中值定理证明题 解题方法大汇总

主讲人：凯哥

中值定理博大精深，其中的优秀题目更是浩如烟海。不论是考研还是竞赛，中值定理中那些眼花缭乱的证明题仿佛一个个拦路虎，让广大学子望而却步。回想起当年自己在考研复习时面对中值定理的恐惧，我觉得我有责任编写出一份全面且系统的《中值定理解题方法汇总》讲义，让后来的学子们能够早日克服这个难关。

作者根据多年来的教学经验，将中值定理中的题目按照题型进行详细分类，编写了这份讲义。讲义里共包含了 69 道题目，学会以后可以横扫考研范围内一切的中值定理证明题，甚至对竞赛党和数学专业的同学也是大有裨益的，所以希望大家好好研究这份讲义。

讲义里的所有题目我都会进行直播讲解，请大家关注我的 B 站账户“考研竞赛凯哥”，我会在第一时间将直播的回放上传到 B 站。

解题套路汇总

套路一 若要证明“$\exists\xi\in(a,b)$，s.t. $f'(\xi)=0$”，一般直接对 $f(x)$ 使用罗尔定理即可，无需构造新的辅助函数；若要证明“$\exists\xi\in(a,b)$，s.t. $f'(\xi)=k$”，则只需令 $F(x)=f(x)-kx$，然后对 $F(x)$ 使用罗尔定理即可；若要证明“$\exists\xi\in(a,b)$，s.t. $f''(\xi)=0$ 或 $f'''(\xi)=0$”之类的，只需对 $f(x)$ 多次使用罗尔定理即可。总之，这是中值定理中最简单的题型。

示例 1 设 $f(x)$ 三阶可导，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-1}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-1}{x-1}=0$，证：$\exists\xi\in(0,1)$，s.t. $f'''(\xi)=0$

注：对于连续函数而言，只要满足 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-b}{x-a}=c$，即可推出 $f(a)=b$ 且 $f'(a)=c$.

示例 2 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 三阶可导，$f(0)=f(1)=0$，令 $F(x)=x^3f(x)$，证明：$\exists\xi\in(0,1)$, s.t. $F'''(\xi)=0$

示例 3 请叙述并证明拉格朗日中值定理、柯西中值定理。

示例 4 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 二阶可导，$f(a)=f(b)=0$，$f'_+(a)f'_-(b)>0$，$\exists\xi\in(a,b)$，使 $f''(\xi)=0$

注：一个点处的导数正负无法判断函数的单调性，但至少可以判断出这个点的去心邻域的函数值与该点本身的函数值的大小关系。利用这个思想，我们可以轻松证明费马定理。

类题 请叙述并证明费马定理、导数零点定理、导数介值定理(也叫达布定理)

注 1：本题给出了一个非常重要的结论——“**导函数天生满足零点定理和介值定理(无论导函数是否连续)**”；

注 2：根据导数零点定理可以推出——**若 $f'(x)$ 无零点，则 $f'(x)$ 要么恒正、要么恒负，故 $f(x)$ 一定单调；**

注 3：通过本例可以发现，如果欲证结论是 $f'(\xi)=0$，那么除了最常用的罗尔定理以外，还有费马定理。有一些题目的条件太少，不足以找到 $f(x)$ 的两个零点（或函数值相等的点），此时很可能只有使用费马定理才能搞定。这种题目往往很难，我们在后面的题目中会偶尔遇到，请大家留心！

认真学习本讲义，彻底搞定中值定理！

示例 5 设$a_0+\frac{a_1}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}=0$ (a_i均为常数). 证明方程 $a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n=0$在$(0,1)$至少有一个解.

注：本题极具代表性。该题说明：如果直接证明$f(x)$有零点比较困难的话，可以考虑去证明$f(x)$的原函数$F(x)$有两个零点，然后对$F(x)$使用罗尔定理即可。利用本题的思想，可以解决下面这道类题——

示例 6 假设某n次多项式多项式$P_n(x)$的一切根均为实根，证明:$P_n'(x)$,$P_n''(x)$,$\cdots$,$P_n^{(n-1)}(x)$也仅有实根

注：该题的结论和证明过程都非常有趣，后面我们在学习“导数的几何应用”时，判断函数的零点个数、极值点个数、拐点个数的时候会用到这个结论。

套路二 若欲证结论为“$\exists\xi\in(a,b)$，s.t. $f'(\xi)+f(\xi)g(\xi)=0$”，此时可令辅助函数为$F(x)=f(x)e^{\int g(x)dx}$，然后对$F(x)$使用罗尔定理，得到$F'(\xi)=0$，并对$F'(\xi)=0$进行适当变形即可得到欲证结论。值得注意的是，指数部分$\int g(x)\mathrm{d}x$的结果不需要加任意常数 C，因为我们只需要找到一个辅助函数就够了。

示例 1 请说明套路二的原理是什么，即$F(x)=f(x)e^{\int g(x)dx}$到底是如何构造出来的（此处务必看 B 站视频）

注：只有真正掌握了方法的原理，用起来才更加的安稳。

示例 2 设$f(x)$在$[a,b]$连续，(a,b)可导，$f(a)=f(b)=0$，证明以下结论:

(1)$\exists\xi\in(a,b)$，使$2f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$；　　(2)$\exists\xi\in(a,b)$，使$f'(\xi)+f^2(\xi)=0$

注 1：第(1)问其实是一个错题，必须补充条件才能解决。我刻意把它放在这类题型的第一道，希望大家引起重视，以后在做这类题的时候，一定要检验“被约去的部分是否不为 0”——这种看似不起眼的步骤，在考试的时候往往是致命的；

注 2：第(2)问利用不同的方法构造出的辅助函数并不相同，比如采用汤家凤老师的“还原法”，在等式两边同时除以$f^2(\xi)$，得到的辅助函数是$F(x)=\dfrac{1}{f(x)}-x$，但是很遗憾这个辅助函数无法解出此题。当然，这不代表不同老师的方法有高低之分，只是每一种方法都有自己的适用范围而已——请大家牢记这句话，并思考下面这道难题该如何解决。

类题 设$f(x)$可导，$f(0)=1$，$f(1)=0.5$，证明：$\exists\xi\in(0,1)$，使得$f^2(\xi)+f'(\xi)=0$.

注 3：对于辅助函数的构造，向来都是“难者不会，会者不难”，命题人在这里乐此不疲地出了一大堆题目想要为难我们，但是只要掌握了方法和套路，这些题不过也就是一些送分题而已。

学会以后，“构造函数+罗尔定理+化简整理”，三步搞定一道题，逼格满满。不妨再看以下几例——

示例 3 设$f(x)$在$[a,b]$连续，(a,b)可导，$a>0$，$f(a)=0$，证:$\exists\xi\in(a,b)$，$s.t.\ f(\xi)=\dfrac{b-\xi}{a}f'(\xi)$

示例 4 设$f(x)$在$[0,3]$上二阶可导,$2f(0)=\int_0^2 f(x)dx=f(2)+f(3)$,证:$\exists\xi\in(a,b),s.t.\ f''(\xi)-2f'(\xi)=0$

注 1：教材里的积分中值定理，ξ是属于闭区间，其证明方法是用介值定理；但是我们知道，其实ξ的范围可以加强到开区间，此时就需要构造变上限积分函数然后用拉格朗日中值定理来证明（真题考过，请自行证明）。很明显，开区间是一个更强的结论，更方便我们后续的处理。所以我以后在讲涉及到积分中值的题目时，一律默认ξ在开区间内，不再重复。

注 2：本题结论中虽含有二阶导，但是只需将$f'(\xi)$视为一个“整体”，即可套用上述公式了。利用该思想不难看出，对于任何形如“$\exists\xi\in(a,b)$，s.t. $f^{(n)}(\xi)+f^{(n-1)}(\xi)g(\xi)=0$”的题，只需将结论中的$f^{(n-1)}(\xi)$看成整体，构造$F(x)=f^{(n-1)}(x)e^{\int g(x)\mathrm{d}x}$即可，并没有本质上的困难。这种整体的思想，还可以解决下面这道题目。

示例 5 $f(x)$在$[a,b]$二阶可导，$f(a)=f(b)=0$，$f'_+(a)f'_-(b)>0$，证:$\exists\xi\in(a,b)$，s.t. $f''(\xi)=f(\xi)$

注 1：本题的结论是$f''(\xi)=f(\xi)$，最直观的感觉就是“中间差了个一阶导”。这种题目，一般来说都要人为引入一阶导$f'(\xi)$，比如这题可以在等式两边加上f'，然后将$f+f'$视为整体，构造辅助函数；当然，也可以两边减去f'，并将$f'-f$视为整体构造辅助函数；

注 2：有的题目，其结论中已经同时出现$f(\xi),f'(\xi),f''(\xi)$了，那么此时就不需要再人为引入$f'(\xi)$了，只需要将$f'(\xi)$合理“分配”给$f(\xi)$和$f''(\xi)$，然后利用“整体”的思想构造辅助函数即可。比如，我们可以将示例 5 的结论改为“$f''(\xi)-3f'(\xi)+2f(\xi)=0$”，此时该如何构造辅助函数呢？利用这个思想，我们可以解决相当多的题目，请看下面的两道类题（注：这两道题都比较难，尤其是类题 2）——

类题 1 $f(x)$在$(0,+\infty)$二阶可导，证：对$\forall a>0$，$\exists c\in(2a,4a)$，使得$f(4a)-2f(3a)+f(2a)=a^2f''(c)$

类题 2 设$f(x)$在$[0,2\pi]$二阶可导，$f''(x)\neq f(x)$，证明：$\exists\xi\in(0,2\pi)$，使得$\tan\xi=\dfrac{2f'(\xi)}{f(\xi)-f''(\xi)}$

注：这道题我自己在第一遍做的时候，花了非常大的功夫。我尝试了近 20 分钟，但是连辅助函数都没搞出来。因为我一直想着怎么去套公式，当公式套不出来的时候，我又想用“微分方程法”硬解，但是都失败了。直到我真的冷静下来，尝试用“分析法”去重新审视欲证结论和题干条件的时候，这道题的思路才逐渐清晰，最终被我轻松解决。至于何为“分析法”，请见下面的套路三。

套路三 **本套路其实不算套路，更应该称为“思想方法”。**辅助函数的构造虽然可以套用公式，比如有所谓的“还原法”、“公式法”、“微分方程法”、“K 值法”，但是几乎没有一个方法是万能的，我认为真正最核心的方法是“分析法”——也就是观察式子结构，通过“具体问题具体分析”的方法寻找辅助函数。这句话看似是一句废话，但其实指导了我解决相当一部分的中值定理难题。比如，虽然在套路二中我们已经学习了构造辅助函数的“通用公式”，但在套路二中示例 2 的类题却需要通过两种不同方法构造出两种不同的辅助函数，这就叫“具体问题具体分析”；再比如，当欲证结论为$f''(\xi)+f'(\xi)g(\xi)=0$时，可将f'视为整体，令$\varphi(x)=f'(x)e^{\int g(x)dx}$即可；再比如，若要证明的结论为$f'(\xi)+f(\xi)g(\xi)=K$且$K\neq0$时，又该怎么办呢？此时，我们可以仿造之前探索辅助函数的方法，先在等式两边乘以$e^{\int g(x)dx}$，那么等式左边仍可视为$F(x)=f(x)e^{\int g(x)dx}$的导数，若再能求出等号右边$Ke^{\int g(x)dx}$的原函数$G(x)$，那么辅助函数便构造出来了，此时只需令$H(x)=F(x)-G(x)$即可。当然，这种例子不胜枚举，毕竟具体问题具体分析是马克思主义“活的灵魂”。说了这么多，总之记住一个核心即可——**“去思考欲证等式到底是由什么函数求导并变形后得到的，然后想办法将其还原”，即去思考“你要证的东西是怎么来的”**。

示例 1 $f(x)$在$[0,1]$二阶可导，$f(0)=f(1)$，证明：$\exists\xi\in(0,1)$，s.t. $f''(\xi)=\dfrac{2f'(\xi)}{1-\xi}$

示例 2 设$f(x)\in C[0,1]$，在$(0,1)$可导，$f(0)=0$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$，$f(1)=\dfrac{1}{2}$，证明：对$\forall a$，均存在$\xi\in(0,1)$，使得$f'(\xi)+a[f(\xi)-\xi]=1$

示例 3 设$f(x)$在$[0,1]$可导，$f(0)=0$，$\forall x\in(0,1]$，$f(x)>0$，证：$\exists\xi\in(0,1)$, s.t. $\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\dfrac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$

注 1：本题在构造辅助函数时，有两种不同的思维方式，一种是联想到$[\ln f(x)]'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$，另一种是先去分母，然后联想到$(uv)'=u'v+uv'$，这两种思维方式构造出的辅助函数是殊途同归的，可相互借鉴对方的思想；

注 2：请思考，本题有没有秒杀解法?

注 3：类似的题目还有很多，但是方法本质都是一样的，比如下面两道类题。

类题 1 设$f(x)$在$[0,1]$可导，$f(0)=0$，$\forall x\in(0,1]$，$f(x)>0$，证明：对于任意的正数a，$\exists\xi\in(0,1)$,使得$\dfrac{af'(\xi)}{f(\xi)}=\dfrac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$

类题 2 设$f(x)$在$[a,b]$可导，$f(a)=0$，$\forall x\in(a,b]$，$f(x)>0$，证明：对于任意$m,n>0$，$\exists\lambda,\mu\in(a,b)$，使得$\dfrac{f'(\lambda)}{f(\lambda)}=\dfrac{m}{n}\dfrac{f'(\mu)}{f(\mu)}$

注：类题 2 本身的难度其实不大~~(对我来说)~~，但是迷惑性极强，如果没有前面两题的铺垫，很多人对这题是束手无策的（当然，本题不止这一种解法）。我曾在 2020 年 10 月 8 日讲过这道题，这里就不再赘述了，请大家去看当年的视频即可。

示例 4 设$f(x)$和$g(x)$在$[a,b]$连续，(a,b)可导，$g'(x)\neq 0$，证：$\exists\xi\in(a,b)$，s.t. $\dfrac{f(a)-f(\xi)}{g(\xi)-g(b)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

示例 5 设$f(x)$和$g(x)$在$[a,b]$二阶可导，$g''(x)\neq 0$，$g(a)=g(b)=f(a)=f(b)=0$，证明：

(1) 在(a,b)内，$g(x)\neq 0$

(2) $\exists\xi\in(a,b)$，使得$\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$

注：有时候一眼看不出来辅助函数是什么，套公式也不好套，那么我们可以直接对欲证等式进行积分，若能积出来，那么积分的结果就是辅助函数。这并不是什么高级的方法，不过是贯彻了**“去思考你要证的东西是怎么来的”**这个核心思想而已。类似的题目还有下面一道。

示例 6 设函数$f(x)$与$g(x)$在区间$[a,b]$二阶可导，$f(a)=f(b)=g(a)=0$，证明：$\exists\xi\in(a,b)$，使得$f''(\xi)g(\xi)+2f'(\xi)g'(\xi)+f(\xi)g''(\xi)=0$

注：若再补充条件$g(b)=0$，则满足条件的ξ不止一个，你会证吗？

接下来，让我们看一道精彩的考研真题。

示例 7 $f(x)$二阶可导, $f(1)>0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$，证: $f(x)f''(x)+[f'(x)]^2=0$在$(0,1)$内至少有两个根.

最后，让我们用一道极为精彩的题目来作为这个题型的谢幕。

示例 8 $f(x)$在$[a,b]$连续，且存在$c\in(a,b)$满足$f'(c)=0$，证明: $\exists\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{b-a}$

注 1：本题的辅助函数很好构造，但是难点在于很难找到两个函数值相同的点，而且条件中的$f'(c)=0$似乎也不知道如何使用。这个时候，该如何思考问题呢？（其实解决方案在前文中已经提到过了哟~）

注 2：利用费马定理才能搞定的中值定理题目，往往难度很大。最经典的例子莫过于下面这道。对于该题，我在 2020 年 6 月 23 日和 2020 年 11 月 26 日分别用常规解法和秒杀解法各讲了一次，有兴趣的同学可以前往观看，此处从略。

$f(x)$在$[-2,2]$二阶可导，$|f(x)|<1$，$[f(0)]^2+[f'(0)]^2=4$，证：$\exists\xi\in(-2,2)$，s.t. $f(\xi)+f''(\xi)=0$

套路四 有一类题，其欲证等式为含有“$a,b,\xi,f(\xi),f'(\xi)$”的混合项(其中a,b通常为区间端点)，这种题的一般做法是——将含有区间端点a,b的项与带有中值ξ的项，分离到等式的左右两端，然后分析带有a,b的项是否可以变形为$f(b)-f(a)$或者$\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$的形式，然后用拉格朗日中值定理或者柯西中值定理处理，即得欲证结论；当然，也可以分析带有中值ξ的项，去思考它是否可以看成由某个函数用完拉格朗日中值定理以后或者某一对函数用完柯西中值定理以后的结果，如果可以，将其还原。这种题，是期末考试的常考题型，难度非常小。

(当然，若含a,b的项与含ξ的项不可分离，那么可以尝试“套路三”中“示例 4”的方法)

示例 1 $f(x)$在$[a,b]$连续，(a,b)可导，证：$\exists\xi\in(a,b)$，使得$2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi)$

注 1：请思考，该题是否还有其它解法呢？

注 2：该题不仅有其它解法，并且还只能用这个“其它解法”——因为题干条件不足以确定出$\xi\neq0$，所以根本无法使用柯西中值定理。我故意把这个题放到套路四的第 1 道题，你又上当了。

注 3：如果补充条件“$b>a>0$”，则可以使用柯西中值定理。

示例 2 设$a,b>0$，证：$\exists\xi\in(a,b)$，使得$ae^b-be^a=(1-\xi)e^\xi(a-b)$

套路五 <u>**双中值问题 1**</u>——若要证明的等式中，不止含有一个中值，比如同时含有ξ和η，此时的解法一般是：抓住两个中值中的“主要矛盾”——将ξ和η中较为复杂的中值项抽离出来单独分析，<u>去思考它是由哪个函数用完拉格朗日中值定理以后或者哪一对函数用完柯西中值定理以后的结果，然后将其还原</u>（**这又是上面所说的“核心思想”!**），对还原以后的式子稍作变形，再用一次中值定理，便可以出现另一个中值，证毕。知道了这个思想以后，自己都可以编题玩儿了~并且，这个思想完全使用于“三中值”甚至“四中值”题目的求解。

示例 1 设$f(x)$在$[a,b]$可导,$f(a)=f(b)=1$，证明:$\exists\xi_1,\xi_2\in(a,b),s.t.\ e^{\xi_2-\xi_1}[f'(\xi_2)+f(\xi_2)]=1$；

示例 2 设$f(x)$在$[a,b]$连续，(a,b)可导，且$a>0$，$\exists\xi,\eta\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=(a+b)\dfrac{f'(\eta)}{2\eta}$

示例 3 $f(x)\in C[a,b]$，在(a,b)可导，且$0<a<b<\dfrac{\pi}{2}$，证：$\exists\xi,\eta\in(a,b)$, 使得$f'(\eta)\tan\dfrac{a+b}{2}=f'(\xi)\dfrac{\sin\eta}{\cos\xi}$

注：利用同样的方法，我们可以处理含有三个中值、四个中值的证明题，比如以下两例。

示例 4 设$f(x)$在$[1,2]$连续，$(1,2)$可导，$f'(x)\neq0$，证明:$\exists\xi$、η、$\gamma\in(1,2)$，$s.t.\ \dfrac{f'(\gamma)}{f'(\xi)}=\dfrac{\xi}{\eta}$

注 1：这个套路研究到现在，相信大家已经融会贯通了，甚至摩拳擦掌的准备去秒杀辅导书中的同类题目。**但是在我看来，这种题是有 bug 的**——因为题中没有限定这些中值必须不同，所以...嘿嘿...你们可看好了：

示例 1 中，如果我取$\xi_1=\xi_2$，则该题变为单中值问题，瞬间秒杀；

示例 2 中，如果我取$\xi=\eta=\dfrac{a+b}{2}$，恒成立，秒杀；

示例 3 中，如果我取$\xi=\eta=\dfrac{a+b}{2}$，恒成立，秒杀；

示例 4 中，如果我取$\xi=\eta=\gamma$，恒成立，秒杀....

啊这....还没开始做，这题就结束了

注 2：看了注 1 的新解法以后，总会有人觉得不可思议，甚至心里会有这种疑惑——“题干没说这些中值可以相等啊，你凭什么让它们相等，你这不是相当于把题目都改了吗？”

现在，是时候打消你的疑惑了——

(1) 首先，题目没说这些中值可以相等，也没说必须不等，题目只是让你证明“存在这样的一些中值，使得等式成立”即可。也就是说，我如果令这些中值相等以后，发现结论也可以成立，那么我不仅证明了这样的中值是存在的，而且证明了它们“在相等的前提下也能存在”，这是一个更强的结论！

打个比方吧，比如别人让你证明某个方程有解，结果你直接把解等于几求出来了，那你当然更牛逼了...

（同理，如果你能够证明出这些中值不仅存在，而且还互不相等，那么也是证明了更强的结论！）

(2) 其次，就算使用参考答案给出的“标准解法”，也没有证出这些中值一定不相同！因为两次中值定理都是在同一个区间上使用的，这样得到的中值本来就可能相等。所以，如果你认为我的新解法是错的，那你所谓的标准解法其实也是错的！

当然，这样的新解法也有一个弊端，那就是——既然令中值相等以后，结论增强了，那么很有可能增强后的结论是证不出来的，或者说比原命题更加难证（比如套路三中示例 3 的类题 2，其中的两个中值满足的条件是$\lambda+\mu=a+b$，而不是$\lambda=\mu$），这样就和我们的初衷背道而驰了。

最后，再来欣赏一道三中值定理的题目。

示例 5 设$f(x)$在$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$二阶连续可导，$f'(0)=0$，证：$\exists\xi$、$\eta$、$\omega\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，s.t. $f'(\xi)=\dfrac{\pi}{2}\eta\cdot\sin 2\xi\cdot f''(\omega)$

套路六 **<u>双中值问题 2</u>**——对于含有两个中值ξ和η的题，如果题目中还明确要求了$\xi\neq\eta$，那么就不能再像“套路五”那样做了，因为两次中值定理的区间都是$[a,b]$，所以你无法保证ξ和η一定不相等！所以，唯一的解决方法就是将区间$[a,b]$拆分成$[a,c]$和$[c,b]$，然后在区间$[a,c]$和$[c,b]$上分别使用一次中值定理，使得$\xi\in(a,c)$，而$\eta\in(c,b)$，由于两个区间没有交集，那么自然就保证了$\xi\neq\eta$。很显然，这种题型中，分段点$x=c$的选取是核心。至于如何选择一个恰当的c，方法有两种——①用待定系数法倒推，推出c需要满足的条件（这是最重要的方法）；②根据题目的提示(一般有第一问作为铺垫，难题变成水题)。该思想完全适用于三个中值甚至n个中值的题目。**相较于套路五而言，套路六才是考试重点（不论是考研还是竞赛，真题里都考过这种题哟~）**

以下的题目，如果有第一问，请将其跳过。第一问是给弱者做的（~~考试的时候请忘掉这句话，装逼有风险~~）。

示例 1 设$f(x)$在$[0,1]$连续，$(0,1)$可导，$f(0)=0$，$f(1)=1$，证:

(1)$\exists c\in(0,1)$，使得$f(c)=\dfrac{1}{2}$　　　　(2)$\exists\xi,\eta\in(0,1)$且$\xi\neq\eta$，使得$\dfrac{1}{f'(\xi)}+\dfrac{1}{f'(\eta)}=2$

注：此题的结论可进行推广，以此为题源可命制相当多的题目，如下：

类题 1 $f(x)$在$[0,1]$可导，$f(0)=0$，$f(1)=1$，证:$\exists\xi\neq\eta$，s.t. $\dfrac{a}{f'(\xi)}+\dfrac{b}{f'(\eta)}=a+b(a,b>0)$

类题 2 $f(x)$在$[0,1]$可导，$f(0)=0$，$f(1)=1$，证: 存在互不相同的ξ_i，使得$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{f'(\xi_i)}=n$

类题 3 $f(x)$在$[0,1]$可导, $f(0)=0$, $f(1)=1$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1(\lambda_i>0)$, 证:存在不同的$\xi_i\in(0,1)$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{f'(\xi_i)}=1$

示例 2 设$f(x)$在$[0,1]$连续，$(0,1)$可导，$f(0)=0$，$f(1)=1$，证:

(1)$\exists c\in(0,1)$，使得$f(c)=1-c$　　(2)$\exists \xi,\eta\in(0,1)$且$\xi\neq\eta$，使得$f'(\xi)f'(\eta)=1$

示例 3 $f(x)\in C[0,1]$，在$(0,1)$可导，$f(0)=0$, $f(1)=\dfrac{1}{4}$，证:$\exists\xi\neq\eta$，s.t. $f'(\xi)+f'(\eta)=\eta-\xi$

注：本题的两个辅助函数均不难构造，但由于结论中的ξ和η并不对称，所以需要思考ξ到底是位于$(0,c)$还是位于$(c,1)$。当然，本题我也没有太好的预判方法，只有使用“尝试法”。

示例 4 设$f(x)\in C[0,1]$，$\int_0^1 f(x)dx\neq0$，证明:存在互异的三个数$\xi_1,\xi_2,\xi_3\in[0,1]$，满足下列等式——

$$\frac{\pi}{8}\int_0^1 f(x)dx=\left[\frac{1}{1+\xi_1^2}\int_0^{\xi_1}f(x)dx+f(\xi_1)\arctan\xi_1\right]\xi_3=\left[\frac{1}{1+\xi_2^2}\int_0^{\xi_2}f(x)dx+f(\xi_2)\arctan\xi_2\right](1-\xi_3)$$

接下来，让我们以一道极为精彩的综合题作为本题型的谢幕，该题融合了之前讲过的很多思想。

示例 5 设$f(x)$在$[a,b]$连续，(a,b)可导，$f'(x)\neq 0$，$f(a)=0$，$f(b)=2$，证明：$\exists\xi,\eta\in(a,b)$且$\xi\neq\eta$使得$f'(\eta)[f(\xi)+\xi f'(\xi)]=f'(\xi)[bf'(\eta)-1]$

套路七 若要证明的式子中含有高阶导数(如$f''(\xi)$、$f'''(\xi)$、$f^{(4)}(\xi)$等)，一般要用带拉格朗日余项的泰勒公式，即$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$。在具体操作中，最重要的就是选取恰当的展开点和被展开点(即x_0和x)。观察上面的泰勒公式我们可以得出以下经验——在选取展开点和被展开点时，总的思路是**“选取导数值信息多的点作为x_0，而选取仅告知了函数值信息的点为x”**。当然，有时也会选取其它的展开方式，如——将两端点均在中点处展开、将中点分别在两个端点处展开、两端点处相互展开、在任意点处展开...至于该选择哪种展开方式，我们需要具体情况具体分析，不能一概而论。

示例 1 设$f(x)$在$[-1,1]$三阶连续可导，$f(-1)=0$，$f'(0)=0$，$f(1)=1$，证：$\exists\xi\in(-1,,1)$，s.t. $f'''(\xi)=3$

注：由达布定理可知，这里的“三阶连续可导”可弱化为“三阶可导”，下面的部分题目也有类似的情况。

示例 2 设$f(x)$在$[0,1]$二阶可导，$f(0)=f(1)=0$，$[f(x)]_{\min}=-1$，证：$\exists\xi\in(0,1)$，s.t. $f''(\xi)\geq 8$

注：极值点蕴含了导数的信息，所以常常将函数在极值点处泰勒展开。

示例 3 设$f(x)$在$x=x_0$的邻域内四阶可导，$|f^{(4)}(x)|\leqslant M(M>0)$，证:对此邻域上任意一个不同于$x_0$的点$a$，有$\left|f''(x_0)-\dfrac{f(a)+f(b)-2f(x_0)}{(a-x_0)^2}\right|\leqslant\dfrac{M}{12}(a-x_0)^2$（其中$b$是$a$关于$x_0$的对称点）

注：从这个例子可以看出，如果题干中没有告诉任何具体点的导数信息，那么可以观察欲证结论，同样也能得出展开点和被展开点应该如何选取。这种思想还可以解决下面两道类题，它们的方法一模一样。

类题 1 $f(x)$在$[a,b]$二阶连续可导,证: $\exists\xi\in(a,b)$,使$f(a)-2f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)+f(b)=\dfrac{(b-a)^2}{4}f''(\xi)$

类题 2 $f(x)$在$[a,b]$三阶连续可导,证: $\exists\xi\in(a,b)$,使$f(b)=f(a)+f'\left(\dfrac{a+b}{2}\right)(b-a)+\dfrac{(b-a)^3}{24}f'''(\xi)$

示例 4 在一条笔直的道路上，一辆汽车从开始启动到刹车停止用单位时间走完了单位路程，证明：至少有一个时间点，其加速度的绝对值不小于 4

注：对于这种端点处的函数、导数信息都已知的题目，初学者可能会选择“两端点处相互展开”的方法，但是这样得到的估计不够精确。为了得到更精确的估计，通常是将中点在端点处展开，充分利用“对称美”。请看下面这道类似的题目。

类题 $f(x)$在$[a,b]$上n阶可导$(n\geq 2)$，满足$f^{(i)}(a)=f^{(i)}(b)=0(i=1,2,\cdots,n-1)$，证明：$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $|f^{(n)}(\xi)|\geq\dfrac{2^{n-1}n!}{(b-a)^n}|f(b)-f(a)|$

目前为止，我们遇到的题目都或多或少提示了你该如何选择展开点和被展开点，总之核心思想就是“将题干中导数信息多的点作为展开点x_0，将仅告知函数值的点作为被展开点x”。

但是，有一些题目，题干条件中没有告诉任何具体点处函数值和导数值，那么该如何选取展开点和被展开点呢?这就需要我们更加深入地去分析了，这种题目的难度比前几道更大，下面举几道最为经典的例子。

示例 5 $f(x)$在$(0,+\infty)$三阶可导，且$f(x)$和$f'''(x)$有界，证明：$f'(x)$和$f''(x)$在$(0,+\infty)$也有界

注 1：本题我在 2021 年 3 月 10 日已经讲过，请大家关注我的 B 站账户“考研竞赛凯哥”，此处从略。

注 2：本题只是让你证明“有界”，但是没有让你求出这个“界”到底是多少。而下面的三道题目，出题人明确给出了具体的界，那么又该如何思考呢?

示例 6 设$f(x)$在$[0,1]$二阶可导，且$|f(x)|\leq a$，$|f''(x)|\leq b$，证：$|f'(x)|\leq 2a+\dfrac{b}{2}$恒成立

注：本题最后一步的放缩极为关键。在作者看来，这本应该是高中的常识问题，无需多讲。但是根据多年来的教学经验发现，很多学生对最后一步的不等号方向非常不理解，甚至很多老师也在这个地方犯过错误，所以希望大家在这里一定要仔细思考！ 为了彻底搞清楚上题的“注 2”，我们再来看这样一道题目。

类题 1 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$二阶可导，记$M_i=\max|f^{(i)}(x)|$ $(i=0,1,2)$，证明：$M_1^2\leqslant 2M_0M_2$

类题 2 设$f(x)$在$(0,+\infty)$二阶可导，记$M_i=\max|f^{(i)}(x)|$ $(i=0,1,2)$，证明：$M_1^2\leqslant 4M_0M_2$

注：由于类题 2 的定义域缩小为了$(0,+\infty)$，对称美消失了，所以得到的界没有那么精确，这是正常的。

套路八 有一些题目告诉了二阶导函数$f''(x)$恒正或者恒负，然后让你证明某个不等式。这个时候往往需要将函数泰勒展开，然后利用二阶导函数不变号的特点扔掉拉格朗日余项，从而得到一个不等式。这是一个极其重要的手法，与函数凹凸性有关的很多性质都可以利用这个方法进行证明；并且，该方法中的“二阶导”可以改为“偶数阶导”，操作方式仍然不变。比如告诉你四阶导函数恒正，那么你可以泰勒展开（余项为含四阶导的拉格朗日余项），然后将余项扔掉即可构造出不等式了。比如让你证明$\mathrm{e}^x\geqslant 1+x$、$\mathrm{e}^x\geqslant 1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}$时，都可以采用这种方法，这比移项求导快得多。

示例 1 设$f''(x)>0$，证明：(1)$f(x)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$；(2)$\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\geqslant f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$

注 1：众所周知，$f''(x)>0$时函数为凹函数，而本题相当于给出了凹函数必定成立的两个不等式。这两个不等式非常重要，并且有十分清晰的几何意义——第一问的不等式，其几何意义是“对于凹函数而言，曲线总在切线上方”；第二问的不等式，其几何意义是“对于凹函数而言，中点处的函数值小于函数值的中点”

注 2：本题的第(2)问可以推广为如下的类题——

类题 设$f(x)$在$[a,b]$二阶可导，$f''(x)>0$，取$x_i\in[a,b]\,(1\leqslant i\leqslant n)$，设$k_i>0$且$k_1+k_2+\cdots k_n=1$，证明：$f(k_1x_1+k_2x_2+\cdots k_nx_n)\leqslant k_1f(x_1)+k_2f(x_2)+\cdots k_nf(x_n)$

注 1：可以发现，$f\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)\leqslant\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f(x_i)$ 和 $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ 均是上题的特例；

注 2：类题和注 1 中的不等式，称为“琴生不等式”。与均值不等式、柯西不等式一样，琴生不等式也是不等式证明中最常用的不等式之一（考研用得不多），以后在《不等式证明专题》时我会详细介绍。

示例 2 设$f(x)$在$[0,1]$二阶可导，且$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$，则(　　)

(A) 当$f'(x)<0$时，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)<0$　　(B) 当$f''(x)<0$时，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)<0$

(C) 当$f'(x)>0$时，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)<0$　　(D) 当$f''(x)>0$时，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)<0$

注：本题是 2018 年考研真题，利用本套路的方法可以轻松解决。当然，毕竟是选择题，也可以画图搞定。

示例 3 设$f''(x)>0$，取$x=x_0$，$\Delta x>0$，令$\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x$，$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，试比较$\Delta y$和$\mathrm{d}y$的大小，并解释其几何意义。

套路九 对于一些需要用泰勒中值定理解决的题，其实可以采用【辅助多项式】的方法搞定。所谓辅助多项式，指的是当欲证结论为“$f^{(n)}(\xi)=k$，且$k\neq 0$”之类的形式，且题干中关于$f(x)$的信息较多时，我们可以构造一个n次多项式$P(x)$，使得$P(x)$满足题干中$f(x)$所满足的一切条件，再令$F(x)=f(x)-P(x)$，此时$F(x)$一定会有很多的零点，然后对$F(x)$多次使用罗尔定理即可得到欲证结论。（构造出$F(x)$后，有时仍需对其泰勒展开，但是此时泰勒会比一开始就用泰勒要简单一些）。**注意：该方法并非必须掌握，属于选学内容。有兴趣的同学可以自行研究，我在这里只讲几道最的典型例题，目的在于抛砖引玉。**

示例 1 设$f(x)$在$[0,4]$二阶可导，$f(0)=0$, $f(1)=1$, $f(4)=2$，证明：$\exists\xi\in(0,4)$，使得$f''(\xi)=-\dfrac{1}{3}$

接下来，让我们用这个方法秒杀 2019 年的考研数学真题。

示例 2 设$f(x)$在$[0,1]$二阶可导，$f(0)=0$，$f(1)=1$，$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1$，证明:$\exists\eta\in(0,1)$，使得$f''(\eta)<-2$.

注：原题原本还有第一问的，被我去掉了。大家**平时训练**的时候，可以刻意避开第一问，直接思考第二问，这样会大幅提高自己的分析能力。

示例 3 设$f(x)$在$[0,1]$二阶可导，$f(0)=f(1)=0$，$[f(x)]_{\min}=-1$，证:$\exists\xi\in(0,1)$，s.t. $f''(\xi)\geqslant 8$

注：本题在题型七中其实已经讲过，我们现在用辅助多项式的方法重新证明了一遍，别是一番风味。尤其应当注意的是，这里$f(x)$的最小值点和多项式$P(x)$的最小值点不一定是同一个点（也就是说，f和P拥有相同的最小值，但是取到最小值的横坐标并不一定相同），所以需要分类讨论。

利用这个分类讨论的思想又可以轻松秒杀 2007 年的考研真题，如下——

类题 设$f(x)$,$g(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内二阶可导，$f(a)=g(a)$，$f(b)=g(b)$，并且$f(x)$和$g(x)$在(a,b)内存在相等的最大值，证明：存在$\xi\in(a,b)$，使得$f''(\xi)=g''(\xi)$

示例 4 设$f(x)$在$[-1,1]$三阶连续可导，$f(-1)=0$，$f'(0)=0$，$f(1)=1$，证：$\exists\xi\in(-1,,1)$，s.t. $f'''(\xi)=3$

注 1：前文中已经提过，在使用辅助多项式解题时，若欲证结论为$f^{(n)}(\xi)=k$，则需要构造一个n次多项式进行拟合。n次多项式有$n+1$个系数，但若题干中只有n个独立的条件，则无法顺利解出$P(x)$中的所有系数，此时我们需要给$P(x)$“强行附加约束条件”，使得构造出的$F(x)$能够成功解出题目。至于需要附加一个什么样的条件，则又需要“具体问题具体分析”了，不能一概而论，但核心原则是“差什么补什么”。

注 2：回顾辅助多项式的解题过程，我们可以发现：由于$P(x)$是一个n次多项式，而我们最后总是对辅助函数$F(x)=f(x)-P(x)$连续求了n次导，得到了$F^{(n)}(\xi)=0$，所以真正影响最终结论的只有$P(x)$中的最高次项的系数，至于那些低次项都在一次次的求导过程中消失殆尽。所以，以后在草稿纸上计算$P(x)$的系数时，只要发现计算出的最高次项的系数刚好能够证出你想要的结论，那么这个题就基本搞定了，接下来就是悠闲地求出其他系数，并且按部就班地写一下过程即可。

套路十 有一种题目，是让你计算中值定理中的中值θ的极限. 这种题目的思想其实特别简单，只需要自己将$f(x)$重新展开一次，然后和题干给出的展开式对比，得到一个简单等式，然后想办法把θ分离出来即可。多说无益，我们来看几道典型例题！

示例 1 设$f(x)=\arctan x$，$x\in[0,a]$，若$f(a)-f(0)=af'(\theta a)$，$\theta\in(0,1)$. 求$\lim\limits_{a\to0}\theta^2$

注：本题是这类题中最简单的一类题：直接把θ的表达式求出来即可，没什么好做的。

示例 2 $f(x)$二阶连续可导，$f''(x)\neq 0$，若$f(x+h)=f(x)+f'(x+\theta h)h\ (0<\theta<1)$，证:$\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{2}$

示例 3 $f(x)$有$n+1$阶连续导数，若$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\dfrac{f''(a)}{2}h^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(a+\theta h)}{n!}h^n\ (0<\theta<1)$，且$f^{(n+1)}(a)\neq 0$，证明：$\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{n+1}$

示例 4 $f(x)$有n阶连续导数，$f^{(k)}(x_0)=0(k=2,3,\cdots,n-1)$，$f^{(n)}(x_0)\neq 0$，$f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0+\theta h)$，其中$0<\theta<1$，证明:$\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{\sqrt[n-1]{n}}$

小知识 众所周知，常规的罗尔定理需要“闭区间连续，开区间可导”，但是我们可以对其进行推广，让它在开区间甚至无穷区间也成立。对于有限开区间上的罗尔定理，我们只需要在端点处补充定义，即可将开区间转化为闭区间；对于无限区间上的罗尔定理，我们需要通过变量代换（一般是正切换元），将无限区间转化为有限区间。这两种操作的本质都体现了“化归思想”。所谓化归思想，指的是通过一定的操作转化，让新问题转化为曾经解决过的旧问题。化归思想是最为重要的数学思想方法之一。

下面，我们利用这种操作方法，来解决**广义罗尔定理**的证明吧！（证明之前可以先想一下图像，很直观）

示例 1 (1) 设$f(x)$在(a,b)可导，且$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=A$，证明：$\exists\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=0$

(2) 设$f(x)$在$[0,+\infty)$可导，且$f(0)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，证明：$\exists\xi\in(0,+\infty)$，使得$f'(\xi)=0$

注 1：将无限区间转化为有限区间时的变量代换，不一定非要是正切换元，但它是最常用的一种；

注 2：广义罗尔定理并非只有理论上的价值，事实上，在很多证明题中都可以看到它的身影，下面请看两道最经典的例子。

示例 2 $f(x)$在$[0,+\infty)$可导，且$0\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{x}{1+x^2}$，证明：$\exists\xi>0$，使得$f'(\xi)=\dfrac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$

示例 3 $f(x)$在$[0,+\infty)$可导，$f(0)=1$，且$|f(x)|\leqslant e^{-x}$，证明：$\exists\xi>0$，使得$f'(\xi)+e^{-\xi}=0$

罗列至此，中值定理证明题的常见题型和解题方法已经全部覆盖了。（至于 K 值法，我以后会重新开个视频单独讲解，大家不用急）

大家一定要好好的研究这份讲义以及配套的 B 站视频。我相信，**只要真的吃透了这份讲义，任何一本考研辅导书中的中值定理证明题都如同探囊取物。**

最后，让我们以 2020 年的一道真题作为全篇的收尾。该题本身的难度并不算大，但是作为考研题来说确实有点“过分”了，这道题绝对是考研历史上最难的中值定理证明题，没有之一。前面讲的所有套路全部失效，只有“具体问题具体分析”才是真正的核心。

(2020) $f(x)$在$[0,2]$连续可导，$f(0)=f(2)=0$，记$M=\max|f(x)|$，证明：

(1) 存在$\xi\in(0,2)$，使得$|f'(\xi)|\geqslant M$

(2) 若对$\forall x\in(0,2)$，均有$|f'(x)|\geqslant M$，则$M=0$

注：本题的第(2)问，本质是证明$f(x)\equiv 0$，这种问题可以称为“函数归零问题”。事实上，函数归零问题的出题角度非常多，里面不乏各种优秀的题目，如果有空的话我会做一个合集进行专门的讲解，此处从略。

后记

想讲的题目还有太多太多，但限于篇幅，只好忍痛割爱、就此停笔。

回顾整份讲义，其实很多细节都存在着不足，很多文字表达也不算清晰，不同题目之间的过渡也并不自然。我本想再打磨打磨，但是承诺的讲课时间已经临近，老拖下去也不是个办法。所以，请原谅我将这份不成熟的讲义展现给了大家；但是我相信，你们的反馈会让她日趋完美。

在讲完中值定理以后，可能我又要匆匆开始不定积分计算、定积分计算、积分不等式等专题的编写。我很想将这些美妙的知识和题目呈现在大家眼前，但又总怕自己能力有限、误人子弟。我在 B 站的视频也总是删了又讲、讲了又删，反反复复。作为既非数学系又非师范生的我，深知自己专业水平的不足，所以唯有在讲课上多花功夫，才对得起大家对我的信任和期待。

讲课，曾经是我的兴趣，后来逐渐变成了热爱，直到现在，它成了我的信仰。我非常感谢讲课这件事情，它让我不再浑浑噩噩，让我终于找到了自己存在的意义。曾经的我，没有任何的人生目标，总觉得“长路漫漫”，我还有很多的时间可以挥霍；现在的我，终于找到了真正热爱的事，才恍然发觉人生太短，甚至不够我做好这一件事。我希望在有限的生命中，我可以讲出更多精彩的课程；我自知自己没有什么创新的才能，所以我只有尽自己最大的努力，将几百年前就早已存在的经典知识/题目稍作整理，讲给大家听——也许，这就是我人生的意义吧。

最后，希望大家也能找到自己热爱的事情，共勉！

凯哥

2021 年 4 月 10 日

成都