同济大学课程考核试卷（A 卷）

2023—2024 学年第一学期

命题教师签名：　　　　　　　　审核教师签名：

课号：5000590002301　　课名：数学分析　　　　考试考查：考试

此卷选为：测试一考试试卷

年级______ 专业________ 学号________ 姓名________ 任课教师 李雨生

题号	一	二	三	四	总分
得分					

（注意：本试卷共四大题， 二大张，满分 100 分．考试时间为 120 分钟。要求写出解题过程，否则不予计分）

一 填空题（满分 15 分，每小题 5 分）

1 函数极限 $\lim\limits_{x\to 1^-} x^{\ln(1-x)}$ 是（　　　　）．

2 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$ 是（　　　　）．

3 设 $\begin{cases} x=t-\sin t, \\ y=1-\cos t \end{cases}$，$0\le t\le 2\pi$。则函数 $y=y(x)$ 在 $t=\pi$ 的二阶导数值是（　　　）．

二 选择题（满分 16 分，每小题 4 分）

5 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f''(x)<0$。则下列不等式成立的是（　　）．

（A）$f'(1)<f'(0)<f(1)-f(0)$　　（B）$f'(1)<f(1)-f(0)<f'(0)$

（C）$f(1)-f(0)<f'(1)<f'(0)$　　（D）$f'(1)<f(0)-f(1)<f'(0)$

6 设函数 $f(x)$ 有二阶连续导数，满足 $f(0)=f'(0)=0$，$f''(0)\neq 0$．设 $F(x)=f(1-\cos x)$，

则当 $x\to 0$，$F(x)$ 作为无穷小的阶数（　　　）

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

7. 设 $f(x)$ 为偶函数，二阶连续可导，$f''(0)=2$，则有 $f\left(\dfrac{1}{n}\right)-f(0)$ 等价于

（A）$\dfrac{1}{n}$　　（B）$\dfrac{2}{n}$　　（C）$\dfrac{1}{n^2}$　　（D）$\dfrac{2}{n^2}$

8. 对于$(0,1)$上的函数$f(x)$，给出三个条件，

(i) $f(x)$一致连续　　(ii) $f(x)$处处可导

(iii) 存在$M>0$，对任何$x,y\in(0,1)$有$|f(x)-f(y)|\le M|x-y|$

则下列蕴涵关系正确的是

(A) $i\Rightarrow ii$　(B) $i\Rightarrow iii$　(C) $ii\Rightarrow i$　(D) $iii\Rightarrow i$

三 计算题（满分 20 分，每小题 10 分）

9. 求函数 $f(x)=(2+x)^x-2^x$在0点的Taylor公式（Maclaurin公式）的第一个非零项。

10. 设α和β为正的常数，且$\lim\limits_{x\to+\infty}[(x^{2\alpha}+x^{\alpha})^{1/\alpha}-x^2]=\beta$，求$\alpha$和$\beta$.

四 证明题（满分 48 分，每小题各 12 分）

11 用$\varepsilon-\delta$定义证明 $\lim\limits_{x\to 3} x^2=9$.

12. 设实数$a,b>0$, 证明 $a\ln a+b\ln b\ge(a+b)[\ln(a+b)-\ln 2]$.

13. 证明：

（1）若函数$f(x)$为区间$[a,b]$上的凸函数, 则$max\{f(a),f(b)\}$为$f(x)$的最大值；

（2）若$x\in(0,\frac{\pi}{2})$，则$\frac{\sin x}{x}\ge\frac{2}{\pi}$.

14. 设函数 $f(x)$ 在有限区间 $[a,b)$ 上连续. 证明 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上一致连续的充要条件是 $f(x)$ 在 b 点的左极限存在有限.