同济大学课程考核试卷（期中试卷）
2019—2020 学年第一学期

命题教师签名：　　　　　　　　审核教师签名：

课号：122004　　　课名：高等数学 B(上)　　　考试考查：考试

此卷选为：期中考试(√)、期终考试(　)、重修(　)试卷

专业__________学号__________姓名__________任课教师__________

题号	一（30 分）	二（30 分）	三（10 分）	四（10 分）	五（10 分）	六（10 分）	总分
得分							

（注意：本试卷共六大题，三大张，满分 100 分．考试时间为 100 分钟.解答题要求写出解题过程）

一、填空与选择题(每小题 3 分，共 30 分)

1. 函数 $y=\cos\dfrac{\pi x}{x^2+4}$ 的定义域为 $x\in(-\infty,+\infty)$，则它的值域为 $y\in$ $\underline{\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right]}$.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上满足 $2f(1+x)-f(1-x)=\mathrm{e}^x$，则 $f(x)=$ $\underline{\dfrac{2\mathrm{e}^{x-1}+\mathrm{e}^{1-x}}{3}}$.

3. 极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(2^x-1)\cdot(1-\cos x)\cdot\arctan x}{\ln(1+x^2)\cdot(\sqrt{1+2x^2}-1)}=$ $\underline{\dfrac{1}{2}\ln 2}$.

4. 设函数 $f(x)=x\sqrt{4-x^2}+4\arcsin\dfrac{x}{2}$，则 $f'(x)=$ $\underline{2\sqrt{4-x^2}}$.

5. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $2^{xy}=x+y$ 所确定，则 $\mathrm{d}y\big|_{x=0}=$ $\underline{(\ln 2-1)\mathrm{d}x}$.

6. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}+1, & x<0,\\ 2+\sin ax, & x\ge0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，则常数 $a=$ $\underline{\dfrac{1}{2}}$.

7. 设函数 $f(x)=(1-x^2)\mathrm{e}^{x^2}$，则 $f^{(20)}(0)=$ $\underline{\left(\dfrac{1}{10!}-\dfrac{1}{9!}\right)\cdot 20!=-\dfrac{9\cdot 20!}{10!}}$.

8. 数列 x_n 与 y_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$，则下列判断正确的是　【 B 】

(A) 若 x_n 收敛，则 y_n 必为无穷小.　(B) 若 x_n 为无穷大，则 y_n 必为无穷小.

(C) 若 x_n 有界，则 y_n 必为无穷小.　(D) 若 x_n 无界，则 y_n 必为无穷小.

9. 当 $x\to0$ 时，下列无穷小函数中，哪一个是比其它三个更高阶的无穷小？【 C 】

(A) $\ln(1+x)-x$　(B) e^x-1-x　(C) $\sin x-x$　(D) $\sqrt{1+2x}-1-x$

10. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则下列函数在 $x=0$ 处必可导的是　【 C 】

(A) $|f(x)|$.　(B) $|xf(x)|$.　(C) $|x^2f(x)|$.　(D) $|f(x)\sin x|$.

二、计算下列各题(每小题 6 分，共 30 分)

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3}$.

解：原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\mathrm{e}^{\sin x\ln\cos x}}{x^3}$

$$=-\lim_{x\to0}\frac{\sin x\ln\cos x}{x^3}=-\lim_{x\to0}\frac{\ln\cos x}{x^2}$$

$$=-\lim_{x\to0}\frac{-\frac{\sin x}{\cos x}}{2x}=\frac{1}{2}.$$

2. 设函数 $f(x)=\ln(\mathrm{e}^x+\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}})$，求 $f'(x)$ 和 $f''(x)$.

解：$f'(x)=\dfrac{1}{\mathrm{e}^x+\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}}\cdot\left(\mathrm{e}^x+\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}}\right)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}}$,

$$f''(x)=\frac{\mathrm{e}^x\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}-\mathrm{e}^x\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}}}{1+\mathrm{e}^{2x}}=\frac{\mathrm{e}^x}{(\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}})^3}.$$

3．设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\ln\sqrt{1+t^2}, \\ y=t-\arctan t \end{cases}$ 所确定，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{1-\frac{1}{1+t^2}}{\frac{t}{1+t^2}}=\dfrac{t^2}{t}=t$,

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{1}{\frac{t}{1+t^2}}=\frac{1+t^2}{t}.$$

4．设函数 $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$，试求 $f^{(n)}(0)\ (n\geq 1)$.

解：$f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}=1+\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}$,

$$f^{(n)}(x)=\left(1+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)^{(n)}$$

$$=\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)}-\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)}$$

$$=(-1)^n n!\left[\frac{1}{(x-1)^{n+1}}-\frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right],$$

$$f^{(n)}(0)=(-1)^n n!\left[(-1)^{n+1}-1\right]=n!\left[-1-(-1)^n\right].$$

5．心形线的极坐标方程为 $\rho=1+\cos\theta$，求该心形线在 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 所对应的点处的切线方程.

解：曲线参数方程为 $\begin{cases} x=(1+\cos\theta)\cos\theta, \\ y=(1+\cos\theta)\sin\theta. \end{cases}$

心形线在 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 所对应的点为 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{3}{4},\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$,

$$k=\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{\theta=\frac{\pi}{6}}=\left.\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}}\right|_{\theta=\frac{\pi}{6}}=\left.\frac{\cos\theta+\cos 2\theta}{-\sin\theta-\sin 2\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{6}}=-1.$$

$$y-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=-x+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{4}\right) \text{ 或 } y=-x+\frac{3\sqrt{3}+5}{4}.$$

三、(本题 10 分) 求曲线 $y=\left|x^3-3x^2\right|$ 的凹凸区间.

解：$f''(x)=\begin{cases} -6x+6, & x<3, \\ 6x-6, & x>3, \end{cases}$

$f''(x)$ 为 0 的点和不存在的点为 $x=1$，$x=3$.

$x\in(-\infty,1)$, $f''(x)>0$，则曲线凹的；

$x\in(1,3)$, $f''(x)<0$，则曲线凸的；

$x\in(3,+\infty)$, $f''(x)>0$，则曲线凹的.

四、(本题 10 分) 求曲线 $y=\dfrac{2x^2+x}{\sqrt{x^2+1}}$ 的斜渐近线.

解：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{2x^2+x}{\sqrt{x^2+1}}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+x}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=2$，

$$\lim_{x\to+\infty}(y-2x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+x}{\sqrt{x^2+1}}-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2}{\sqrt{x^2+1}}-2x+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=1,$$

则有斜渐近线 $y=2x+1$.

另一条斜渐近线 $y=-2x-1$.

五、(本题 10 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上的导数 $f'(x)$ 单调增加，$f(0)=0$，且 $x>0$ 时，$f(x)>0$.

(1) 证明函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调增加;

(2) 如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$. 证明函数 $F(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{f(x)}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调增加.

证：(1) 对于 $x>0$，由中值定理，$f(x)=f(x)-f(0)=f'(\xi)x<xf'(x)$，

$$g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}>0,\quad g(x)\text{ 单调增加;}$$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$，则 $\dfrac{f(x)}{x}<1$，

$$F'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{f'(x)}{f^2(x)}=\frac{x^2f'(x)-f^2(x)}{x^2f^2(x)}>\frac{xf(x)-f^2(x)}{x^2f^2(x)}=\frac{x-f(x)}{x^2f(x)}>0,$$

故 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调增加.

六、(本题 10 分) 设 $x_1=2,x_2=\dfrac{2}{3},x_3=\dfrac{6}{5},x_4=\dfrac{10}{11},\cdots,x_{n+1}=\dfrac{2}{1+x_n},\cdots$，证明数列 x_n 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

证：若 $x_n<1$，$x_{n+1}=\dfrac{2}{1+x_n}>1$；若 $x_n>1$，$x_{n+1}=\dfrac{2}{1+x_n}<1$，

所以 $x_{2n}<1$，$x_{2n-1}>1$，

$$x_{2n+2}-x_{2n}=\frac{2}{1+x_{2n+1}}-x_{2n}=\frac{2}{1+\frac{2}{1+x_{2n}}}-x_{2n}=\frac{(2+x_{2n})(1-x_{2n})}{x_{2n}+3}>0,$$

x_{2n} 单调增加有上界，$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=A$ 存在，

同理，x_{2n-1} 单调减少有下界，$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}=B$ 存在，

从而 $A=\dfrac{2}{1+B}$，$B=\dfrac{2}{1+A}$，得 $A=B=1$，

所以原数列收敛，并且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.