2013-2014 学年第二学期期末考试 A 卷

一、填空与单项选择题(32 分，每题 4 分，共 8 题)

1.行列式$\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$的第四行元素的代数余子式之和$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=$____.

2.设$\alpha_1=(1,\ 1,\ 0)^T$，$\alpha_2=(1,\ 0,\ 1)^T$，$\alpha_3=(0,\ 1,\ 1)^T$为R^3的一组基，则向量$b=(2,\ 0,\ 0)^T$在这组基下的坐标为________.

3.设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+2x_2x_3$，则其正惯性指数为________.

4.设n阶方阵$A=\begin{pmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ a & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & 1 \end{pmatrix}$，如果齐次线性方程组$Ax=0$的基础解系中只有一个向量，则常数$a=$________.

5.设$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & t & 2 \\ 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}(2\ \ 3\ \ 4)$，且$r(A+AB)=2$则$t=$( )

(A)7　　(B)8　　(C)9　　(D)10

6.设$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$，则$(AB)^{-1}=$________.

7.已知n阶方阵A与B相似，则下列说法正确的是(　)

(A)存在正交矩阵P，满足$P^{-1}AP=B$；

(B)A与B具有相同的特征值和特征向量；

(C)A与B均相似于一个对角矩阵；

(D)对于任意的常数k，矩阵$A-kE$与$B-kE$相似.

8.设A为$m\times n$矩阵，$Ax=0$是非齐次线性方程组的导出组，则(　　)

(A)若齐次线性方程组$Ax=0$仅有零解，则$Ax=b$有唯一解；

(B)若齐次线性方程组$Ax=0$有非零解，则$Ax=b$有无穷多解；

(C)若非齐次线性方程组$Ax=b$有无穷多解，则$Ax=0$仅有零解；

(D)若非齐次线性方程组$Ax=b$有无穷多解，则$Ax=0$有非零解.

二、(10分) 解矩阵方程：设$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&1&1\\-1&0&-1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\\5&-3\end{pmatrix}$，$X=AX+B$,求$X$.

三、(12分) 已知向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$不能由向量组$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}3\\4\\a\end{pmatrix}$线性表示.(1)求$a$的值；(2)将$\beta_1$，$\beta_2$，$\beta_3$用$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$线性表示..

四、(12分) 求λ为何值时，线性方程组$\begin{cases} x_1+x_3=\lambda \\ 4x_1+x_2+2x_3=\lambda+2 \\ 6x_1+x_2+4x_3=2\lambda+3 \end{cases}$有解，并求出解的一般形式.

五、(12分)

求一个正交变换$x=Py$，把二次型$f=4x_2^2-3x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3+8x_2x_3$化为标准形，并写出标准形.

六、(12 分) 设V为所有二阶对称方阵按照通常矩阵的加法和数乘运算构成的线性空间，在V上定义如下变换：对任意$A\in V$，$T(A)=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$.

(1) 证明：T是V上的一个线性变换；

(2) 求变换T在基$A_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，$A_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$，$A_3=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$下的矩阵.

七、证明题（10 分，每题 5 分，共 2 题）

1．设$A_{4\times4}$，$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\9\\9\\9\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\0\\0\\1\end{pmatrix}$是线性方程组$Ax=b$的 3 个解，证明:$A^*=0$

2．已知α，β是两个相互正交的n维列向量，证明：矩阵$E+\alpha\beta^T$可逆.

2013-2014学年第二学期期末考试A卷参考答案

一、填空题(15分，每题3分，共5题)

1、【正解】$(a-b)^3$

【学解】$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(a-b)^3$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点1-3总览】知识点2 行列式的展开

2、【正解】(1，1，−1)

【学解】$a+b=2$，$a+c=0$，$b+c=0$解得$a=1$，$b=1,c=-1$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点10-15重要题型】题型4 向量坐标与坐标变换

3、【正解】2

【学解】正惯性指数

【考点延伸】《考试宝典》【知识点22】二次型

4、【正解】$-\dfrac{1}{n-1}$

【学解】$\begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a & a \\ a & 1 & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a & a & \cdots & 1 & a \\ a & a & \cdots & a & 1 \end{vmatrix}=[1+(n-1)a](1-a)^{n-1}$,

$a=1,r(A)=1$,有$n-1$个解.故而$a=-\dfrac{1}{n-1}$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点16】齐次线性方程组

5、【正解】C

【学解】$r(A+AB)=r(A(B+E))$而$B+E$可逆$\Longrightarrow r(A)=2,|A|=0\Longrightarrow t=9$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点4-9重要题型】题型6 矩阵的秩

6、【正解】$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

【学解】$AB=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 9 & 3 \end{pmatrix}$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 4-9 重要题型】题型 6 矩阵的秩

7、【正解】D

【学解】n 阶方阵 A 与 B 相似不一定可对角化，有相同特征值但特征向量不一定相同，不是对称矩阵不一定可以正交对角化，D 选项 $B=PAP^{-1},B-kE=P(A-kE)P^{-1}$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 19-24 重要题型】题型 5 相似矩阵

8、【正解】D

【学解】AB 选项可能无解

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 16-18 重要题型】题型 2 非齐次线性方程组的解

二、（10 分）

【正解】已知 $X=AX+B\Rightarrow(I-A)X=B\Rightarrow X=(I-A)^{-1}B$

$$(I-A)^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix},X=(I-A)^{-1}B=\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 4-9 重要题型】题型 1 矩阵的运算与矩阵行列式的计算

三、（10 分）

【正解】(1)$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & a \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-4 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-5 \end{pmatrix}$，所以 $a=5$

(2) $\begin{cases} a+c=1 \\ b+3c=1 \\ a+b+5c=1 \end{cases}$，所以 $a=2$，$b=4$，$c=-1$，所以 $\beta_1=2\alpha_1+4\alpha_2-\alpha_3$

$\begin{cases} a+c=1 \\ b+3c=2 \\ a+b+5c=3 \end{cases}$，所以 $a=1$，$b=2$，$c=0$，所以 $\beta_2=\alpha_1+2\alpha_2$

$\begin{cases} a+c=3 \\ b+3c=4 \\ a+b+5c=5 \end{cases}$，所以 $a=5$，$b=10, c=-2$，所以 $\beta_3=5\alpha_1+10\alpha_2-2\alpha_3$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 19】特征值与特征向量

四、12 分）

【正解】$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & \lambda \\ 4 & 1 & 2 & \lambda+2 \\ 6 & 1 & 4 & 2\lambda+3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & -2 & -3\lambda+2 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{array}\right)$

线性方程组有解，则 $\lambda=1$，取 x_3 为自由元，即 $\begin{cases} x_1=-x_3+1 \\ x_2=2x_3-1 \\ x_3=x_3 \end{cases}$

所以解的一般形式为 $x=k\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 16-18 重要题型】题型 2 非齐次线性方程组的解

五、（12 分）

【正解】二次型矩阵 $A=\begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & -3 \end{bmatrix}$，

$$\lambda I-A=\begin{bmatrix} \lambda & -2 & 2 \\ -2 & \lambda-4 & -4 \\ 2 & -4 & \lambda+3 \end{bmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-6)(\lambda+6)=0$$

对特征值 $\lambda=1$ $\qquad I-A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

有基础解系$\xi_1=(-2,0,1)^T$

对特征值$\lambda=6$ $\quad 6I-A=\begin{bmatrix}6&-2&2\\-2&2&-4\\2&-4&9\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-1&0&\frac{9}{2}\\0&-2&5\\0&0&0\end{bmatrix}$

有基础解系$\xi_2=(1,5,2)^T$

对特征值$\lambda=-6$ $\quad -6I-A=\begin{bmatrix}-6&-2&2\\-2&-10&-4\\2&-4&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&0\\0&2&1\\0&0&0\end{bmatrix}$

有基础解系$\xi_3=(1,-1,2)^T$

单位正交化，矩阵$P=\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt{30}}&\frac{1}{\sqrt6}\\0&\frac{5}{\sqrt{30}}&-\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt5}&\frac{2}{\sqrt{30}}&\frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}$

标准形：$f=y_1^2+6y_2^2-6y_3^2$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 19-24 重要题型】题型 6 二次型的标准化

六、（12分）

【正解】(1)$\forall X=\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}$，$Y=\begin{pmatrix}y_1&y_2\\y_3&y_4\end{pmatrix}\in V$

$$T(X)=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1&x_1+x_2\\x_1+x_3&x_1+x_2+x_3+x_4\end{pmatrix}$$

$$T(Y)=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}Y\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1&y_2\\y_3&y_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1&y_1+y_2\\y_1+y_3&y_1+y_2+y_3+y_4\end{pmatrix}$$

$$T(X+Y)=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}(X+Y)\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}x_1+y_1&x_1+x_2+y_1+y_2\\x_1+x_3+y_1+y_3&x_1+x_2+x_3+x_4+y_1+y_2+y_3+y_4\end{pmatrix}$$

满足$T(X+Y)=T(X)+T(Y)$

$$T(kX)=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}kx_1&kx_2\\kx_3&kx_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}kx_1&kx_1+kx_2\\kx_1+kx_3&k(x_1+x_2+x_3+x_4)\end{pmatrix}=kT(X)$$

满足$T(kX)=kT(X)$,所以T是V上的一个线性变换

$$(2)T(A_1)=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}A_1\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=[A_1,\ A_2,\ A_3]\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$T(A_2)=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}A_2\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&2\end{pmatrix}=[A_1,\ A_2,\ A_3]\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}$$

$$T(A_3)=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}A_3\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=[A_1,\ A_2,\ A_3]\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

所以T在A_1，A_2，A_3下的矩阵为$\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&2&1\end{bmatrix}$

【考点延伸】线性变换；

七、(12 分)

1、【证明】已知α_1，α_2，α_3是线性方程组$Ax=b$的 3 个解，

即$A\alpha_1=b$，$A\alpha_2=b$，$A\alpha_2=b$

则$\alpha_1-\alpha_2$，$\alpha_1-\alpha_3$是$Ax=0$的解，且线性无关，

$dim\ N(A)=4-r(A)\geqslant 2$，$r(A)\leqslant 2<3$，可得$A^*=0$

【考点延伸】齐次线性方程组的解

2、【正解】(1) 当$\alpha^T\beta=0$时，称α，β^T是正交向量，$\alpha\beta^T X=\lambda X$

$\alpha\beta^T\alpha\beta^T X=0=\lambda^2 X$，

则$\lambda=0$，所以$E+\alpha\beta^T$的特征值为 1，

则$E+\alpha\beta^T$可逆得证

【考点延伸】《考试宝典》【知识点19-24 重要题型】题型7 正交矩阵的性质和证明

(2)由(1)可知$3E-A=\begin{pmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ $\therefore (3E-A)X=0$的一个基础解系为$\begin{cases}\zeta_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\\ \zeta_2=\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}\end{cases}$

$-3E-A=\begin{pmatrix}-4&2&2\\2&-4&2\\2&2&-4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$，$(-3E-A)X=0$的一个基础解系为$\zeta_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$$\therefore P=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点22】二次型