《线性代数》2013-2014 学年第二学期考试卷及参考答案

参考解答

学院：__________ 专业班级：__________ 学号：__________ 姓名：__________

题　次	一	二	三	四	五	六	七	八		总　分	评卷人
分　数	15	15	16	10	10	10	12	12		100	
得　分											

一．填空题（每空 3 分，共 15 分）

1．行列式 $\begin{vmatrix} 10 & 13 & -11 \\ 0 & -17 & 1 \\ -15 & 19 & 4 \end{vmatrix}$ 中（3，2）元的代数余子式 A_{32} 的值为 $\underline{\quad -10 \quad}$.

2．设 A,B 为 3 阶方阵，若 $AB=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，则 $B^{-1}A^{-1}=\underline{\begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$.

3．设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为 3 维列向量，且 $|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=2$，则 $|-\alpha_1,3\alpha_3-2\alpha_2,\alpha_2|=\underline{\quad 6 \quad}$.

4．若向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix} 2 \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ 的秩为 2，则 $\lambda=\underline{3}$.

5．设 λ 是方阵 A 的一个特征值，则 $A+aE$ 的一个特征值为 $\underline{\lambda+a}$.

二．选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1．设方阵 A,B,C（C 不是零矩阵）满足 $AC=BC$，则必有【 C 】.

（A）$A=O$ 或 $B=O$；　　（B）$A=B$；

（C）$|A-B|=0$ 或 $|C|=0$；　　（D）以上等式没有正确的.

2．设 $B=PAQ$，下列说法错误的是【 A 】.

(A) 若 B 为单位矩阵 E，P,A,Q 皆为方阵，则必有 $P^{-1}=QA$；

(B) 若 P,Q 可逆，则 A 可经过有限次初等变换化为 B；

(C) 若 B 为单位矩阵 E，P,A,Q 皆为方阵，则必有 $QPA=E$；

(D) 若 P,Q 可逆，则 $R(A)=R(B)$.

3. 设 A 为 3 阶可逆矩阵，$B=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}A$，关于 A^{-1},B^{-1} 的说法，正确的是【 B 】.

(A) 交换 A^{-1} 的第 1，3 行得到 B^{-1}；

(B) 交换 A^{-1} 的第 1，2 列得到 B^{-1}；

(C) 交换 A^{-1} 的第 1，2 行得到 B^{-1}；

(D) 交换 A^{-1} 的第 1，3 列得到 B^{-1}.

4. 若非齐次线性方程组 $AX=B$ 所对应的导出方程组 $AX=0$ 只有零解，则以下判断错误的是【 A 】.

(A) A 的列向量组线性相关；

(B) $AX=B$ 可能无解；

(C) $AX=B$ 不可能有无穷多解；

(D) $AX=B$ 可能有唯一解.

5. 若 $\alpha=\begin{pmatrix}a\\2\\-1\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}0\\b\\1\end{pmatrix}$，$\gamma=\begin{pmatrix}-1\\0\\c\end{pmatrix}$ 是正交向量组，则 a，b，c 分别为【 D 】.

(A) 0，0，0；　　(B) 0，1，1/2；

(C) 0，-1/2，0；　　(D) 0，1/2，0.

三．解答下列各题（每小题 8 分，共 16 分）

1．计算行列式$D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{vmatrix}$.

解：$D=10\begin{vmatrix}1&1&1&1\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{vmatrix}=10\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&-1\\0&1&-2&-1\\0&-3&-2&-1\end{vmatrix}$…………………………………4 分

$=10\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&-2&-1\\-3&-2&-1\end{pmatrix}$ ………………………………………………6 分

$=10\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&-4&0\\0&4&-4\end{pmatrix}=160$。……………………………………………8 分

2．设$A=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\1&-2&0&0\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$，求$A^8$.

解：　令$A_1=\begin{pmatrix}2&1\\1&-2\end{pmatrix}$，$A_2=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$,则$A^8=\begin{pmatrix}A_1^8&O\\O&A_2^8\end{pmatrix}$，………………… 2 分

因为：$A_1^2=\begin{pmatrix}2&1\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&0\\0&5\end{pmatrix}$，　　　……………………………3 分

所以：$A_1^8=(A_1^2)^4=\begin{pmatrix}5&0\\0&5\end{pmatrix}^4=\begin{pmatrix}5^4&0\\0&5^4\end{pmatrix}$。

又因$A_2^2=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4\\0&1\end{pmatrix}$，故$A_2^4=A_2^2.A_2^2=\begin{pmatrix}1&4\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&8\\0&1\end{pmatrix}$,…5

从而：$A_2^8=A_2^4.A_2^4=\begin{pmatrix}1&8\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&8\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2^4\\0&1\end{pmatrix}$，　　　………………………7 分

综上：$A^8=\begin{pmatrix}A_1^8&O\\O&A_2^8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5^4&0&0&0\\0&5^4&0&0\\0&0&1&2^4\\0&0&0&1\end{pmatrix}$。　　　……………………………8 分

四.（本题满分 10 分）

已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$，且 $AB=A+2B$，求 B.

解：由 $AB=A+2B$，得 $(A-2I)B=A$ ……………………………2 分

因为：$|A-2I|=1$，所以：$A-2I$ 可逆，故 $B=(A-2I)^{-1}A$。 ……3 分

$$因(A-2I \vdots A)=\left(\begin{array}{ccc:ccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -3 & -2 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_2]{r_2+r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & -3 & -4 & -4 & -1 \end{array}\right)$$ ……………………………5 分

$$\xrightarrow{r_3-4r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -12 & -8 & 3 \end{array}\right)$$ ……………………………7 分

$$\xrightarrow{r_2+r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -10 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -12 & -8 & 3 \end{array}\right)$$ ……………………………8 分

$$\xrightarrow{r_1+r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc} -1 & 0 & 0 & -9 & -6 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -10 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -12 & -8 & 3 \end{array}\right)$$ ……………………………9 分

$$得 B=\begin{pmatrix} 9 & 6 & -2 \\ 10 & 7 & -2 \\ -12 & -8 & 3 \end{pmatrix}。$$ ……………………………10 分

五．（本题满分 10 分）

设向量组 A 为：$\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

（1）求向量组 A 的秩；（2）求向量组 A 的一个最大无关组 A_0；

（3）请用最大无关组 A_0 线性表示非 A_0 中的向量.

解：　化矩阵 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 为行最简形:

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\sim\begin{pmatrix}1&3&-4&3\\0&-4&8&-8\\0&-3&6&-6\\0&-5&10&-10\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&-4&3\\0&-1&2&-2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\Box\begin{pmatrix}1&0&2&-3\\0&1&-2&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$ ……4 分

由此得：向量组 A: $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩为 2, ……………………………………………………6 分

一个最大无关组 A_0 : α_1,α_2, ……………………………………………………8 分

非 A_0 中的向量：

$\alpha_3=2\alpha_1-2\alpha_2$， $\alpha_4=-3\alpha_1+2\alpha_2$ ……………………………………10 分

六.（本题满分 10 分）

求方程组 $\begin{cases}2x_1+x_2-x_3+x_4=1\\4x_1+2x_2-2x_3+x_4=2\\2x_1+x_2-x_3-x_4=1\end{cases}$ 的通解.

解：对增广矩阵实施行初等变换化为行最简形：

$$\begin{pmatrix}2&1&-1&1&1\\4&2&-2&1&2\\2&1&-1&-1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&1&-1&1&1\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&-2&0\end{pmatrix}$$ ……………………4 分

$$\Box\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$ ……………………6 分

同解方程组为 $\begin{cases}x_1=-\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}\\x_4=0\end{cases}$ ……………………………………7 分

令 $x_2=0$， $x_3=0$，得特解为: $(\frac{1}{2}\ \ 0\ \ 0\ \ 0)^T$ ……………………8 分

令 $x_2=k_1$， $x_3=k_2$，得通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\0\\0\end{pmatrix},$$

其中 k_1,k_2 为任意实数。 ………………10 分

七.（本题满分 12 分）

设$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}$是方阵$A=\begin{pmatrix}2&0&1\\m&1&3\\4&0&n\end{pmatrix}$的一个特征向量，

（1）求α_1所对应的特征值λ_1及参数m,n的值；

（2）A能对角化吗？若能，求可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP$成对角矩阵.

解：依题意：$A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1$ 即：

$$\begin{pmatrix}2&0&1\\m&1&3\\4&0&n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1\\3\lambda_1\\4\lambda_1\end{pmatrix},$$

由此得：$\lambda_1=6,m=3,n=5$。 ……………………………………………3 分

所以$A=\begin{pmatrix}\text{骚}&0&1\\3&1&3\\4&0&5\end{pmatrix}$，其行列式的值为6。 ……………………5 分

设A的其余两根为：λ_2 λ_3，则$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=2+1+5\\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3=6\end{cases}$，

故：$\lambda_2+\lambda_3=2$，$\lambda_2\lambda_3=1$，从而：$\lambda_2=\lambda_3=1$， …………8 分

解方程：$(I-A)X=0$，$\begin{pmatrix}-1&0&-1\\-3&0&-3\\-4&0&-4\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$， ……….9 分

即：$x_1=-x_3$，令$\begin{pmatrix}x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$及$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，

得$\alpha_2=(0\ 1\ 0)^T,\alpha_3=(-1\ 0\ 1)^T$，

令$P=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)$，则$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}6&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$。 ………………………………12 分

八．证明题（每小题 6 分，共 12 分）

1．设β能被向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性表示，且表示式唯一，证明：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关.

证明：若β能被$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性表示，且表法唯一，则方程$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\ldots+x_r\alpha_r=\beta$有唯一解。 ………………………3 分

从而$R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)=R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta)=r$， ………………5 分

所以$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关. ………………6 分

2．证明：两个相似矩阵具有相同的特征多项式.

证明：设B是A的相似矩阵，即存在可逆矩阵P，使得 $P^{-1}AP=B$，……….2 分

因此

$$f_B(\lambda)=|\lambda I-B|=|\lambda I-P^{-1}AP|$$ ……….3 分

$$=|P^{-1}(\lambda I-A)P|=|P^{-1}||\lambda I-A||P|,$$ ……………..4 分

$$=|\lambda I-A|=f_A(\lambda),$$ ………………..5 分

即B与A有相同的特征多项式。 ………………..6 分