2009—2010 学年第二学期

课名：线性代数　　　　　考试考查：考查

（注意：本试卷共七大题，三大张，满分 100 分．考试时间为 100 分钟. 要求写出解题过程，否则不予计分）

一、填空与选择题(24 分)

1、 设 A 是 n 阶方阵，A^* 是其伴随阵，则 $\left\| A \right| A^* \right| =$ ___B_____________.

(A). $|A|^2$　　(B). $|A|^{2n-1}$　　(C). $|A|^n$　　(D). $|A|^{2n}$

这种题先化简，$\left\| A \right| A^* \right| = |A|^n \left\| A \right| A^{-1} \right| = |A|^{2n} \, |A|^{-1} = |A|^{2n-1}$

2、 设 A 是 n 阶方阵，则___C_____是对称矩阵.

(A). $A - A^T$　　(B). CAC^T，C是任意n阶方阵

(C). AA^T　　(D). AA^TB，B是任意n阶对称阵

利用对称阵的定义和性质，A.选项（$(A-A^T)^T = A^T - A$，B选项（$(CAC^T)^T = CA^TC^T$

C选项，$\left(AA^T\right)^T = AA^T$，D选项（$(AA^TB)^T = B^TAA^T$

3、 设 A 是 $m \times n$ 阵，A 的秩 $R(A) = r$，则线性方程组 $Ax = 0$ 有非零解 $\Leftrightarrow$ _______D________.

(A). $m < n$　　(B). $r = m$

(C). $r < m$　　(D). A的列向量组线性相关

有非零解，说明该方程组的解不唯一（我记得这道题貌似是书上的一句原话）。
如果你记不得这句话了，可以举反例。再者，可以利用定义，假如 A 的秩是满秩，那必然只有零解，因为每个列向量都线性无关所以 A 不可能满秩，那么 A 必然会存在列向量或者行向量线性相关。所以 D 正确

4、 设 A 是 n 阶正交阵，则以下结论中正确的是__B__________.

(A). $|A| = 1$　　(B). A^T与A为可交换矩阵

(C). $|A| = -1$　　(D). A为对称阵

A 是正交阵，由正交阵的性质可得 A^T 也是正交阵，那么假设 $A = P\Lambda P^{-1}$，

$AA^T = P\Lambda P^{-1}$（$(P^{-1})^T \Lambda P^T$），$A^TA =$（$P^T\Lambda$（$P^{-1})^T$）$P\Lambda P^{-1}$，因为正交阵的转置就是它的逆，所以两个等式满足相等。所以 **B** 答案正确（正交阵，实对称阵的性质都很重要。**Ps:** 正交阵不一定对称）

5、 已知 $A=\begin{pmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -4 & -4 & x \end{pmatrix}$ 的三个特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=3,\lambda_3=12$，则 $x=$ ________4_______.

由特征值的性质有，主对角线之和=特征值之和（$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$），所以解得 $x=4$

6、 若 A 为 4 阶方阵，其秩 $R(A)=2$，A^* 是其伴随阵，则 $R(A^*)=$ ____0_________________.

公式：$A_{m\times n}$，$R(A^*)=\begin{cases} n, & R(A)=n \\ 1, & R(A)=n-1 \\ 0, & R(A)\text{为其他} \end{cases}$

7、 设有方程 $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-1} \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}=0$，这里 $a_i(i=1,\cdots,n-1)$ 是互不相等的实常数，则方程的全部解为___$a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$________________.

虽然形式类似范德蒙特行列式，但是我们仍然可以用范德蒙特行列式来做，因为 $|A|=|A^T|$

所以含 x 的项为 $(x-a_{n-1})(x-a_{n-2})(x-a_{n-3})$。。。$(x-a_1)=0$，所以方程的全部解为

$a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$

8、 已知向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\1\\k+8\end{pmatrix}$ 线性相关，则实数 $k=$ _0____________.

一看到向量组构成的矩阵是方阵，而且还线性想逛，什么都不说了，直接求行列式，令它等于 0 吧。。。。解得 k=0

二、(10 分) 计算 n 阶行列式：$D_n=\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$

这种题呢，按个人兴趣展开，我是按最后一行展开的，展开后就成了两个三角型（前面别忘了乘上对应的系数），其他的我就不说了。。。附上自己做的结果 $a^n+(-1)^{n+1}b^n$

三、(15 分)设 A,B 是 n 阶方阵，$A+B=AB$，

(1)证明：$A-E$ 可逆，

(2)设 $B=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$，求 A.

（1）一看到这种题。第一反应，又要化简了- -。那就化吧。既然你要的东西里没有 B，那我就把 B 弄到一起，（$A-E$）$B=A$，尼玛，怎么没划出来 0 0，别慌，右边不还有个 A 吗，把 A 在移到左边，配成（$A-E$）$B-A+E=E\longrightarrow(A-E)(B-E)$ =E，这就说明了 $A-E$ 可逆了，而且连它的逆你都给出来了。

（2）现在你要求 A，那就把 A 都弄在一起，$A(E-B)=B$，现在先停停，求一下$(E-B)$，问我为什么？因为你要求 **A** 的话必然要求$(E-B)$的逆啊，如果这玩意不可逆，你还做什么。。。具体步骤就是求出它的行列式，看看是不是为 **0** 就行了，本题$(E-B)$行列式不为 **0.**现在，两边又乘$(E-B)$的逆，然后你就可以用你最喜欢的初等变换求了.

我算的是

$$\begin{matrix}\mathbf{-1} & \mathbf{-1/2} & \mathbf{0}\\ \mathbf{-1/3} & \mathbf{-4/3} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-2}\end{matrix}$$

四、(15 分)线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+kx_3=4\\ -x_1+kx_2+x_3=k^2\\ x_1-x_2+2x_3=-4\end{cases}$，问参数 k 为何值时此方程组

(1)无解，(2)有唯一解，(3)有无穷多个解，并在无穷多个解的时候求出其通解.

一看到这种题，老熟人了，直接对它的系数行列式求值，（如果你想多写点字的话，可以写个根据克莱姆法则的性质有）

$\begin{vmatrix}1 & 1 & k\\ -1 & k & 1\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}=0$，解得 k=4, k=-1。接下来的就是把这两个值带到增广矩阵化简，一般都是其中一个 k 得到的是无解的，另一个得到的是无穷解的，当 k 不等于 4，-1 时有唯一解。

五、(12 分)设 $A=\begin{pmatrix}a & -1 & c\\ 5 & b & 3\\ 1-c & 0 & -a\end{pmatrix}$，其行列式值 $|A|=-1$，其伴随阵 A^* 有特征值 λ，

$\alpha=\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$ 为 λ 对应的特征向量，求 a,b,c,λ.

这道题化简起来感觉没之前那么利索了，因为 A^* 有特征值 λ，所以 $A^*\alpha=\lambda\alpha$，在利用伴随矩阵的共识，有 $|A|A^{-1}\alpha=\lambda\alpha$，然后等式两边同乘 A，得到 $|A|\alpha=\lambda A\alpha$

根据上述等式，列出方程组（令 $\frac{1}{\lambda}$=t ）

$\begin{cases} t = -a+1+c \\ t = -5-b+3 \\ -t = c-1-a \end{cases}$，可得 $\begin{cases} t = 1 \\ b = -1 \\ a = c \end{cases}$，最后，利用行列式为-1，可解得 $a=c=-3$， $\lambda = 1$， $b=-1$

六、(14 分) 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = 4x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3$，

(1) 求二次型 f 的矩阵 A；

(2) 求正交阵 P，使其在经过正交变换 $x = Py$ 后，二次型 f 可化为标准形，并写出标准形.

这种题固定思路，求特征值，求正交阵

（1） 首先，化成标准型矩阵 $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & -3 \end{bmatrix}$，

（2） 求出它的特征值为-6，6，1，

特征值为 6 时，特征向量为 $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$，特征值为-6 时，特征向量为 $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$，

特征值为 1 时，特征向量为 $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

因为他们对应的特征值不同，所以天然正交。

单位化有 p1= $\sqrt{\frac{15}{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$, p2= $\sqrt{\frac{3}{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$, p3= $\sqrt{5} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

所以正交阵 P 为[p1，p2，p3]

七、(10 分) 已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t$ 线性无关，向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t, \beta$ 线性相关，试证 β 可以表示成 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t$ 的线性组合，且表示方法唯一.

（1）这道题不难，一般线性相关，无关类的证明题，用定义来推导就行了，本题只需要注意既证明能线性表示，在证明唯一性就好了。

证明线性表示：

因为向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t,\beta$ 线性相关

所以存在一组不全为 0 的 k，使得$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_t\alpha_t+k_m\beta=0$，

因为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$线性无关，可得 $\mathrm{k_m}$ 不等于为 **0**，如果 $\mathrm{k_m}$ 为 **0**，那$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t,\beta$ 也会线性无关（自己用反证法证明）。

所以

$l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\cdots+l_t\alpha_t=\beta$ （**I**）

证明唯一性：（反证法）

加入还存在一组不全为 **0** 的 **q** 使得$q_1\alpha_1+q_2\alpha_2+\cdots+q_t\alpha_t=\beta$ （**II**）

现在，我们把（**I**）和（**II**）带到第一问的 **k** 式去

得到$\begin{cases}(k_1+k_ml_1)\alpha_1+(k_2+k_ml)_2\alpha_2+\cdots+(k_t+k_ml_t)\alpha_t+=0\\(k_1+k_mq_1)\alpha_1+(k_2+k_mq_2)\alpha_2+\cdots+(k_t+k_mq_t)\alpha_t+=0\end{cases}$，

因为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$线性无关，所以他们前面的系数都应该为 0

就有$\begin{cases}(k_1=\text{-}k_ml_1=\text{-}k_mq_1)\\(k_2=\text{-}k_ml_2=\text{-}k_mq_1)\\。\\。\\(k_t=\text{-}k_ml_t=k_mq_t)\end{cases}$,由k_m的任意性可知，$l_i=q_i$，（$i=1,2,3$. 。。t）

所以可知原假设不成立，所以β可以表示成$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$的线性组合，且表示方法唯一.