题号	1	2	3	4	5	6	7	8	附加题	总分
得分	15	6	10	12	10	20	10	10	20	113

（注意：本试卷共九题，二大张，满分 100 分．考试时间为 120 分钟.要求写出解题过程，否则不予计分）

15

1、（15 分）已知 $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&3\\4&5\end{pmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\\0&-1\end{bmatrix}$。试求矩阵 X，使得 $AXB-XB=2C$。

解：$AXB-XB=2C \Leftrightarrow (A-E)XB=2C$，

注意到 $A-E=\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$|A-E|=1$，$|B|=-2$，则 ~~A-E~~ $A-E$ 和 B 均可逆，

于是 $X=2(A-E)^{-1}CB^{-1}$，

而 $(A-E)^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，$B^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{5}{2}&\frac{3}{2}\\2&-1\end{pmatrix}$，

故 $X=2\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{5}{2}&\frac{3}{2}\\2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&3\\-3&1\\-4&2\end{pmatrix}$.

6

2、（10 分）已知 $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\5&4&3&2\end{pmatrix}$。试求一个可逆矩阵 P，使得 PA 为简化阶梯矩阵。

解：$(E,A)=\left(\begin{array}{ccc|cccc}1&0&0&1&2&3&4\\0&1&0&2&3&4&5\\0&0&1&5&4&3&2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|cccc}1&0&0&1&2&3&4\\-2&1&0&0&-1&-2&-3\\-5&0&1&0&-6&-12&-18\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|cccc}1&0&0&1&2&3&4\\-2&1&0&0&-1&-2&-3\\7&-6&1&0&0&0&0\end{array}\right)$.

取 $P=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\7&-6&1\end{pmatrix}$，~~即 $P=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\-5&6&1\end{pmatrix}$，该矩阵可逆且满足条件~~.

则 P 可逆且满足条件.

3、(10 分) 设 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$。试求所有满足条件 $A^{2024}=E$ 的实矩阵 A。

解：记 $d_n=\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}c^k$，我们归纳证明 $A^n=\begin{pmatrix} a^n & bd_n \\ 0 & c^n \end{pmatrix}$.

$n=1$ 时结论平凡；下设结论对 n 成立，即 $A^n=\begin{pmatrix} a^n & bd_n \\ 0 & c^n \end{pmatrix}$.

则 $A^{n+1}=A\cdot A^n=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^n & bd_n \\ 0 & c^n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^{n+1} & b(ad_n+c^n) \\ 0 & c^{n+1} \end{pmatrix}$

注意到 $ad_n+c^n=d_{n+1}$，则 $A^{n+1}=\begin{pmatrix} a^{n+1} & bd_{n+1} \\ 0 & c^{n+1} \end{pmatrix}$，结论对 $n+1$ 成立；

于是 $A^{2024}=\begin{pmatrix} a^{2024} & bd_{2024} \\ 0 & c^{2024} \end{pmatrix}=E$，则 $|a|=|c|=1$ 且 $b\sum_{k=0}^{2023} a^{2023-k}c^k=0$，

①若 $ac>0$，则 $\sum_{k=0}^{2023} a^{2023-k}c^k\neq 0$，从而 $b=0$；

②若 $ac<0$，则 $\sum_{k=0}^{2023} a^{2023-k}c^k=0$，$b\in R$；

综上：所有符合题意的A为

E、$-E$、

$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4、(15 分) 设 A 为 n 阶实方阵，并且 $A^2+A+E=O$，证明：对任意实数 a，方阵 $A+aE$ 均可逆，并求逆。

解：由条件知 $(A+aE)(A-(a-1)E)=A^2+A-(a^2-a)E=-E-(a^2-a)E=(-a^2+a-1)E$，

而 $-a^2+a-1<0$，故对任意 $a\in R$，$A+aE$ 均可逆，且 $(A+aE)^{-1}=\frac{1}{-a^2+a-1}(A-(a-1)E)$.

理由呢

5、(10 分) 已知 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$，令 M_{ij}, A_{ij} 分别表示其 (i,j) 位置的余子式和代数余子式，求 $A_{21}+M_{22}-M_{23}+A_{24}$。

解：考虑矩阵 $D'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{pmatrix}$，则 $|D'|=A_{21}+M_{22}-M_{23}+A_{24}$，

而 $|D'|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 0 & 4 & 18 & 48 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 12 \\ 0 & 4 & 18 & 48 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 12 \\ 0 & 4 & 18 & 48 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 6 & 24 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 24 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$

$=-\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}=-12$，故 $A_{21}+M_{22}-M_{23}+A_{24}=-12$.

6、（20 分）已知 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\2&3&a+2\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}1\\1\\b+3\end{pmatrix}$。

(1) 当 a,b 为何值时，线性方程组 $AX=\beta$ 无解？

(2) 当 a,b 为何值时，线性方程组 $AX=\beta$ 有唯一解？并求其解。

(3) 当 a,b 为何值时，线性方程组 $AX=\beta$ 有无穷多解？并求其通解。

解：$(A,\beta)=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&1\\2&3&a+2&b+3\end{pmatrix}$，其简化阶梯矩阵为 $\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&1\\0&0&a+1&b\end{pmatrix}$，

(1) $AX=\beta$ 无解 $\Leftrightarrow$ $a+1=0$ 且 $b\neq0$ $\Leftrightarrow$ $a=-1$ 且 $b\neq0$.

(2) $AX=\beta$ 有唯一解 $\Leftrightarrow$ $a+1\neq0$ $\Leftrightarrow$ $a\neq-1$ 且 $b\in R$，此时 $X=\begin{pmatrix}-\frac{2b}{a+1}\\\frac{a+b+1}{a+1}\\\frac{b}{a+1}\end{pmatrix}$.

(3) $AX=\beta$ 有无穷多解 $\Leftrightarrow$ $a+1=b=0$ $\Leftrightarrow$ $a=-1$ 且 $b=0$，此时通解为 $X=\begin{pmatrix}-2c\\c+1\\c\end{pmatrix}$，$c\in R$.

7、（10 分）证明：平面内三点 $P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2),P_3(x_3,y_3)$ 共线的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix}x_1&y_1&1\\x_2&y_2&1\\x_3&y_3&1\end{vmatrix}=0$$

证明：$P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，$P_3(x_3,y_3)$ 共线 $\Leftrightarrow$ 关于 a,b,c 的齐次线性方程组 $\begin{cases}ax_1+by_1+c=0\\ax_2+by_2+c=0\\ax_3+by_3+c=0\end{cases}$ 有非零解

$\Leftrightarrow$ 系数矩阵 $\begin{pmatrix}x_1&y_1&1\\x_2&y_2&1\\x_3&y_3&1\end{pmatrix}$ ~~[illegible]~~ 的行列式为 0（此矩阵为方阵）

$\Leftrightarrow$ $\begin{vmatrix}x_1&y_1&1\\x_2&y_2&1\\x_3&y_3&1\end{vmatrix}=0$.

10

8、（10 分）计算行列式：$D_n=\begin{vmatrix}1+a_1 & a_1 & \cdots & a_1\\ a_2 & 1+a_2 & \cdots & a_2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_n & a_n & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}$。

解：$D_n=\begin{vmatrix}1+a_1 & a_1 & \cdots & a_1\\ a_2 & 1+a_2 & \cdots & a_2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_n & a_n & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}\xlongequal{\text{第2~n行加到第1行}}\begin{vmatrix}1+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i & 1+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i & \cdots & 1+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\\ a_2 & 1+a_2 & \cdots & a_2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_n & a_n & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}=\left(1+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\right)\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ a_2 & 1+a_2 & \cdots & a_2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_n & a_n & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}$

$\xlongequal{\text{第2~n列分别减去第1列}}\left(1+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\right)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ a_2 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ a_3 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}=1+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$.

20

附加题（20 分）设 A 为反对称方阵。证明：若 $|A|\neq 0$，则 A^* 仍为反对称矩阵。当 $|A|=0$ 时，A^* 仍为反对称方阵吗？请说明理由

证明：由于 $A^*A=|A|E$，当 $|A|\neq 0$ 时 A 可逆，$A^*=|A|A^{-1}$，

由 A 为反对称矩阵知 $A^T=-A$，

从而 $(A^*)^T=(|A|A^{-1})^T=|A|(A^{-1})^T=|A|(A^T)^{-1}=|A|(-A)^{-1}$，

注意到 $(-A)^{-1}=-A^{-1}$，从而 $(A^*)^T=|A|\cdot(-A^{-1})=-|A|A^{-1}=-A^*$，故 A^* 仍为反对称矩阵；

$|A|=0$ 时，A^* 不一定为反对称方阵，

eg: $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$，则 $A^T=-A$ 且 $|A|=0$，而 $A^*=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$，$(A^*)^T\neq -A^*$.