

同济大学课程考核试卷 (A 卷)

2022-2023 学年第一学期

课号: 50005900023

课名: 工科数学分析 (上)

考试考查: 考试

试卷类别: 期终考试试卷

|    |   |   |   |    |
|----|---|---|---|----|
| 题号 | 一 | 二 | 三 | 总分 |
| 得分 |   |   |   |    |

说明: 时间 120 分钟, 满分 100 分. 解答题需写出详细解题过程.

一、填空题 (每题 5 分, 共 30 分)

1. 设  $f(x) = x(x-1)(x-2)\cdots(x-2022)$ , 则  $f'(0) =$  \_\_\_\_\_.
2. 函数  $f(x) = \ln(1+x^2)$  的凸区间为 \_\_\_\_\_.
3. 不定积分  $\int \frac{x}{1+\sqrt{1+x}} dx =$  \_\_\_\_\_.
4. 给定正数  $p$ , 令  $S_n = 1^p + 2^p + \cdots + n^p$ , 则极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^{p+1}} =$  \_\_\_\_\_.
5. 设  $I_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x \, dx}{\cos x + \sin x}$ ,  $I_2 = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \, dx}{\cos x + \sin x}$ , 则  $I_1 + 3I_2 =$  \_\_\_\_\_.
6. 参数曲线  $\boldsymbol{r} = (\cos t - 1, t - \sin t)(0 \leq t \leq \pi)$  的弧长为 \_\_\_\_\_.

二、计算题 (每题 10 分, 共 40 分)

1. 计算极限  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x - x \cos \sqrt{x}}$ .
2. 计算反常积分  $\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin 2x \, dx$ .

学号

姓名

专业

学号

密封线 请勿在左侧答题

3. 已知  $y(x)$  在  $x = 1$  的某个邻域上二阶可导且满足方程  $2x^2 + e^{x-y} = y^2 + 2$ . 试计算  $y(1)$ ,  $y'(1)$  和  $y''(1)$ .
4. 设平面图形  $D = \{(x,y)|0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \sin x\}$ . (1) 计算  $D$  的面积; (2) 计算  $D$  绕  $x$  轴旋转一周所得立体的体积; (3) 计算  $D$  绕  $y$  轴旋转一周所得立体的体积.

学 堂 \_\_\_\_\_ 专 业 \_\_\_\_\_ 姓 名 \_\_\_\_\_ 学 号 \_\_\_\_\_

密封线 请勿在左侧答题

三、证明题（每题 10 分，共 30 分）

1. 试写出一致连续的定义，并证明  $f(x) = \arctan x$  在  $\mathbb{R}$  上一致连续.

3. 设  $f$  在  $[0, 1]$  上连续，证明： $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ n \int_0^1 (1-x)^n f(x) dx \right] = f(0).$

2. 设函数  $f$  在  $(0, +\infty)$  上有定义，且在原点的任何一个去心右邻域上均无上界，证明：存在单调递减趋于零的数列  $\{x_n\}$ ，使得  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = +\infty.$

学号

姓名

专业

学号

密封线 请勿在左侧答题

草稿纸

学号\_\_\_\_\_姓名\_\_\_\_\_专业\_\_\_\_\_学号\_\_\_\_\_

密封线 请勿在左侧答题