/

《线性代数》期末试题 (2005.1.)

姓名＿＿＿＿＿＿ 学号 ＿＿＿＿＿＿专业 ＿＿＿＿＿ 成绩＿＿＿

一. 填空题:

1. (6 分) $\begin{vmatrix} a & a^2 & b+c \\ b & b^2 & c+a \\ c & c^2 & a+b \end{vmatrix} =$ $(b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c)$

2. (6分) 设 $|A| = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & c & d \\ b & d & c & a \\ d & a & c & b \end{vmatrix}$, 则 $A_{11}+A_{21}+A_{31}+A_{41} =$ 0

3. (6 分) 设 $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, 则 $(A+2E)^{-1}(A-2E) =$ $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ -4 & 4 & -3 \end{pmatrix}$

4. (6分) 设 $\alpha=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是4维实向量空间 R^4 中一个固定向量, R^4 中所有与 α 正交的向量构成 R^4 的一个子空间, 这个子空间的一个基是 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (每个2分)

二. 计算题:

1. (10 分) 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

求矩阵 X 使 $\begin{pmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{pmatrix} X = C$.

解 $X = \begin{pmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{pmatrix}^{-1} C = \begin{pmatrix} 0 & A^{-1} \\ B^{-1} & 0 \end{pmatrix} C$ (2分)

$A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. (2分)

$B^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (2分)

$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} & & \\ 0 & 0 & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (每块2分)

2. (10 分)求一个向量η，使它在下列基下有相同的坐标：$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$,

$\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\alpha_4=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ 与 $\beta_1=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\beta_2=\begin{pmatrix}0\\3\\1\\0\end{pmatrix}$, $\beta_3=\begin{pmatrix}5\\3\\2\\1\end{pmatrix}$, $\beta_4=\begin{pmatrix}6\\6\\1\\3\end{pmatrix}$.

解 设 $\eta=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4=x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3+x_4\beta_4$ (2分)

$\therefore (\beta_1-\alpha_1\ \ \beta_2-\alpha_2\ \ \beta_3-\alpha_3\ \ \beta_4-\alpha_4)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=0$ (2分) $\begin{pmatrix}1&0&5&6\\1&2&3&6\\-1&1&1&1\\1&0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=0$ (2分)

$\therefore \eta=k\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}$. (4分)

3. (12 分) a,b 取何值时，线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1\\3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=a\\x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3\\5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=b\end{cases}$ 无解、有唯一解或有无穷多解？有解时求它的解.

解 $\bar{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\3&2&1&1&-3&a\\0&1&2&2&6&3\\5&4&3&3&-1&b\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&1&2&2&6&3-a\\0&0&0&0&0&a\\0&0&0&0&0&b-2\end{pmatrix}$ (4分)

(3分)

1 $a\neq 0$ 或 $b\neq 2$ 时 无解

2 $a=0$ 且 $b=2$ 时 $\bar{A}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&1&2&2&6&3\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&-5&-2\\0&1&2&2&6&3\end{pmatrix}$

$X=\underbrace{\begin{pmatrix}-2\\3\\0\\0\\0\end{pmatrix}}_{(2分)}+\underbrace{k_1\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}5\\-6\\0\\0\\1\end{pmatrix}}_{(3分)}$ 有无穷多解

4. (15 分) 已知实二次型 $f(x,y,z)=3x^2+2y^2+2z^2+2xy+2zx$，(1) 写出二次型 f 的矩阵表达式，(2) 用正交变换把二次型 f 化为标准形，并写出相应的正交矩阵，(3) 求函数 $f(x,y,z)$ 在单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上的最大值与最小值.

$$A=\begin{pmatrix}3&1&1\\1&2&0\\1&0&2\end{pmatrix} \ (2分) \qquad |A-\lambda E|=\begin{vmatrix}3-\lambda&1&1\\1&2-\lambda&0\\1&0&2-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-4) \quad (3分)$$

$$\lambda=1,\ (A-E)X=0 \quad \begin{pmatrix}2&1&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}X=0 \quad \alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},\ \eta_1=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix} \quad (2分)$$

$$\lambda=2 \quad (A-2E)X=0 \quad \begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}X=0 \quad \alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \quad \eta_2=\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt2}\\-\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix} \quad (2分)$$

$$\lambda=4 \quad (A-4E)X=0 \quad \begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-2&0\\1&0&-2\end{pmatrix}X=0 \quad \alpha_3=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \quad \eta_3=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt6}\end{pmatrix} \quad (2分)$$

$$f=\bar{x}^2+2\bar{y}^2+4\bar{z}^2 \quad (2分)$$

$$\therefore 正交阵\ T=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt3}&0&\frac{2}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\end{pmatrix}.$$

最大值 4，最小值 1.（2分）

5. (10分)在次数不超过 n 的实系数多项式所成的线性空间 $V=R[x]_n$ 中定义线性变换 $\mathcal{B}$ 为 $\mathcal{B}(f(x))=f(x+1)-f(x)$，求线性变换 $\mathcal{B}$ 在 V 的一个基 $\alpha_1=1,\alpha_2=x,\alpha_3=\frac{1}{2}x(x-1),\cdots,\alpha_{n+1}=\frac{1}{n!}x(x-1)\cdots(x-n+1)$ 下的矩阵 B.

$\mathcal{B}(\alpha_1)=1-1=0$ 2分

$\mathcal{B}(\alpha_2)=(x+1)-x=1=\alpha_1$ 2分

$\mathcal{B}(\alpha_3)=\frac{1}{2}(x+1)x-\frac{1}{2}x(x-1)=x=\alpha_2$ 2分

$\vdots$

$$\mathcal{B}(\alpha_{n+1})=\frac{1}{n!}(x+1)x\cdots(x-n+2)-\frac{1}{n!}x(x-1)\cdots(x-n+1)$$
$$=\frac{1}{(n-1)!}x(x-1)\cdots(x-n+2)=\alpha_n \quad 2分$$

$$\therefore \mathcal{B}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_{n+1})=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_{n+1})\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\0&0&0&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&1\\0&0&0&\cdots&0\end{pmatrix} \quad 2分$$

三. 证明题:

1. (7 分)设 A 为 $m\times n$ 实矩阵, $n<m$, 线性方程组 $AX=\beta$ 有唯一解. 证明: A^tA 是可逆矩阵, 并求 $AX=\beta$ 的解.

$\because AX=\beta$ 有唯一解 $\therefore R(A\beta)=R(A)=n$

但 $R(A^tA)=R(A)=n$, A^tA 是 n 阶方阵 $\therefore A^tA$ 可逆

又 $\because AX=\beta$ 与 $A^tAX=A^t\beta$ 同解 $\therefore X=(A^tA)^{-1}A^t\beta$ 是 $AX=\beta$ 的解

2. (12分)设 A 是 n 阶反对称的实矩阵, 证明: (1) 矩阵 A 的特征值只能是纯虚数或零; (2) 矩阵 $A+E$ 一定是可逆阵.

(1)

(方法1) 设 $A\alpha=\lambda\alpha$ 即 λ 是 A 的一个特征值, $\alpha\neq 0$ 是 A 的属于特征值 λ 的特征向量.

$\because \|A\alpha\|^2=(A\alpha)^t(A\alpha)=\alpha^tA^tA\alpha=\alpha^t(-A^2)\alpha=\alpha^t(-\lambda^2)\alpha$

$=(-\lambda^2)\|\alpha\|^2\geqslant 0$, 但 $\|\alpha\|^2>0$ $\therefore -\lambda^2\geqslant 0$, $\lambda^2\leqslant 0$ 实数

即 $\lambda=0$ 或纯虚数

(方法2) $\bar{\alpha}^tA\alpha=\lambda\bar{\alpha}^t\alpha$

$\bar{\alpha}^tA\alpha=-\bar{\alpha}^tA^t\alpha=-(\overline{A\alpha})^t\alpha=-\bar{\lambda}\bar{\alpha}^t\alpha$

$\therefore (\lambda+\bar{\lambda})\bar{\alpha}^t\alpha=0$, 但 $\bar{\alpha}^t\alpha>0$ $\therefore \lambda+\bar{\lambda}=0$, $\lambda=0$ 或纯虚数

(2) 于是 $A+E$ 的特征值是 1 或 $1+ai$, $a\in\mathbb{R}$ 从而 $|A+E|\neq 0$

$A+E$ 可逆