

**回顾：**平面物体系统的平衡问题是静力学的一个重点。本章将进一步研究其在平面桁架和摩擦问题中的应用问题。

## 第四章 静力学应用问题

### 第一节 平面简单桁架的计算

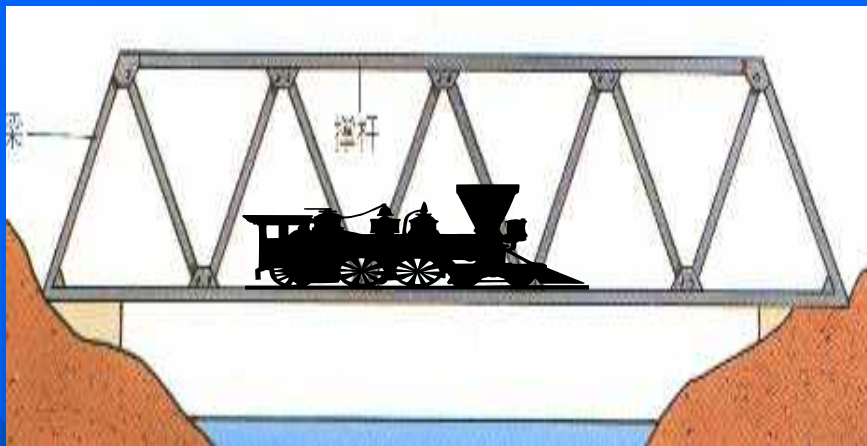
#### 一、平面桁架



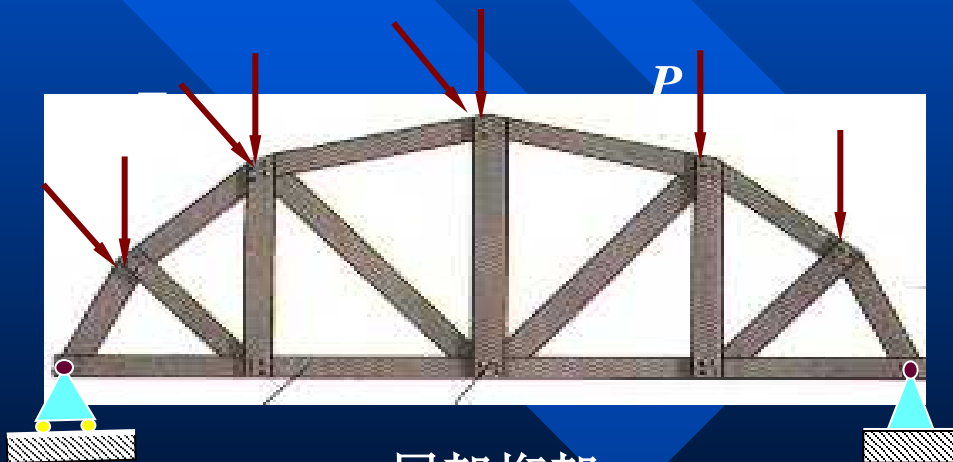
• **桁架 (truss)** : 由杆件彼此在两端用铰链连接而成的在受力后几何形状保持不变的结构



平面桁架：所有杆件的中心轴线在同一平面内的桁架

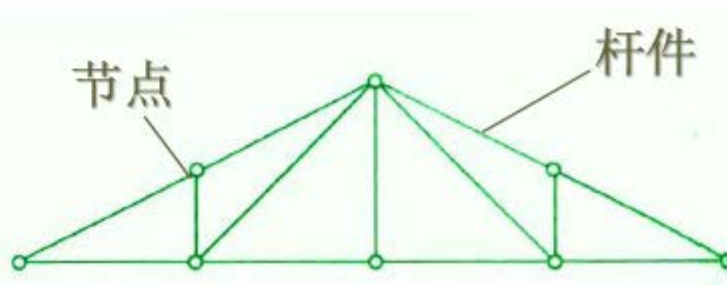
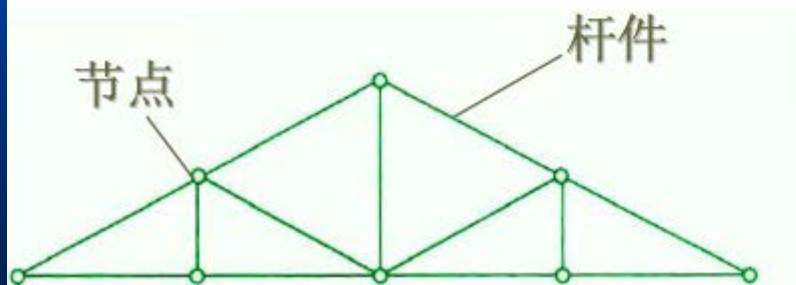
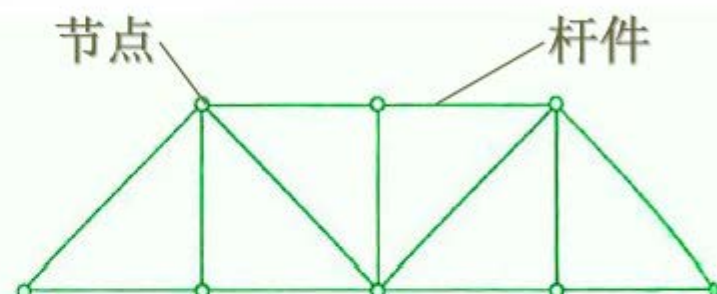
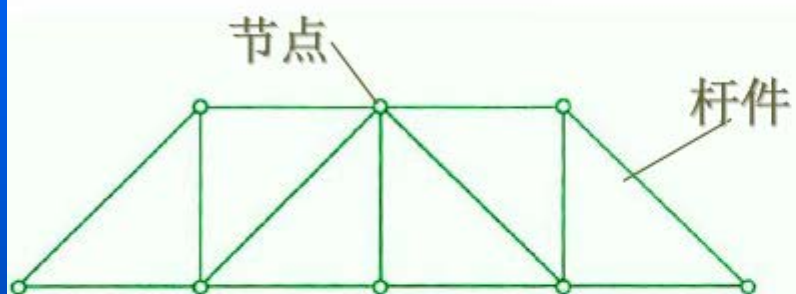


桥梁桁架



屋架桁架

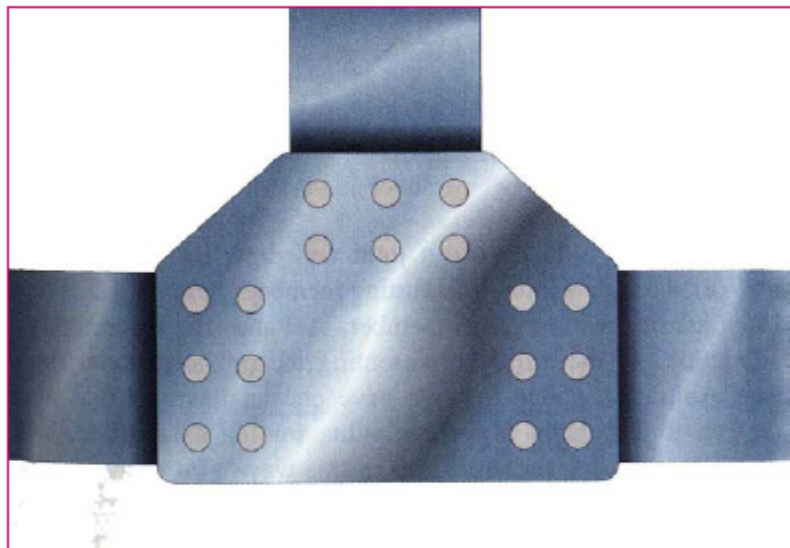
# 简化计算模型



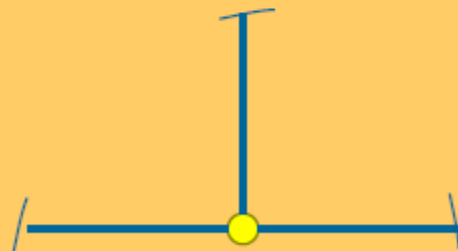
节点:桁架中杆件的铰接头称为节点。

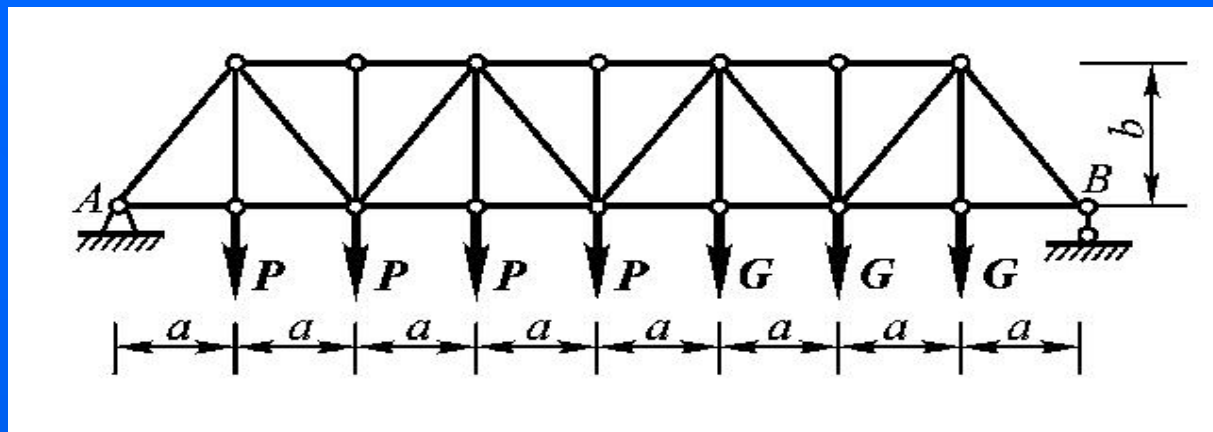


# 力学中的桁架模型



模型与实际  
结构的差异





**节点:**桁架中杆件的铰接头称为节点。

### 平面桁架的基本假设

1. 构成桁架的杆件轴线均为直线
2. 节点抽象为光滑铰链连接
3. 外力(载荷或约束力)都作用于节点上
4. 杆件自重不计,或平均分配在两端的节点上

**桁架的特点:** 桁架中的每个杆件均为二力构件或二力杆 (受拉或受压)

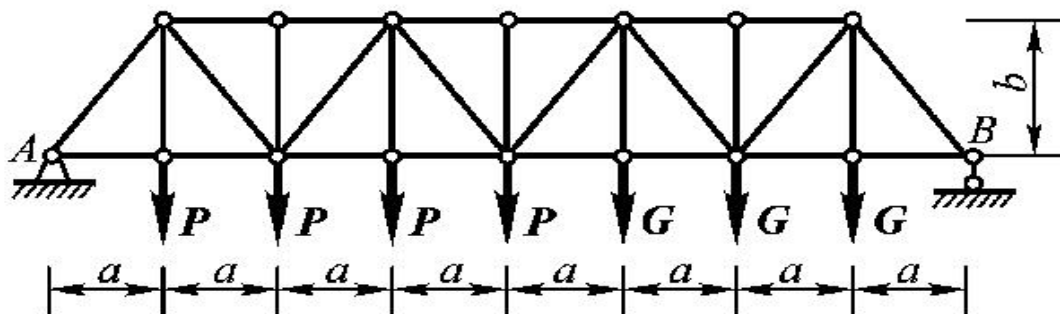
正负号规定: 拉正压负

# 一、 计算平面桁架内力的两种常用方法：节点法和截面法

1. 节点法：因为桁架中各杆都是二力杆，所以每个节点都受到平面汇交力系的作用，为计算各杆内力，可以逐个地取各节点为研究对象，根据平面汇交力系的平衡条件，计算桁架内各个杆件内力的方法。

## 节点法的特点：

- 1、研究对象为节点
- 2、每个节点所受的力都组成平面汇交力系，可以建立两个独立的平衡方程，因此应逐个选取不超过二个未知力的节点作为研究对象。

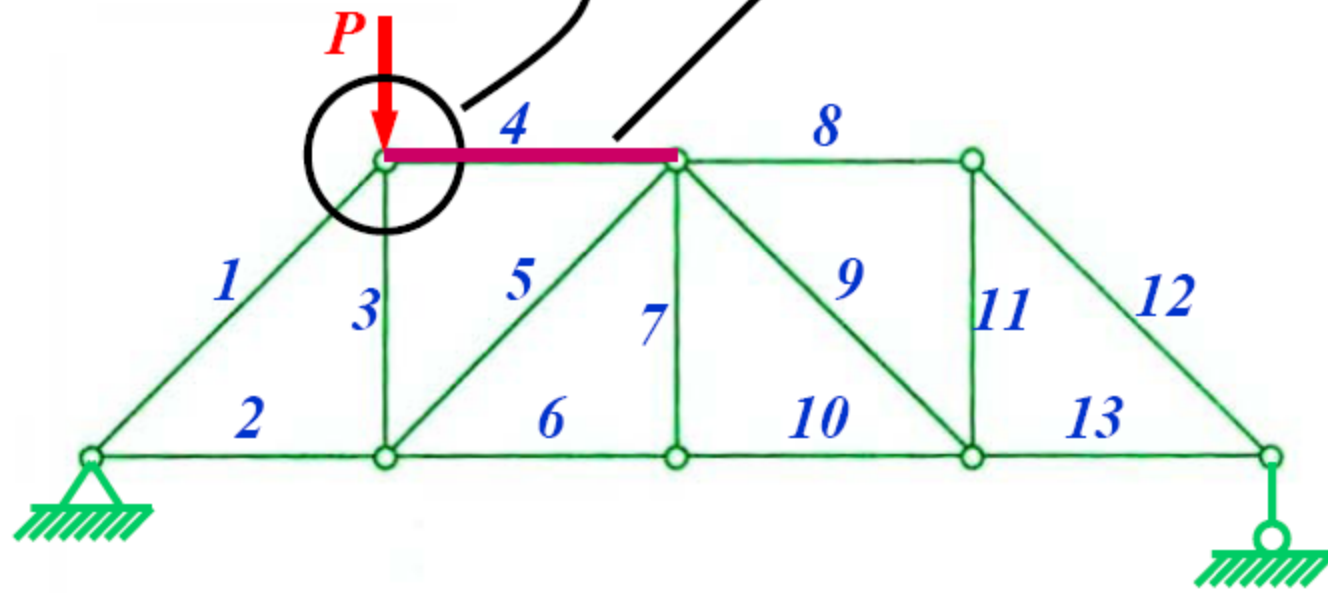
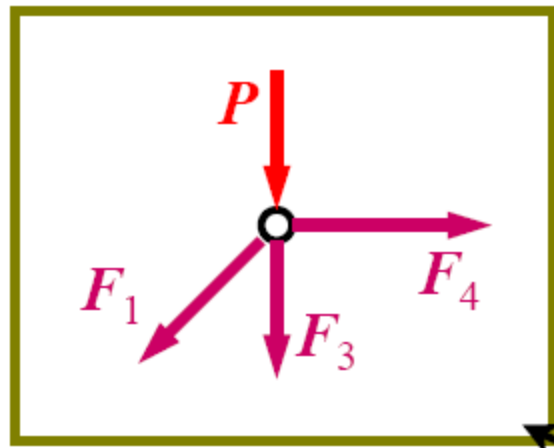


## 节点法求解步骤及注意事项:

- 1\*. 一般先以整个桁架为研究对象，求出支座反力；
2. 从只有两个未知力的节点开始，依次研究各节点，直到求出全部待求量；
3. 假设各杆均受拉力，力矢背向节点，计算结果为正表示受拉，为负表示受压。



假设各杆均受拉力



# 例题

如图平面桁架，求各杆内力。已知铅垂力  $F_C=4\text{ kN}$ ，水平力  $F_E=2\text{ kN}$ 。

解： 节点法

先取整体为研究对象, 受力  
如图所示。由平衡方程

$$\sum F_x = 0, \quad F_{Ax} + F_E = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_B + F_{Ay} - F_C = 0$$

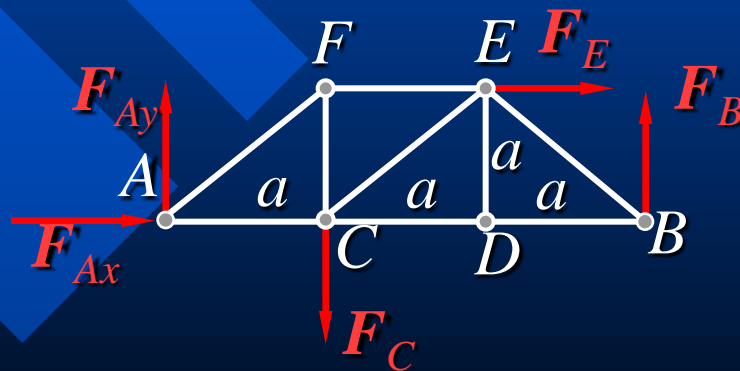
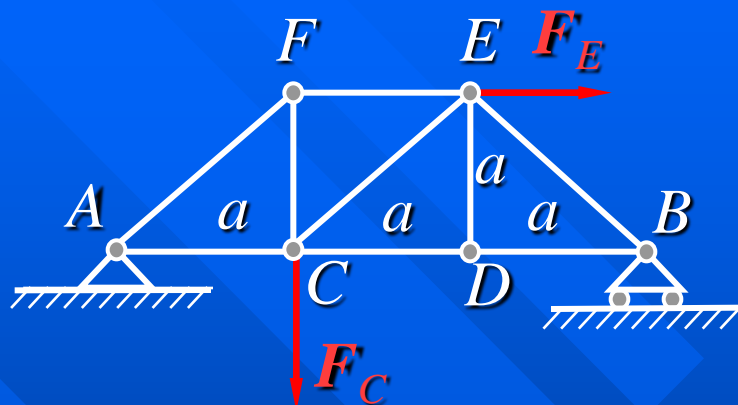
$$\sum M_A(F) = 0, \quad -F_C \times a - F_E \times a + F_B \times 3a = 0$$

联立求解得

$$F_{Ax} = -2\text{ kN}$$

$$F_{Ay} = 2\text{ kN}$$

$$F_B = 2\text{ kN}$$





解得  $F_{AF} = -2\sqrt{2} \text{ kN}$ ,  $F_{AC} = 4 \text{ kN}$

取节点 $F$ ，受力分析如图。由平衡方程

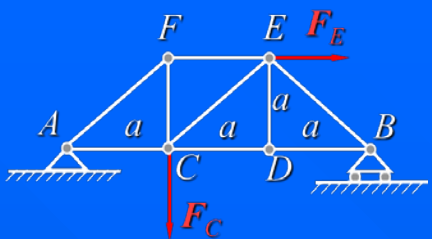
$$\sum F_y = 0, \quad -F_{FC} - F_{FA} \cos 45^\circ = 0$$

解得  $F_{FE} = -2 \text{ kN}$ ,  $F_{FC} = 2 \text{ kN}$

取节点C, 受力分析如图。由平衡方程

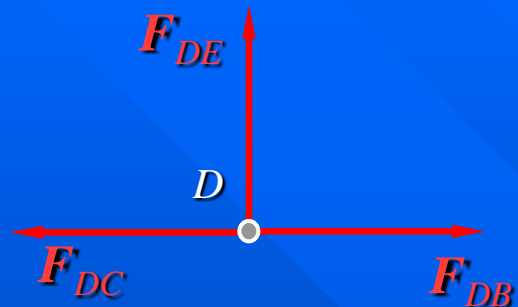
$$\sum F_x = 0, \quad -F_{CA} + F_{CD} + F_{CE} \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad -F_C + F_{CF} + F_{CE} \cos 45^\circ = 0$$



解得  $F_{CE} = 2\sqrt{2} \text{ kN}$ ,  $F_{CD} = 2 \text{ kN}$

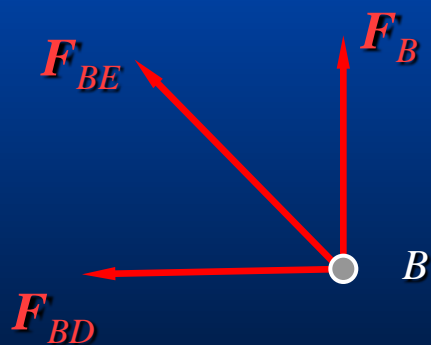
取节点D, 受力分析如图。由平衡方程



$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0, & F_{DB} - F_{DC} &= 0 \\ \sum F_y &= 0, & F_{DE} &= 0 \end{aligned}$$

解得  $F_{DB} = 2 \text{ kN}$ ,  $F_{DE} = 0$

取节点B, 受力分析如图。由平衡方程



$$\sum F_x = 0, \quad -F_{BD} - F_{BE} \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_B + F_{BE} \cos 45^\circ = 0$$

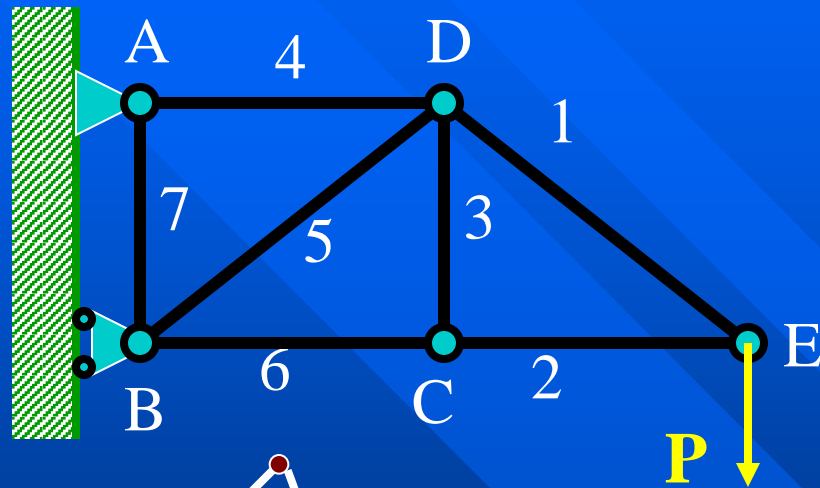
解得

$$F_{BE} = -2\sqrt{2} \text{ kN}$$

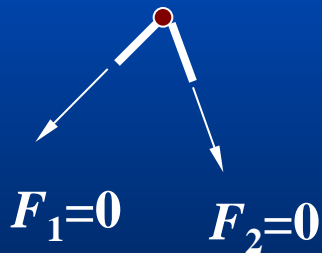
计算结果为负值表示受压。

## 二. 零杆(zero-force member):

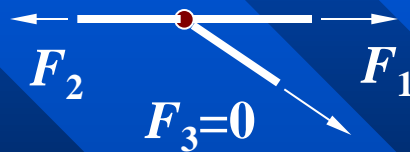
在一定荷载作用下, 在桁架中受力为零的杆件。  
在某些情况下, 零杆可直接判别, 无需计算。



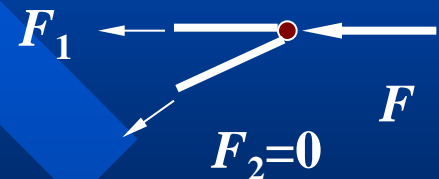
$$F_3 = 0$$



(a) 无载二根  
非共线杆



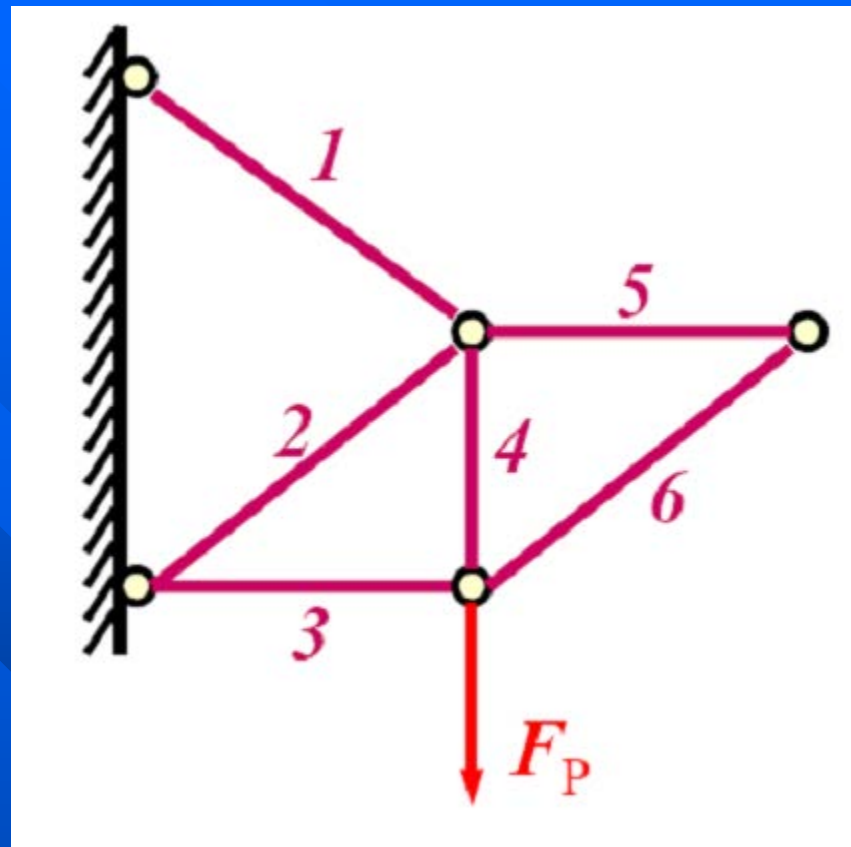
(b) 无载三根杆,  
二根共线杆



(c) 有载二根非  
共线杆

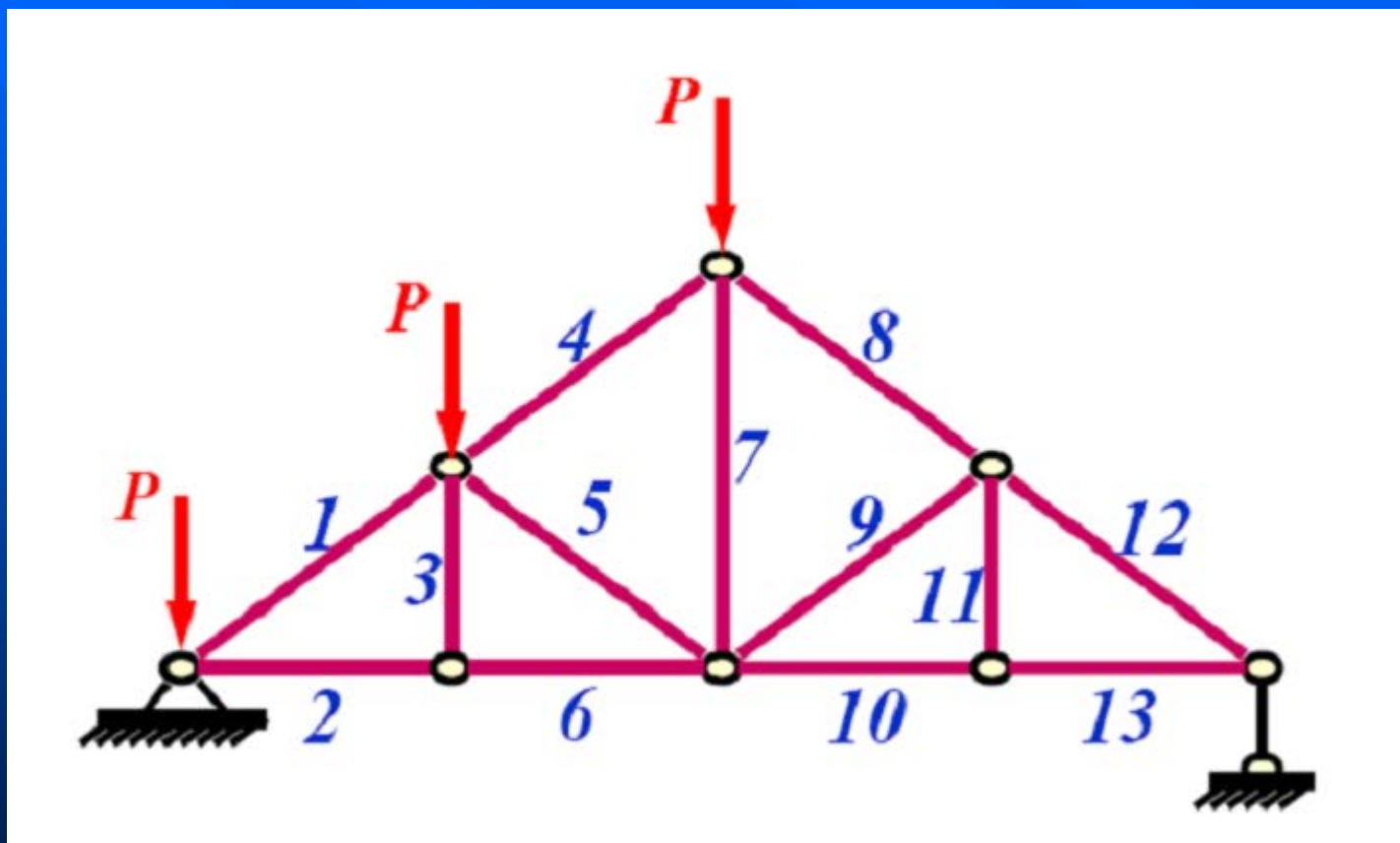


在图示桁架中哪些杆件是零杆。



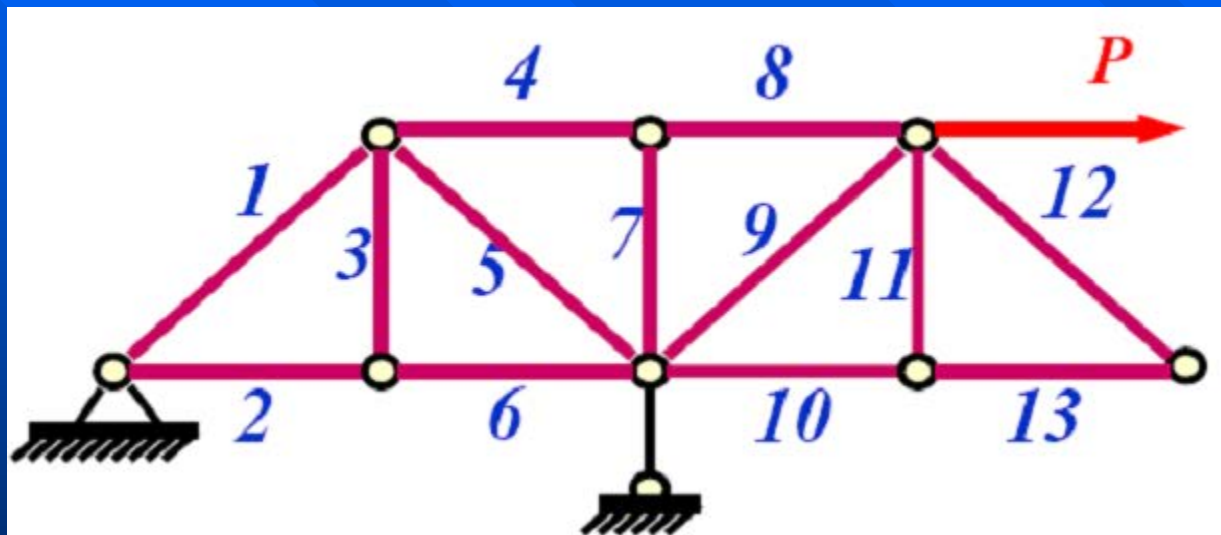
5<sup>#</sup>、6<sup>#</sup>、3<sup>#</sup>杆为零杆。

在图示桁架中哪些杆件是零杆。

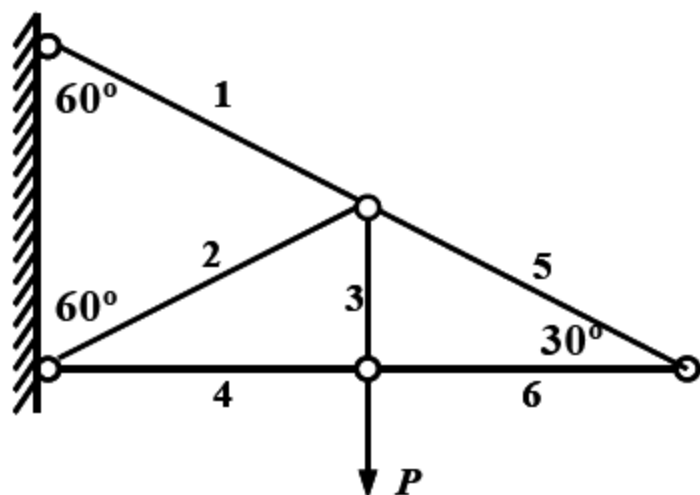


11<sup>#</sup>、9<sup>#</sup>、3<sup>#</sup>杆为零杆。

在图示桁架中哪些杆件是零杆。



13<sup>#</sup>、12<sup>#</sup>、11<sup>#</sup>、10<sup>#</sup>、9<sup>#</sup>、7<sup>#</sup>、3<sup>#</sup>杆  
为零杆。

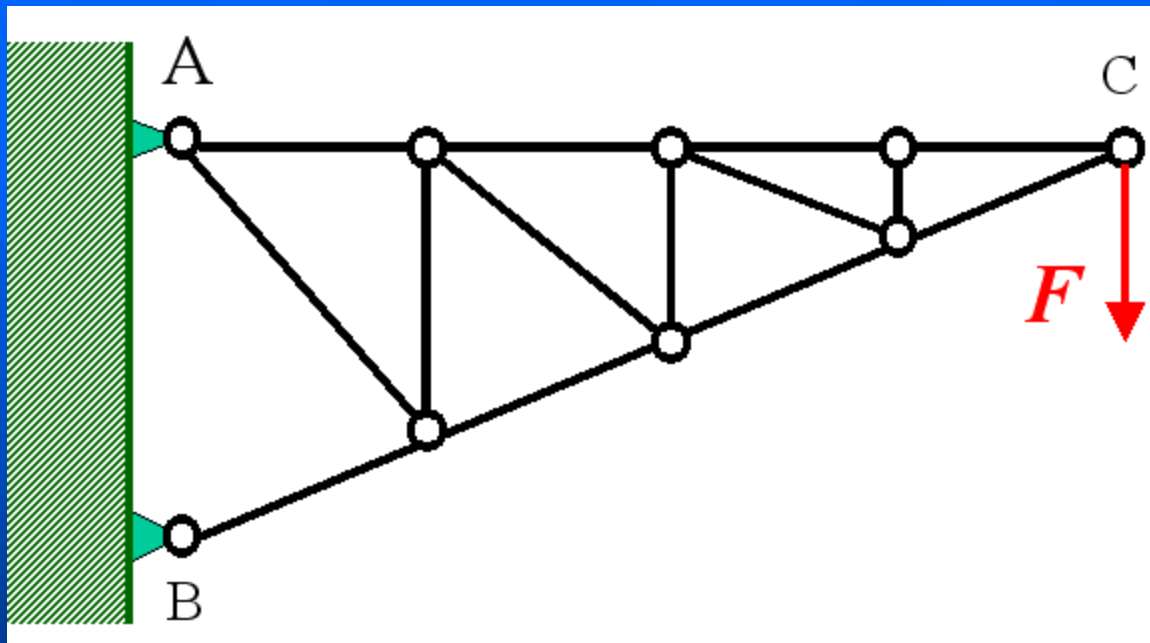


例4. 已知力 $P$ , 求图示桁架各杆的内力。

$$F_1 = \underline{P}, \quad F_2 = \underline{-P}, \quad F_3 = \underline{P},$$

$$F_4 = \underline{0}, \quad F_5 = \underline{0}, \quad F_6 = \underline{0}.$$

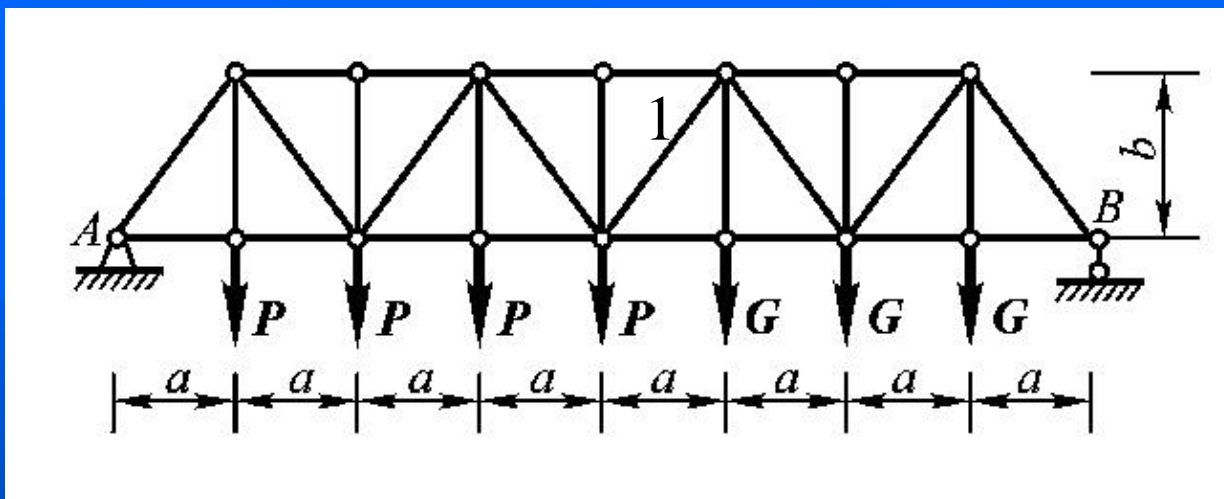
**例题：** 确定图示桁架中的零杆。



除AC、BC线上的各杆均为零杆。



### 三、截面法



**问题：**在图示桁架中，杆1的内力如何求？

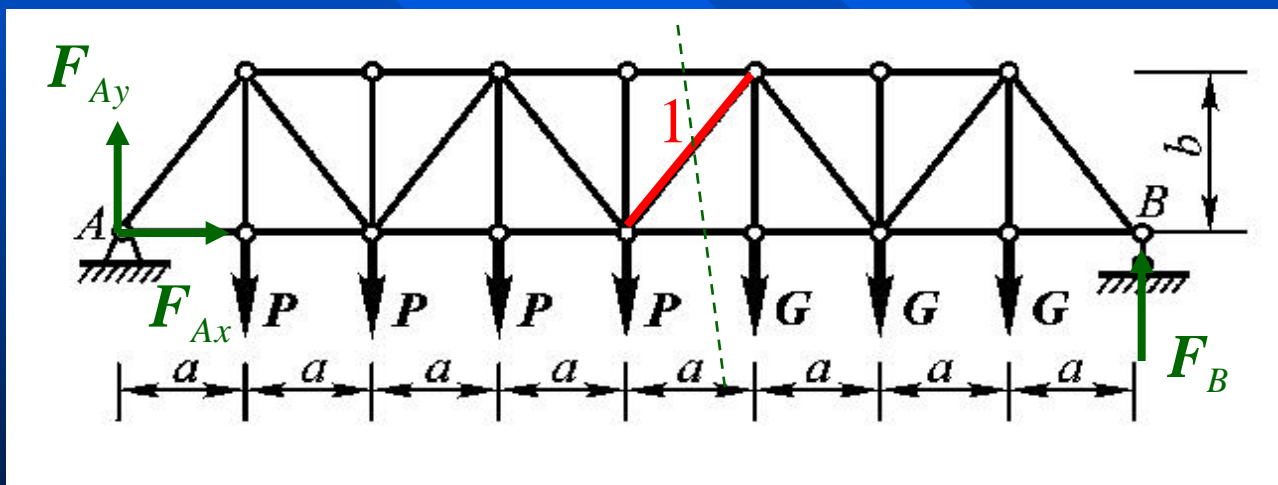
节点法缺点：

如果只需求桁架中某一根或某几根杆件的内力，节点法显得费时。

## 截面法:

在需求内力的杆件处假想地把桁架截开为两部分，取其中一部分为研究对象，将杆件的内力转化为被截断杆件两断面间相互作用的力。作用在部分桁架上的力组成了一个平面任意力系，考虑其平衡，对该力系建立平衡方程，计算杆件内力方法。

截面法的关键：恰当选取截面。

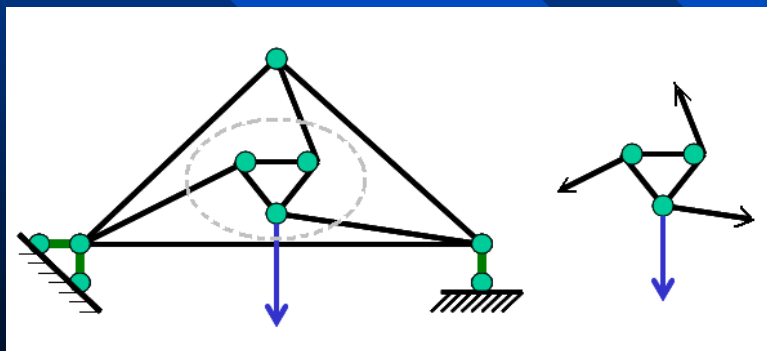


## 截面法的特点:

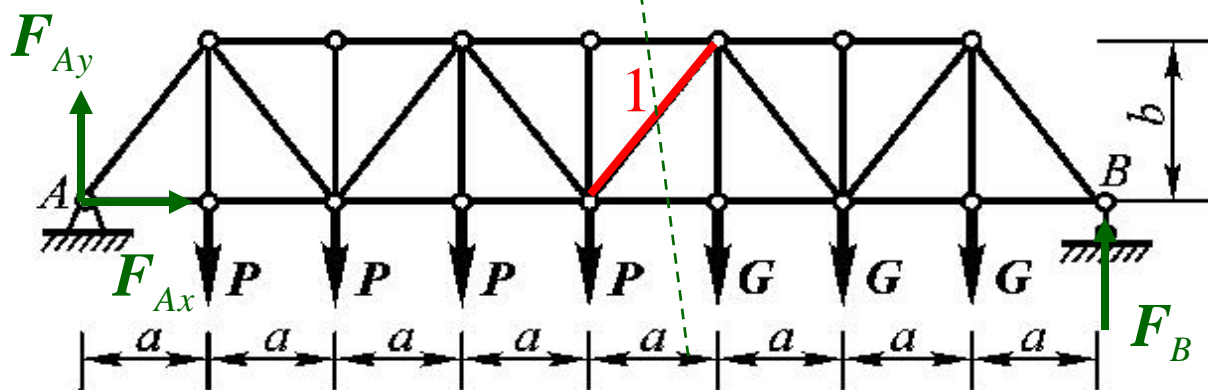
- (1) 一般要求哪些杆的内力, 就从哪里截开, 截面形状不限, 可以是平面, 也可以是曲面;
- (2) 对平面任意力系可建立三个独立的平衡方程, 求解三个未知量。故为避免解联立方程组, 一般情况下每次截断的未知内力的杆件不要超过3根, 且这3根杆不能交于一点或相互平行 (否则变为平面汇交力系、平面平行力系);

但在某些特殊情况下, 截断的杆件可多于3根。

- (3) 作截面时一定要“切断”整个桁架, 不能留一些杆件未截断。

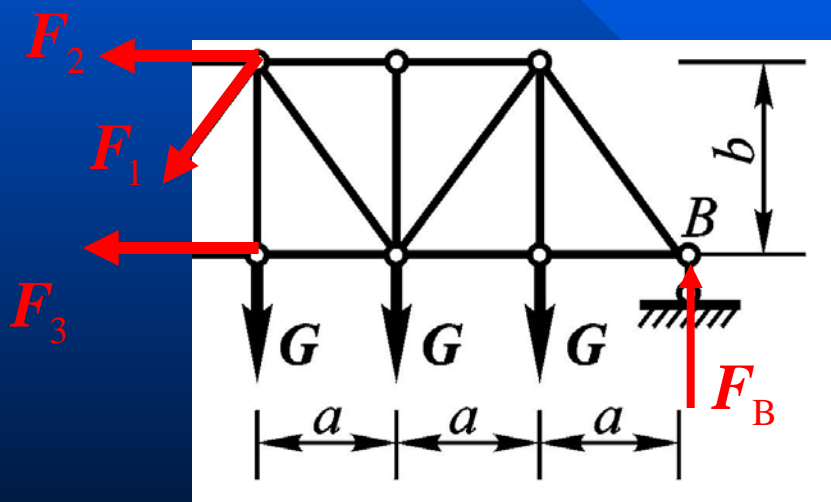


**例:** 求图示桁架中杆1的内力. 已知:  $a, b, P, G$



**截面法特点:**

研究对象为部分桁架, 可建立3个独立的平衡方程



解: 1、以整体为研究对象画整体受力图, 求桁架支座反力  
2、合理选取截面截断桁架  
3、画出研究对象 (部分桁架) 受力图  
4、建立平衡方程求杆的内力

研究整体:  $\sum M_A = 0 \rightarrow F_B$

研究部分桁架  $\sum F_y = 0 \rightarrow F_1$

# 例题

如图平面桁架，求  $FE$ ,  $CE$ ,  $CD$  杆内力。已知铅垂力  $F_C = 4 \text{ kN}$ , 水平力  $F_E = 2 \text{ kN}$ 。

解： 截面法

先取整体为研究对象, 受力如图所示。由平衡方程

$$\sum F_x = 0, \quad F_{Ax} + F_E = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_B + F_{Ay} - F_C = 0$$

$$\sum M_A(F) = 0, \quad -F_C \times a - F_E \times a + F_B \times 3a = 0$$

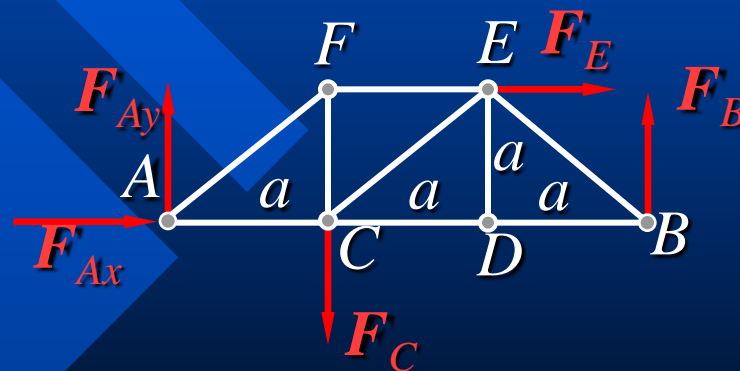
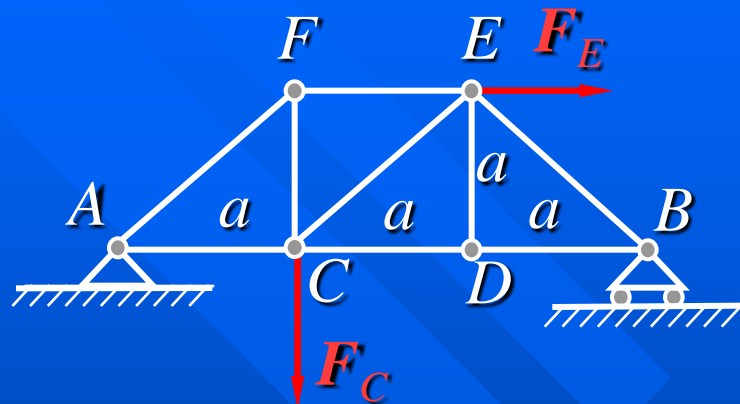
联立求解得

$$F_{Ax} = -2 \text{ kN}$$

$$F_{Ay} = 2 \text{ kN}$$

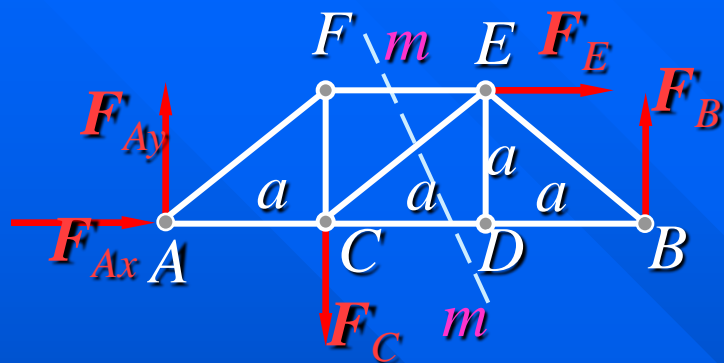
$$F_B = 2 \text{ kN}$$

事实上，仅计算一侧（左侧或右侧）的支座反力即可。





# 例题



作一截面  $m-m$  将三杆截断，取左部分为分离体，受力分析如图。

由平衡方程

$$\sum F_x = 0,$$

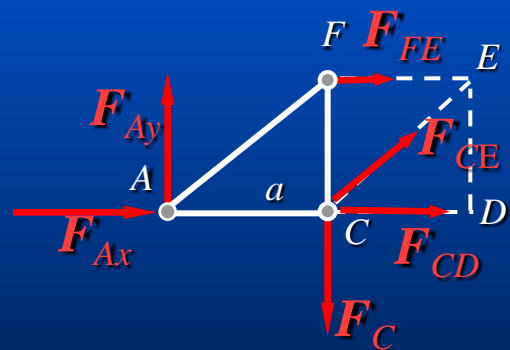
$$F_{CD} + F_{Ax} + F_{FE} + F_{CE} \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{Ay} - F_C + F_{CE} \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum M_C(F) = 0, \quad -F_{FE} \times a - F_{Ay} \times a = 0$$

联立求解得

$$F_{CE} = 2\sqrt{2} \text{ kN}, \quad F_{CD} = 2 \text{ kN}, \quad F_{FE} = -2 \text{ kN}$$



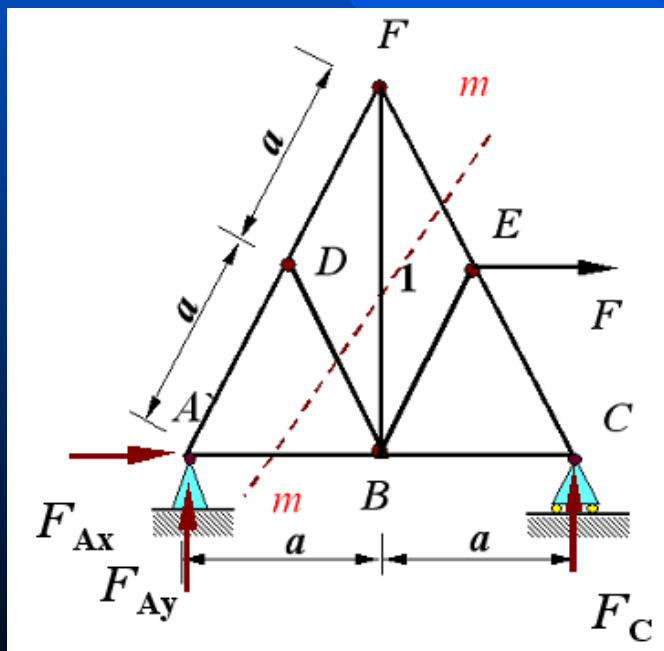
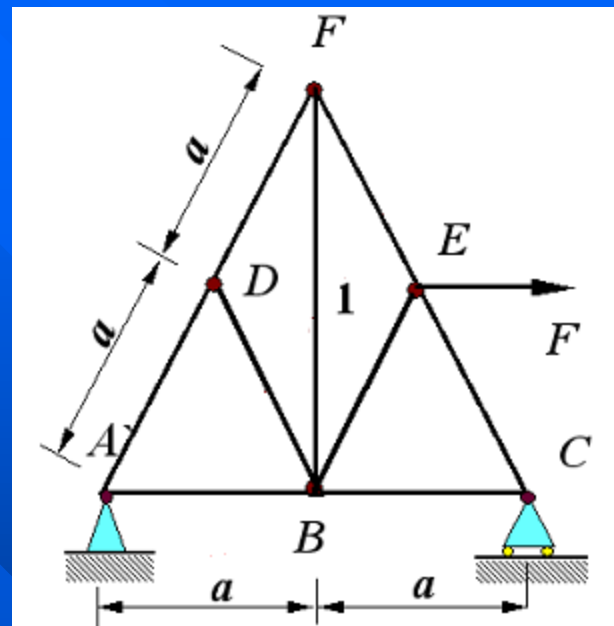
例：平面桁架如图示，已知：  $F$ ，求：杆1的内力。

解：（1）取整体为研究对象

$$\sum M_C = 0, -2aF_{Ay} - aF \frac{\sqrt{3}}{2} = 0;$$

$$F_{Ay} = -\frac{\sqrt{3}}{4}F;$$

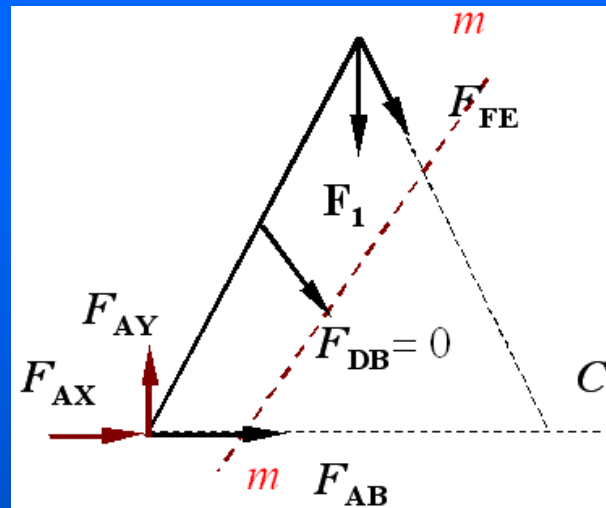
（2）作m-m截面，可判别  $F_{DB}$  为零杆



(3) 取左侧部分为研究对象；

$$\sum M_C = 0, -2aF_{Ay} + aF_1 = 0;$$

$$F_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}F$$

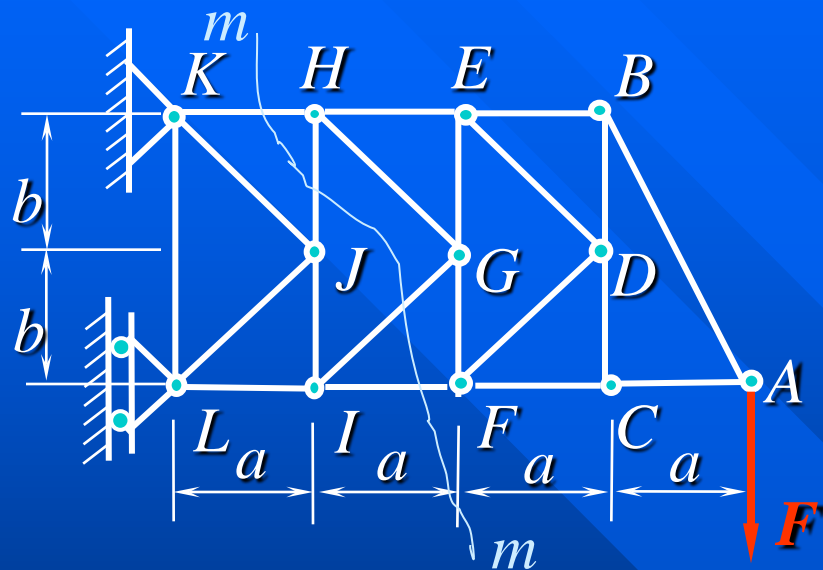


零杆的判别可使解题简化。

若需求出桁架全部杆的内力，常用节点法；若只需求出少数几根杆的内力，常用截面法，或两种方法结合应用。

# 例题

悬臂式桁架如图所示。 $a=2\text{ m}$ ,  $b=1.5\text{ m}$ , 试求杆件  $GH$ ,  $HJ$ ,  $HK$  的内力。



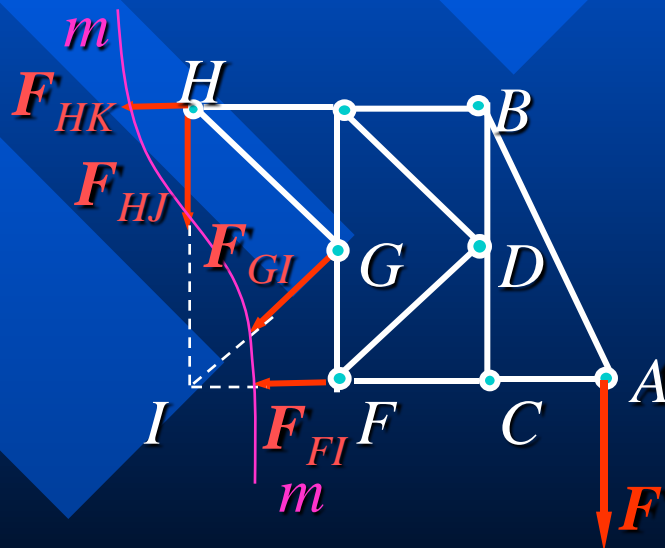
解: 先用截面  $m-m$  将杆  $HK$ ,  $HJ$ ,  $GI$ ,  $FI$  截断, 取右半桁架为研究对象, 受力分析如图。

由平衡方程

$$\sum M_I(F) = 0,$$

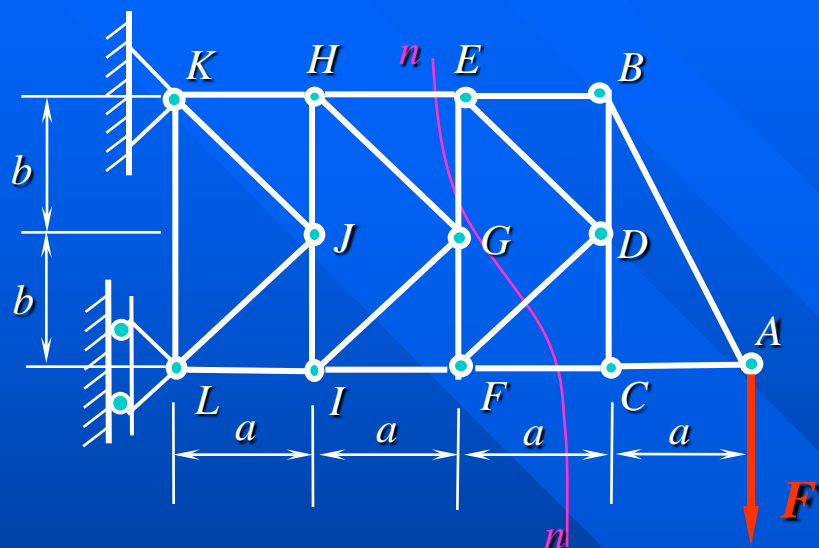
$$-F \times 3a + F_{HK} \times 2b = 0$$

解得  $F_{HK} = 2F$



# 例题

用截面  $n-n$  将杆  $EH$ ,  $EG$ ,  $DF$ ,  $CF$  截断。



取右半桁架为研究对象，受力分析如图。

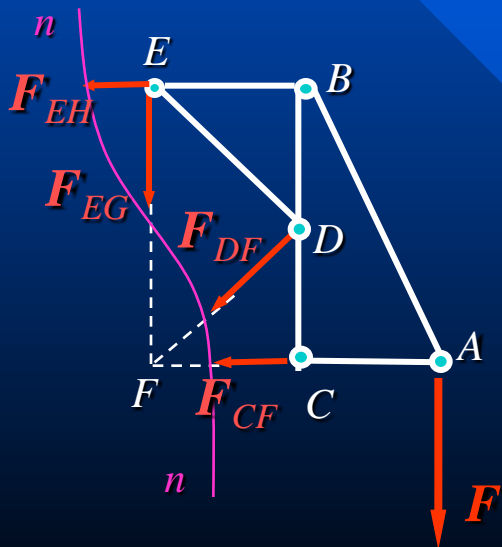
由平衡方程

$$\sum M_F(F) = 0,$$

$$-F \times 2a + F_{EH} \times 2b = 0$$

解得

$$F_{EH} = \frac{4}{3}F$$





# 例题

最后 取节点H为研究对象，受力分析如图。

由平衡方程

$$\sum F_x = 0,$$

$$F_{EH} + F_{GH} \times \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} - F_{HK} = 0$$

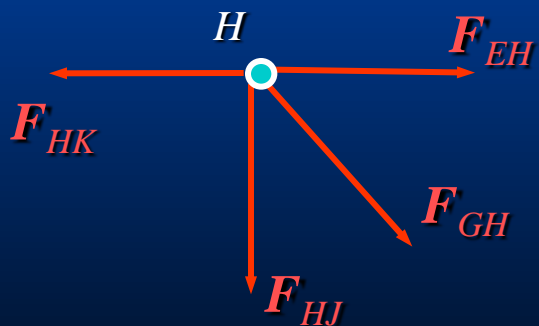
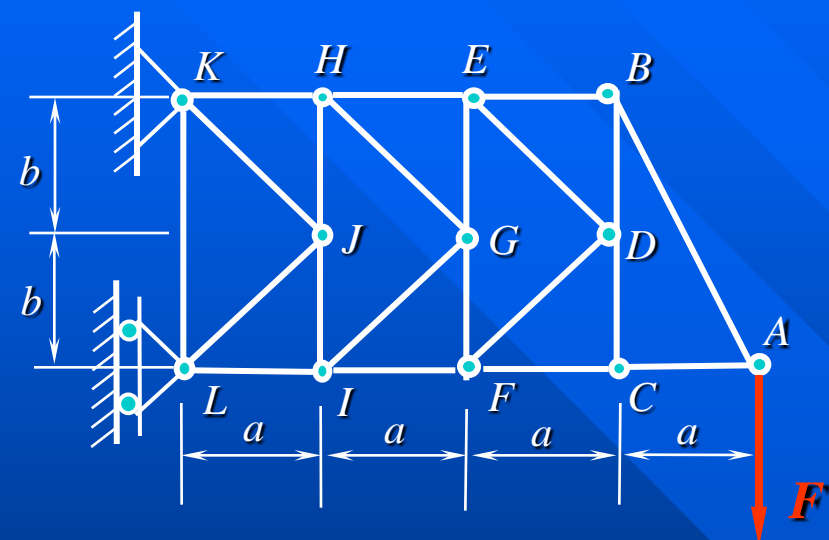
$$\sum F_y = 0,$$

$$-F_{GH} \times \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} - F_{HJ} = 0$$

解得

$$F_{GH} = (F_{HK} - F_{EH}) \times \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \frac{5}{6} F$$

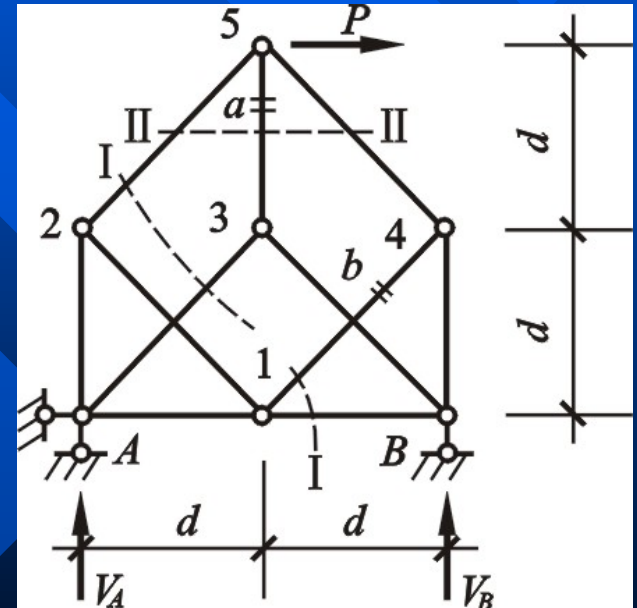
$$F_{HJ} = -F_{GH} \times \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = -\frac{F}{2}$$



## 结点法与截面法的联合应用

如图所示，欲求图中a杆的内力，如果只用结点法计算，不论取哪个结点为隔离体，都有三个以上的未知力，无法直接求解；如果只用截面法计算，也需要解联立方程。

为简化计算，可以在分析整体求出各支座约束反力后先作 I - I 截面，如图所示，取右半部分为隔离体，由于被截的四杆中，有三杆平行，故可先求1B杆的内力，然后以B结点为隔离体，可较方便地求出3B杆的内力，再以3结点为隔离体，即可求得a杆的内力。

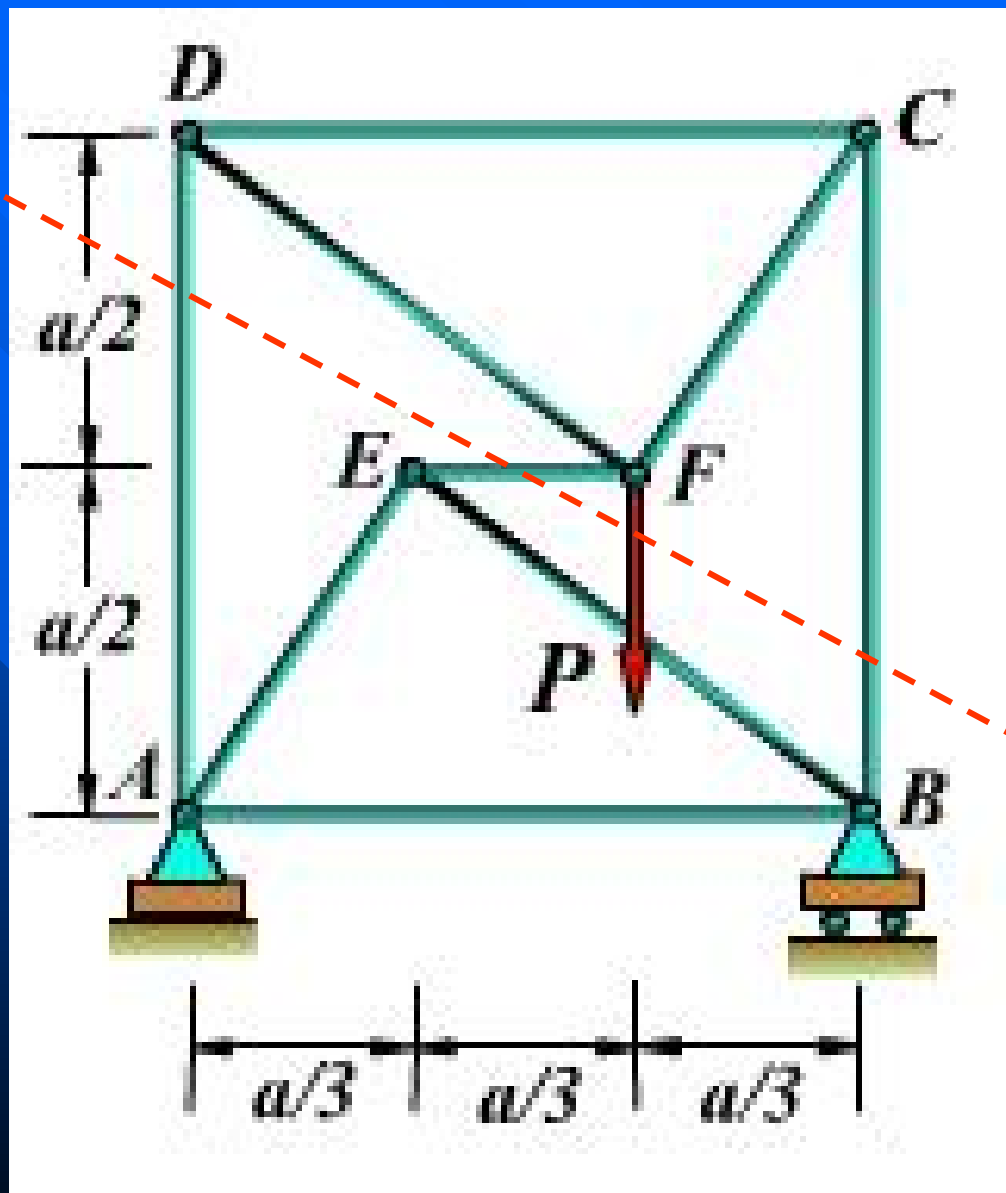


**思考:** 求此结构  $DA$ 、 $EF$ 、 $DC$  杆内力。

## 截面法结合 节点法

截面法：作截面如图可求出  $DA$ 、 $EF$ 、 $BC$  杆内力。

节点法：分析节点  $C$  可求出  $DC$  杆内力。



# 总结

桁架的计算就是二力杆内力的计算。如果桁架是平衡的，则假想地截取桁架的一部分为分离体也是平衡的。若分离体只包含一个节点，称为节点法，为平面汇交力的系的平衡；若分离体包含两个以上的节点，称为截面法，为平面任意力系的平衡。

应注意：（1）除了悬臂桁架外一般要先求支座反力；（2）所有杆件的内力先设为拉力，计算结果为负，说明该杆为压力；（3）用节点法时，节点上的未知力一般不能多于两个，用截面法时，截面上的总未知力一般不能多于三个，否则不能全部解出。（4）若只要求桁架中某几个杆件的内力时，可以采用截面法或节点法结合截面法，可较快地求得某些杆的内力。