2015-2016 学年第一学期期末考试 A 卷

一、填空题与选择题(24 分，每题 3 分，共 8 题，选择题为单选)

1.设 4 阶矩阵 $A=(\alpha,\gamma_1,\gamma_2,\lambda_3),B=(\beta,\gamma_1,\gamma_2,\lambda_3)$，如果 $|A|=m,|B|=n$，则行列式 $|A+2B|=$________.

2.设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&1&1\\1&1&0&1\end{pmatrix}$，则方程组 $AX=0$ 的解空间的维数为________.

3.设 A 为 3 阶实对称阵，且 A 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=-1$，则 $A^{100}=$________.

4.已知向量组 $\alpha_1=(a,0,c),\alpha_2=(b,c,0),\alpha_3=(0,a,b)$ 线性无关，则参数 a,b,c 必满足关系式________.

5.已知 A,B 均为 n 阶方阵，且满足 $AB=0$，则下列说法中错误的是________.

A、若 $|A|\neq 0$,则 $B=0$　　B、$R(A)+R(B)\leqslant n$

C、若 $A\neq 0$,则 $B=0$　　D、$|A|=0$ 或 $|B|=0$

6.设 $A=\begin{pmatrix}a&b&b\\b&a&b\\b&b&a\end{pmatrix}$，若 $R(A^*)\leqslant 1$，则必有________.

A、$a=b$ 或 $a+2b=0$　　B、$a=b$ 或 $a+2b\neq 0$

C、$a\neq b$ 或 $a+2b=0$　　D、$a\neq b$ 或 $a+2b\neq 0$

7.n 元二次型 x^TAx 正定的充要条件是________.

A、A 的正惯性指数为零　　B、A 与单位矩阵合同

C、A 的行列式为正　　D、存在可逆阵 P 使得 $P^{-1}AP=A$

8.设A为$m \times n$阵，则非齐次线性方程组$Ax=b$有解的充分条件是________.

A、$R(A)=m$

B、$R(A)=n$

C、A的行向量组线性相关

D、A的列向量组线性相关

二、(12分)设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$满足$AXA+BXB=AXB+BXA+E$，求矩阵$X$.

三、(11分)讨论参数a,b满足什么条件时，线性方程组$\begin{cases}x_1+2x_2=3\\4x_1+7x_2+x_3=10\\x_2-x_3=b\\2x_1+3x_2+ax_3=4\end{cases}$有唯一解、无解和有无穷多解.

四、（15分）设线性空间R^3中的变换T为：$T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x-y\\y-z\\y+z\end{pmatrix}$，

(1)证明T为线性变换，

(2)求T在基$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\xi_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$下的矩阵$B$.

五、(13 分) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4+a \\ 1 & 2 & 3+a & 4 \\ 1 & 2+a & 3 & 4 \\ 1+a & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$,

(1)求 $|A|$.

(2)问 a 为何值时，该矩阵的列向量组线性相关？当其线性相关时，求出一个最大线性无关组，并将其余向量用最大线性无关组线性表出。

六、(14分) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3-4x_2x_3$，经正交变换 $x=Py$ 可将二次型化为标准型 $f=3y_1^2+ay_2^2+by_3^2$，

(1) 求 a,b 的值；

(2) 求正交变换阵 P .

七、(14 分)

(1)(8 分)设齐次线性方程组$\begin{cases} a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0 \\ b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3=0 \end{cases}$，记$M_1=\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, M_2=\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, M_3=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$,

证明$x=(M_1,-M_2,M_3)^T$是方程组的解，

(2)(6 分)若M_1,M_2,M_3不同时为零，求方程组的通解.

2015-2016 学年第一学期期末考试 A 卷参考答案

一、填空题与选择题(24 分，每题 3 分，共 8 题，选择题为单选)

1、【正解】$27m+54n$

【学解】$|A+2B|=|\alpha+2\beta,3r_1,3r_2,3\lambda_3|=27|\alpha+\beta,r_1,r_2,\lambda_3|$

$$=27|\alpha,r_1,r_2,\lambda_3|+27|2\beta,r_1,r_2,\lambda_3|=27|A|+54|B|=27m+54n$$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 1】行列式的概念及其性质

2、【正解】2

【学解】$A=\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&1&1\\1&1&0&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\ \therefore r(A)=2$

解空间的维数$=n-r(A)=4-2=2$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 9】矩阵的秩和矩阵等价

3、【正解】$\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}$

【学解】

$$A=P^{-1}\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{bmatrix}P\ \therefore A^{100}=P^{-1}\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{bmatrix}^{100}P=P^{-1}\cdot I\cdot P=I=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}$$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 5】矩阵的逆

4、【正解】$abc\neq0$

【学解】向量组线性无关，又该向量组组成的矩阵为方阵，即为满秩，

即$|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|\neq0\ \therefore\begin{vmatrix}a&0&c\\b&c&0\\0&a&b\end{vmatrix}\neq0\Rightarrow2abc\neq0\Rightarrow abc\neq0$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 11】向量组的线性相关和线性表示

5、【正解】C

【学解】$AB=0 \therefore |AB|=|A|\cdot|B|=0 \Rightarrow A$、$D$正确

$R(A)+R(B)\leq n+r(AB)=n\Rightarrow B$正确，假设$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ $\therefore AB=0\Rightarrow$C错误

【考点延伸】《考试宝典》【知识点4】矩阵的概念和基本运算

6、【正解】A

【学解】若A可逆 $A^*=|A|\cdot A^{-1}$ $\therefore R(A^*)=R(A^{-1})=R(A)=3\neq 1$

$\therefore A$不可逆 $\therefore |A|=0$ $|A|=(a-b)^2(a+2b)=0\Rightarrow A$正确

【考点延伸】《考试宝典》【知识点5】矩阵的逆

7、【正解】B

【学解】正定的充要条件：①特征值均大于$0\Rightarrow D$错误

②各阶主子式为正$\Rightarrow C$错误

③正惯性指数等于$n\Rightarrow A$错误

【考点延伸】《考试宝典》【知识点24】正定二次型和正定矩阵

8、【正解】A

【学解】$AX=b$有解充分条件为$R(A)=R(A|b)$

若$R(A)=m$, $\therefore A$行向量线性无关，

又由线性无关的向量组添加若干个分量仍线性无关

$\therefore (A,b)$行向量线性无关

$\therefore R(A|b)=m=R(A)\Rightarrow AX=b$有解

【考点延伸】《考试宝典》【知识点17】非齐次线性方程组

二、【学解】$AXA+BXB=AXB+BXA+E \therefore AX(A-B)=BX(A-B)+E$

$(A-B)X(A-B)=E$ $\quad\quad \therefore X=[(A-B)^{-1}]^2$

又$A-B=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$ $(A-B)^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ $\therefore X=\begin{pmatrix}1&2&5\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 4】矩阵的概念和基本运算

三、【学解】矩阵为$\begin{bmatrix}1&2&0&3\\4&7&1&10\\0&1&-1&b\\2&3&a&4\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&0&3\\0&1&-1&b\\0&0&a-1&0\\0&0&0&b-2\end{bmatrix}$

当$a\neq1$且$b=2$时，有唯一解，$b\neq2$时，无解

当$a=1$且$b=2$时，有无穷多解

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 17】非齐次线性方程组

四、【学解】(1) $T\begin{pmatrix}kx\\ky\\kz\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2kx-ky\\ky-kz\\ky+kz\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}2x-y\\y-z\\y+z\end{pmatrix}$

$T\begin{pmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\\z_1+z_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x_1-y_1+2x_2-y_2\\y_1-z_1+y_2-z_2\\y_1+z_1+y_2+z_2\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}+T\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}\Longrightarrow T$为线性变换

(2)$T(\xi_1)=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $T(\zeta_2)=\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$ $T(\zeta_3)=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$

由ζ_1,ζ_2,ζ_3可得到$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\zeta_1-\zeta_2+\zeta_3 e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\zeta_2-\zeta_3$ $\quad e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\zeta_3$

$\therefore T(\zeta_1)=e_1+e_2+e_3=\zeta_1+\zeta_3$，$T(\zeta_2)=-e_1+2e_3=-\zeta_1+\zeta_2+\zeta_3$，

$T(\zeta_3)=-e_2+e_3=-\zeta_2+2\zeta_3$

$\therefore B=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\1&1&2\end{pmatrix}$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 11】向量组的线性相关和线性表示

五、【学解】(1) $|A|=\begin{vmatrix}1&2&3&4+a\\1&2&3+a&4\\1&2+a&3&4\\1+a&2&3&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1+a&2&3&4\\1&2+a&3&4\\1&2&3+a&4\\1&2&3&4+a\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}1+a&2&3&4\\-a&a&0&0\\-a&0&a&0\\-a&0&0&a\end{vmatrix}=a^3\begin{vmatrix}1+a&2&3&4\\-1&1&0&0\\-1&0&1&0\\-1&0&0&1\end{vmatrix}=a^3\begin{vmatrix}10+a&0&0&0\\-1&1&0&0\\-1&0&1&0\\-1&0&0&1\end{vmatrix}=a^3(10+a)$$

(2)由(1)可知 $\begin{pmatrix}1&2&3&4+a\\1&2&3+a&4\\1&2+a&3&4\\1+a&2&3&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1+a&2&3&4\\-a&a&0&0\\-a&0&a&0\\-a&0&0&a\end{pmatrix}$

①当 $a=0$ $r(A)=1$ 线性相关，极大线性无关组 a_1，且 $a_2=2a_1,a_3=3a_1,a_4=4a_1$

当 $a\neq 0$ $A\sim\begin{pmatrix}10+a&0&0&0\\-1&1&0&0\\-1&0&1&0\\-1&0&0&1\end{pmatrix}$

②当 $a=-10$ 线性相关，极大线性无关组 a_2,a_3,a_4 且 $a_1=-a_2-a_3-a_4$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 12】极大线性无关组

六、【学解】(1) $A=\begin{pmatrix}1&-2&-2\\-2&1&-2\\-2&-2&1\end{pmatrix}$ 特征多项式 $\begin{vmatrix}\lambda-1&2&2\\2&\lambda-1&2\\2&2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-3)^2(\lambda+3)=0$

$\therefore \lambda_1=\lambda_2=3$ $\lambda_3=-3$ $\therefore f=3x_1'^2+3x_2'^2-3x_3'^2$， $\therefore a=3,b=-3$

七、(14分)【学解】(1) $X=(M_1,-M_2,M_3)^T$ 该方程组矩阵 $A=\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{pmatrix}$

$M_1,-M_2,M_3$ 是 $\begin{vmatrix}1&1&1\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}$ 第一行的代数余子式

$\because AX=\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}M_1\\-M_2\\M_3\end{pmatrix}=0$， $\therefore X=(M_1,-M_2,M_3)^T$ 是方程组的解

(2)不同时为0 $\Longrightarrow r(A)=2$，故而基础解系只有一个向量，通解为 $k(M_1,-M_2,M_3)^T$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 16】齐次线性方程组