同济大学2023年高等数学竞赛试卷

2023.5

年级____专业__________学号___________姓名_____________任课教师__________

题号	一 18分	二 30分	三 12分	四 10分	五 10分	六 10分	七 10分	总分
得分								

(本试卷共七大题，3大张，满分100分，考试时间为150分钟．解答题要求写出解题过程，否则不予计分)

一、填空与选择题（每题3分，满分18分）

1. 设函数 $f(x)$ 连续且 $f(1)=1$，则极限 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\int_1^x\left[\int_t^1(t-u)f(u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}t}{(x-1)^3}=$____$-\dfrac{1}{6}$______.

2. 设函数 $f(x)$ 连续，且 $f(x)=\sqrt{1-x^2}+\dfrac{1}{1+x^2}\int_0^1x^2f(x)\mathrm{d}x$，则

$f(x)=\sqrt{1-x^2}+\dfrac{1}{4(1+x^2)}$.

3. 设函数 $y=y(x)$ 是微分方程 $y''+y'-2y=0$ 的解，且在 $x=0$ 处 $y(x)$ 取得极值3，则

$y(x)=$______ $\mathrm{e}^{-2x}+2\mathrm{e}^{x}$ _____.

4. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+3)}$ 的和为____$\dfrac{11}{18}$_____.

5. 已知 $F(u,v)$ 是可微函数，$F_u(0,0)=1,\ F_v(0,0)=2$. 函数 $z=f(x,y)$ 由方程

$F(2x-y+3z,4x^2-y^2+z^2)=0$ 确定，满足 $f(1,2)=0$，则 $f_x(1,2)=$ 【 B 】.

A. 6　　B. -6　　C. 10　　D. -10

6. 设 L 为正向平面曲线 $x^2+y^2=4$，则曲线积分 $\int_L\dfrac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}=$ 【 C 】.

A. π　　B. 2π　　C. $-\pi$　　D. -2π

二、计算题（每题6分，满分30分）

1. 已知 $f'(x)=\arctan[(x-1)^2]$，且 $f(0)=0$，求 $\int_0^1f(x)\mathrm{d}x$.

解：$f(x)=\int_0^xf'(y)\mathrm{d}y=\int_0^x\arctan(y-1)^2\mathrm{d}y$，

$$\int_0^1f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\arctan(y-1)^2\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1\arctan(y-1)^2\mathrm{d}x$$

$$=-\int_0^1(y-1)\arctan(y-1)^2\mathrm{d}y\ \overset{u=(y-1)^2}{=\!=\!=}\ \frac{1}{2}\int_0^1\arctan u\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{2}u\arctan u\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{u}{1+u^2}\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}\left[\ln(1+u^2)\right]_0^1=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\ln2.$$

2. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $2y^3-2y^2+2xy-x^2=1$ 确定，求该函数的极值.

解：方程两边求导，得 $3y^2y'-2yy'+y+xy'-x=0$，令 $y'=0\Rightarrow y=x$，

代入原方程，得 $x=1,y=1$，再求导

$(3y^2-2y+x)y''+2(3y-1)y'^2+2y'-1=0$，得 $y''(1)=\dfrac{1}{2}>0$，

极小值 $y(1)=1$.

3. 求二重积分：$\iint\limits_D xy^2\mathrm{d}\sigma$，其中：$D: x^2+y^2\le 2x$.

解：$\iint\limits_D xy^2\mathrm{d}\sigma = 2\iint\limits_{D_1} xy^2\mathrm{d}\sigma = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho^4\cos\theta\sin^2\theta\mathrm{d}\rho$

$$=\frac{2^6}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\theta\sin^2\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{64}{5}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{5\pi}{32}=\frac{\pi}{4}.$$

4. 求曲线积分 $\oint\limits_\Gamma (xy+yz+zx)\mathrm{d}s$，其中 $\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=3,\\ x+y+z=1.\end{cases}$

解：$\oint\limits_\Gamma (xy+yz+zx)\mathrm{d}s=\frac{1}{2}\oint\limits_\Gamma\left[(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)\right]\mathrm{d}s$

$$=-\oint\limits_\Gamma \mathrm{d}s=-2\pi\cdot\sqrt{\frac{8}{3}}=-\frac{4\sqrt{6}}{3}\pi.$$

5. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin n^2+\arctan n\right)^{\frac{1}{n}}$.

解：当 n 充分大时，$\frac{1}{2}<\sin n^2+\arctan n<3$，

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}<\left(\sin n^2+\arctan n\right)^{\frac{1}{n}}<3^{\frac{1}{n}},$$

因 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}3^{\frac{1}{n}}=1$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin n^2+\arctan n\right)^{\frac{1}{n}}=1$.

三、（本题满分 12 分）已知曲线 L 的方程为 $\begin{cases}x=t^2+1\\ y=4t-t^2\end{cases}(t\le 0)$.

(1) 讨论曲线 L 的凹凸性；

(2) 过点 $A(-1,0)$ 引曲线 L 的切线，求该切线方程；

(3) 求此切线与曲线 L 以及 x 轴所围成的平面图形的面积.

解：

(1) 由参数方程求导公式，得 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{4-2t}{2t}=\frac{2}{t}-1$，$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{-2/t^2}{2t}=-\frac{1}{t^3}>0\,(t\le 0)$，

所以，曲线为凹的；

(2) 设切点为 $B(x_0,y_0)$，对应的参数值为 t_0，则 $k=\frac{2}{t_0}-1$，因此切线方程为

$$y-(4t_0-t_0^2)=\left(\frac{2}{t_0}-1\right)\left(x-(t_0^2+1)\right),$$

因切线过点 $(-1,0)$，代入切线方程，得 $t_0=-2$，$t_0=1$（舍），所以 $k=-2$，

故切线方程为 $y=-2(x+1)$.

(3) 切点为 $B(5,-12)$，过切点向 x 轴作垂线，垂足为 C，

则 $C(5,0)$，$S_{\Delta ABC}=36$；

设曲线 L 与 x 轴交于点 D，则 $D(1,0)$，故曲边三角形面积为

$$S=-\int_1^5 y(x)\mathrm{d}x=-\int_0^{-2}(4t-t^2)2t\mathrm{d}t=\int_{-2}^0(8t^2-2t^3)\mathrm{d}t=\frac{64}{3}+8,$$

所以，所围面积为 $36-\left(\frac{64}{3}+8\right)=\frac{20}{3}$.

四、（本题满分 10 分）设在区间 $[0,+\infty)$ 上，函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=0,\ f''(x)>0$，证明：$F(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

证明：因 $F'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$，

令 $G(x)=xf'(x)-f(x)\Rightarrow G'(x)=xf''(x)>0$，故 $G(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

由 $G(0)=0$，则当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$G(x)>G(0)=0$，

得 $F'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}>0$，故 $F(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

五、（本题满分 10 分）讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$ 在原点处的可微性及其偏导数的连续性.

解：

(1) $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$，所以

$$\frac{\Delta z-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y}{\rho}=\frac{\Delta x\Delta y}{\rho}\sin\frac{1}{\rho^2}\to 0,\ (\rho\to 0),$$

所以，函数在原点可微；

(2) 当 $x\neq 0$ 时，

$$f_x(x,y)=y\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x^2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2},$$

该函数在原点的极限并不存在，所以偏导数在原点不连续.

六、（本题满分 10 分）求第二类曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}(z^2+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^2+1)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x^2+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为曲面 $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$ 的下侧.

解： 补曲面 $\Sigma_1: z=0\left(x^2+y^2\le 9\right)$，取上侧，则

$$I_1=\iint\limits_{\Sigma_1}(z^2+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^2+1)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x^2+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma_1}(x^2+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{D}(x^2+1)\mathrm{d}\sigma=\frac{81\pi}{4}+9\pi=\frac{117\pi}{4},$$

由高斯公式

$$I_0=\iint\limits_{\Sigma\cup\Sigma_1}(z^2+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^2+1)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x^2+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\iiint\limits_{\Omega}y\mathrm{d}V=0,$$

所以 $I=I_0-I_1=-\dfrac{117\pi}{4}$.

七、（本题满分 10 分）设 $f(x)$ 为 $[-1,1]$ 上的连续函数，证明：

$$\lim_{x\to 0^+}\int_{-1}^{1}\frac{x}{t^2+x^2}f(t)\mathrm{d}t=\pi f(0).$$

证明： 因 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{x}{t^2+x^2}f(t)\mathrm{d}t=\int_{0}^{1}\frac{x}{t^2+x^2}\left[f(t)+f(-t)\right]\mathrm{d}t$，

$$\lim_{x\to 0^+}\int_{-1}^{1}\frac{x}{t^2+x^2}f(t)\mathrm{d}t=\lim_{x\to 0^+}\int_{0}^{1}\frac{x}{t^2+x^2}\left[f(t)+f(-t)\right]\mathrm{d}t\triangleq A,$$

$$A=\lim_{x\to 0^+}\left[\int_0^{x^{\frac14}}\frac{x}{t^2+x^2}\left[f(t)+f(-t)\right]\mathrm{d}t+\int_{x^{\frac14}}^{1}\frac{x}{t^2+x^2}\left[f(t)+f(-t)\right]\mathrm{d}t\right]\triangleq A_1+A_2,$$

由积分中值定理，得

$$A_2=\lim_{x\to 0^+}\int_{x^{\frac14}}^{1}\frac{x}{t^2+x^2}\left[f(t)+f(-t)\right]\mathrm{d}t,$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\xi_1^2+x^2}\left[f(\xi_1)+f(-\xi_1)\right]\left(1-x^{\frac14}\right)=0,\quad \xi_1\in\left[x^{\frac14},1\right],$$

$$A_1=\lim_{x\to 0^+}\int_0^{x^{\frac14}}\frac{x}{t^2+x^2}\left[f(t)+f(-t)\right]\mathrm{d}t=\lim_{x\to 0^+}\left[f(\xi_2)+f(-\xi_2)\right]\int_0^{x^{\frac14}}\frac{x}{t^2+x^2}\mathrm{d}t$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left[f(\xi_2)+f(-\xi_2)\right]\left[\arctan\frac{t}{x}\right]_0^{x^{\frac14}}=\pi f(0),\quad \xi_2\in\left[0,x^{\frac14}\right],$$

即：$\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\int_{-1}^{1}\frac{x}{t^2+x^2}f(t)\mathrm{d}t=\pi f(0)$.