同济大学课程考核试卷（A 卷）
2008—2009 学年第一学期

命题教师签名：　　　　　　　　　　　　审核教师签名：

课号：122010　　　课名：线性代数 B　　　考试考查：考试

此卷选为：期中考试( )、期终考试(√)、重考( )试卷

年级_____专业______________学号__________姓名___________任课教师_______

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

（注意：本试卷共七大题，三大张，满分 100 分．考试时间为 120 分钟．要求写出解题过程，否则不予计分）

一、填空与选择题（注：均为单选题）(24 分)

1、 已知三阶方阵 $A=(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$， $B=(\alpha+\beta+\gamma,\ \alpha+2\beta+4\gamma,\ \alpha+3\beta+9\gamma)$，其中 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ 均为 3 维列向量，又 $|A|=m$，则 $|B|=$______________.

2、 设 A 为 n 阶方阵，且满足 $A^2+A-4E=0$，则 $(A-E)^{-1}=$______________.

3、 设 3 阶方阵 $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 2\\ 3 & 4 & k\\ 1 & 3 & -1\end{pmatrix}$，若存在 3 阶非零方阵 B，使得 $AB=0$，则 $k=$________，$R(B)=$____________，$|B|=$_____________.

4、 设 4 阶方阵 A 相似于矩阵 B，又 A 的特征值为 1，2，3，4，则 $|B-E|=$___________.

5、 已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+2\lambda x_1x_2+4x_2x_3-2x_1x_3$ 为正定二次型，则参数 λ 的取值范围是___________________.

6、 设 A 为 $m\times n$ 阵，$R(A)=m$，则非齐次线性方程组 $Ax=b$______________.

(A). 必无解　　(B). 必有解　　(C). 不一定

7、 设向量组 A: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，向量 β_1 可以由向量 A 线性表出，向量 β_2 不可由向量组 A 线性表出，则对任意的常数 k，有 ________.

(A). α_1, α_2, α_3, $k\beta_1+\beta_2$ 线性无关

(B). α_1, α_2, α_3, $k\beta_1+\beta_2$ 线性相关

(C). α_1, α_2, α_3, $\beta_1+k\beta_2$ 线性无关

(D). α_1, α_2, α_3, $\beta_1+k\beta_2$ 线性相关

8、 已知齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解空间的一组基为 $\alpha_1=(1,-1,1,0,0)^T$，$\alpha_2=(1,1,0,1,0)^T$，则必有________.

(A). A 是 3×5 矩阵 (B). A 是 3×4 矩阵

(C). $R(A)=3$ (D). $R(A)=2$

二、(10 分) 已知齐次线性方程组 $Ax=0$ 如下 $\begin{cases}(1+a)x_1+x_2+x_3+x_4=0\\2x_1+(2+a)x_2+2x_3+2x_4=0\\3x_1+3x_2+(3+a)x_3+3x_4=0\\4x_1+4x_2+4x_3+(4+a)x_4=0\end{cases}$,

(1) 求系数矩阵 A 的行列式值；

(2) 用克拉默(Cramer)法则判别参数 a 取何值时方程组只有零解.

三、(10 分)已知 A 为 3 阶方阵，阵 $B=\begin{pmatrix}1&2&0\\3&4&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，且 $(A-E)^{-1}=B^{*}-E$，求 A^{-1}.

四、(15 分)已知向量组 $A:\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\a-3\\1\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\\a\end{pmatrix}$ 及向量

$\beta=\begin{pmatrix}0\\1\\b\\-1\end{pmatrix}$，讨论参数 a,b 取何值时，

(1) 向量 β 不能由向量组 A 线性表出； (2) 向量 β 能由向量组 A 线性表出,且表达式唯一；

(3) 向量 β 能由向量组 A 线性表出,且表达式不唯一，并求出一般表达式.

五、(15 分) 已知三元二次型 $f = ax_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 + 2bx_1x_3 (b > 0)$，其中二次型 f 的矩阵 A 的特征值之和为 1，特征值之积为-12.　　(1)　求参数 a 与 b；

(2)　用正交变换将二次型 f 化为标准形，并写出所用的正交变换及标准形.

六、(10 分) 设 V 为所有 n 阶实方阵对于矩阵的加法和数乘构成的线性空间，在空间中 V 中有映射 $T:V\to V$ 如下：对任意 $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}\in V$，$T(A)=A-\frac{1}{n}tr(A)E$，其中 $tr(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$（即方阵 A 的迹），

(1) 证明： T 是空间 V 上的一个线性变换；

(2) 设 $n=2$，求 T 在空间 V 的基 $E_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},E_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},E_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},E_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ 下的矩阵.

七、(1) (8 分) 设 ξ 为 n 维非零列向量，且 $A=E_n-\xi\xi^T$，试证 $A^2=A \Leftrightarrow \xi^T\xi=1$；当 $\xi^T\xi=1$ 时，判定 A 是否可逆，并给出理由.

(2)（8 分）设 A 为 3 阶方阵，α_1,α_2 分别为 A 的属于特征值-1，1 的特征向量，向量 α_3 满足 $A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$，试证：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.