

同济大学课程考核试卷

2023—2024 学年第二学期

命题教师签名:

审核教师签名:

课号: 50005900024

课名: 数学分析(下)

考试考查: 考试

此卷选为: 期中考试()、期终考试()、重考()试卷

 年级 一 班级号 学号 姓名 任课教师 李雨生

题号	<u> 二 </u>	<u> 二 </u>
得分	<u> </u>	<u> </u>

(注意: 本试卷共两大题, 9 小题, 3 大张, 满分 100 分. 考试时间为 90 分钟. 所有解答和证明题过程, 否则不予计分)

一、计算题 (40 分)

1. (10 分) 设 $z = x^2 \ln y$, $x = \frac{u}{v}$, $y = 3u - 2v$, 求 $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$.

2. (10 分) 计算 $f(x, y, z) = xyz$ 在沿点 $A(5, 1, 2)$ 到点 $B(9, 4, 14)$ 的方向 \overline{AB} 上的
向导数.



3. (10 分) (1) 计算曲面 $z = \arctan \frac{y}{x}$ 在点 $(1, 1, \frac{\pi}{4})$ 切平面方程和法线方程;

(2) 计算曲线 $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 9, z^2 = 3x^2 + y^2$ 在点 $(1, -1, 2)$ 处的切线和法平面.

4. (10 分) 计算 $f(x, y) = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$ 的极值.



二、简答与证明题 (60 分)

1. (10 分) 方程 $xy + z \ln y + e^{xz} = 1$ 在点 $(0,1,1)$ 的某邻域内能否确定出某一个变量为另外两个变量的函数? 若能, 请给出证明; 若不能, 请说明理由.

2. (10 分) 计算函数 $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ 在条件

$$ax + by + cz = 1 \quad (a, b, c > 0)$$

下的最小值.



3. (14 分) 已知下述等式成立

$$\int_0^{+\infty} e^{-at^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} a^{-\frac{1}{2}} \quad (a > 0),$$

(1) 证明 $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-at^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{4} a^{-\frac{3}{2}};$

(2) 计算积分 $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-a^2x^2} - e^{-b^2x^2}}{x^2} dx;$



4. (14 分) 设 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = e^t + 2t, \\ y = \sin t - t, \end{cases}$ 确定,

(1) 计算 $\frac{d^2y}{dx^2}$;

(2) 任取 $x_0 \in \mathbb{R}$, 定义 $x_{n+1} = y(x_n)$ ($n \geq 0$), 证明 $\{x_n\}$ 收敛.



5. (12 分)证明:

(1) 利用两类曲线解法的关系证明 $|\int_L Pdx + Qdy| \leq \ell M$, 其中 ℓ 为曲线 L 的弧长,

而 $M = \max_{(x,y) \in AB} \sqrt{P^2 + Q^2}$;

(2) 利用上述不等式估计积分: $I_R = \int_{x^2+y^2=R^2} \frac{ydx-xdy}{(x^2+xy+y^2)^2}$;

(3) 证明 $\lim_{R \rightarrow +\infty} I_R = 0$.

