. 计算题（40 分）

（10 分）计算 $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+2)}+\cdots$.

.（10 分）计算 $f(x)=x,-\pi<x<\pi$ 的傅里叶级数.

3. （10 分）计算 $f(x,y)=y\ln x$ 在点$(e,3)$沿方向$(\cos\theta,\sin\theta)$的方向导数

4. （10 分）计算$f(x,y)=x^3+y^2-12x-4y+7$的极值.

二、简答与证明题（60 分）

1. （10 分）证明：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-1)^n}{n^2+x^2}$ 在$(-\infty,+\infty)$内一致收敛.

2. （10 分）设 $u=f(r,r\cos\theta)$ 有二阶连续偏导数，求$\frac{\partial u}{\partial r},\frac{\partial u}{\partial\theta},\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}$.

3. （14 分）设函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

(1) 证明$f(x)$在R^2上连续，并计算其偏导数.

(2) 计算$f(x)$在点$(\sin\alpha,\cos\alpha)$沿方向$(-1,1)$的方向导数

(3) 证明f在$(0,0)$不可微.

4. (14 分) 设幂级数$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n+1}$

(1) 计算$f(x)$的收敛域和收敛半径.

(2) 计算$f(x)$的和函数.

5. （12 分）设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上无穷次可微，并且满足：

(a) 存在$M>0$，使得$|f^{(k)}|\le M$，对任意$x\in \boldsymbol{R}, k\in \boldsymbol{N}$ 成立，

(b) $f\left(\frac{1}{2^n}\right)=0,(n=1,2,\dots)$，

证明:

(1) 存在$\xi_n\in(\frac{1}{2^n},\frac{1}{2^{n-1}})$使得$f'(\xi_n)=0\ (n=1,2,\dots)$;

(2) 在$(-\infty,+\infty)$上都有$f(x)$恒等于0.

6