绪论

理论力学是研究物体机械运动一般规律的科学

物体在空间的位置随时间的改变

研究内容：

1 静力学——研究物体在力系作用下的平衡规律的科学，同时也研究力的一般性质及力系的简化规律。

平衡：在力学中通常把物体相对于地球处于静止或匀速直线运动的状态称为平衡状态。（严格讲，是物体相对于惯性参考系处于静止或匀速直线运动的状态。）

2 运动学——从几何学的观点研究物体的运动，而不涉及到力（引起运动的原因）。

3 动力学——研究物体的运动与作用于物体的力之间的关系。（例如，对质点：$\sum \vec{F} = m\vec{a}$）

特点：

- 1 严密性　　- 2 系统性　　- 3 与工程实际相结合

目 的：

- 1 用理论力学的理论和方法解决工程和生活中的某些力学问题。
- 2 了解科学研究的方法，培养分析问题和解决问题的能力。
- 3 是后续课程的基础，如：材料力学，机械原理，机械设计，结构力学，流体力学，车辆振动、机械振动等。

理论力学

theoretical mechanics

　　研究物体的机械运动及物体间相互机械作用的一般规律的学科，也称经典力学。是力学的一部分，也是大部分工程技术科学的基础。其理论基础是牛顿运动定律，故又称牛顿力学。20世纪初建立起来的量子力学和相对论，表明牛顿力学所表述的是相对论力学在物体速度远小于光速时的极限情况，也是量子力学在量子数为无限大时的极限情况。对于速度远小于光速的宏观物体的运动，包括超音速喷气飞机及宇宙飞行器的运动，都可以用经典力学进行分析。

发展简史　　力学是最古老的科学之一，它是社会生产和科学实践长期发展的产物。随着古代建筑技术的发展，简单机械的应用,静力学逐渐发展完善。公元前5～前 4世纪，在中国的《墨经》中已有关于水力学的叙述。古希腊的数学家阿基米德（公元前 3世纪）提出了杠杆平衡公式（限于平行力）及重心公式，奠定了静力学基础。荷兰学者S.斯蒂文（16世纪）解决了非平行力情况下的杠杆问题，发现了力的平行四边形法则。他还提出了著名的“黄金定则”，是虚位移原理的萌芽。这一原理的现代提法是瑞士学者约翰第一·伯努利于1717年提出的。

动力学的科学基础以及整个力学的奠定时期在17世纪。意大利物理学家伽利略创立了惯性定律，首次提出了加速度的概念。他应用了运动的合成原理，与静力学中力的平行四边形法则相对应，并把力学建立在科学实验的基础上。英国物理学家I.牛顿推广了力的概念，引入了质量的概念，总结出了机械运动的三定律(1687年)，奠定了经典力学的基础。他发现的万有引力定律，是天体力学的基础。以牛顿和德国人G.W.莱布尼兹所发明的微积分为工具，瑞士数学家L.欧拉系统地研究了质点动力学问题，并奠定了刚体力学的基础。

理论力学发展的重要阶段是建立了解非自由质点系力学问题的较有效方法。虚位移原理表示质点系平衡的普遍条件。法国数学家 J.Le R.达朗伯提出的、后来以他本人名字命名的原理,与虚位移原理结合起来,可以得出质点系动力学问题的分析解法，产生了分析力学。这一工作是由法国数学家J.-L.拉格朗日于 1788年完成的，他推出的运动方程，称为拉格朗日方程，在某些类型的问题中比牛顿方程更便于应用。后来爱尔兰数学家W.R.哈密顿于19世纪也推出了类似形式的方程。拉格朗日方程和哈密顿方程在动力学的理论性研究中具有重要价值。

与动力学平行发展，运动学在19世纪也发展了。到19世纪后半叶，运动学已成为理论力学的一个独立部分。

20世纪以来，随着科学技术的发展，逐渐形成了一系列理论力学的新分支；并与其他学科结合，产生了一些边缘学科，如地质力学、生物力学、爆炸力学、物理力学等。力学模型也越来越多样化。在计算工作中，已广泛采用了电子计算机，解决了过去难以解决的一些力学问题。

学科内容　理论力学所研究的对象（即所采用的力学模型）为质点或质点系时，称为质点力学或质点系力学；如为刚体时，称为刚体力学。因所研究问题的不同，理论力学又可分为静力学、运动学和动力学三部分。静力学研究物体在力作用下处于平衡的规律。运动学研究物体运动的几何性质。动力学研究物体在力作用下的运动规律。

理论力学的重要分支有振动理论、运动稳定性理论、陀螺仪理论、变质量体力学、刚体系统动力学、自动控制理论等。这些内容，有时总称为一般力学。

理论力学与许多技术学科直接有关，如水力学、材料力学、结构力学、机器与机构理论、外弹道学、飞行力学等，是这些学科的基础。

基本概念和方法 运动学中关于运动的量度，对于点有速度与加速度,对于刚体有移动的速度与加速度,转动的角速度与角加速度。

物体间的相互机械作用的基本量度是力，理论力学中还广泛用到力对点之矩和力对轴之矩的概念。

物体运动的改变除与作用力有关外，还与本身的惯性有关。对于质点,惯性的量度是其质量。对于刚体,除其总质量外，惯性还与质量在体内的分布状况有关，即与质心位置及惯性矩、惯性积有关。刚体对于三个互相垂直的坐标轴的各惯性矩及惯性积组成刚体对该坐标系的惯性张量。

动力学中关于运动的量度有动量、动量矩和动能，与此有关的力的作用的量度有冲量、冲量矩和功。表明这两种量度间的关系的定理，有动量定理、动量矩定理以及动能定理，称为动力学普遍定理。

理论力学的基础是牛顿三定律：第一定律即惯性定律；第二定律给出了质点动力学基本方程；第三定律即作用与反作用定律，在研究质点系力学问题时具有重要作用。第一、第二定律对于惯性参考系成立。在一般问题中，与地球固结的参考系或相对于地面作惯性运动的参考系，可近似地看作惯性参考系。

研究非自由质点系的平衡和运动的较有效方法是力学的变分原理，其中有虚位移原理、达朗伯原理、哈密顿原理等。在解题时广泛应用了由此推出的运动微分方程,其中有拉格朗日方程、哈密顿正则方程、哈密顿-雅可比方程等。

① 我国 — 墨翟（前 468-382 ）学派著作《墨经》有重心、力的概念。 “ 力，形之奋也 ”。
古希腊 亚里士多德 （前 384 — 322 ） “ 力是维持速度的原因 ” 。
阿基米德杠杆平衡等 。
地恒动而人不知，譬如闭舟而行，不觉舟之远也 （孙毅）
阿基米德(公元前 287- 前 212), 古希腊伟大的数学家、力学家。后人对阿基米德给以极高的评价，常把他和 I. 牛顿、C.F.高斯并列为有史以来三个贡献最大的数学家。他的生平没有详细记载，但关于他的许多故事却广为流传。据说他确立了力学的杠杆定律之后，曾发出豪 言壮语： “ 给我一个立足点，我就可以移动这个地球！ ”

②牛顿力学的建立：在 哥白尼 (日心说) 推翻了 托勒玫的地心说，和在 第谷布拉赫 积累的天文观察资料基础上 , 开普勒 发现了行星三定律 —— 总结万有引力定律， 牛顿总结了三定律， 1687 《自然哲学的数学原理》。

③ 分析力学 : （ 1788 ） 拉格朗日力学 建立 (至此认为力学天衣无缝) 。

④ 近代力学： 19 世纪末 20 世纪初出现了经典力学无法解释的矛盾。

第一篇　（刚体）静力学

静力学主要研究两个问题：力系的简化、力系的平衡

力系：作用在物体上的一群力。

第一章　力系的特性与基本力系的简化

第一节　　力的作用效应

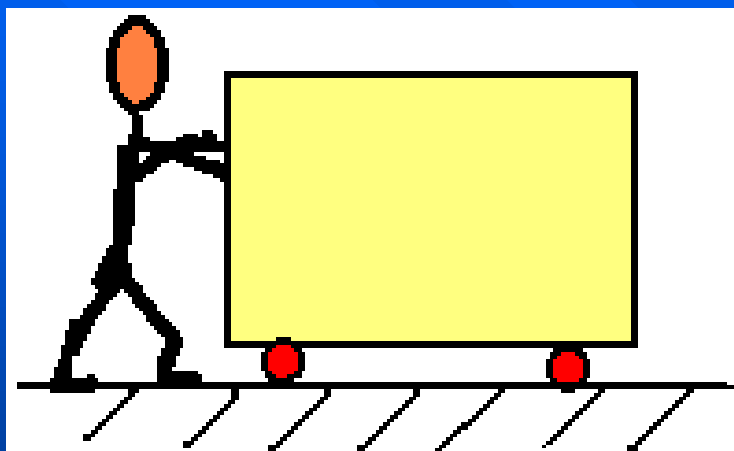
一、力的定义

力是物体相互间的一种机械作用，它能引起物体机械运动状态的改变，同时能引起物体的变形。

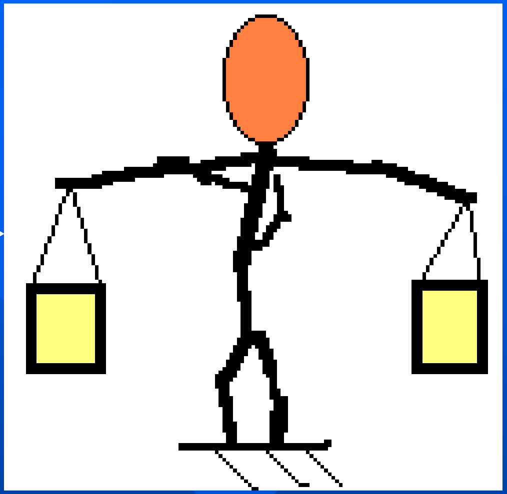
力对物体的作用有两种效应：

1. 一种是使物体运动状态发生变化，称为运动效应（外效应）；
2. 另一种是使物体发生变形，称为变形效应（内效应）；

运动



变形



（刚体）静力学只研究物体的运动效应（不考虑变形），材料力学研究变形效应。

由于理论力学只研究物体的运动效应，因此有必要引入一种理想化的力学模型——刚体作为它的研究对象。

刚体：在运动中和受力后形状和大小均不发生改变，且内部各点之间的距离均保持不变的物体，是一种理想化的力学模型。对刚体而言，力只有运动效应。

除刚体以外，理论力学中还有两种常见的力学模型：质点与质点系

质点：具有一定质量而几何形状、尺寸可忽略不计的物体。
质点系：有限个或无限个相互联系并组成运动整体的一群质点。刚体就是无限个质点组成的几何形状和尺寸都不变的一种特殊的质点系。由若干个刚体组成的系统称为刚体系统，有些教材上也称为物体系统。

理论力学
研究对象

质点（不是本课程的研究重点）

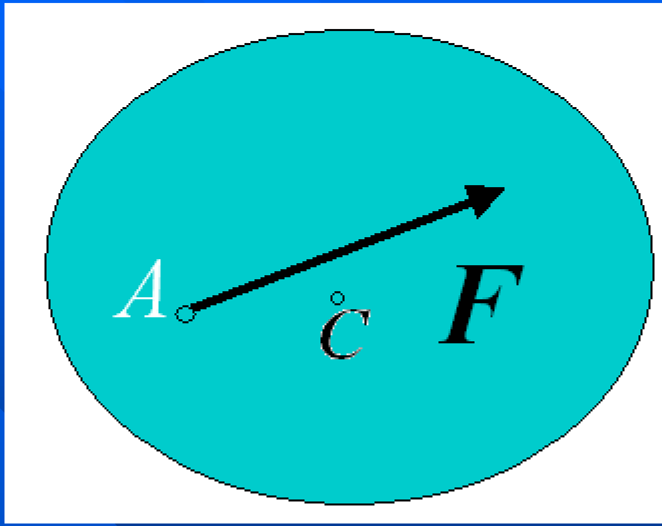
质点系（包括刚体、刚体系统）

刚体 ：一种特殊的质点系

力有三要素：

大小(单位：N，kN)、方向(力所顺沿的直线在空间的方位和力沿其作用线的指向）、作用点。

由力度三要素可知，



力是一个矢量。可用符号 $\vec{F}$ 表示。

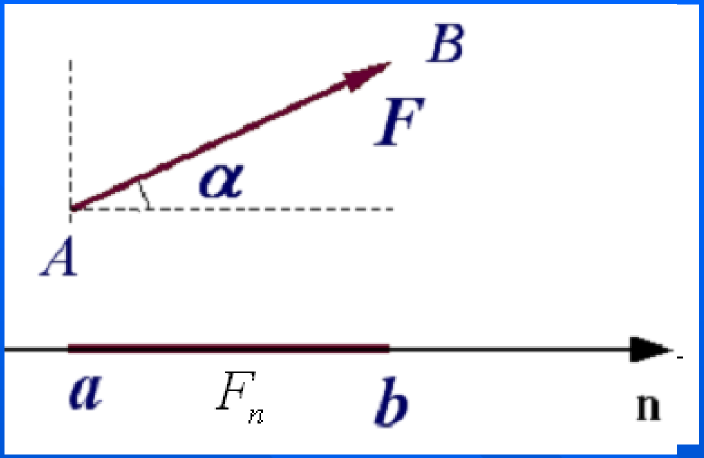
力用一段带箭头的线段来表示。线段的长度表示力的大小；线段与某定直线的夹角表示力的方位，箭头表示力的指向；线段的起点或终点表示力的作用点。

力的运动效应：

在一般情况下（力 $\vec{F}$ 的作用线不通过物体的质量中心），物体将既发生移动（平行移动），又会有转动。

二、力在坐标轴上的投影

1. 力在轴上和平面上的投影

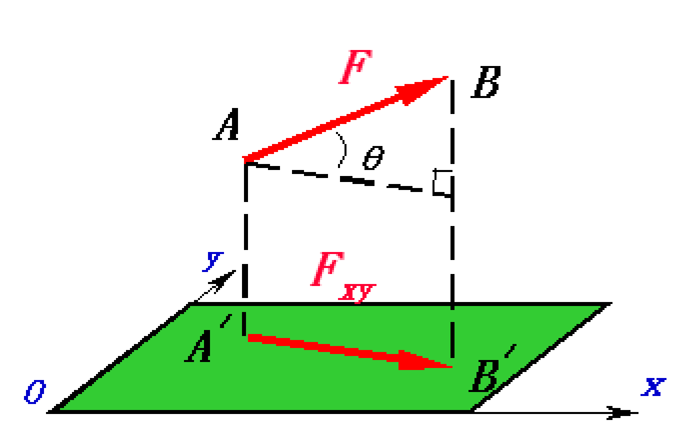


力在轴上的投影为F_n

（代数量，可正可负）

$$F_n = \vec{F} \cdot \vec{n} = F\cos\alpha$$

其中 $\vec{n}$为单位矢量。



力在平面上的投影为$\vec{F}_{xy}$

（矢量），它的大小

$$F_{xy} = F\cos\theta$$

注意：

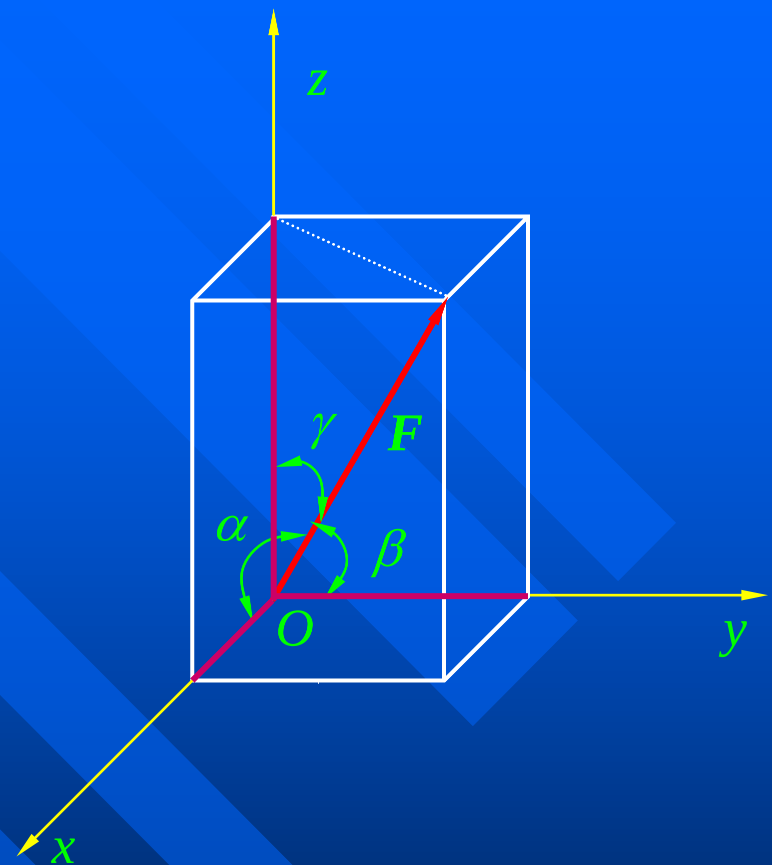
力在轴上投影是代数值。

力在平面上的投影是矢量。

2. 力在直角坐标轴上的投影（直接投影法、二次投影法）

1）直接投影法（一次投影法）

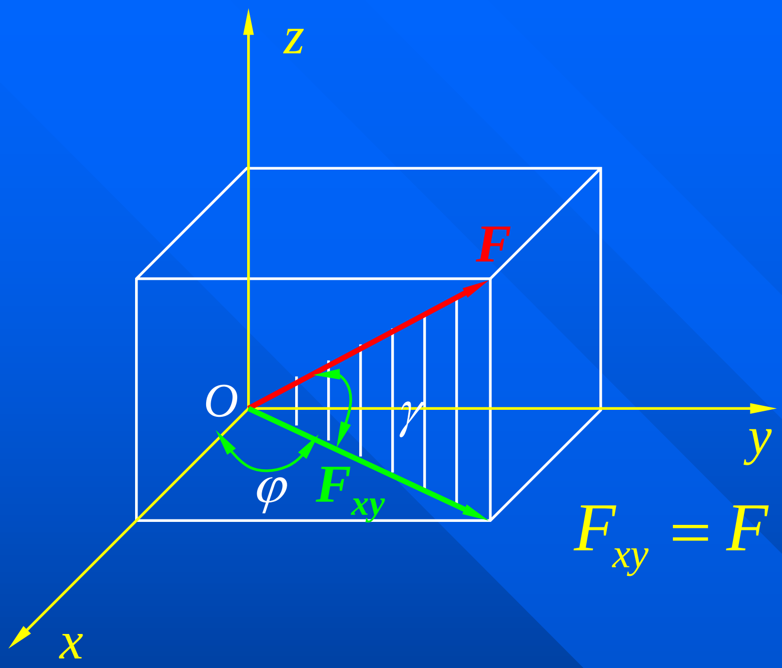
$$\left.\begin{aligned} X &= F\cos\alpha \\ Y &= F\cos\beta \\ Z &= F\cos\gamma \end{aligned}\right\}$$



其中 α,β,γ 不独立。$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为方向余弦，满足

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

2）二次投影法



$$F_{xy} = F\cos\gamma$$

$$\left.\begin{aligned} X &= F\cos\gamma\cos\varphi \\ Y &= F\cos\gamma\sin\varphi \\ Z &= F\sin\gamma \end{aligned}\right\}$$

注意： 力在坐标轴上的投影是代数量，
应特别注意它的正负号。

设$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$为直角坐标系 x,y,z 轴的单位矢量（基矢量），则力 $\vec{F}$可以写成 $\vec{F}=F_x\vec{i}+F_y\vec{j}+F_z\vec{k}$

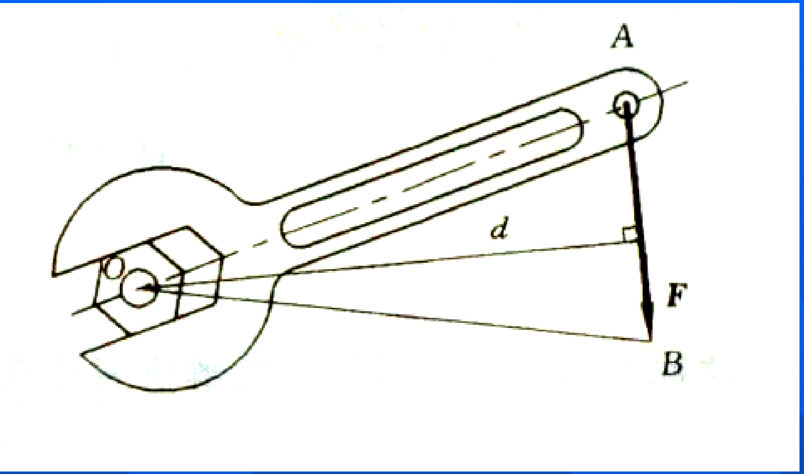
力$\vec{F}$ 的模 $F=\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}$

方向余弦
$$\begin{cases}\cos\alpha=F_x/F,\\ \cos\beta=F_y/F,\\ \cos\gamma=F_z/F。\end{cases}$$

力对刚体的运动效应除了平移之外还有转动，力使物体绕某点转动效应的度量是力对点之矩。

三、力对点之矩

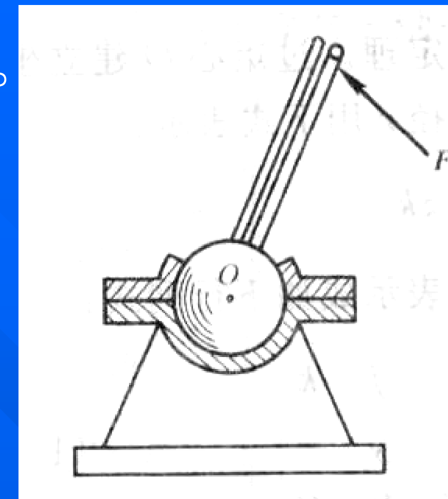
1. 平面力系中的力对点之矩（力矩）概念



$$M_0(F) = \pm Fd$$

O点称为力矩中心，(简称为矩心），d称为力臂。$M_0(F)$的单位是N·m。它被定义为代数量，通常规定使物体绕矩心逆时针转动时力矩为正，顺时针为负。

我们把平面内力对点之矩的概念推广到空间。



2. 空间力系中的力对点之矩的概念

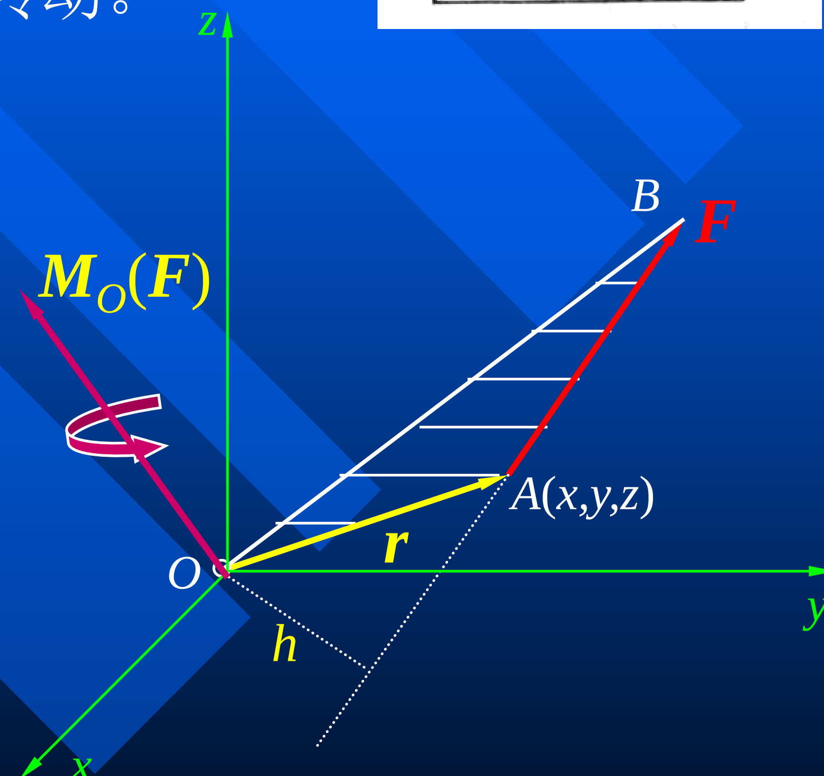
以电视机上的拉杆天线为例（如图）

拉杆天线上的作用力F使之绕O点转动。

空间力对点之矩的定义：

设力F对空间中任一点O取矩，称O点为矩心，力F的作用点为A，矢径 $\overrightarrow{OA}=\vec{r}$ ，F对O点之矩 $\vec{M}_O(\vec{F})$ 定义为：

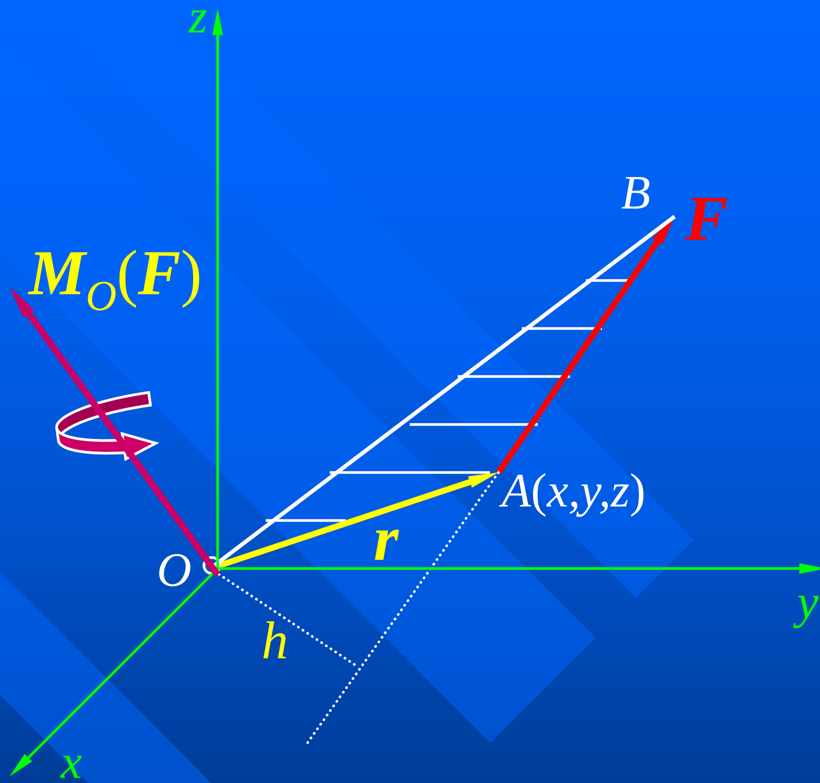
$$\vec{M}_O(\vec{F})=\vec{r}\times\vec{F}$$



空间力对点之矩的定义：

设力F对空间中任一点O取矩，称O点为矩心，力F的作用点为A，矢径 $\overrightarrow{OA}=\vec{r}$ ，F对O点之矩 $\vec{M}_O(\vec{F})$ 定义为：

$$\vec{M}_O(\vec{F})=\vec{r}\times\vec{F}$$



$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \qquad \vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$

$$\vec{\mathbf{M}}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{M}}_O(\vec{F}) = (yF_z - zF_y)\vec{i} + (zF_x - xF_z)\vec{j} + (xF_y - yF_x)\vec{k}$$

$\vec{\mathbf{M}}_O(\vec{F})$ 反映了该矢量的三要素：

大小： $\left|\vec{\mathbf{M}}_O(\vec{F})\right| = F \cdot d = 2S_{OAB}$

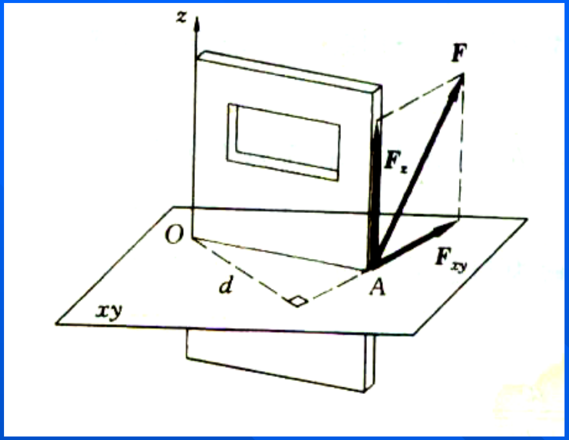
（d为F到矩心O的垂直距离，称为力臂）

方向：根据右手螺旋法则确定，矢量 $\vec{\mathbf{M}}_O(\vec{F})$ 垂直于 $\vec{r}$ 和 $\vec{F}$ 决定的平面（力矩平面）。

作用点： 通过矩心O（定位矢量）。

四、力对轴之矩

在工程实践中，在许多情况下物体都存在绕一特定的轴转动的问题。例如门窗的开关，我们用力对轴之矩来度量使物体绕轴转动的效应。



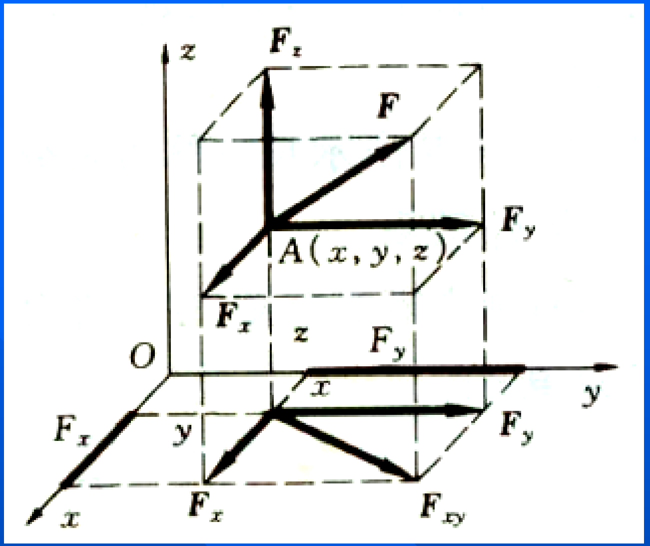
定义：力对轴之矩等于该力在垂直于该轴的平面上的投影对该轴与该平面交点之矩。用符号 $M_z(\vec{F})$ 表示。

$$M_z(\vec{F}) = M_O(\vec{F}_{xy})$$

由定义可知，$M_z(F)$是个代数量。

$M_z(F)$正负号规定：右手螺旋法则。

将右手四指握轴并使它们的弯曲方向与力使物体绕Z轴转动方向一致，若大拇指指向与Z轴正向相同为正，反之为负。



当力的作用线与轴平行（此时F_{xy}=0)或相交（此时力臂为零）时，即力与轴共面时，力对轴之矩为零。

由$M_z(\vec{F})=M_O(\vec{F}_{xy})$ 可求得，$M_z(\vec{F})=xF_y-yF_x$

同理，$M_x(\vec{F})=yF_z-zF_y$，$M_y(\vec{F})=zF_x-xF_z$

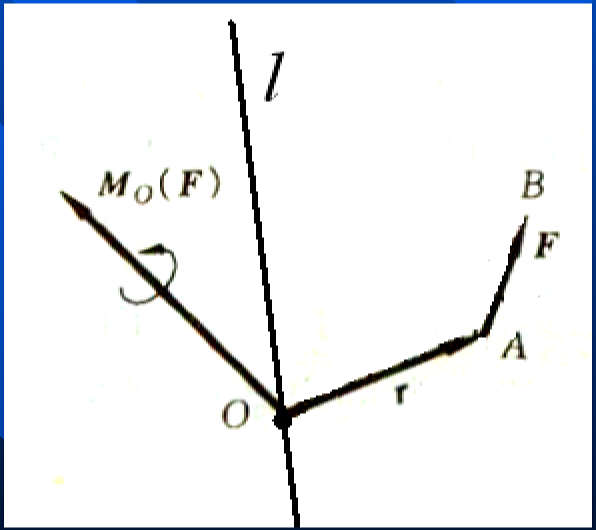
对比：$\vec{\mathbf{M}}_O(\vec{F})=(yF_z-zF_y)\vec{i}+(zF_x-xF_z)\vec{j}+(xF_y-yF_x)\vec{k}$

因此

$$[\boldsymbol{M}_0(\boldsymbol{F})]_x = M_x(\boldsymbol{F})$$
$$[\boldsymbol{M}_0(\boldsymbol{F})]_y = M_y(\boldsymbol{F})$$
$$[\boldsymbol{M}_0(\boldsymbol{F})]_z = M_z(\boldsymbol{F})$$

五、力矩关系定理 (空间内力对点之矩与力对轴的矩之间的关系）

一个力对于空间某一点之矩在通过该点的任一轴上的投影等于该力对该轴的矩。



$$\vec{M}_O(\vec{F})\cdot\vec{e}_l = M_l(\vec{F})$$

$\vec{e}_l$ 为直线 l 的单位矢量。

例 手柄位于平面*Axy*内；在*D*处作用一力***F***，位于垂直于***y***轴的平面内，与铅直线夹角为*α*。如果*CD*=*a*，杆*BC*平行于***x***轴，杆*CE*平行于*y*轴，且$AB = BC = l$。试求：力***F*** 对***x***，***y*** 和 ***z*** 三轴的矩。

解：求F对轴之矩的3种常用方法：

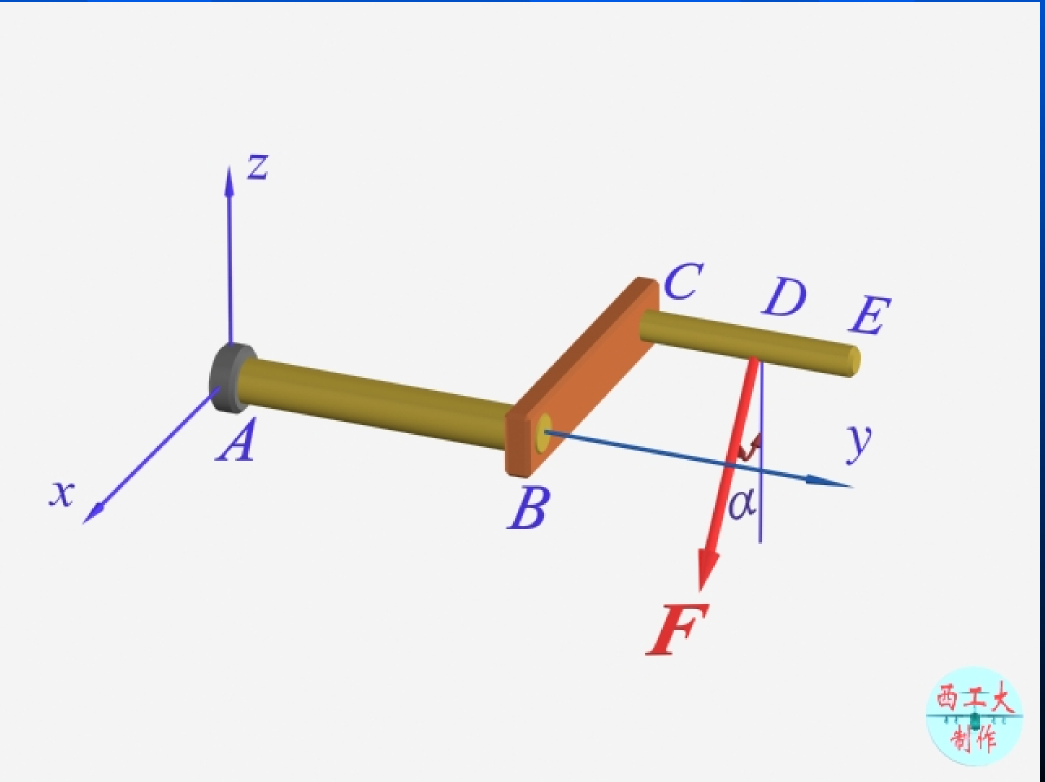
1）运用力矩关系定理，先求F对A点之矩。

$$\vec{M}_A(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}$$

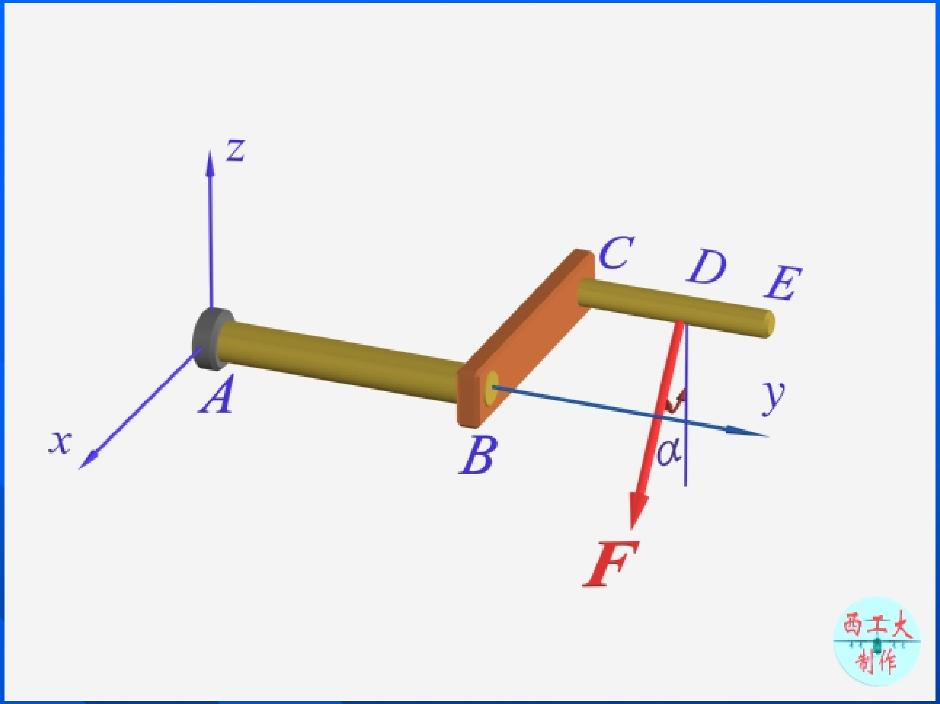
F的投影：$(F\sin\alpha, 0, -F\cos\alpha)$

D点坐标：$(-l, l+a, 0)$

$$\vec{\mathbf{M}}_A(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$



$$\vec{M}_A(\vec{F})=[-F(l+a)\cos\alpha]\vec{i}+[-Fl\cos\alpha]\vec{j}+[-F(l+a)\sin\alpha]\vec{k}$$



$$\begin{cases} M_x(\vec{F})=-F(l+a)\cos\alpha \\ M_y(\vec{F})=-Fl\cos\alpha \\ M_z(\vec{F})=-F(l+a)\sin\alpha \end{cases}$$

2）运用公式

$$M_x(\vec{F})=yF_z-zF_y \quad M_y(\vec{F})=zF_x-xF_z \quad M_z(\vec{F})=xF_y-yF_x$$

显然，计算结果与方法1相同。

3）根据定义

求 $M_x(\vec{F})$ ，将力F投影到A_{yz}平面，则 $M_x(\vec{F})=-F\cos\alpha\cdot(l+a)$

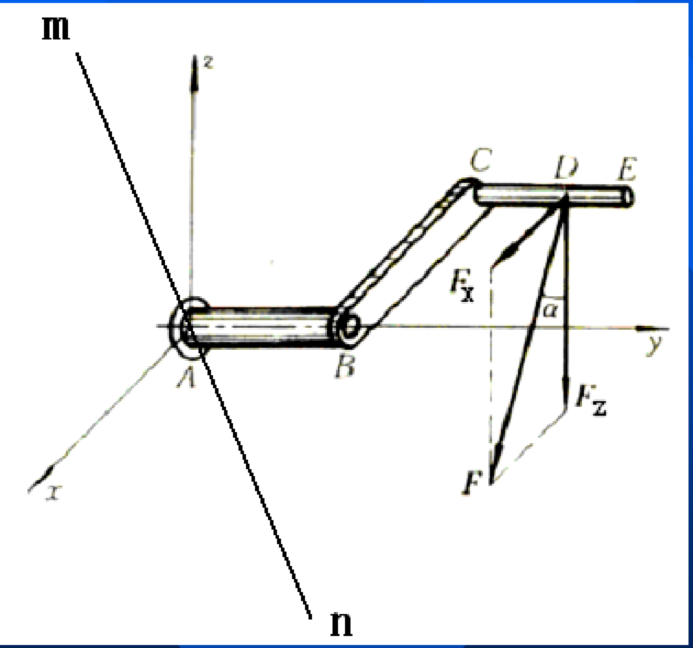
（顺时针）

求 $M_z(\vec{F})$ ，将力F投影到A_{xy}平面，

同理，可求 $M_y(\vec{F})$ 。

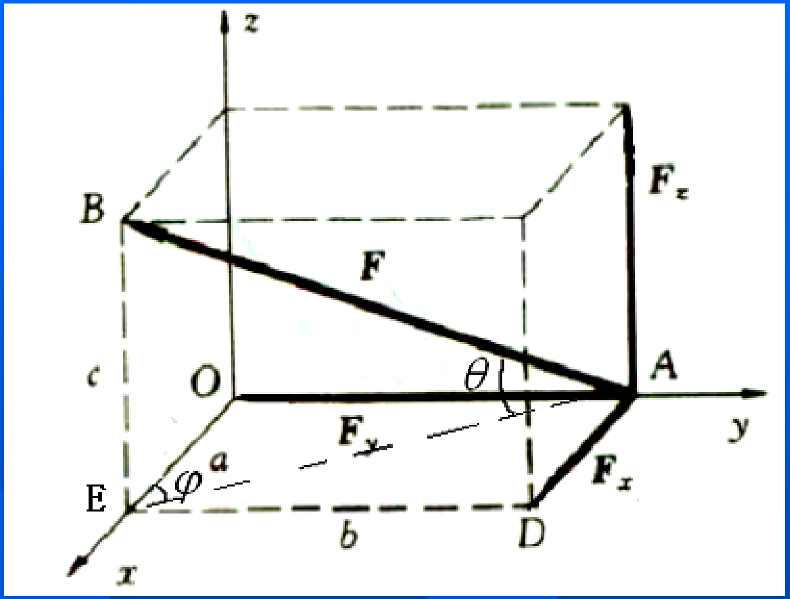
则$M_Z(\vec{F}) = -F\sin\alpha\cdot(l+a)$（顺时针）

思考：若求F对过A点任一轴m-n的矩，直线m-n单位向量e_{mn}的方向余弦为 $\cos\alpha_1, \cos\beta_1, \cos\gamma_1$, 应采用何种方法。



$$M_{mn}(\vec{F}) = \vec{M}_A(\vec{F})\cdot\vec{e}_{mn} = \vec{M}_A(\vec{F})\cdot(\cos\alpha_1\vec{i} + \cos\beta_1\vec{j} + \cos\gamma_1\vec{k})$$

例2 长方体边长分别为a，b,c,沿其对角线AB作用一力F，求F对坐标原点O点之矩及三根坐标轴的矩。



解：先求投影，用二次投影法。

$$\left.\begin{aligned} F_x &= F\cos\theta\cos\varphi \\ F_y &= F\cos\theta\sin\varphi \\ F_z &= F\sin\theta \end{aligned}\right\}$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \qquad \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\sin\theta = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \qquad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$F_x = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}F \qquad F_y = \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}F \qquad F_z = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}F$$

力F的作用点A的坐标（0，b，0）

$$\vec{\mathbf{M}}_O(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ 0 & b & 0 \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \frac{bc}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}F\vec{i} - \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}F\vec{k}$$

$$M_x(\vec{F}) = \frac{bc}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}F \qquad M_y(\vec{F}) = 0 \qquad M_z = \frac{-ab}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}F$$

本题还可以用力对轴之矩的定义及有关公式求解。

思考：如何求该力对直线ED（方向为E指向D）的矩？

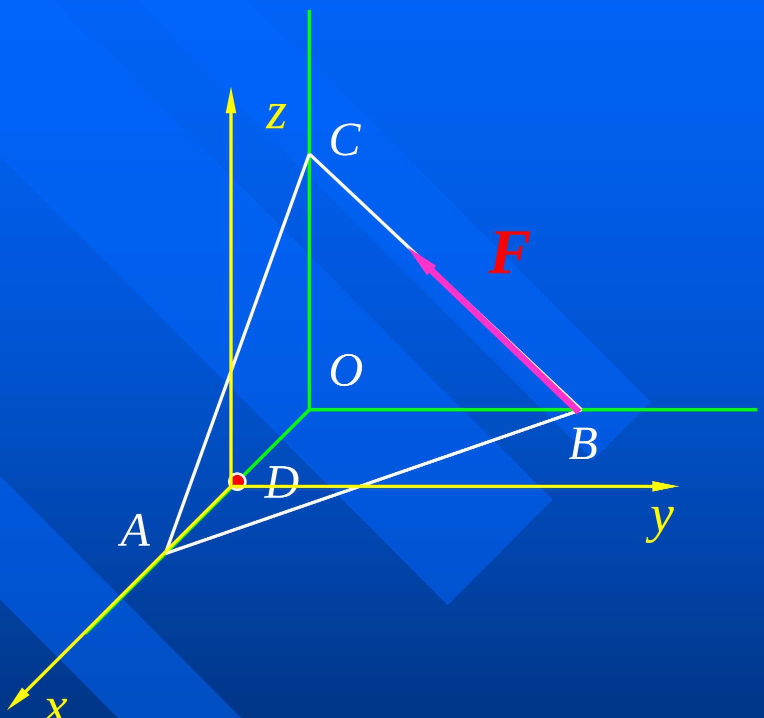
在新坐标系中力F的作用点A的坐标（-a，b，0）

例 题

已知： $OA=OB=OC=b$, $OA\perp OB\perp OC$.

求： 力 $\boldsymbol{F}$ 对OA边的中点D之矩在AC方向的投影。

解： 利用力矩关系



$$\vec{F} = -\frac{\sqrt{2}}{2}F\vec{j} + \frac{\sqrt{2}}{2}F\vec{k}$$

$$\vec{r}_B = -\frac{b}{2}\vec{i} + b\vec{j}$$

$$\vec{M}_D(\boldsymbol{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -b/2 & b & 0 \\ 0 & -F/\sqrt{2} & F/\sqrt{2} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{Fb}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{Fb}{2\sqrt{2}}\vec{j} + \frac{Fb}{2\sqrt{2}}\vec{k}$$

$$\vec{n}_{AC} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k}$$

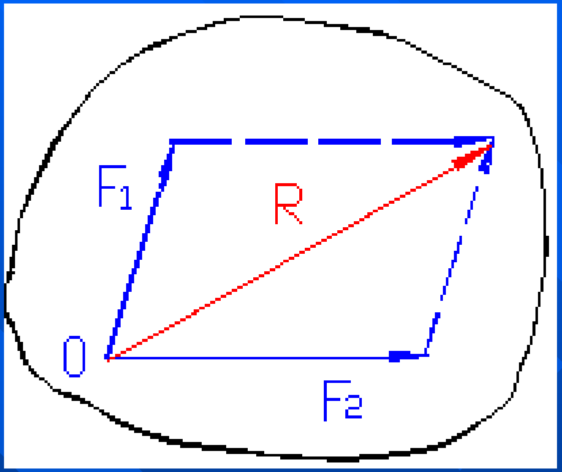
$$M_{AC}(\boldsymbol{F}) = \vec{M}_D(\boldsymbol{F})\cdot\vec{n}_{AC} = -\frac{Fb}{4}$$

第二节　静力学公理及其推论

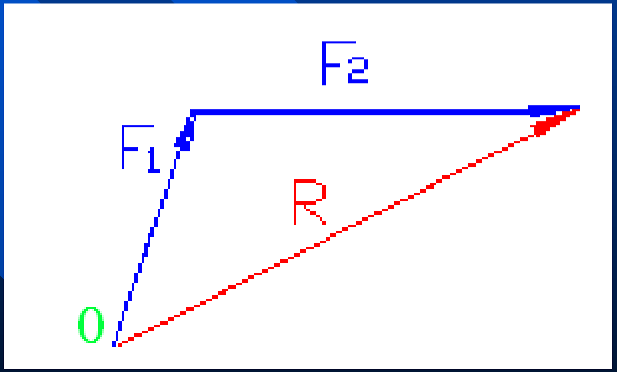
公理：人们在长期的生产实践中总结出来，大家公认，并被实践证明的事实。

（1）力的平行四边形法则：

作用于物体上同一点的两个力，可以合成为一个合力，合力的作用点仍在该点，合力的大小和方向由这两个力为邻边所作的平行四边形的对角线确定，即合力等于各分力的矢量和。



力的三角形法则



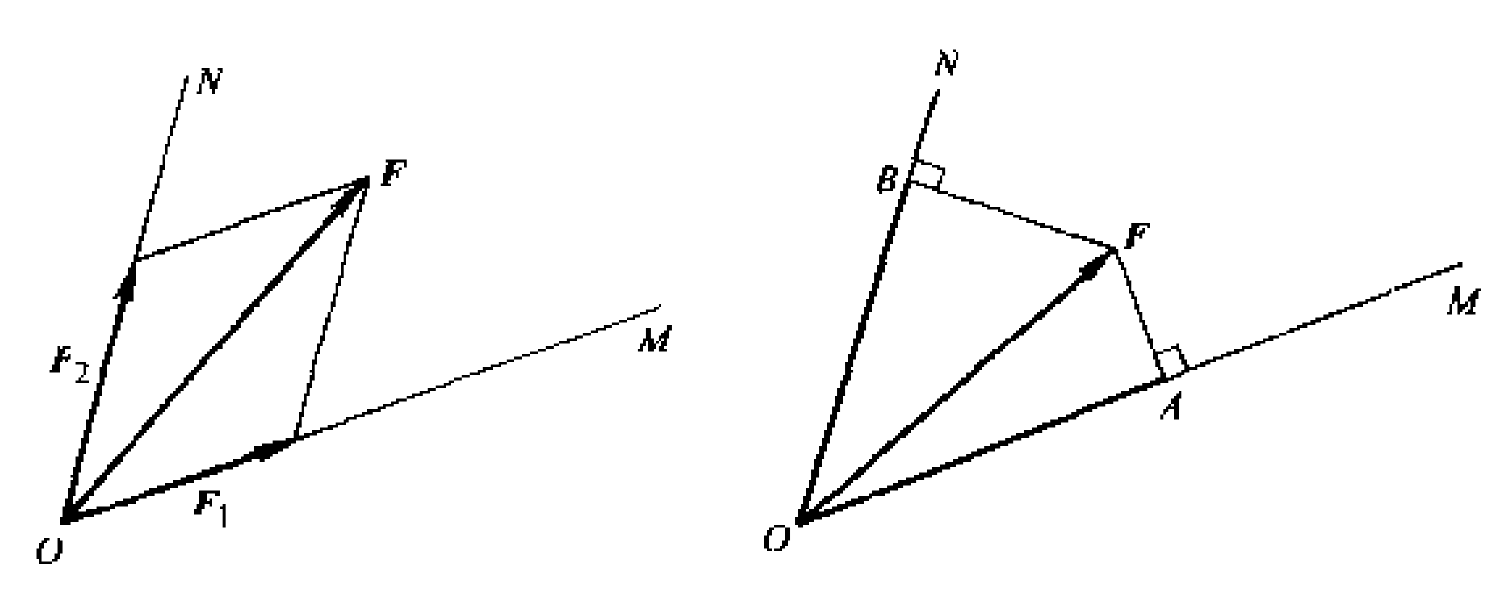
R：合力

F_1、F_2：分力（与投影的区别？）

力的分解与力的投影

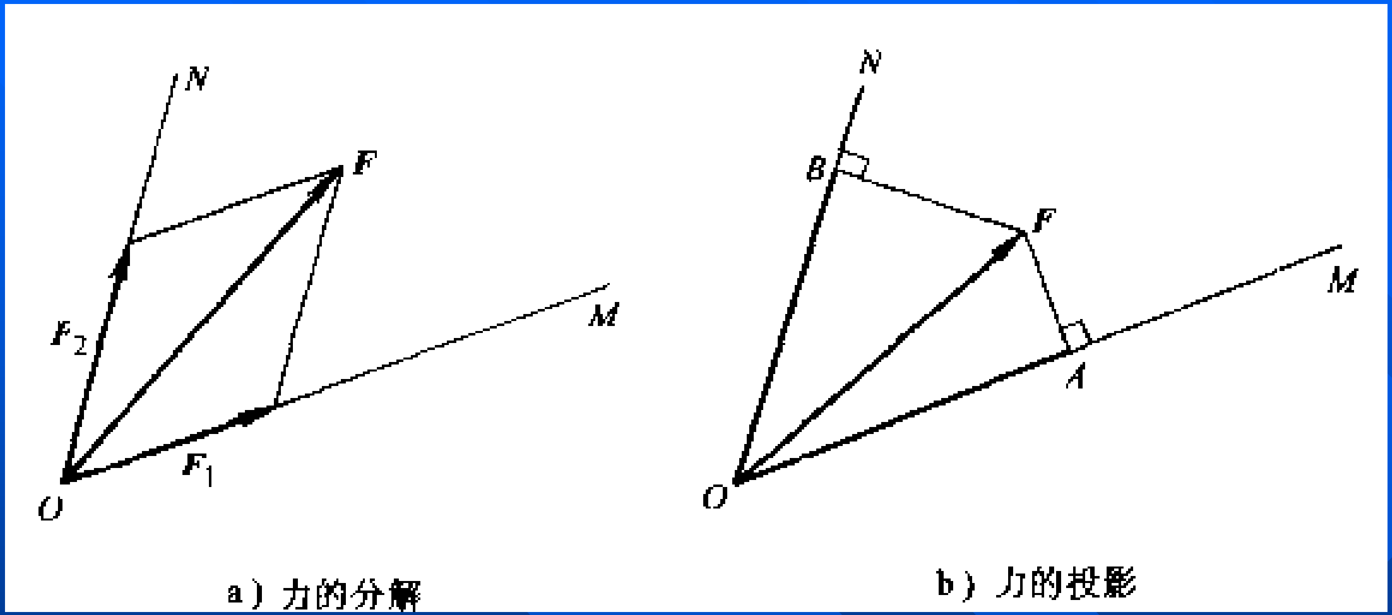
力的分解与力的投影是两个不同的概念。一个力可分解成两个或两个以上的分力，力沿坐标轴分解的分力是矢量，因此．力的分解应满足矢量运算法则；而力在坐标轴上的投影，是该力的起点与终点分别向该坐标轴作垂线而截得的线段，是代数量。

它们概念上的区别，对非正交坐标轴最易说明。



a）力的分解　　b）力的投影

力的分解与力的投影

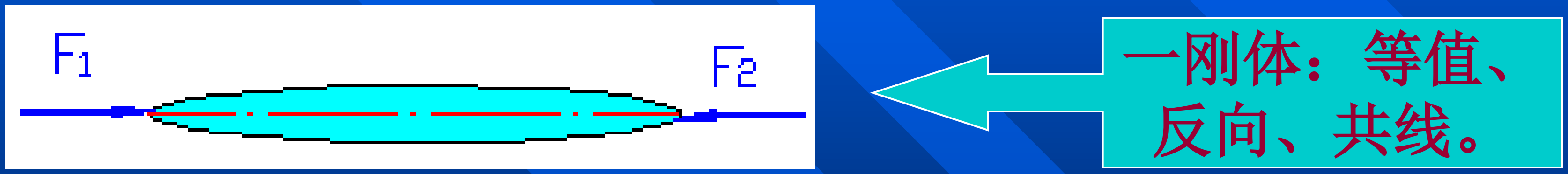


显然，图a中分力F_1、F_2的大小，并不等于图b中投影OA、OB的大小。唯有当力沿正交坐标轴分解和投影时，其分力的大小与投影的绝对值相等。

（2）二力平衡公理：

用于同一刚体上的二力使刚体处于平衡的充要条件是：这二力的大小相等、方向相反、作用线在同一直线上，简称二力等值、反向、共线。

仅在二力作用下平衡的刚体（或刚杆、构件）称为二力体（或二力杆、二力构件）。



$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$　　　　F_1和F_2称为一对平衡力。

注意：对变形体而言，该条件是必要而不充分的。

（3）加减平衡力系公理：

在已知力系作用的某一刚体上，加上或减去任何一个平衡力系，都不改变原力系对该刚体的作用效果。

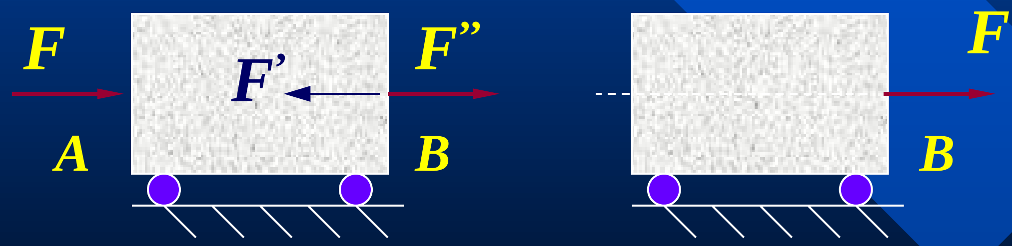
平衡力系：作用在物体上使物体保持平衡的力系。

一力系=一力系± n个平衡力系。

由此可以得到二个推论：

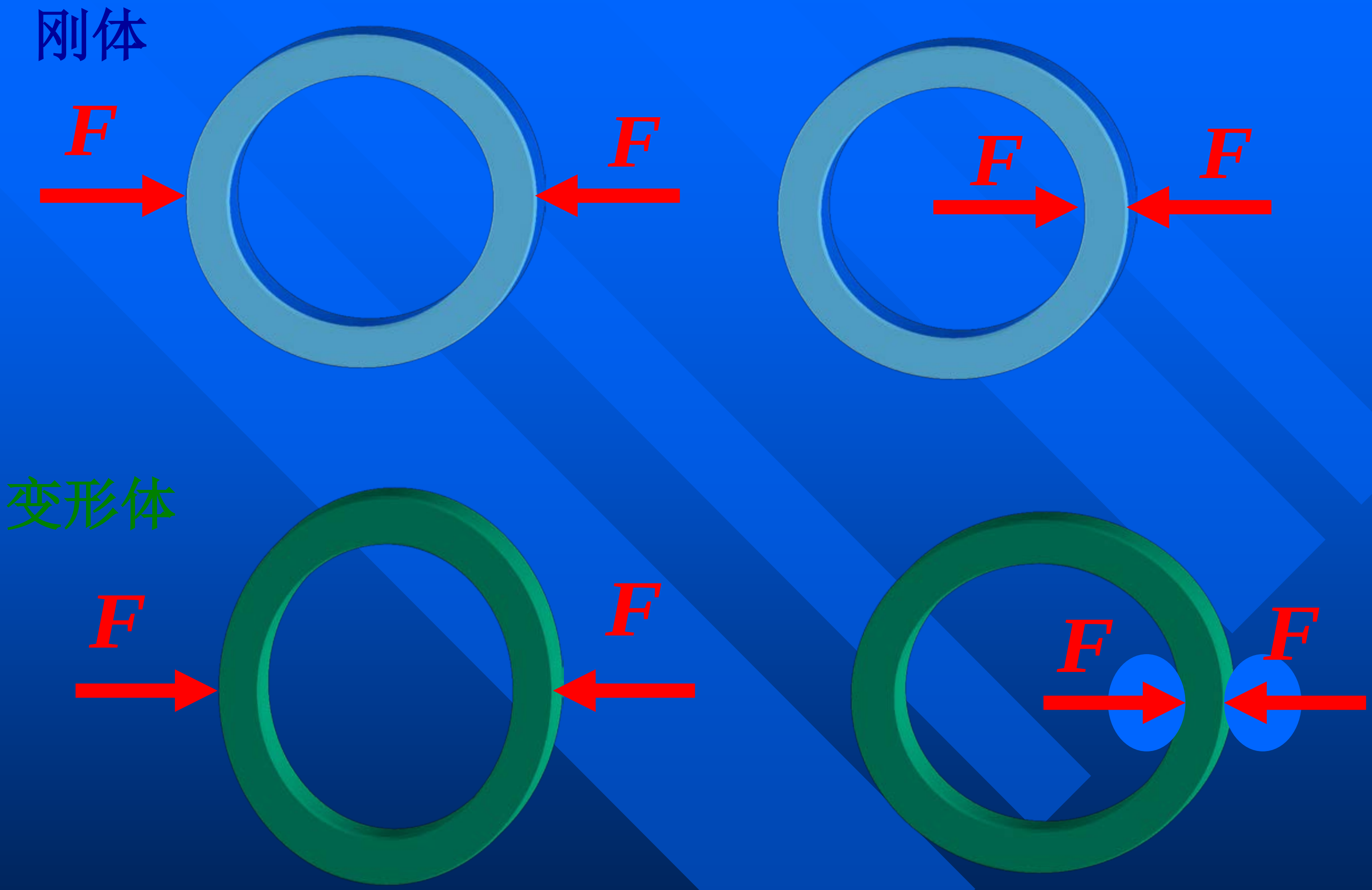
推论1　力的可传性原理

作用于某一刚体上的力，可以沿其作用线将其作用点任意滑移到该刚体上其它的点，并不改变此力对该刚体的作用效果。



滑动矢量

$F = F' = F''$

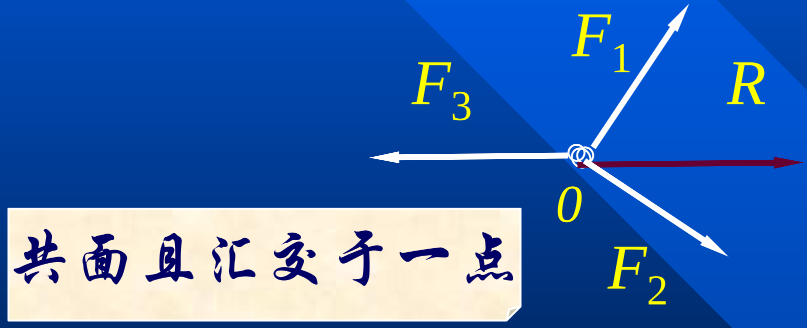

刚体
F
F
F
F
变形体
F
F
F
F

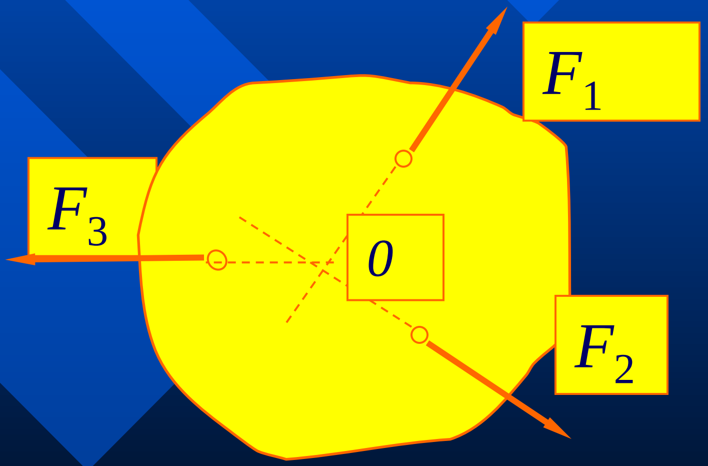
作用在刚体上的力的三要素：大小、方向和作用线。

对刚体而言，力为*滑动矢量*

推论2　三力平衡汇交定理

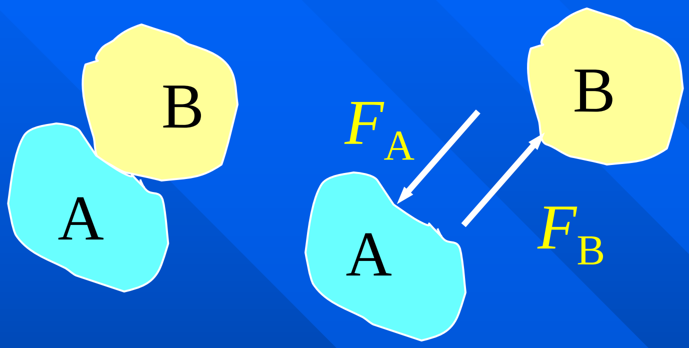
作用于同一刚体上的三个力使刚体处于平衡状态，当其中的两个力的作用线相交于一点，则第三个力的作用线必与该两个力的作用线共面，且通过此相交点。





（4）作用力与反作用力定律（牛顿第三定律）：

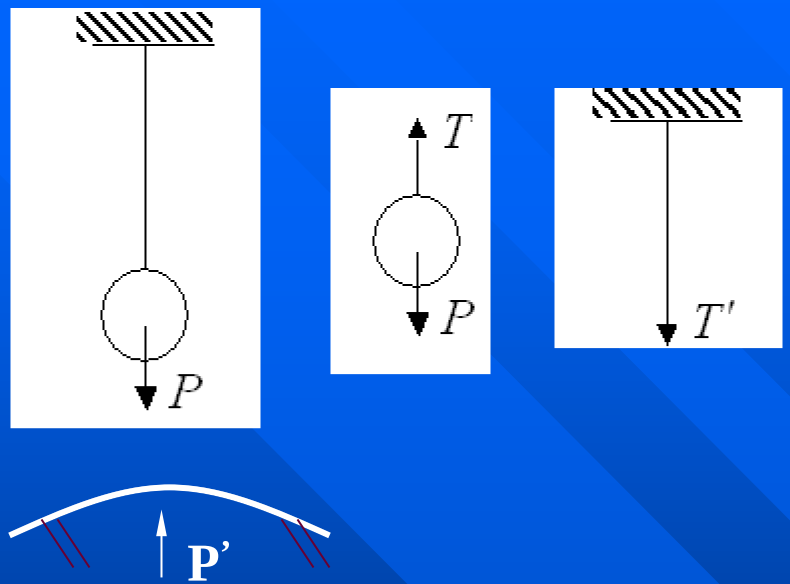
两物体间相互作用的力总是等值、反向、共线且分别作用在这两个物体上。



二物体：等值、反向、共线。

$F_A = F_B$ $\qquad$ $\vec{F}_A = -\vec{F}_B$

例1 区分作用力反作用力与平衡力



作用力与反作用力:

P-P'

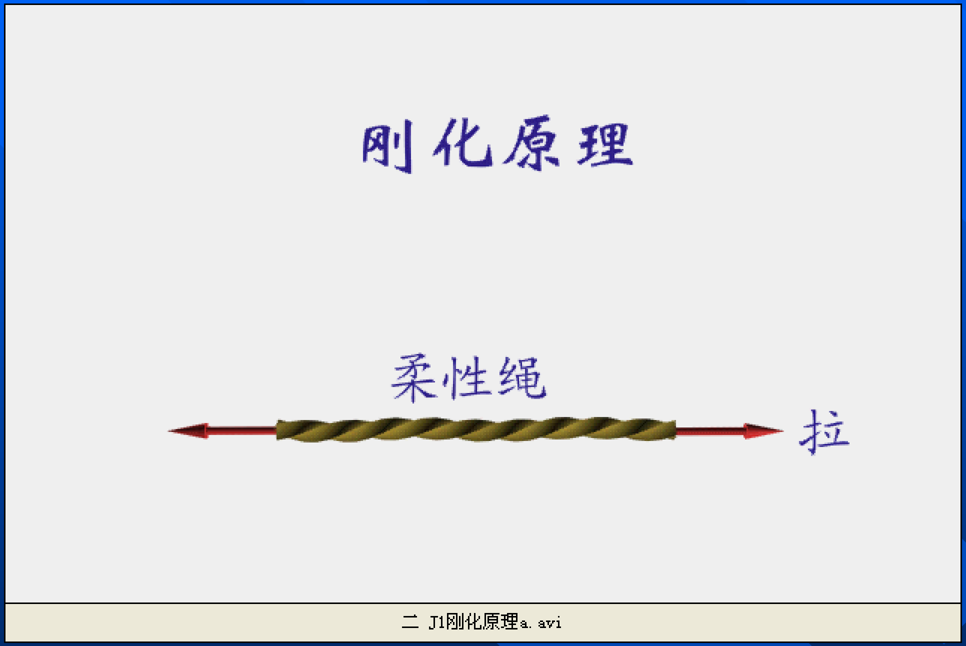
T-T'

平衡力:

P-T

（5）刚化原理：

若变形体在某个力系作用下处于平衡状态，则将此物体固化成刚体（简称刚化）时其平衡不受影响。例如两端受拉的绳子刚化为钢杆，依然平衡。



此公理说明，刚体平衡条件仅是变形体平衡的必要条件,而非充分条件。在刚体静力学的基础上，考虑变形体的特性，可进一步研究变形体的平衡问题。

第三节　基本力系的简化

力系：作用在刚体上的一群力。

力系
- 汇交力系
  - 平面汇交力系
  - 空间汇交力系
- 力偶系
  - 平面力偶系
  - 空间力偶系
- 平行力系
  - 平面平行力系
  - 空间平行力系
- 任意力系（一般力系）
  - 平面任意力系
  - 空间任意力系

力偶系：作用在刚体的一群力偶

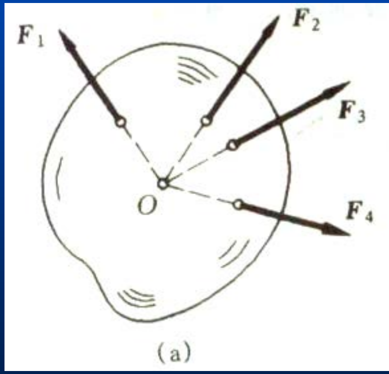
一、汇交力系的简化

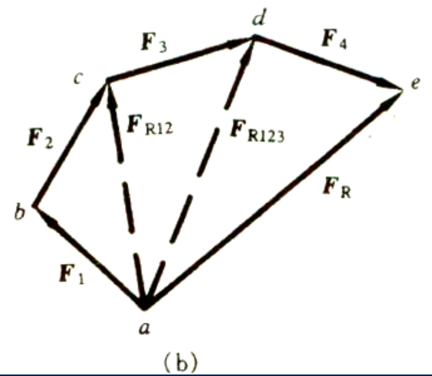
汇交力系是指力系中各力作用线汇交于一共同点的力系。根据力合成的平行四边形法则，逐步两两合成，最后合成为此力系的一个合力。因此汇交力系的简化结果是通过汇交点的一个合力。

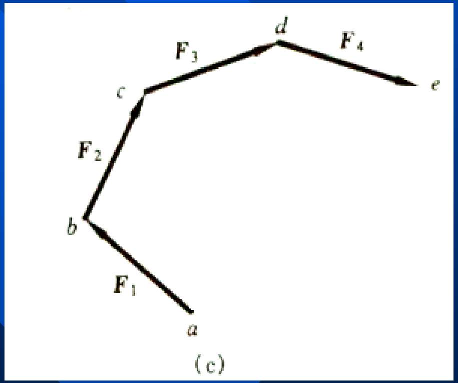
平面汇交力系的简化方法：解析法和几何法

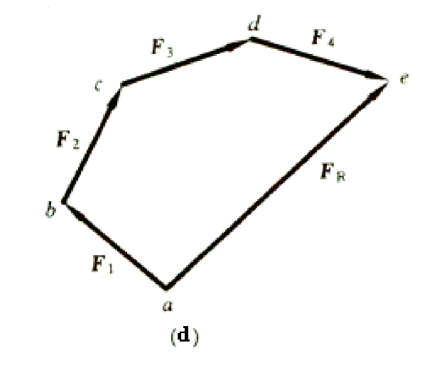
空间汇交力系的简化方法：解析法

①汇交力系简化的几何法









不封闭的力多边形

合力的力矢由力多边形（从任一点开始，按一定的比例，依次作出力系中各力矢的首尾相接的开口多边形，称为力多边形）的封闭边决定，其指向由力多边形的起点指向终点，即

$$F_R = F_1 + F_2 \dot{+} \cdots F_n = \sum_{i=1}^{n} F_i$$

结论：

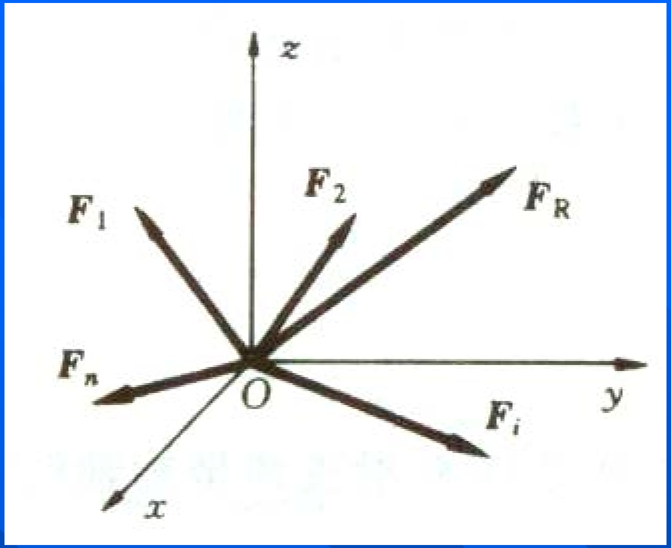
1）平面汇交力系简化结果是一个通过汇交点的合力；

2）分力矢依次首尾相接，合力矢从第一个力矢起点指向最后一个力矢的终点；

3）当各力矢相加次序改变，力多边形形状变化，但合力不变；

4）几何法一般不适用于空间汇交力系。

②汇交力系简化的解析法



设有空间汇交力系（F_1， F_2 ，…， F_n)，其合力为F_R。以汇交点O为坐标原点，建直角坐标系如图所示。设合力F_R在坐标轴x、y、z上的投影分别为F_{Rx}、 F_{Ry}、 F_{Rz}，则有

$$\vec{F} = F_{Rx}\vec{i} + F_{Ry}\vec{j} + F_{Rz}\vec{k}$$

又设F_i在坐标轴x、y、z上的投影分别为F_{xi}、 F_{yi}、 F_{zi}，则有

$$\vec{F} = F_{xi}\vec{i} + F_{yi}\vec{j} + F_{zi}\vec{k}$$

于是由 $\vec{F}_R=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i$ 可得，$F_{Rx}\vec{i}+F_{Ry}\vec{j}+F_{Rz}\vec{k}=\sum_{i=1}^{n}(F_{xi}\vec{i}+F_{yi}\vec{j}+F_{zi}\vec{k})$

或 $F_{Rx}\vec{i}+F_{Ry}\vec{j}+F_{Rz}\vec{k}=(\sum_{i=1}^{n}F_{xi})\vec{i}+(\sum_{i=1}^{n}F_{yi})\vec{j}+(\sum_{i=1}^{n}F_{zi})\vec{k}$

今后为了便于书写，将下标“i”省略。又因为i、j、k是彼此独立的单位矢量，所以有

$$\left.\begin{aligned} F_{Rx}&=\sum F_{ix}=\sum F_x \\ F_{Ry}&=\sum F_{iy}=\sum F_y \\ F_{Rz}&=\sum F_{iz}=\sum F_z \end{aligned}\right\}$$

即*合力在某一轴上的投影等于各分力在同一轴上投影的代数和。*

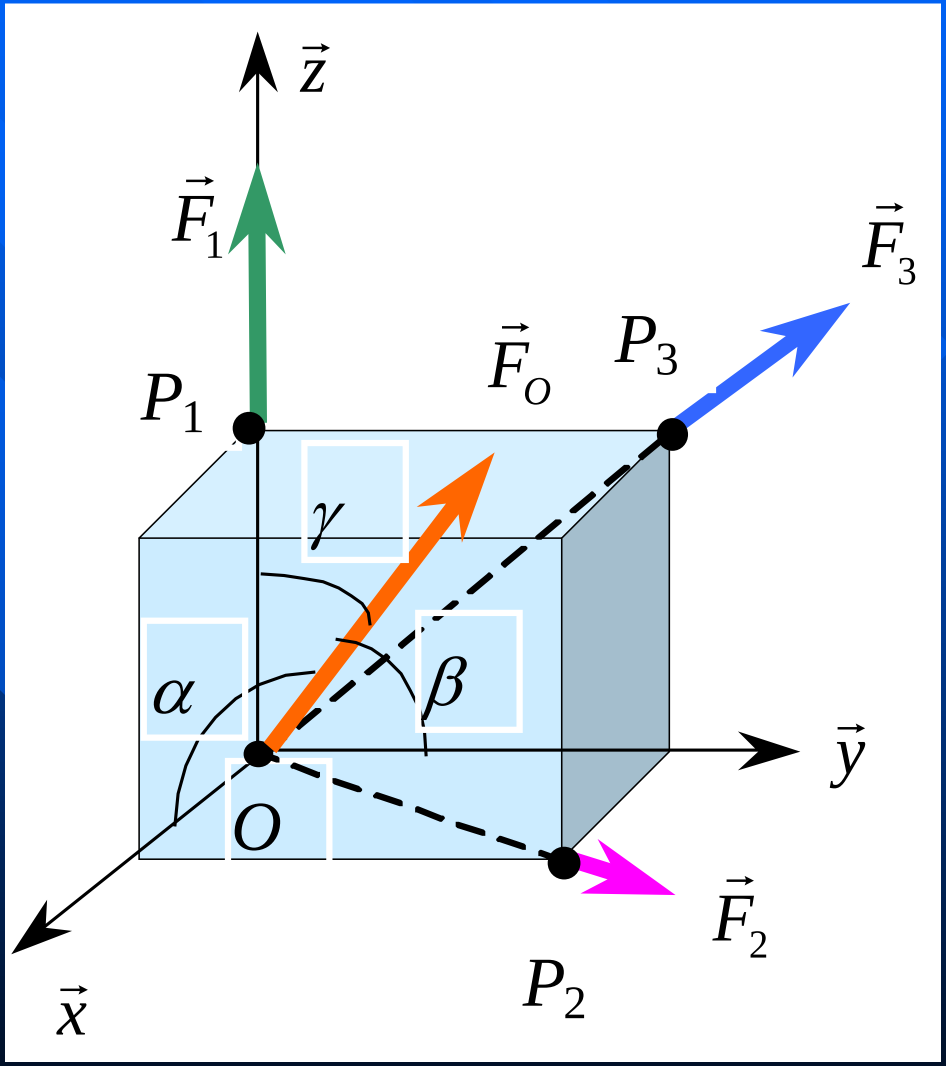
这就是合力投影定理。将该定理推广到其它矢量，同样成立，称为矢量投影定理。

由此，根据各分力的投影算出合力F_R的投影F_{Rx}、F_{Ry}、F_{Rz}后，合力F_R的大小和方向余弦分别为

$$\boldsymbol{F}_R=\sqrt{\boldsymbol{F}_{Rx}^2+\boldsymbol{F}_{Ry}^2+\boldsymbol{F}_{Rz}^2}=\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_{xi}\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_{yi}\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_{zi}\right)^2}$$

$$\cos\left(\vec{F}_R,\vec{i}\right)=\frac{\sum F_{Rx}}{F_R}\quad\cos\left(\vec{F}_R,\vec{j}\right)=\frac{\sum F_{Ry}}{F_R}\quad\cos\left(\vec{F}_R,\vec{k}\right)=\frac{\sum F_{Rz}}{F_R}$$

例　　汇交力系 $\left(\vec{F}_1\ \vec{F}_2\ \vec{F}_3\right)$ 的作用点在边长为 **2m** 的正六面体相应的顶点O上，三力的大小分别为 $F_1=3N,\ F_2=\sqrt{2}N,\ F_3=2\sqrt{2}N$ 求合力的大小与指向。



解:

各力在参考基上的投影分别为:

$$\vec{F}_1=3\vec{k}(N)$$

$$\vec{F}_2=\vec{i}+\vec{j}(N)$$

$$\vec{F}_3=2\vec{j}+2\vec{k}(N)$$

可得合力在参考基的投影为：

$$\vec{R}=\sum F_i=F_1+F_2+F_3=3\vec{k}+(\vec{i}+\vec{j})+(2\vec{j}+2\vec{k})$$

$$=\vec{i}+3\vec{j}+5\vec{k}(N)$$

合力大小（模）：

$$\boxed{F_0=\sqrt{F_{0x}^2+F_{0y}^2+F_{0z}^2}=\sqrt{35}N}$$

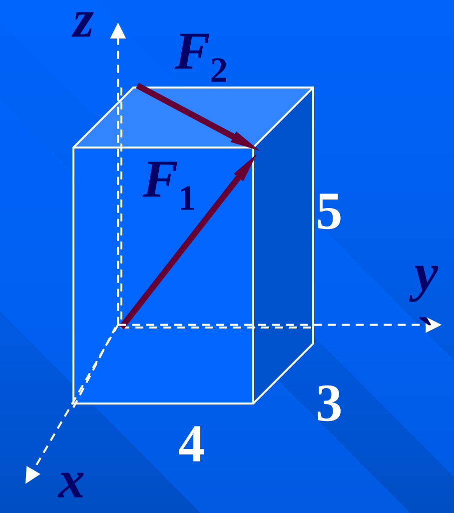
合力的方向为：

与 x 轴的夹角 α 为： $\alpha=\arccos(F_{0x}/F_0)=80.27^\circ$

与 y 轴的夹角 β 为： $\beta=\arccos(F_{0y}/F_0)=59.53^\circ$

与 z 轴的夹角 γ 为： $\gamma=\arccos(F_{0z}/F_0)=32.31^\circ$

例：已知：F_1=3kN, F_2=2kN, 长方体尺寸如图（单位：cm），求合力F_R的值。



解：根据合力投影定理

$$\left.\begin{aligned} F_{Rx}&=\Sigma F_{ix}=\Sigma F_x \\ F_{Ry}&=\Sigma F_{iy}=\Sigma F_y \\ F_{Rz}&=\Sigma F_{iz}=\Sigma F_z \end{aligned}\right\}$$

$$\sqrt{3^2+4^2+5^2}=6.32\,(\text{cm})$$

$$\Sigma F_{ix}=F_1\frac{3}{6.32}+F_2\frac{3}{5}=2.62\text{kN}$$

$$\Sigma F_{iy}=F_1\frac{4}{6.32}+F_2\frac{4}{5}=3.98\text{kN}$$

$$\Sigma F_{iz}=F_1\frac{5}{6.32}=2.37\text{kN}$$

$$F_{\mathrm{R}} = \sqrt{2.62^2 + 3.98^2 + 2.37^2} = 4.93\,\mathrm{kN}$$

方向余弦 $\cos\alpha = F_x / F$，$\cos\beta = F_y / F$，$\cos\gamma = F_z / F$

$$\alpha = 57.89^0, \beta = 36.16^0, \gamma = 61.26^0$$

合力F_R也可以表示为：

$$\vec{F}_{\mathrm{R}} = 2.62\vec{i} + 3.98\vec{j} + 2.37\vec{k}\ (\mathrm{kN})$$