# 同济大学课程考核试卷(A 卷)
# 2022—2023 学年第二学期

课号：　　　　课名：**高等数学 AB（下）**　考试考查：考试

此卷选为：期中考试(　)、　期终考试( √ )、　重修(　　)试卷

| 题号 | 一<br>24 分 | 二<br>12 分 | 三<br>36 分 | 四<br>10 分 | 五<br>10 分 | 六<br>8 分 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | | | |

**（注意：本试卷共六大题，三大张，满分 100 分，考试时间为 120 分钟．解答题要求写出解题过程）**

一．选择题(每小题 3 分, 共 24 分，将正确选项填在对应的括号内)

1. 直线 $L:\frac{x}{0}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{-1}$ 与平面 $\Pi:2x-2y+z=5$ 的夹角为　　[ B ]

(A) $\frac{\pi}{6}$.　(B) $\frac{\pi}{4}$.　(C) $\frac{\pi}{3}$.　(D) $\frac{\pi}{2}$.

2. 函数 $u=xyz$ 在点 $(3,2,1)$ 处，从该点沿直线方向到点 $(4,3,2)$ 的方向导数是　　[ C ]

(A) $3\sqrt{3}$.　(B) $\frac{10}{\sqrt{3}}$.　(C) $\frac{11}{\sqrt{3}}$.　(D) $\frac{22}{\sqrt{3}}$.

3. 设 $f(x,y)$ 为连续函数，则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho=$　　[ C ]

(A) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^2 f(x,y)\mathrm{d}x$.　(B) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{1-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$.

(C) $\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$.　(D) $\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{x-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$.

4. 在曲线 $\begin{cases} x=t, \\ y=-t^2, \\ z=t^3 \end{cases}$ 的所有切线中，与平面 $x+3y+3z=7$ 平行的切线　　[ A ]

(A)只有 1 条.　(B)只有 2 条.

(C)至少有 3 条.　(D)不存在.

5. 设 $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$，则下列结论正确的是　　[ A ]

(A) $f(x,y)$ 只有极小值点.　(B) $f(x,y)$ 只有极大值点.

(C) $f(x,y)$ 既有极小值点也有极大值点.　(D) $f(x,y)$ 没有极值点.

6. 曲线 $\Gamma$: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z=0 \end{cases}$，则曲线积分 $\int_\Gamma(xy+yz)\mathrm{d}s=$　　[ D ]

(A) $\frac{\pi}{3}$.　(B) $0$.　(C) $-\frac{\pi}{3}$.　(D) $-\frac{2\pi}{3}$.

7. 平面曲线 $L$ 为逆时针走向的圆周 $(x-2)^2+(y-3)^2=2$ 上从点 $A(1,2)$ 到点 $B(3,4)$ 的半圆弧，则曲线积分 $\int_L -y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y$ 的值为　　[ D ]

(A) $\pi-2$.　(B) $\pi-1$.　(C) $2\pi-1$.　(D) $2\pi-2$.

8. 常数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-2}{2^n}$　　[ B ]

(A) 发散.　(B) 的和为 $0$.　(C) 的和为 $\frac{1}{2}$.　(D) 的和为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

二．填空题(每小题 3 分, 共 12 分)

1. 函数 $u=\frac{1}{r}$，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则 $\left.\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\right|_{(1,1,1)}=$ ____0____.

2. 椭球面 $x^2+y^2+2z^2=7$ 上到平面 $x+2y+2z=48$ 的距离最短的点的坐标是 ___$(1,2,1)$____.

3. 有向曲面 $\Sigma$ 为旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 上介于 $z=0$ 和 $z=4$ 部分的下侧，将积分 $I=\iint_\Sigma P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 化为对坐标 $x,y$ 的曲面积分时，

$I=$ ____$\iint_\Sigma(-2xP-2yQ+R)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$____.

4. 已知周期函数 $f(x)$ 的周期是 $2\pi$，在 $(-\pi,\pi]$ 上，$f(x)=\begin{cases} 0, & -\pi<x\le 0, \\ x, & 0<x\le\pi, \end{cases}$，

其傅里叶级数为 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，则其中系数 $b_2=$ __$-\frac{1}{2}$__.

三. 解答题(每小题 9 分, 共 36 分)

1. 已知两直线 $L_1:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{-6}$ 与 $L_2:\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z-5}{4}$，判断 $L_1$ 和 $L_2$ 是否有交点？若有交点，求交点坐标；若无交点，求该两直线之间的距离.

解：两直线方向向量分别为：$\vec{s}_1=(2,3,-6),\vec{s}_2=(0,-2,4)$. 连结两直线上两点的向量为 $\overrightarrow{M_1M_2}=(1,-2,2)$.

相应的混合积为 $\left[\vec{s}_1,\vec{s}_2,\overrightarrow{M_1M_2}\right]=\begin{vmatrix}2&3&-6\\0&-2&4\\1&-2&2\end{vmatrix}=8$，直线异面，无交点.

其公垂线方向向量 $\vec{s}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&3&-6\\0&-2&4\end{vmatrix}=-8\vec{j}-4\vec{k}$.

距离 $d=\left|\mathrm{Prj}_{\vec{s}}\overrightarrow{M_1M_2}\right|=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

2. 计算二重积分 $I=\iint\limits_D|y-x|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的值，其中区域 $D$ 由直线 $x=2$、$y=2$、$x$ 轴及 $y$ 轴所围成.

解：直线 $y=x$ 分割区域 $D$ 为上下两块，分别记为 $D_1$ 和 $D_2$，

$$I=\iint\limits_{D_1}+\iint\limits_{D_2}|y-x|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{D_1}(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^2\mathrm{d}y\int_0^y(y-x)\mathrm{d}x+\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^x(x-y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^2\frac{1}{2}y^2\mathrm{d}y+\int_0^2\frac{1}{2}x^2\mathrm{d}x$$

$$=\frac{8}{3}.$$

3B. 曲面 $\Sigma$ 是上半球面 $z=\sqrt{5-x^2-y^2}$ 上介于 $z=1$ 和 $z=2$ 之间的部分，计算曲面积分 $I=\iint\limits_\Sigma(x+y+z)\,\mathrm{d}S$.

解：由对称性，$I=\iint\limits_\Sigma z\,\mathrm{d}S$，

$\Sigma$ 在 $xoy$ 坐标面投影 $D_{xy}:1\le x^2+y^2\le 4$，

$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5-x^2-y^2}},$$

$$I=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{5}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=3\sqrt{5}\pi.$$

3A. 计算 $I=\oint_\Gamma(y^2-z^2)\,\mathrm{d}x+(2z^2-x^2)\,\mathrm{d}y+(3x^2-y^2)\,\mathrm{d}z$，其中 $\Gamma$ 是平面 $x+y+z=1$ 与柱面 $|x|+|y|=1$ 的交线，从 z 轴正向看去，$\Gamma$ 为逆时针方向.

解：$\Sigma$ 是平面 $x+y+z=1$ 被 $\Gamma$ 所围的部分的上侧，$\Sigma$ 上各点处的法向量的方向余弦为：

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}},\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{3}},\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

由斯托克斯公式，

$$I=\iint\limits_\Sigma\begin{vmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\y^2-z^2&2z^2-x^2&3x^2-y^2\end{vmatrix}\mathrm{d}S=\iint\limits_\Sigma-\frac{2}{\sqrt{3}}(4x+2y+3z)\,\mathrm{d}S$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{3}}\iint\limits_{D_{xy}}[4x+2y+3(1-x-y)]\sqrt{3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\quad\text{（由对称性）}$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot3\sqrt{3}S_{D_{xy}}=-12.$$

4. 设有一物体占有由抛物面 $z=x^2+y^2$ 及平面 $z=2$ 所围成的空间区域 $\Omega$，其体密度为 $\mu(x,y,z)=(x^2+y^2)z$，求该物体对于 z 轴的转动惯量.

解一：$I_z=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\cdot(x^2+y^2)z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}\rho\,\mathrm{d}\rho\int_{\rho^2}^{2}\rho^4 z\,\mathrm{d}z$$

$$=\frac{32}{15}\pi\ .$$

解二：$I_z=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\cdot(x^2+y^2)z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

$$=\int_0^2\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}(x^2+y^2)^2 z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^2 z\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{z}}\rho^4\cdot\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{32}{15}\pi\ .$$

四.（本题 10 分）计算积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}(y^2+x)\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z+(z^2+y)\,\mathrm{d}\,z\,\mathrm{d}\,x+(x^2+z)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$，其中 $\Sigma$ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 上位于平面 $z=4$ 下方部分的下侧.

解：作辅助面 $\Sigma_1: x^2+y^2\le 16, z=4$ 取上侧，$\Sigma$ 和 $\Sigma_1$ 围成空间区域 $\Omega$ .

$$I=\Big(\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1}\Big)(y^2+x)\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z+(z^2+y)\,\mathrm{d}\,z\,\mathrm{d}\,x+(x^2+z)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iint\limits_{D_{xy}:x^2+y^2\le 16}(x^2+4)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=3\cdot\frac{1}{3}\pi\cdot 16\cdot 4-(\pi\cdot\frac{1}{4}\cdot 4^4+4\cdot\pi\cdot 16)$$

$$=-64\pi\ .$$

五.（本题 10 分）求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ 的和函数.

解：收敛半径为 1，当 $-1<x<1$ 时，$\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{2n}=\frac{x^2}{1-x^2}$，

上式两端从 $0$ 到 $x$ 积分，并注意到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ 在 $x=0$ 处收敛于 $0$，

故有
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\int_0^x\frac{x^2}{1-x^2}\mathrm{d}x=-x+\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},$$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ 在 $x=\pm 1$ 处均发散，故所求和函数 $S(x)=-x+\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$，$(-1<x<1)$.

六.（ 本题 8 分，其中第一小题 3 分，第二小题 5 分）

设数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足：$a_1=2$，$a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{1}{a_n})$，$(n=1,2,\mathrm{L}\ )$．证明：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在；　　（2）级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$ 收敛.

证：（1）显然 $a_n>0$，且 $a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{1}{a_n})\ge 1\ (n=1,2,\mathrm{L}\ )$，

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}(a_n+\frac{1}{a_n})-a_n=\frac{1}{2a_n}-\frac{a_n}{2}\le 0,$$

数列 $\{a_n\}$ 单调下降有下界，故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在.

（2）由（1）知，$0\le\frac{a_n}{a_{n+1}}-1=\frac{a_n-a_{n+1}}{a_{n+1}}\le a_n-a_{n+1}$，

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$ 为正项级数.

考虑正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n-a_{n+1}\right)$，其部分和 $S_n=a_1-a_{n+1}$，

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 存在，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n-a_{n+1}\right)$ 收敛，

由比较审敛法知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$ 收敛.