同济大学课程考核试卷（B 卷）
2009—2010 学年第一学期

课名：线性代数 B　　　　　　　考试考查：考试

一、填空题（每空 3 分，共 24 分）

1、 已知 4 阶方阵为 $A=(\alpha_2,\alpha_1,\alpha_3,\beta_1)$，$B=(\alpha_1,2\alpha_2,\alpha_3,\beta_2)$，且 $|A|=-4$，$|B|=-2$，则行列式 $|A+B|=$ <u>6</u>.

解：因为 $A+B=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+2\alpha_2,2\alpha_3,\beta_1+\beta_2)$，

所以 $|A+B|=|(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+2\alpha_2,2\alpha_3,\beta_1+\beta_2)|$，根据行列式的性质（书上的貌似是最后一个性质），原式化简为：

$|(\alpha_1,2\alpha_2,2\alpha_3,\beta_1)|+|(\alpha_1,2\alpha_2,2\alpha_3,\beta_2)|+|(\alpha_2,\alpha_1,2\alpha_3,\beta_1)|+|(\alpha_2,\alpha_1,2\alpha_3,\beta_2)|$

$=-4|A|+2|B|+2|A|-|B|=16-4-8+2=6$

2、 设行列式 $D=\begin{vmatrix}1&1&3&1\\1&0&0&0\\2&1&0&3\\4&5&1&2\end{vmatrix}$，$A_{ij}$ 是 D 中元素 a_{ij} 的代数余子式，则 $A_{41}+A_{42}=$ <u>-9</u>.

解：这种题是代数余字式常出的一种，根据 $A_{41}+A_{42}+0\times A_{43}+0\times A_{44}$ 前面的系数，我们可以把题目理解成求 $D^{'}=\begin{vmatrix}1&1&3&1\\1&0&0&0\\2&1&0&3\\1&1&0&0\end{vmatrix}$，最后按第二行展开后，得到 $A_{41}+A_{42}=-9$

3、已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}a&2&2\\2&a&2\\2&2&a\end{pmatrix}$，伴随矩阵 $A^*\neq 0$，且 $A^*x=0$ 有非零解，则 <u>C</u>.

(A) $a=2$；　　　　(B) $a=2$ 或 $a=-4$；

(C) $a=-4$；　　　　(D) $a\neq 2$ 且 $a\neq -4$.

解：因为 $A^*x=0$ 有非零解，所以 A^* 绝对不满秩，在根据之前我给出的秩与原矩阵的关系，不难得出 $\begin{cases}R(A^*)=1, & R(A)=2\\ R(A^*)=0, & R(A)<2\end{cases}$，因为 $A^*\neq 0$，所以 $R(A^*)=1$。变相得出 $R(A)=2$。

对 **A** 进行初等变换，得到 **a=-4**（你也可以算一下 **A** 的行列式来找到 **a** 的值）

4、向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\ (s\ge 2)$线性无关，且可由向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性表示，则以下结论中不能成立的是___B_____.

(A) 向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性无关；

(B) 对任一个$\alpha_j\ (1\le j\le s)$，向量组$\alpha_j,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性相关；

(C) 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$与向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$等价.

解：B 举个反例，当 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$与$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$对应相等时，$\alpha_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$仍然线性无关。

A 反证法可得，C 根据 A 的结论和等价的性质，可得。

5、 已知 3 阶矩阵A与B相似且$A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$，则$B^{2012}-2A^2=$___ __

$\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$__________.

解：一般看到很高的幂的算式，很有可能要用到$\alpha^T\alpha=$常数k（α为n维列向量）

在根据相似的定义，我们先对 A 求其特征之。解得它的特征值分别为-1，i，-i (做到这里，其实我不想写这道题了，因为考试考的都是实在对称阵)

$A\sim B=diag(-1,\ i,-i)$，diag 是对角阵简写，是在不明白 diag 请百度。

$B^{2012}-2A^2=A\sim B=diag((-1)^{2012},\ (i)^{2012},\ (-i)^{2012})-2A$

最后算得$\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$

6、 设η_0是非齐次线性方程组$Ax=b$的特解，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$是齐次方程组$Ax=0$的基础解系，则以下命题中错误的是___B_____.

(A) $\eta_0,\eta_0-\xi_1,\eta_0-\xi_2,\cdots,\eta_0-\xi_s$是$Ax=b$的一组线性无关解向量；

(B) $2\eta_0+\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_s$是$Ax=b$的解；

(C) $Ax=b$的每个解均可表为$\eta_0,\eta_0+\xi_1,\eta_0+\xi_2,\cdots,\eta_0+\xi_s$的线性组合.

解：A. 用定义形式，假设存在一组 k，使得

$k_0\eta_0 + k_1(\eta_0 - \xi) + k_2(\eta_0 - \xi) + \cdots + k_s(\eta_0 - \xi_s) = 0$ 然后对这个等式，左乘 A，然后根据基础解析里的 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_s$ 线性无关，得到 A 正确

B. 错的太明显了，直接左乘 A。

C. 用 A 的思路，先证明 $\eta_0, \eta_0 + \xi_1, \eta_0 + \xi_2, \cdots, \eta_0 + \xi_s$ 带进去后的确乘出来是 $Ax = b$，然后证明 $\eta_0 + \xi_1, \eta_0 + \xi_2, \cdots, \eta_0 + \xi_s$ 是齐次的通解，则由非齐次解的组成，能得到齐次的通解 $\eta_0 + \xi_1, \eta_0 + \xi_2, \cdots, \eta_0 + \xi_s$ 加上非齐次的特解 η_0，为 $Ax = b$ 的解

7、 设 4 阶矩阵 A 有一个特征值为 -2 且满足 $AA^T = 5E$，$|A| > 0$，则其伴随矩阵 A^* 的一个特征值为 ____$-\dfrac{25}{2}$________.

解：由 $AA^T = 5E$，对等式两边取行列式，因为 $|A| = |A^T|$，所以有 $|A^2| = 5^4$（记住这里是取矩阵的行列式，所以是 5^4），$|A| > 0$，所以 $|A| = 25$。由因为 $A^* = |A|A^{-1}$，所以行列式 $\lambda_{A^*} = |A|\dfrac{1}{\lambda_A}$，带入数据，得到 $-\dfrac{25}{2}$

8、 已知实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 + 2ax_1x_3 + 4x_2x_3$ 正定，则常数 a 的取值范围为____$(-2, 2)$________.

解：既然实二次型正定，那么它的对应标准型的矩阵的顺序主子式应该都大于 0，对应矩阵为 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & 2 \\ a & 2 & 6 \end{bmatrix}$，因为第一阶和第二阶顺序主子式明显都大于 0，现在只要第三阶大于 0 就行，即行列式大于 0，解得 (-2<a<2)

二、（10 分）设矩阵 A 的伴随矩阵 $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，且 $|A| > 0$，$ABA^{-1} = BA^{-1} + 3E$，求矩阵 B.

解：（题目里已经使用了 A 的逆，说明 A 是可逆的）

因为 $A^* = |A|A^{-1}$，又因为 $|A| > 0$，所以很明显，这道题会用到 $|A|$，$|A^*| = |A|^{3-1}$，所以 $|A^*| = 1, \therefore |A| = 1$，即 $A^* = A^{-1}$，$AA^* = |A|E$，所以解 $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，化简后有

$(A-E)B=3A$，因为$(|A-E|)\neq 0$，所以$(A-E)$可逆，即 $B=3(A-E)^{-1}A=\begin{bmatrix} 3 & -3 & -3 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}$

三、（10 分）已知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与$\beta_1,\beta_2,\beta_3$为所有 3 维实向量构成的线性空间$R^3$的两组基，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的过渡矩阵为$P=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$且

$\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$

试求：(1) 基β_1,β_2,β_3；(2) 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与 β_1,β_2,β_3 下有相同坐标的全体向量.

解：(1) 由过度矩阵的定义有，$(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3)P=(\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3)$，

$(\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3)=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$所以$\beta_1=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，$\beta_2=\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\beta_3=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(2)设在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与 β_1,β_2,β_3 下有相同坐标的向量为 $X=(x_1 \quad x_2 \quad x_3)^T$，根据坐标公式分别代入两组基本，有 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)X=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)X$，由第一问，$(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3)P=(\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3)$，所以$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)X=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)PX$，因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是构成线性空间$R^3$的一组基，所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，所以有（$P-E$）$X=0$，

解得 $X=k\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，$k$为任意常数，则对应的坐标向量为$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)k\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}=k\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$。

四、（10 分）设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 为 4 阶方阵，其中 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是 4 维列向量，且 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，$\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$. 已知向量 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，试求线性方程组 $Ax=\beta$ 的通解.

解：因为$\beta=\left(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4\right)\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$所以，可得非齐次的一个特解为$\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$，

现在来求导出组的通解，即$Ax=0$的通解，设$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}$，有$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3+\alpha_4x_4=0$

因为$\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，所以上式可化简为

$\left(x_1+x_4\right)\alpha_1+\left(x_2+x_4\right)\alpha_2+\left(x_3+x_4\right)\alpha_3=0$

因为 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，所以解方程组$\begin{cases}\left(x_1+x_4\right)=0\\\left(x_2+x_4\right)=0\\\left(x_3+x_4\right)=0\end{cases}$，解得通解为

$k\begin{bmatrix}-1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix}$，$k$为任意常数。所以$Ax=\beta$的通解为$k\begin{bmatrix}-1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$，$k$为任意常数

五、（20 分）已知二次型$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+4x_3^{\ 2}+4x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$，

(1). 设矩阵A为二次型$f\left(x_1,x_2,x_3\right)$所对应的对称阵，试证$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$为$A$与$A^4$共同的特征向量.

(2). 用正交变换将此二次型化为标准型.

解：(1)由题目可知，二次型标准矩阵为$A=\begin{bmatrix}1&2&-1\\2&1&-1\\-1&-1&4\end{bmatrix}$，所以令$\begin{bmatrix}1&2&-1\\2&1&-1\\-1&-1&4\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，

解得$k=2$，$\left|A-2E\right|=0$ A^4=[$\begin{matrix}110&109&-203\\109&110&-203\\-203&-203&422\end{matrix}$]，

所以$A^4=\begin{pmatrix}110&109&-203\\109&110&-203\\-203&-203&422\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}110&109&-203\\109&110&-203\\-203&-203&422\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=k^{`}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$k^{`}=16$，$\left|A^4-16E\right|=0$，

所以$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$为 A 与 A^4 共同的特征向量.

（简便算法：因为$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$是对应 A 特征值为 2 的特征向量，所以 $A^4\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=2^4\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，所以，$A^4$ 对应的是 A^4 特征值为 16 的特征向量）

（2）求 A 的特征值分别为-1,2,5,由于特征值都不相等，所以 3 个特征向量一定正交，当特征值为-1 时，单位化后的正交向量 p1=$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，当特征向量为 2，单位化后的正交向量为 p2=$\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，当特征值为 5 时，单位化后的特征向量为 p3=$\frac{\sqrt{6}}{2}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$，

所以正交阵 Q=（p1，p2，p3)，正交变化为 x=Qy。

标准型为：$f(Y)=-y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$

六、(12 分)

设 a_1,a_2,a_3 为 3 维线性空间 V 的一组基，V 上的线性变换 T 在 a_1,a_2,a_3 下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1&2&4\\0&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}$$

(1). 求线性变换 T 在 V 的基 a_1,a_1+a_2,a_1+a_3 下的矩阵;

(2). 试证 V 中不存在一组基使 T 在该基下的矩阵为对角阵.

解：因为 V 上的线性变换 T 在 a_1,a_2,a_3 下的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&2&4\\0&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}$，因为

$(a_1,a_1+a_2,a_1+a_3)=(a_1,a_2,a_3)\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，所以可知从 a_1,a_2,a_3 到 a_1,a_1+a_2,a_1+a_3 的

过度矩阵是$\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，设线性变换 **T** 在 **V** 的基 a_1,a_1+a_2,a_1+a_3 下的矩阵为 C，则

$$C=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}A\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&4\\0&1&0\\0&2&1\end{bmatrix}$$

（2）反证法：

假设 V 中存在一组基使 T 在该基下的矩阵为对角阵. 则由向量空间的性质可知，A一定与一个对角阵相似，即说明A也可对角化，求得A的特征值为1，1，1. 将特征值=1带入特征多项式，解得多项式方程的解为$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$，因为它的基础解系中只含有一个向量组，固A不可对角化，所以与假设矛盾，所以试证 V 中不存在一组基使 T 在该基下的矩阵为对角阵.

七、(14 分) 证明题:

(1). 设 A 为 2 阶实方阵, 且 $|A|=-1$, 试证 A 可对角化.

(2). 设向量组 $\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ 线性无关，

$$b_1=a_1+k_1a_4, b_2=a_2+k_2a_4, b_3=a_3+k_3a_4, b_4=a_4$$

证明向量组 b_1,b_2,b_3,b_4 线性无关.

证:(1)因为 A 为 2 阶实方阵,所以 A 有两个特征值 λ_1，λ_2，**由特征值的性质** $|A|=\lambda_1\lambda_2=-1$，所以 λ_1，λ_2 异号，即 λ_1，λ_2 不相等，对于是对称矩阵，特征值不等时，则实对称阵一定可对角化。

（2）$(b_1,b_2,b_3,b_4)=(a_1,a_2,a_3,a_4)\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\k_1&k_2&k_3&1\end{bmatrix}$，令 $C=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\k_1&k_2&k_3&1\end{bmatrix}$，则 **C** 的行列式不为 **0**，所以$(b_1,b_2,b_3,b_4)$ 与(a_1,a_2,a_3,a_4)秩相同，均为 **4**，所以(b_1,b_2,b_3,b_4)线性无关。