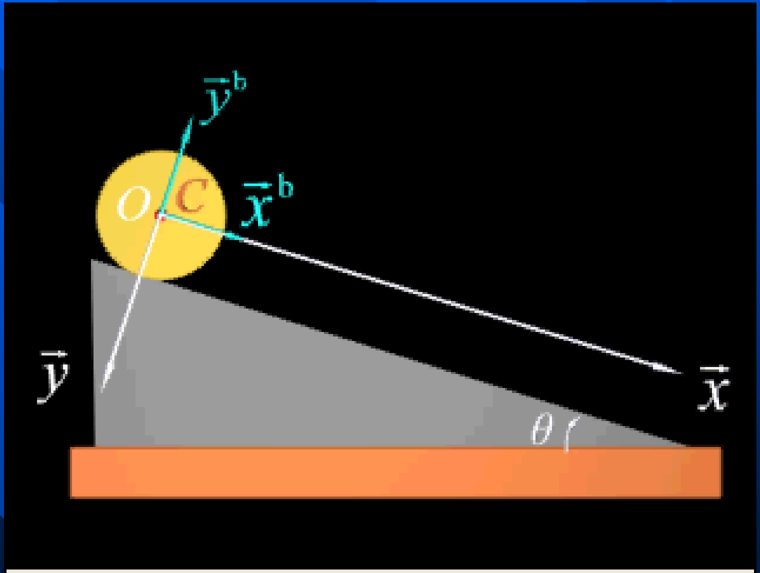
——刚体*平面运动*



圆柱体在斜面上纯滚动动.AVI

圆盘作滑动

——刚体*平行移动*（*平动*）



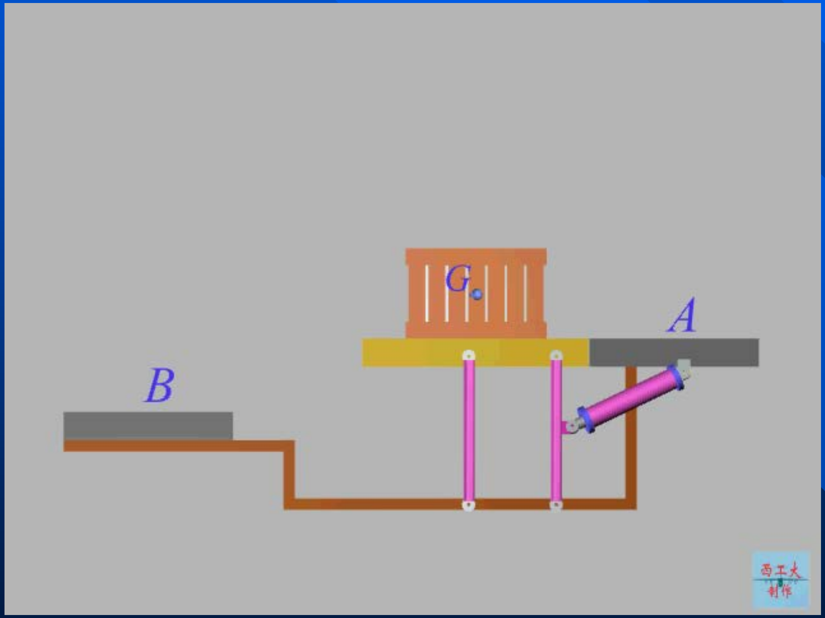
圆柱体在斜面上滑动.AVI

第六章　刚体的基本运动

在工程实际中，刚体的运动比点的运动更常用到。

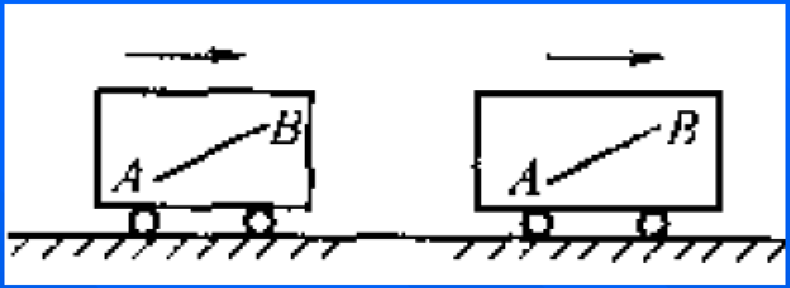
刚体的基本运动包括：**平行移动和定轴转动**

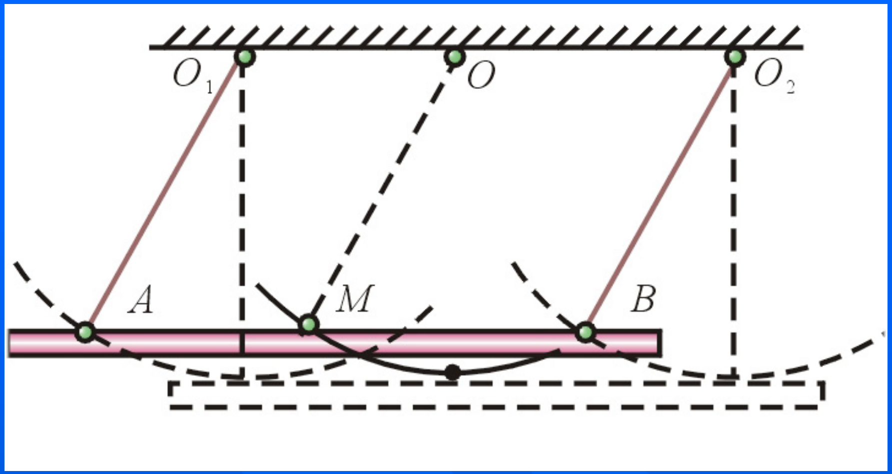
第一节　　刚体的平行移动



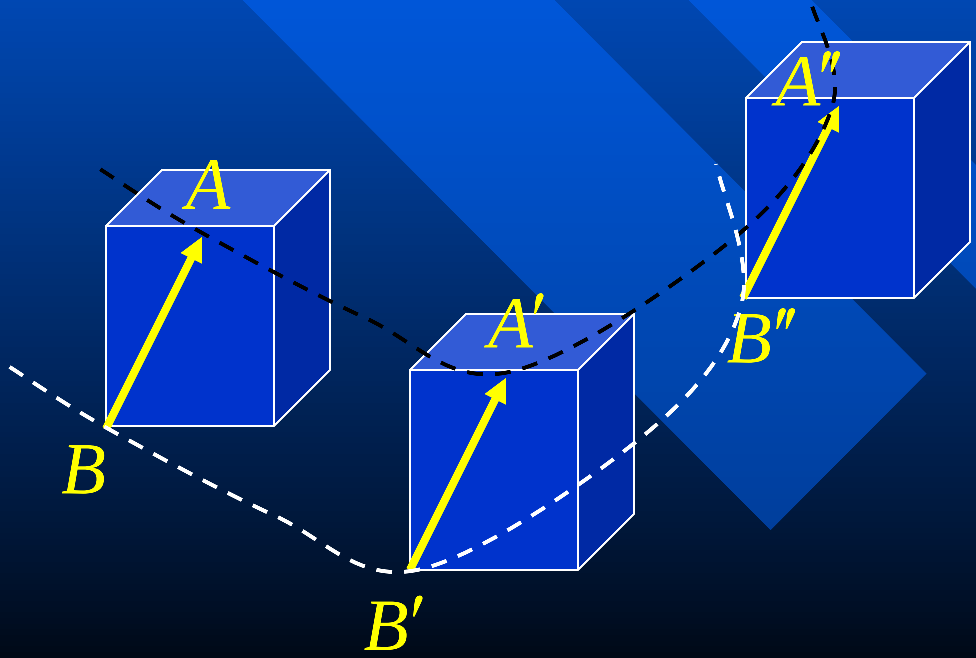
平行移动定义:

在刚体运动过程中，刚体上任一直线始终与原来的位置保持平行，刚体的这种运动称为平行移动，简称为移动或平动、平移。例如汽缸内活塞的运动，秋千的摆动等等。

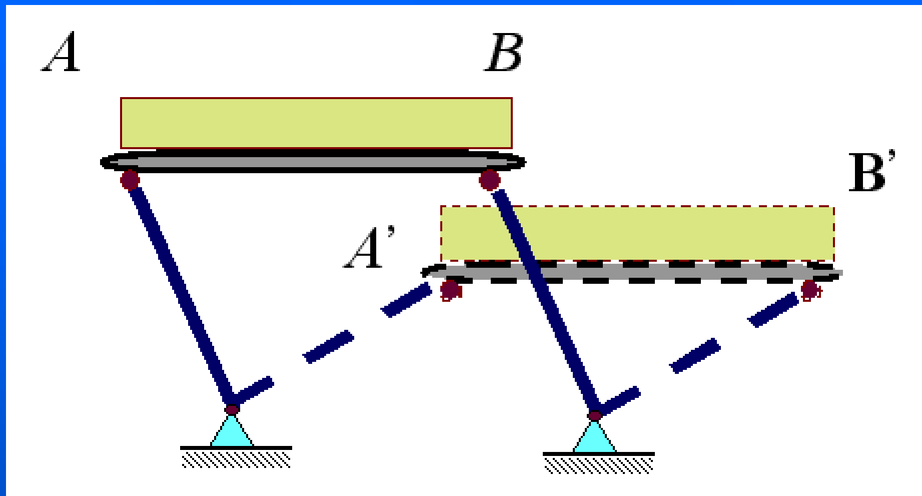


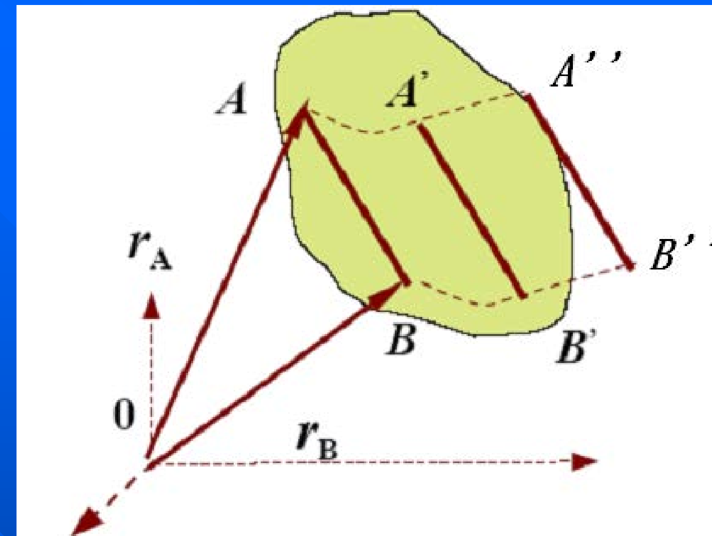


刚体运动时，若在刚体内所作的任一条直线都始终保持和自身平行 — *刚体平动*



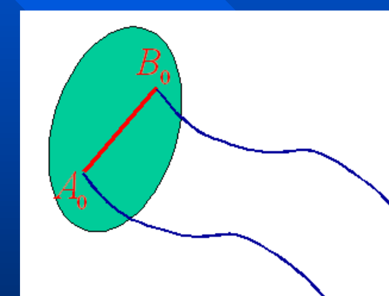
平动：直线平动、曲线平动





$$\vec{r}_A(t)=\vec{r}_B(t)+\vec{r}_{AB}$$

刚体上的各点具有形状相同的运动轨迹

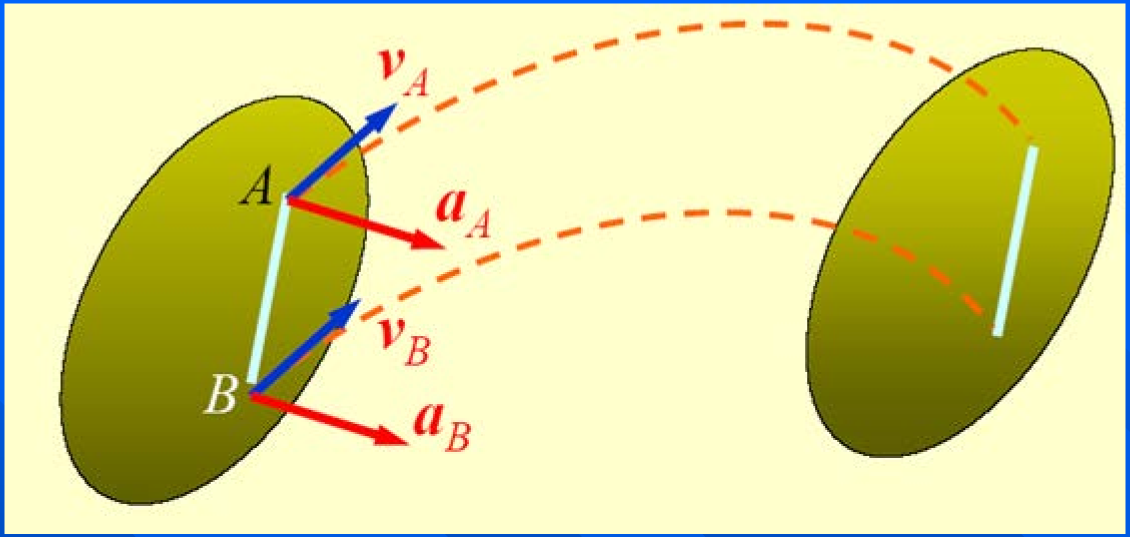


$\vec{r}_{AB}$ 的大小，方向均不变 $\qquad \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}_{AB}}{\mathrm{d}t}=0,$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}_B}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}_A}{\mathrm{d}t},$$

$$\vec{v}_A=\vec{v}_B, \qquad \vec{a}_A=\vec{a}_B,$$

刚体上的各点在某一瞬时具有相同的速度和加速度；

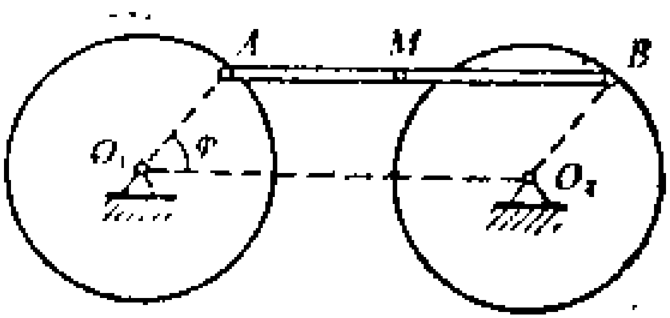


（1）平动刚体内各点在任一瞬时均有相同的速度和加速度；

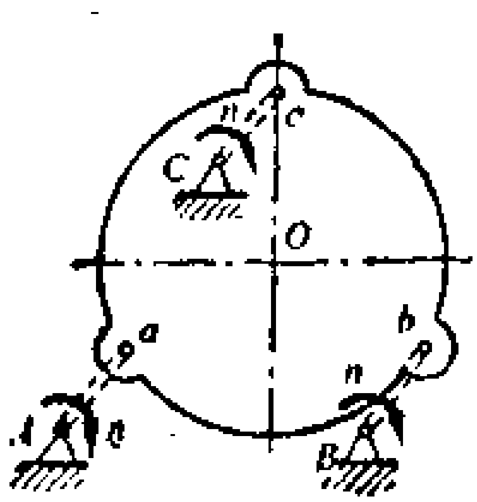
（2）平动刚体内各点具有形状相同的运动轨迹。

刚体的平动归结为刚体上一点的运动。

平动刚体要求能正确识别。

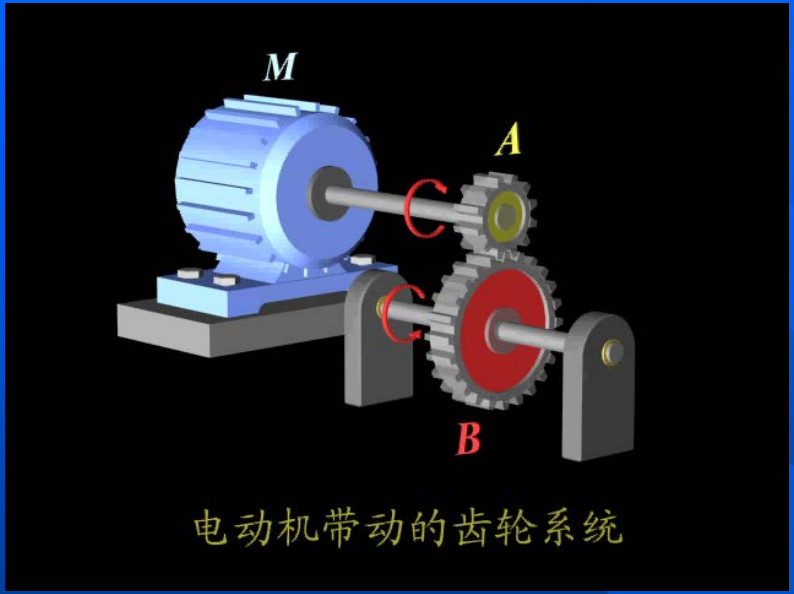


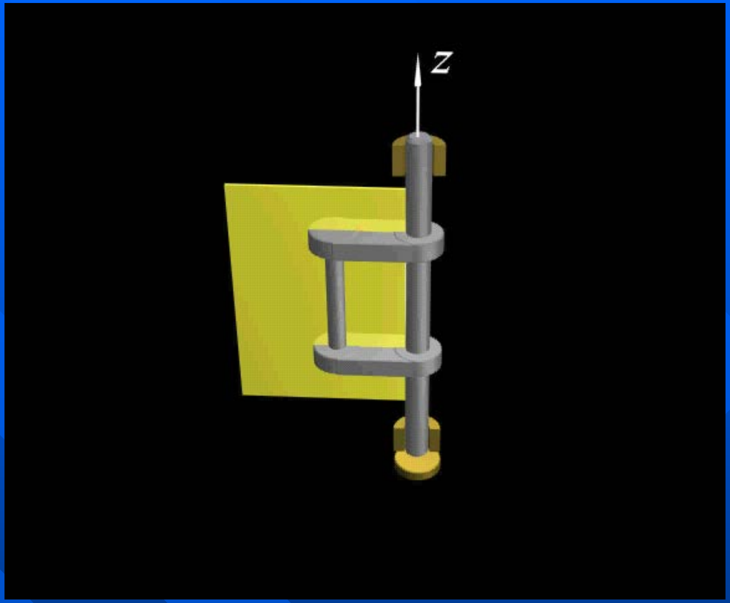
题 9-1



题 9-2

第二节　　刚体绕定轴转动



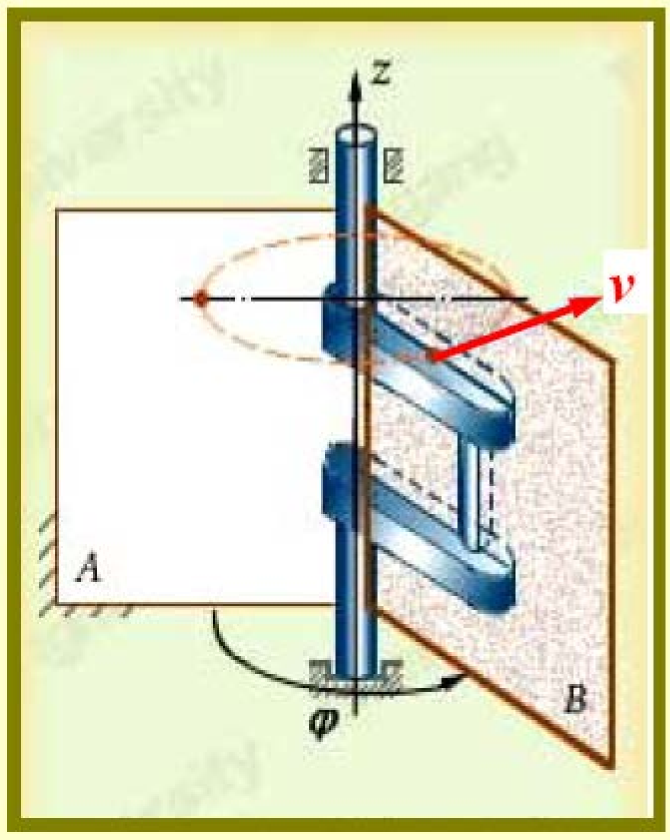


定轴转动：

　　刚体运动时，体内或其扩展部分，至少存在两点在运动过程中始终保持不动，这种刚体运动称为定轴转动。固定的直线就是转轴。

1、转动方程

设刚体绕固定轴z轴转动，任一瞬时动平面B 相对固定平面A的转角为φ，刚体在任意瞬时的位置，完全由φ角确定。转角φ随时间t变化的数学表达式



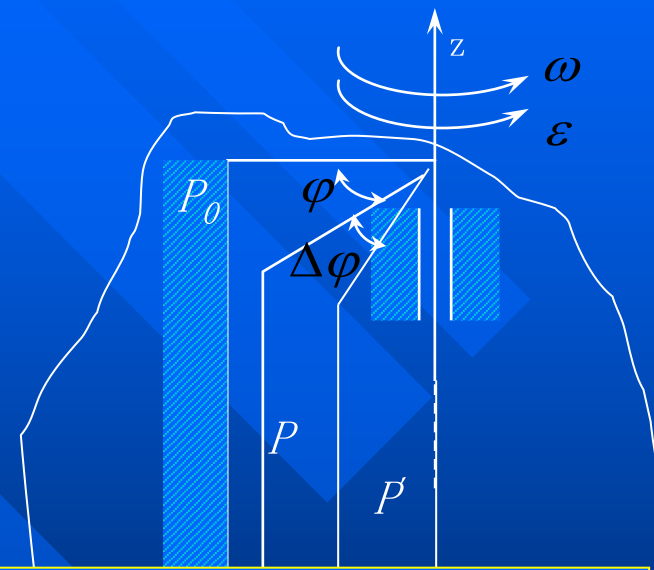
$$\varphi = \varphi(t)$$

上式称为刚体的定轴转动方程。

*φ被称为角位移（转角），定义为代数量，*与z轴一起符合右手螺旋法则取正号，是时间t的单值连续函数，单位为弧度（ rad ）。

2. 角速度

角速度表示刚体转动的快慢和转向。设 t瞬时转角为φ，则 $t+\Delta t$瞬时转角为$\varphi+\Delta\varphi$

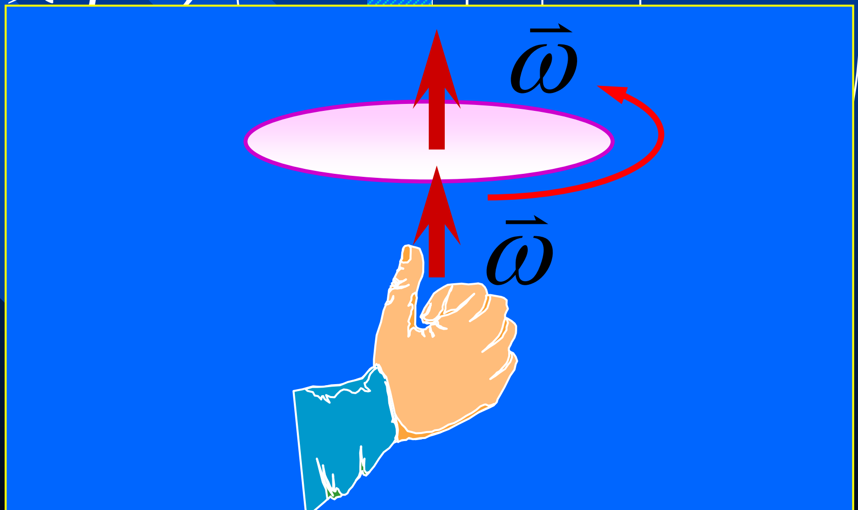


角速度$\omega = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \dfrac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$

角速度的单位弧度/秒（*rad/s*）

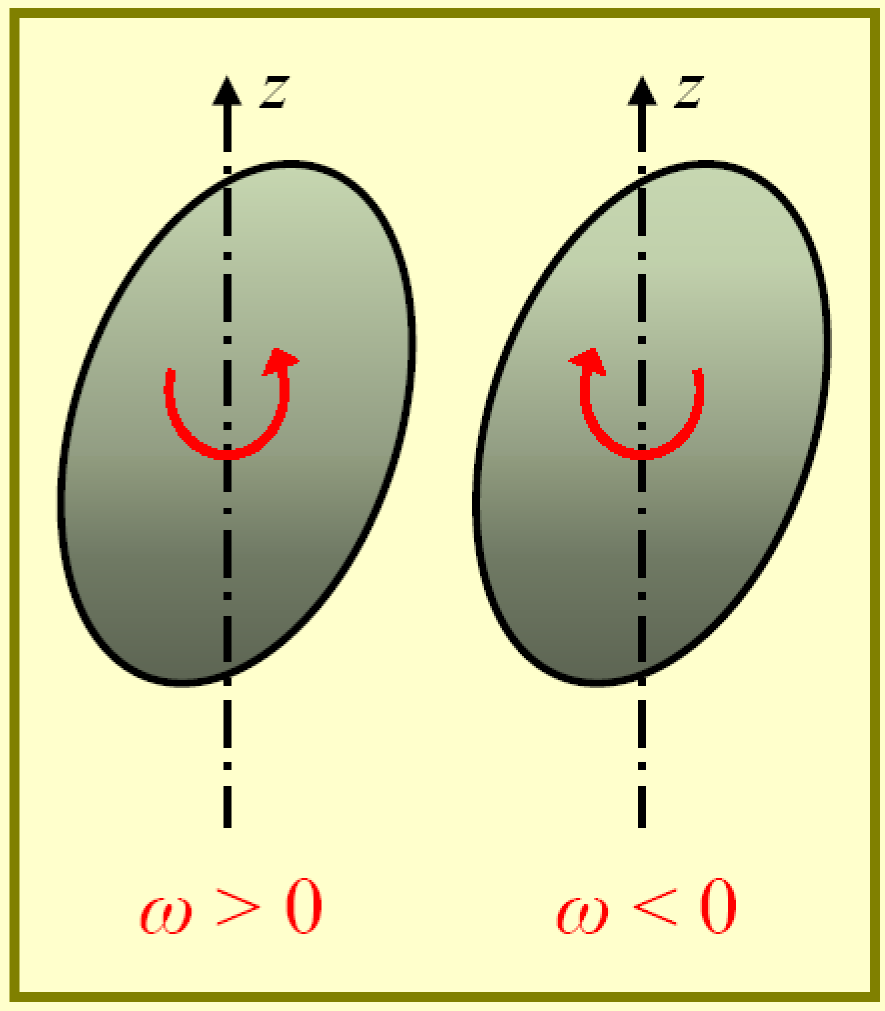
工程中常用转速表示$n(r/min$或$rpm)$

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30}$$



角速度除定义为代数量外，还可用矢量表示

$$\vec{\omega} = \omega\vec{k}$$

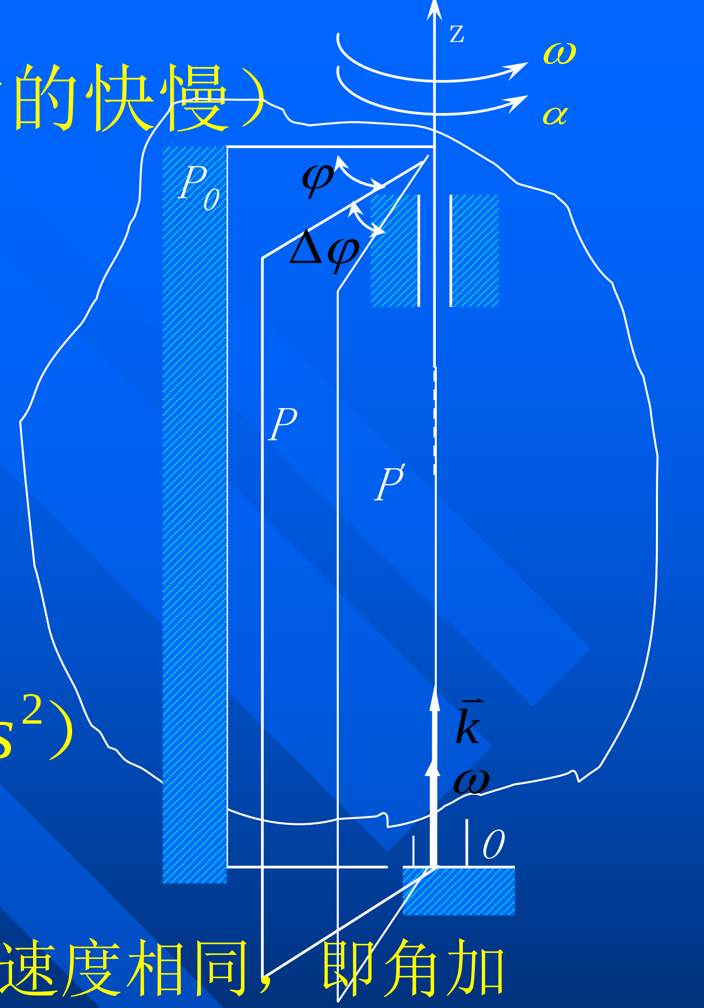


工程上常用转速n来表示角速度，n的单位是：转 / 分（rpm——revolutions per minute)，n与ω的换算关系为

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30}$$

若定义为代数量，在平面内一般取角速度逆时针为正，顺时针为负。

3. 角加速度（角速度表示刚体转动的快慢）



■ 角加速度（定义为代数量）

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}$$

■ 角加速度的单位：弧度/秒²（rad/s^2）

在平面内角加速度正负号规定与角速度相同，即角加速度与角速度同向同号，反向反号。

当角速度、角加速度同号时，刚体作加速转动，反之作减速转动。

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \qquad \alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d\omega}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \omega\frac{d\omega}{d\varphi}$$

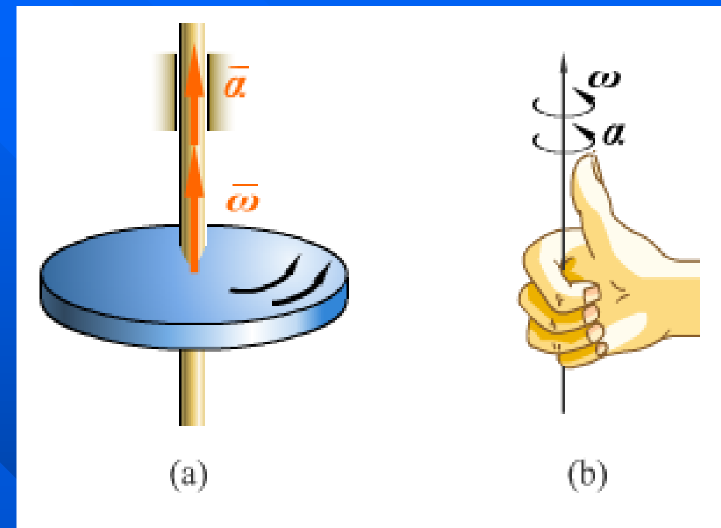
$$\omega = \int \alpha dt$$

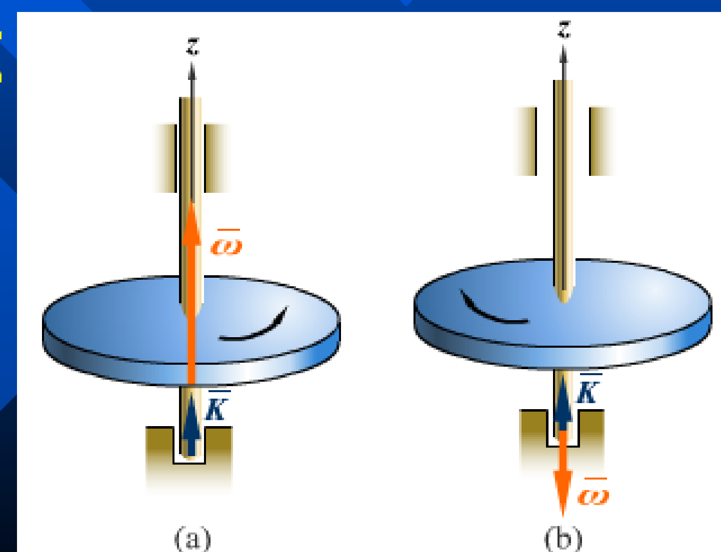
$$\varphi = \int \omega dt$$

角速度矢量和角加速度矢量

- 角速度矢量

$\vec{\omega}$
- 大小 $|\vec{\omega}|=|\omega|=\left|\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right|$
- 作用线 沿轴线滑动矢量
- 指向 右手螺旋规则

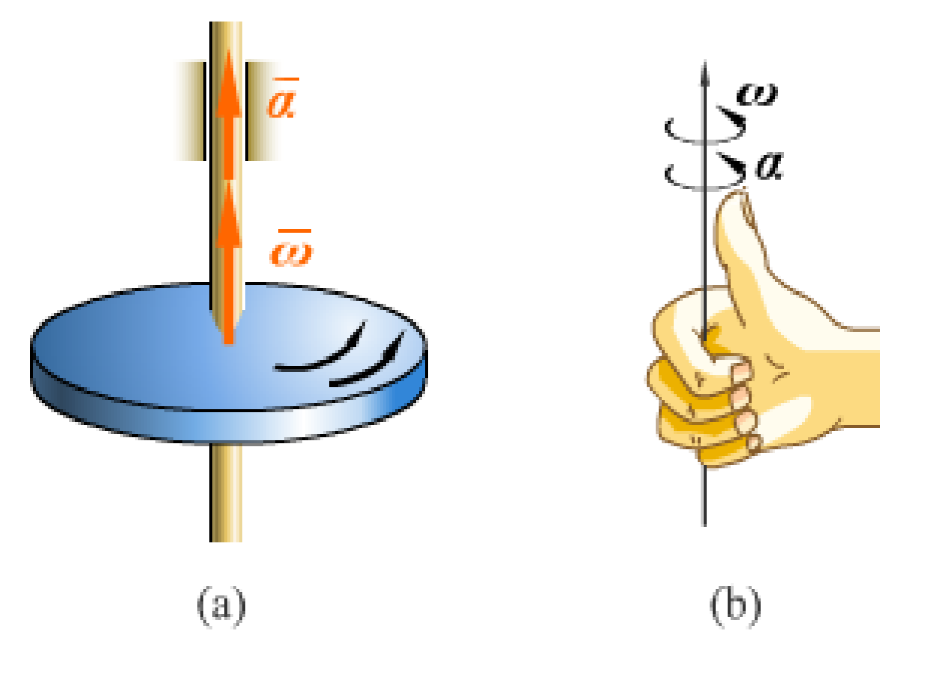




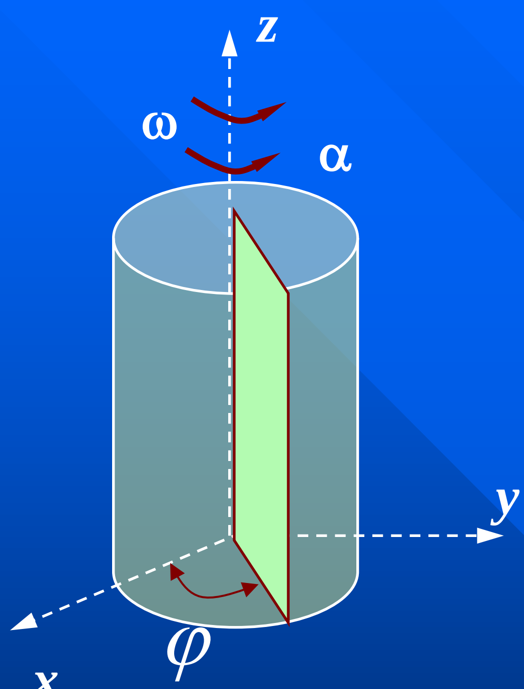
角加速度矢量

如果：$\vec{\omega} = \omega\vec{k}$

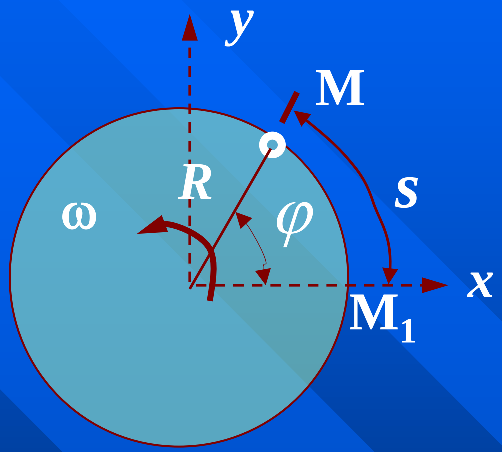
$$\vec{\alpha} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\vec{\mathrm{k}} = \alpha\vec{\mathrm{k}}$$



转动刚体上各点的速度、加速度



R：转动半径（动点到转轴的距离）



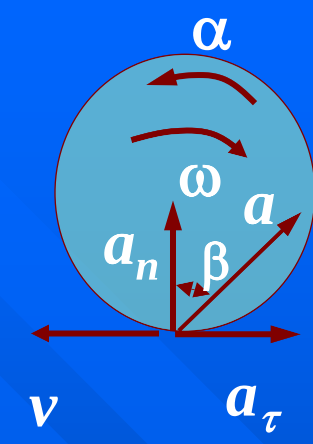
$$s = R\varphi$$

自然法描述的运动方程

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{dt} = R\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = R\omega$$

方向沿切线方向指向运动方向。

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}R\omega = R\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = R\alpha$$ 方向与转动半径垂直

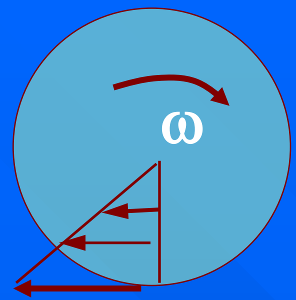


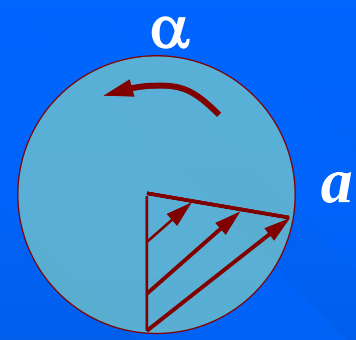
$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(R\omega)^2}{R} = R\omega^2。$$ 方向指向轴线

全加速度 $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$;

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = R\sqrt{\alpha^2 + \omega^4};$$

$$\tan\beta = \left|\frac{a_\tau}{a_n}\right| = \frac{|\alpha|}{\omega^2};$$

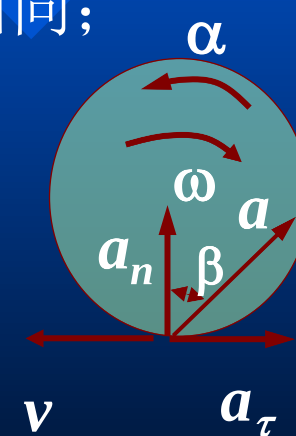




结论：

（1）定轴转动刚体上各点速度和加速度的大小均与该点到转轴的距离（转动半径）成正比，各点的速度方向与其转动半径垂直；

（2）各点的加速度与各点转动半径之间的夹角都相同；



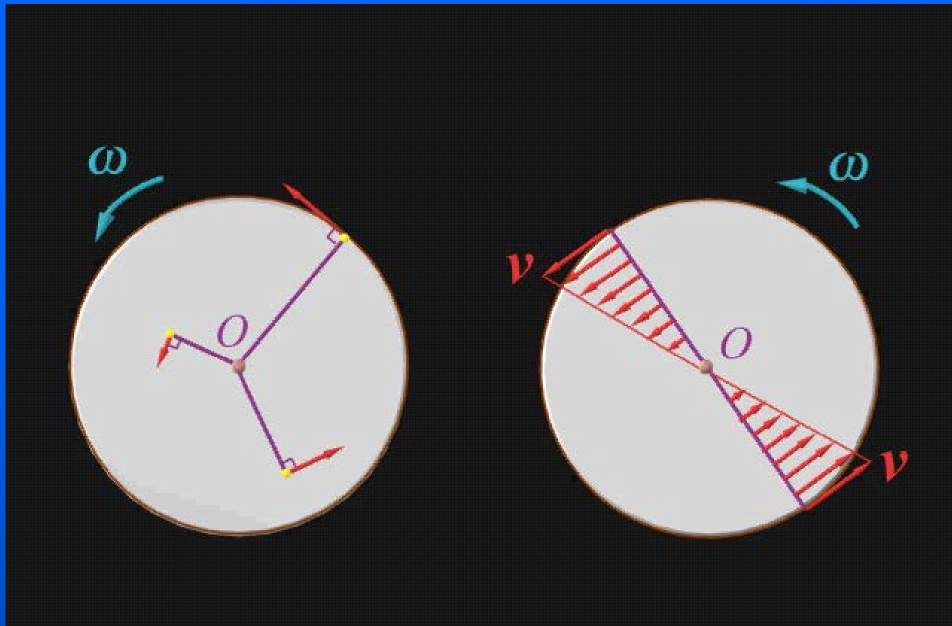
$$v=\frac{ds}{dt}=R\frac{d\varphi}{dt}=R\omega$$

$$a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}=R\sqrt{\alpha^2+\omega^4};$$

$$a_\tau=\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}R\omega=R\frac{d\omega}{dt}=R\alpha$$

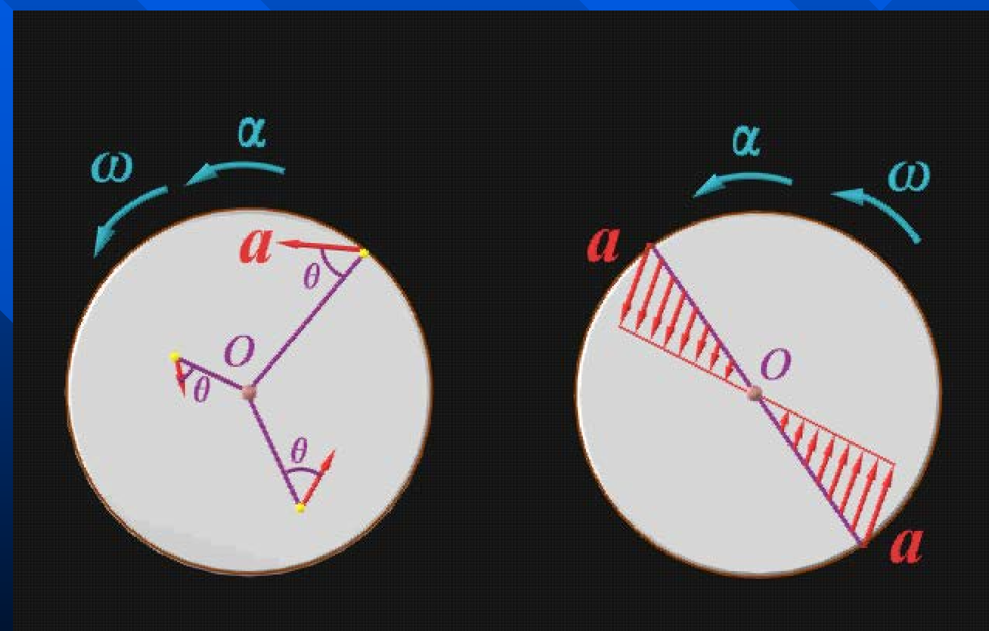
$$\tan\beta=\left|\frac{a_\tau}{a_n}\right|=\frac{|\alpha|}{\omega^2};$$

$$a_n=\frac{v^2}{\rho}=\frac{(R\omega)^2}{R}=R\omega^2。$$



加速度分布

速度分布



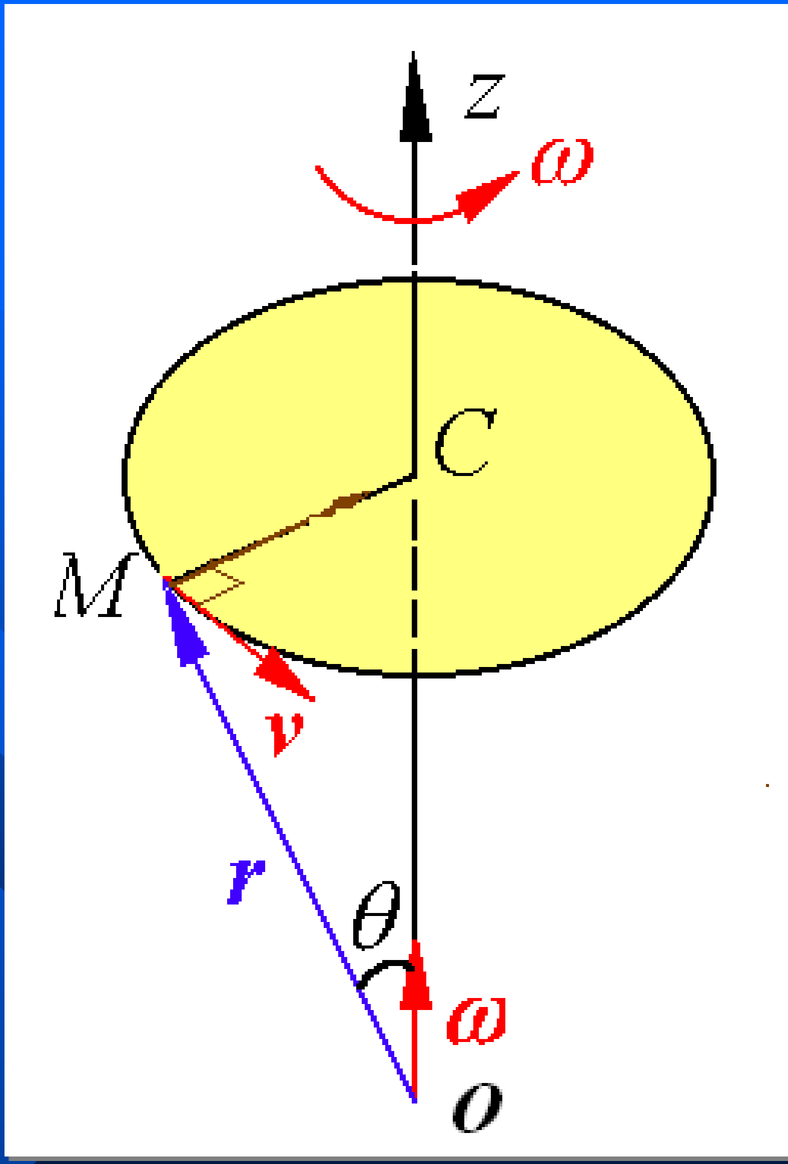
绕定轴转动刚体上*M*点的速度和加速度的矢量表示方法

(*o*为定轴上的任一点)

$$v = |\vec{\omega}| \cdot |\vec{r}| \sin\theta = |\vec{\omega}| R$$

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$$

方向为矢积方向。



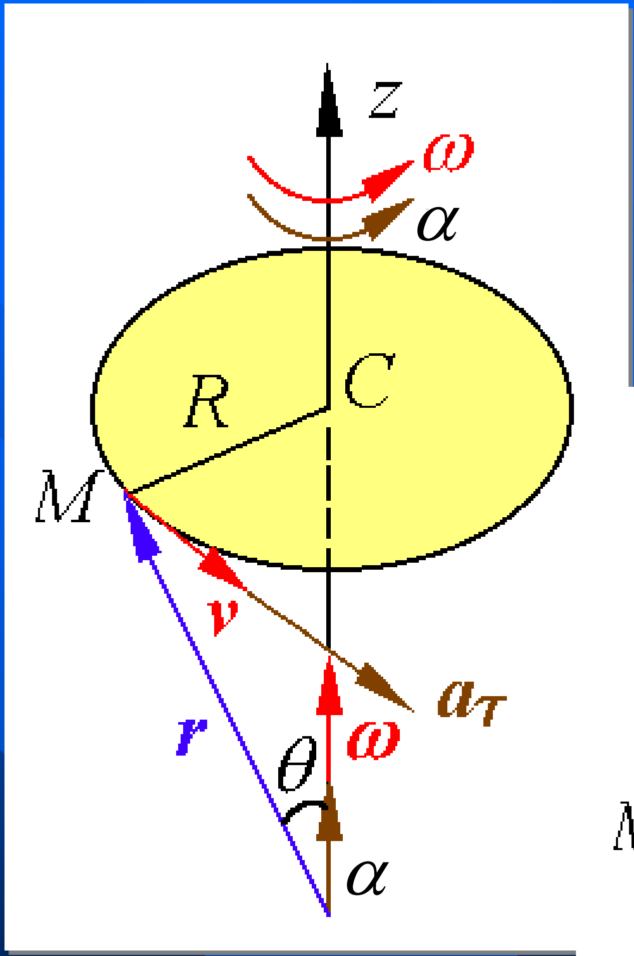
加速度 $\vec{a}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{\omega}\times\vec{r})$

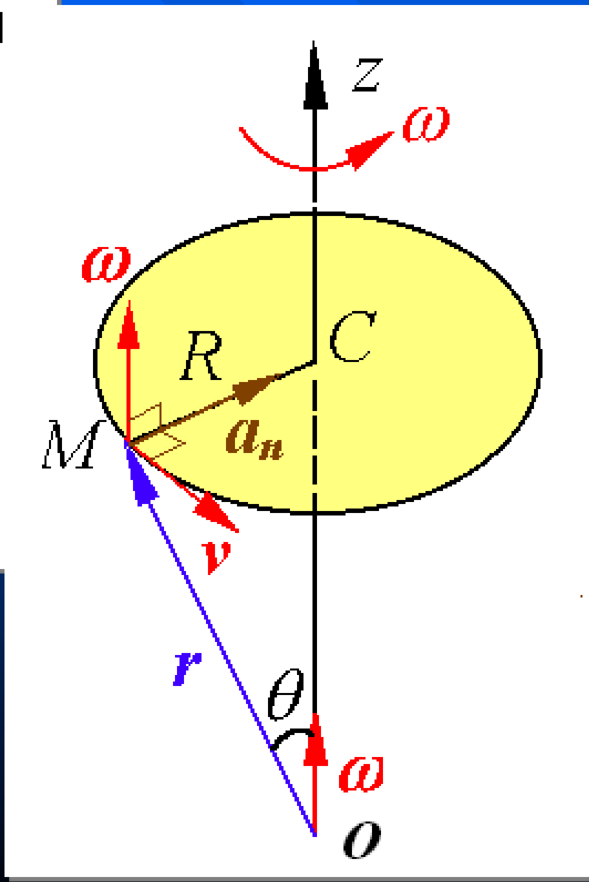
$$=\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$

$$=\vec{\alpha}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\vec{v}$$

$$=\vec{a}_{\tau}+\vec{a}_{n}$$

$\vec{a}_{\tau}=\vec{\alpha}\times\vec{r}$ 切向加速度



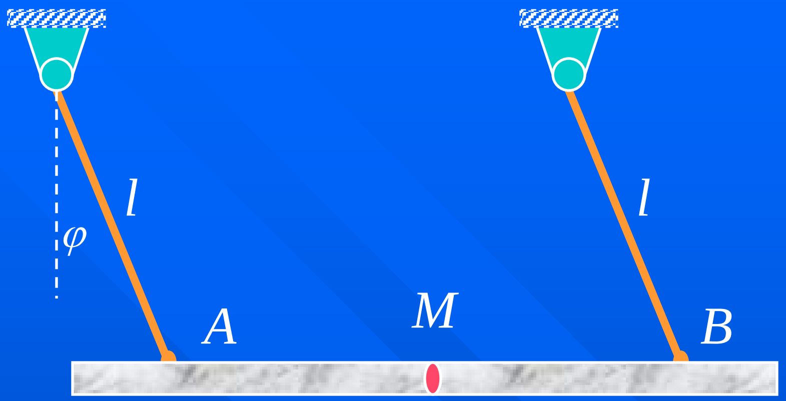


$\vec{a}_{n}=\vec{\omega}\times\vec{v}=\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$ 法向加速度

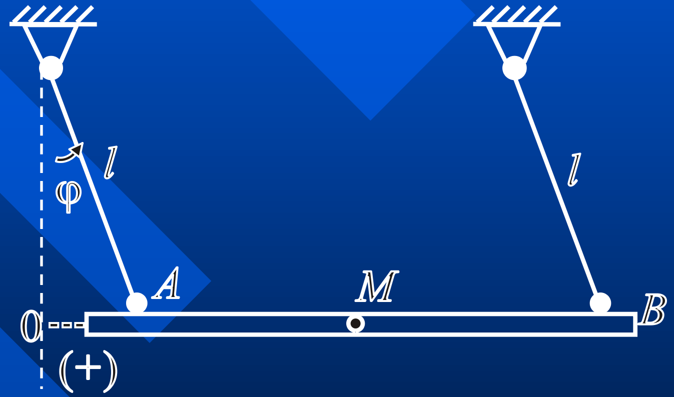
例1

已知：$\varphi = \varphi_0 \sin\frac{\pi}{4}t,\quad l$

求：当t＝2s时M点的速 度、加速度。



解: 因AB杆作平动，所以M点的运动与A点完全相同。A点运动方程：

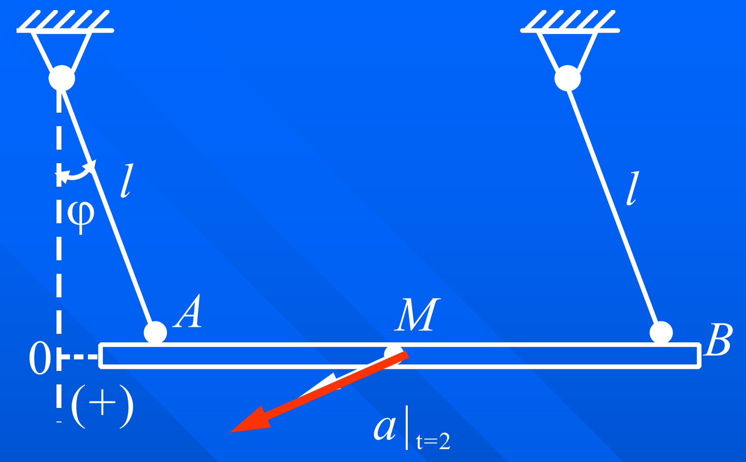


用自然法表示

$$s = l\varphi = \varphi_0 l \sin\frac{\pi}{4}t$$

速度 $$\upsilon = \frac{ds}{dt} = \frac{\pi}{4} l\varphi_0 \cos\frac{\pi}{4}t \qquad \upsilon|_{t=2} = 0$$

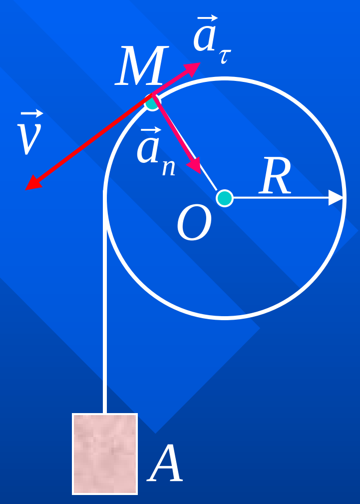
$$\begin{cases} a_\tau = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\pi^2}{16} l\varphi_0 \sin\dfrac{\pi}{4}t \\ a_n = \dfrac{v^2}{l} = \dfrac{\pi^2}{16} l\varphi_0^2 \cos^2\dfrac{\pi}{4}t \end{cases}$$



$$\varphi|_{t=2} = \varphi_0 \qquad \begin{cases} \boldsymbol{a}_\tau |_{t=2} = -\dfrac{\pi^2}{16}\boldsymbol{l}\varphi_0 \\ \boldsymbol{a}_n |_{t=2} = 0 \end{cases}$$

与切线方向相反

例 2 一半径为*R*=0.2m的圆轮绕定轴*O*的转动方程为 $\varphi=-t^2+4t$，单位为弧度。求t=1s时，轮缘上任一点*M*的速度和加速度（如图）。如在此轮缘上绕一柔软而不可伸长的绳子并在绳端悬一物体*A*，求当t=1s时，物体A的速度和加速度。



解：圆轮在任一瞬时的角速度和角加速度为

$$\omega=\frac{d\varphi}{dt}=-2t+4 \qquad \alpha=\frac{d^2\varphi}{dt^2}=-2$$

求当t=1s时，则为 $\omega=2rad/s$ $\alpha=-2rad/s^2$

因此轮缘上任一点M的速度和加速度为

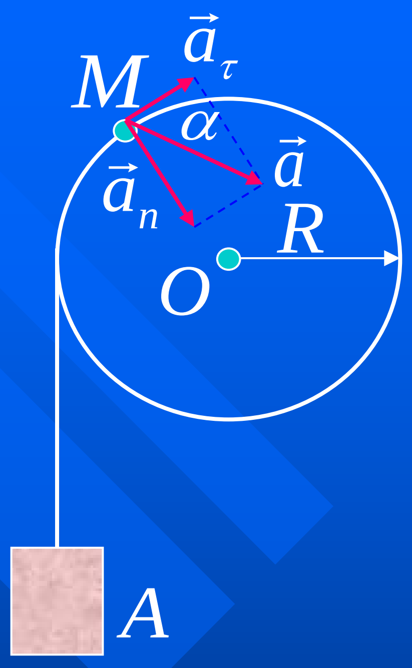
$$v=R\omega=0.4m/s \quad a_\tau=R\alpha=-0.4m/s^2 \quad a_n=R\omega^2=0.8m/s^2$$

方向如图所示。

M点的全加速度及其偏角为

$$a=\sqrt{a_{\tau}^{2}+a_{n}^{2}}=\sqrt{(-0.4)^{2}+(0.8)^{2}}=0.894m/s^{2}$$

$$\alpha=arctg\frac{|\alpha|}{\omega^{2}}=arctg0.5=26^{\circ}34'$$ 如图。



现在求物体A的速度和加速度。因为

$$x_A = s_M$$

上式两边求一阶及二阶导数，则得

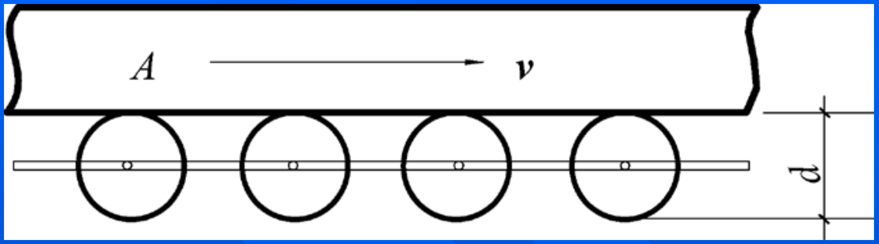
$$v_A=v_M \qquad a_A=a_M^{\tau}$$

因此

$$v_A=0.4m/s$$

$$a_A=-0.4m/s^{2}$$

【例3】 如图，滚子传送带，已知滚子的直径d =20cm匀速转动，转速n =50r/min。求：(1)钢板运动的速度和加速度；(2) 滚子上与钢板接触点的加速度。



滚子传送带

解：

(1)求钢板运动的速度和加速度：

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{50\pi}{30} = 5.24\text{rad/s}$$

钢板的速度为 $v = R\omega = \frac{200}{2} \times 5.24 = 524\text{mm/s}$

钢板的加速度为 $a = a^{\tau} = R\alpha = 0$

(2) 求滚子上与钢板接触点的加速度：

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_n = R\omega^2 = 0.1 \times 5.24^2 = 2.74\text{m/s}^2$$

【例4】 汽轮机叶轮由静止开始作匀加速转动。轮上M点距轴心O的距离为 ρ=400mm，在某瞬时的全加速度 a=40m/s^2，与转轴半径的夹角 $\alpha_1=30°$ ，如图所示。当 t=0时，φ_0 =0。求叶轮的转动方程及 $t=4s$时M点的速度和法向加速度。

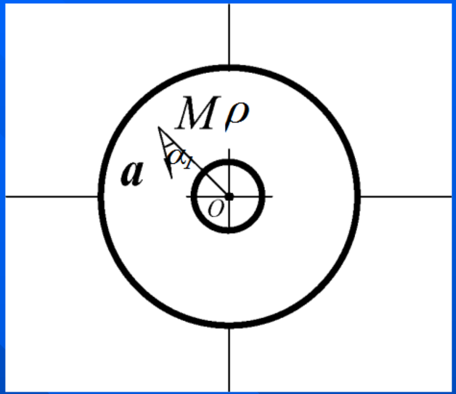


图 转动的叶轮

解：(1) 求叶轮的转动方程：

$$\boldsymbol{a}_\tau = \boldsymbol{a}\cdot\sin\alpha_1 = 40\cdot\sin 30° = 20\text{m/s}^2$$

$$\alpha = \frac{a_\tau}{\rho} = \frac{20}{0.4} = 50rad/s^2$$

为常量。

由题意知， t =0时，φ_0 =0，ω_0 =0， 得叶轮的转动方程为：

$$\varphi = \int_0^t \omega dt = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = 25t^2$$

$$\omega = \int_0^t \alpha dt = \omega_0 + \alpha t$$

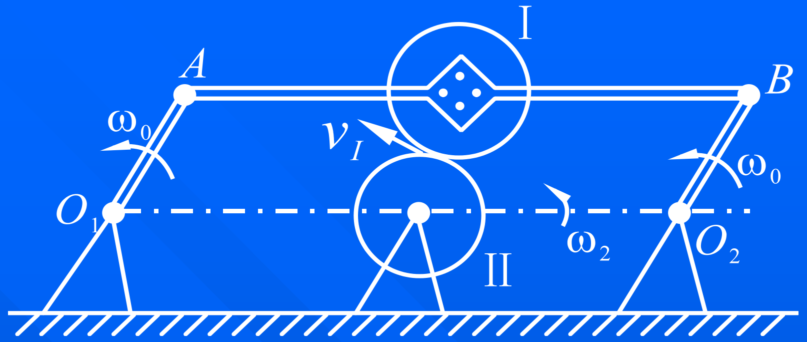
（2） 求t =4s时，M点的速度和法向加速度

$$v = \rho\omega = 0.4\times(0+50\times4) = 80m/s$$

$$a_n = \rho\omega^2 = 0.4\times200^2 = 16000m/s^2$$

例5

已知：$O_1A=O_2B=2r$，$\omega_0=$常数，齿轮半径均为r，且 $O_1O_2=AB$ 求：轮Ⅰ与轮Ⅱ，轮缘上任一点的加速度。



解：AB平动故轮Ⅰ平动　轮Ⅱ：定轴转动

速度：轮Ⅰ：$\upsilon_I=\upsilon_A=O_1A\cdot\omega_0=2r\omega_0$

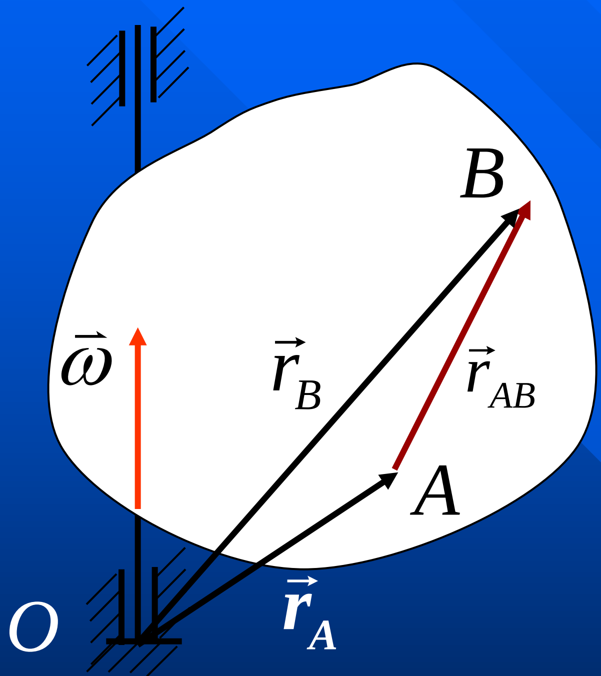
轮Ⅱ：$\omega_2=\dfrac{\upsilon_I}{r}=2\omega_0$　　$\upsilon_{II}=\upsilon_I$

加速度：轮Ⅰ：$a_I=a_A=2r\omega_0^2$ 方向平行于O_1A

轮Ⅱ：$\alpha_2=\dfrac{d\omega_2}{dt}=0$　　$a_{II}^{\tau}=0=r\alpha_2$

$a_{II}^n=r\omega_2^2=4r\omega_0^2$　　$a_{II}=a_{II}^n=4r\omega_0^2$

例 在定轴转动刚体上，任意取两点A与B，连成一线，用矢量 $\vec{r}_{AB}$表示，试证明：$\dfrac{d\vec{r}_{AB}}{dt}=\vec{\omega}\times\vec{r}_{AB}$。



证： $\vec{r}_{AB}=\vec{r}_B-\vec{r}_A$

$$\frac{d\vec{r}_{AB}}{dt}=\frac{d\vec{r}_B}{dt}-\frac{d\vec{r}_A}{dt}=\vec{v}_B-\vec{v}_A$$

$\vec{v}_B=\vec{\omega}\times\vec{r}_B$ 与 $\vec{v}_A=\vec{\omega}\times\vec{r}_A$

$$\frac{d\vec{r}_{AB}}{dt}=\vec{\omega}\times\vec{r}_B-\vec{\omega}\times\vec{r}_A=\vec{\omega}\times(\vec{r}_B-\vec{r}_A)=\vec{\omega}\times\vec{r}_{AB}$$

此结果表示：

当转动刚体上的一个大小不变的矢量，只要其方向发生变化，其对时间的变化率等于刚体的角速度与本矢量的叉积。

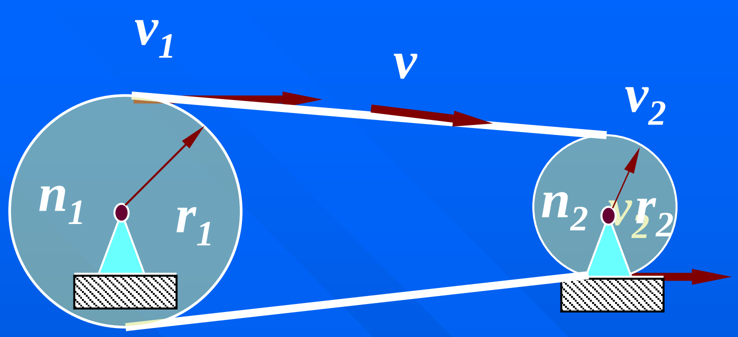
推论： 若在转动刚体上，固结一组坐标系$O'x'y'z'$，其相应的单位矢量为$\vec{i}'$，$\vec{j}'$，$\vec{k}'$，该坐标系随同刚体以角速度$\vec{\omega}$绕某轴转动，则必定有：

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\vec{i}'}{\mathrm{d}t} &= \vec{\omega}\times\vec{i}' \\
\frac{\mathrm{d}\vec{j}'}{\mathrm{d}t} &= \vec{\omega}\times\vec{j}' \\
\frac{\mathrm{d}\vec{k}'}{\mathrm{d}t} &= \vec{\omega}\times\vec{k}'
\end{aligned}\right\}$$

泊桑（*Poisson*）公式

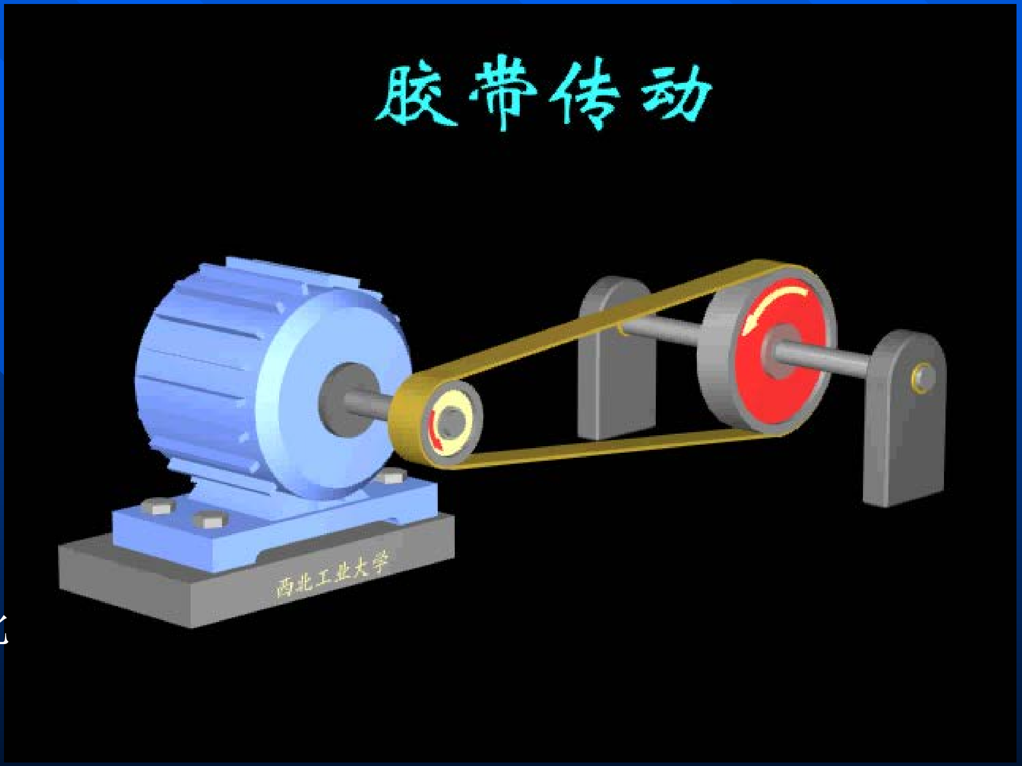
轮系传动

1、 皮带轮（胶带）传动



$v_1 = v = v_2$

$v_1 = r_1\omega_1$;　　$v_2 = r_2\omega_2$;



传动比

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

主动轮的转速 / 从动轮的转速 = 传动比

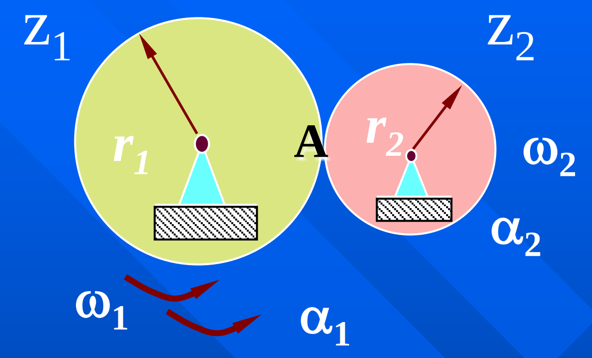
2、齿轮传动

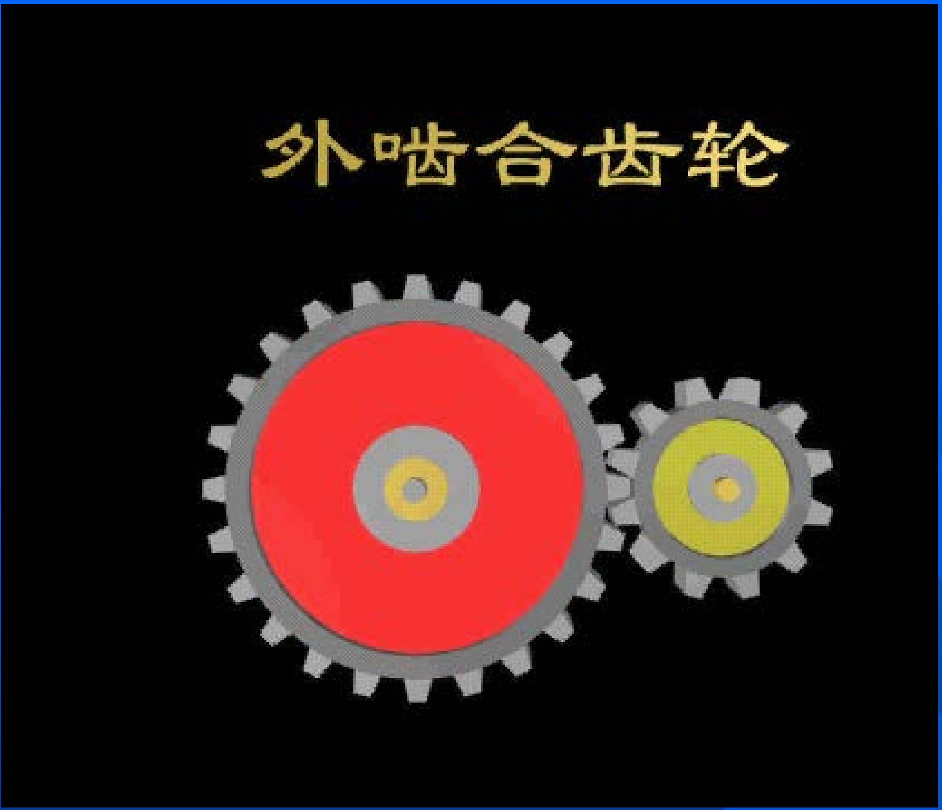
在A点速度、切向加速度相同，法向加速度、全加速度相同？

$v_{A1} = v_{A2} \quad \boldsymbol{r_1 \omega_1 = r_2 \omega_2}$

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1} \quad ?$$

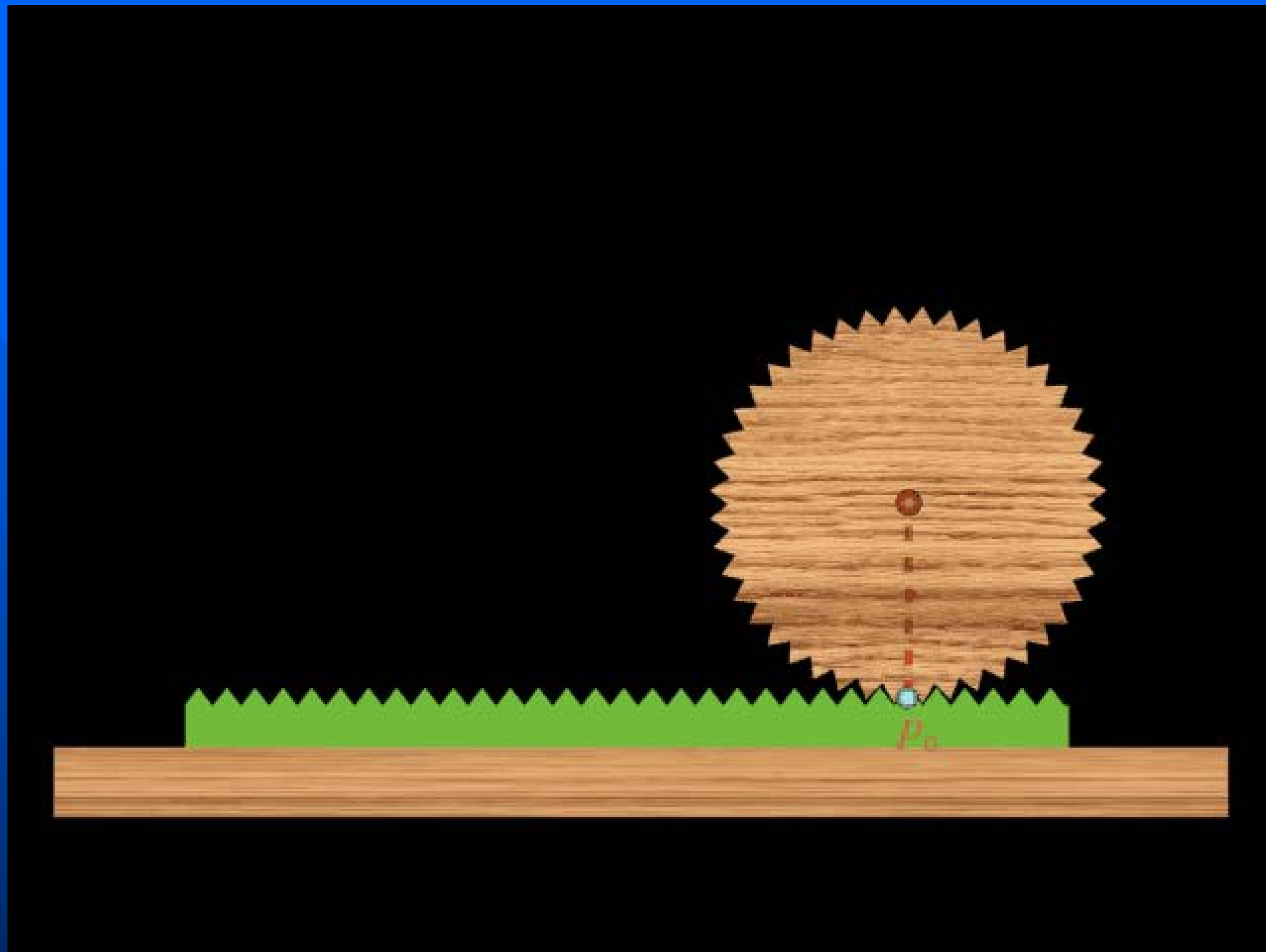
$$a_{A1}^{\tau} = a_{A2}^{\tau} \quad r_1\alpha_1 = r_2\alpha_2 \quad \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1}$$





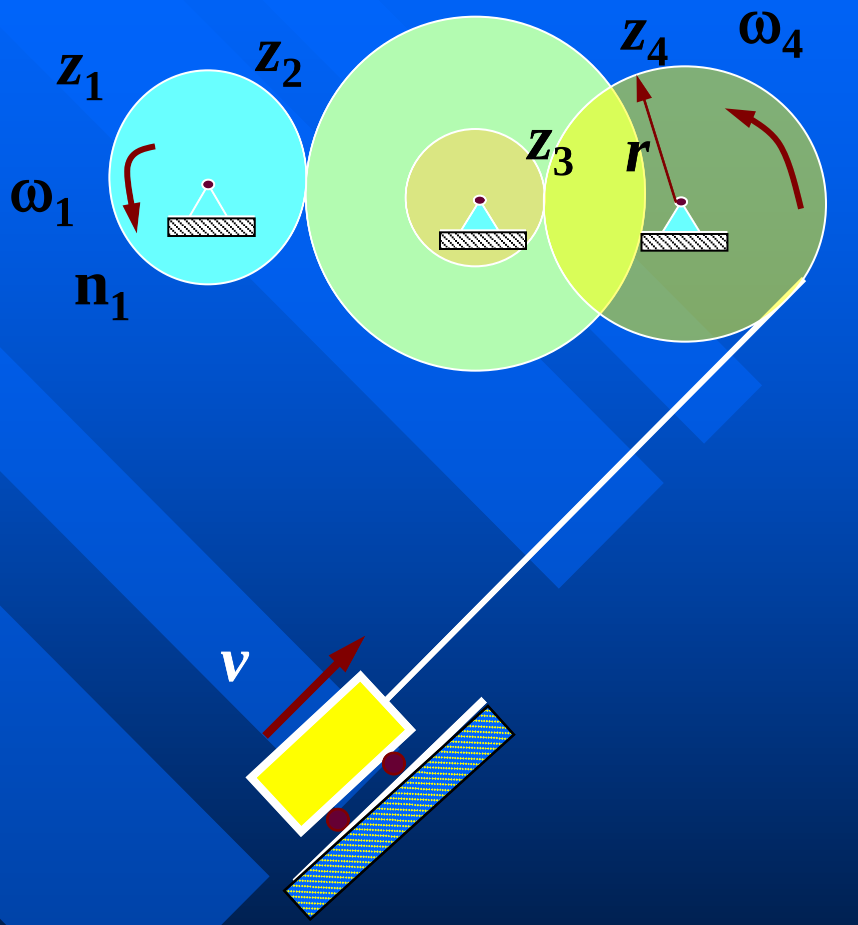
不同点： 转向相反 转向相同

共同点： 接触点具有相同的速度和切向加速度



齿轮齿条.avi

例 提升齿轮机械如图示，已知：马达带动的齿轮1转速为700转/分，同模数的齿数z_1= 42, z_2= 132, z_3= 25, z_4= 128, 鼓轮半径r =1m, 求小车上升速度。



解:

$$\frac{\omega_1}{\omega_4}=\frac{\omega_1}{\omega_2}\cdot\frac{\omega_2}{\omega_3}\cdot\frac{\omega_3}{\omega_4}=\frac{z_2}{z_1}\cdot 1\cdot\frac{z_4}{z_3}=\frac{z_2\cdot z_4}{z_1\cdot z_3}$$

$(\because \omega_2=\omega_3)$ （齿轮2、3同轴固连）

$$\omega_4=\frac{z_1\cdot z_3}{z_2\cdot z_4}\omega_1 \qquad \omega_1=\frac{\pi n_1}{30}$$

$$\omega_4=\frac{700\cdot\pi}{30}\frac{42\cdot 25}{132\cdot 128}=4.555(rad/s)$$

$v=\omega_4 r=$**4.555** m/s