

同济大学课程考核试卷 (A 卷)

2023—2024 学年第一学期

命题教师签名:

审核教师签名:

课号: 003005

课名: 数学分析(荣)上

考试考查: 考试

此卷选为: 期中考试()、期终考试(√)、重考()试卷

年组	专业	学号	姓名	任课教师
题号	—(1, 8, 1, 3, 5)	—(6, 5, 1, 3, 10)	二	总分
得分				

(注意: 本试卷共 14 小题, 3 大张, 满分 100 分。考试时间为 120 分钟。要求写出解题过程, 否则不予计分)

一. 计算题(共 10 小题, 每题 6 分)

1. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} \right)$.

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan x)^{2 \cot x}$.

求满足 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2}{x^2+3x-4} - ax - b \right) = 0$ 的常数 a 与 b .

求函数 $y = \cos(\cos(\cos x^2))$ 的导数.

求摆线参数方程 $\begin{cases} x = a(s - \sin s) \\ y = a(1 - \cos s) \end{cases}$ 所确定的函数 $y = y(x)$ 的二阶导数.

6. 计算定积分 $\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx, (n \geq 2)$.

9. 求由抛物线 $y = x^2$ 与直线 $y = 2x + 3$ 所围平面图形的面积.

7. 计算不定积分 $\int \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} dx$

10. 判别瑕积分 $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$ 的敛散性

8. 求函数 $y = \sqrt{x^3 - x^2 - x + 1}$ 的单调区间.

二、证明题(共4小题, 每题10分)

1. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$. 证明: 存在 $\xi \in [a, b]$, 使得

$$f(\xi) = \frac{1}{n}(f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)).$$

3. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$, 证明:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = A.$$

2. 设 $a_i > 0 (i=1, 2, \dots, n)$, 应用延森不等式证明:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

4. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续, 且 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 证明:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0.$$