实数与函数 1

微积分创立于十七世纪，其主要研究对象是以实数为变量的函数. 然而，实数系的逻辑基础竟迟至十九世纪后叶才得以建立. 这一现象体现了数学发展的一种典型规律——先有方法后有理论. 本章并不试图介绍完整的实数理论，我们仅就若干关键点做出阐述. 此外，我们还将介绍函数的一些简单概念与性质.

数学的本质在于它是自由的.

Cantor

1.1 实数

无限

所有人都知道实数有无限个，但如果要给“无限”下一个定义，即使广智附体怕也无能为力. 伽利略 (Galileo) 窥得了天机，他发现只要把 n 与 n^2 对应起来，正整数与它的一部分——完全平方数——可以一一对应. 这意味着无限集可以与它的真子集有相同的元素个数，这便是无限集与有限集的本质区别. 希尔伯特 (Hilbert) 的无限旅馆正是这一特性的生动诠释. 戴德金 (Dedekind) 以此定义了无限.

戴德金的无限 (infinite)/有限 (finite)

如果一个非空集合能与它的一个真子集建立双射[1]，则称该集合为**无限集**，或称它有无限个元素. 不是无限集的集合称为**有限集**.

1: 设 $f : A \to B$ 是一个映射. 如果由 $f(x) = f(y)$ 可推得 $x = y$，则称 f 是**单射**. 如果对任意 $b \in B$，总存在 $a \in A$，使得 $f(a) = b$，则称 f 是**满射**. 既是单射又是满射的映射称为**双射**.

因为自然数集 $\mathbb{N}$、整数集 $\mathbb{Z}$、有理数集 $\mathbb{Q}$、实数集 $\mathbb{R}$ 都包含正整数集，按照伽利略的思路，容易证明它们都是无限集. 事实上，Peano 公理直接蕴含了自然数的无限性.

皮亚诺的自然数

如果三元组 $(\mathbb{N}, 0, s)$ 满足下述条件，则称其为自然数系统:[2]

- $\mathbb{N}$ 是一个集合，$0 \in \mathbb{N}$, $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$;
- $0 \notin s(\mathbb{N})$;
- s 是单射;
- 若 $P \subset \mathbb{N}$ 满足 $0 \in P$ 且 $s(P) \subset P$, 则 $P = \mathbb{N}$. **(归纳公理)**

2: 冯诺伊曼 (von Neumann) 给出了自然数系统的一个归纳构造:

$$0 := \varnothing, \quad s(n) := n \cup \{n\}.$$

该构造被吸纳为 Zermelo-Fraenkel 集合论的无限公理. 可以证明, 自然数系统有下述意义的唯一性: 若 $(\mathbb{N}', 0', s')$ 也是自然数系统，则存在双射 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}'$ 使得 $f(0) = 0'$ 且 $f \circ s = s' \circ f$.

自然数的运算定义为:
加法：$n + 0 := n, n + s(m) := s(n + m)$;
乘法：$n \cdot 0 := 0, n \cdot s(m) := n \cdot m + n$.

显然，$s : \mathbb{N} \to s(\mathbb{N})$ 是一个双射且 $0 \notin s(\mathbb{N})$. 更准确地说，$s : \mathbb{N} \to \mathbb{N} - \{0\}$ 是一个双射. 为此只需验证 $\{0\} \cup s(\mathbb{N})$ 满足归纳公理条件, 进而可知 $s(\mathbb{N}) = \mathbb{N} - \{0\}$. 因此，$\mathbb{N}$ 能与它的真子集建立双射，所以它是无限集.

康托 (Cantor) 发现无限可以继续分层，为此他引入了**基数 (cardinal number)** 的概念，用来代替元素个数的说法. 记集合 X 的基数为 $\mathrm{card}(X)$,[3] 康托定义了基数的大小: 若集合 A 与 B 能建立双射，则称它们基数相等（**等势**），记作 $\mathrm{card}(A)=\mathrm{card}(B)$；若存在 A 到 B 单射，则称 A 的基数小于等于 B 的基数，或称 B 的基数大于等于 A 的基数，记作 $\mathrm{card}(A)\le\mathrm{card}(B)$ 或 $\mathrm{card}(B)\ge\mathrm{card}(A)$. 著名的 Schroeder-Bernstein 定理指出，若 $\mathrm{card}(A)\le\mathrm{card}(B)$ 且 $\mathrm{card}(A)\ge\mathrm{card}(B)$，则 $\mathrm{card}(A)=\mathrm{card}(B)$.

3: 若 X 是有限集，则其基数就是它的元素个数. 如 $\mathrm{card}(\varnothing)=0$, $\mathrm{card}(\{m,a,t,h\})=4$.

直觉上，$\mathrm{card}(\mathbb{N})$ 应是最小的无限基数. 事实上，假设 X 是无限集，那么它可以和它的一个真子集 Y 建立双射 $f: X\to Y$，取 $x_*\in X-Y$, 则 $x_*, f(x_*), f(f(x_*)),\cdots$ 可以构成一个自然数系统. 可以用集合的语言更准确的描述这一点. 集合 X 的**幂集 (power set)** 定义为

$$\mathscr{P}(X)=\{A|A\subseteq X\}.$$

作集族

$$\mathscr{S}=\{A\in\mathscr{P}(X)|x_*\in A, f(A)\subseteq A\}.$$

易见，$X\in\mathscr{S}$，因此 $\mathscr{S}$ 非空. 令

$$Z=\cap_{A\in\mathscr{S}}A.$$

不难验证 (Z,x_*,f) 是一个自然数系统. 因此，有 $\mathrm{card}(\mathbb{N})\le\mathrm{card}(X)$. 所以，自然数集的确具有最小的无限基数，该基数记作 $\aleph_0$. 据此，康托提出了可数的概念.

可数 (countable)/不可数 (uncountable)
若某个无限集与自然数集之间存在双射，则称该集合是**可数（可列）集**，否则称为**不可数集**. 规定有限集都是可数集.

简单讲，可数是指集合里的元素可以按照某种规则逐个数遍. 事实上，如果 A 是个无限的可数集，那么有双射 $f:\mathbb{N}\to A$. 若 $f(n)=a$，则把 a 标为 a_n. 因为 f 是双射，所以 A 中所有元素可以排列为 $a_0,a_1,a_2,\cdots$，进而可以逐个数出.

利用有理数的分数表示，康托证明了有理数是可数的. 更令人震惊的是，他证明了实数不可数.

实数不可数
介于 0 到 1 之间的小数不可数.

证明. 我们用反证法. 假设 0 到 1 之间的所有小数已然排成一列 $a_1,a_2,a_3,\cdots$. 按如下形式写出它们的小数表示[4]

4: 采用十进制小数无限表示约定: 凡是遇到非零的有限小数，将其最后一位减 1，后面的小数位均写为 9. 比如 0.324 表示为 0.323999⋯.

$$\begin{aligned}
a_1 &= 0.a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}\cdots\\
a_2 &= 0.a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}\cdots\\
a_3 &= 0.a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}\cdots\\
a_4 &= 0.a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

取出对角线构成小数 $0.a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}\cdots$. 下面定义一个新的小数 $b = 0.b_1b_2b_3b_4\cdots$:

如果 $a_{nn} \geq 5$，那么 $b_n = 4$；如果 $a_{nn} < 5$，那么 $b_n = 5$.

因为 $b_n \neq a_{nn}$，所以 b 与每个 a_n 都不一样. 因此，b 这个小数不在队列 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 之中. 与假设矛盾. 上述经典证明被称为康托对角线法. □

所以，但凡遇到无限集就把元素写成 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 的做法是绝对错误的，只有可数时才可以这么写.

一个自然的问题是，有没有哪个集合的基数比实数基数还要大？答案并不容易，至少复数集 $\mathbb{C}$ 仍不够大, 我们需要实数集的幂集. 一般地，我们总有 $\mathrm{card}(\mathscr{P}(X)) > \mathrm{card}(X)$. [5]

5: 假使存在双射 $f : \mathscr{P}(X) \to X$, 则可作集合

$$B = \{f(A) | A \in \mathscr{P}(X), f(A) \notin A\}.$$

如果 $f(B) \notin B$，根据定义有 $f(B) \in B$; 如果 $f(B) \in B$，根据定义有 $f(B) \notin B$. 均矛盾.

确界

数集[6]的最值的概念已为大家所熟知. 比如 $\{1, 3, 5\}$ 中的最小值是 1、最大值是 5，自然数集 $\mathbb{N}$ 的最小值是 0、最大值不存在，**闭区间** $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$ 的最小值和最大值分别为 a 和 b，而**开区间** $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$ 既无最小值亦无最大值. 严格来说，对于一个非空数集 S, 若

$$(x \in S) \& (\forall y \in S : y \geq x)$$

则称 x 是 S 的**最小值 (minimum)**，记作 $\min S$. 类似可写出**最大值 (maximum)** 的确切定义, 记作 $\max S$. 显然，最值能很好地反映数集中元素的大小，但由于它并非总是存在，所以我们需要引入新的概念.

6: 如无特殊说明, 本书所指的数均为实数、数集均为实数集的子集.

首先，我们放弃 $x \in S$ 这一要求，作一定程度的松弛，可以得到上界和下界两个基本概念：如果一个数集中的每个元素都小于等于某个特定的数，则此特定的数称为该数集的一个**上界 (upper bound)**，并称该数集**有上界 (bounded from above)**；类似的，如果数集中的每个元素都大于等于某个特定的数，则此特定的数称为数集的一个**下界 (lower bound)**，并称该数集**有下界 (bounded from below)**. 如果一个数集既有上界也有下界，则称其**有界 (bounded)**，否则称为**无界 (unbounded)**. 比如，集合 $\{1, 3, 5\}$ 有界，而自然数集有下界但无上界. 显然，最值一定是数集的界，但反之不然，比如 a, b 分别是 (a, b) 的下界和上界，但不是最值.

其次，注意到如果 x 是 S 的一个上界，则所有比 x 大的数都是 S 的上界，因此讨论上界有多大并没有意义，应该关心的是上界可以有多小. 为此，我们引进**确界**的概念.

确界的直观定义

- 非空数集的最小上界称为它的**上确界 (supremum)**, 记作 $\sup S$.
- 非空数集的最大下界称为它的**下确界 (infimum)**, 记作 $\inf S$.

通常用 $\sup S = +\infty$ 和 $\inf S = -\infty$ 分别表示 S 无上界和无下界的情形.

显然，最值必然是确界，反之不然，比如 (a, b) 的下确界应是 a，但它不是最小值. 下面说明 a 是下确界：首先，a 显然是个下界；其次，如果一个数大于 a，那么根据实数的稠密性，它一定大于 (a, b) 中的某个数，从而它不可能是下界；因此 a 是最大的下界. 一般而言，要论证一

个集合的确界并不容易，上面的直观定义虽然有利于思考，但并不便于书写，分析上通常采用下面的等价定义.

确界的分析定义

设 S 为非空数集，α 和 β 为两个给定的数.

- 如果 α 满足
  - $\forall x \in S : x \le \alpha$ (α 是上界)
  - $\forall a < \alpha, \exists x_0 \in S : x_0 > a$ (比 α 小的不是上界)

  则称 α 为 S 的上确界，即 $\sup S = \alpha$.
- 如果 β 满足
  - $\forall x \in S : x \ge \beta$ (β 是下界)
  - $\forall b > \beta, \exists x_0 \in S : x_0 < b$ (比 β 大的不是下界)

  则称 β 为 S 的下确界，即 $\inf S = \beta$.

例 1.1.1 设 $S = \{\frac{n-1}{n} | n \in \mathbb{Z}_+\}$，证明: $\sup S = 1$.

证明. 显然 $\frac{n-1}{n} \le 1$，所以 1 是 S 的一个上界. 下证 1 是 S 的最小上界. 任取 $a < 1$，记 $\epsilon = 1 - a > 0$. 取 n_0 使得 $n_0 > 1/\epsilon$，则

$$\frac{n_0 - 1}{n_0} = 1 - \frac{1}{n_0} > 1 - \epsilon = a.$$

换言之，在 S 中存在数 $(n_0 - 1)/n_0$ 比 a 大，所以任一比 1 小的数 a 都不是 S 的上界. 从而，1 是 S 的最小上界即上确界. □

相对于最值而言，确界的最大优势是它总是存在的，这就是实数的确界原理.

实数确界原理

任何一个有上界的非空实数集必有上确界；任何一个有下界的非空数集必有下确界.

确界原理是实数的一条基本原理，它是公理化实数理论的公理之一. 如果采用构造性实数理论，[7] 那么可以证明这一原理，有兴趣的读者可以查阅相关文献. 需要指出的是，确界原理是区分实数域与有理数域的关键所在. 事实上，坚决否认无理数的毕达哥拉斯 (Pythagoras) 必然认为数集 $\{x | x^2 < 2\}$ 不存在上确界，而他的学生希帕索斯 (Hippasus) 则会认为无理数 $\sqrt{2}$ 是这个数集的上确界. 实数域的这一性质叫做实数的**完备性**或者**连续性**. 如果用数轴做比方，那么实数轴是连续的，而有理数轴是有空隙的.

7: 实数有三种典型的构造: 魏尔斯特拉斯 (Weierstrass) 的级数、康托的基本列、戴德金的分割.
注: 魏尔斯特拉斯是分析的奠基人之一，也是康托的导师.

利用确界原理，可以证明阿基米德 (Archimedes) 性. 在例1.1.1中我们已经不自觉的使用了这一点.

阿基米德性

任意给定正数 a, b，存在正整数 n_0，使得 $n_0 a > b$.

阿基米德性最早是一条公理, 但由于它蕴含于确界原理, 现在通称为阿基米德性. 阿基米德公理是由欧多克索斯 (Eudoxus) 提出的，这是“数学定理并不以第一发现者的名字命名”的一个佐证.

证明. 用反证法. 假设不然，则 1 是数集 $S=\{n\epsilon | n\in\mathbb{Z}_+\}$ 的上界，其中 $\epsilon=a/b>0$. 由确界原理知, S 存在上确界 α. 那么 $\alpha-\epsilon$ 必然不是上界, 所以存在 n_0 使得 $n_0\epsilon>\alpha-\epsilon$，即 $(n_0+1)\epsilon>\alpha$. 但是，$(n_0+1)\epsilon$ 仍然是 S 中的元素，它必须满足 $(n_0+1)\epsilon\le\alpha$. 矛盾. □

例 1.1.2 任给非负实数 x 以及正整数 n，证明: 存在唯一的非负实数 y, 使得 $y^n=x$. 习惯上，记 y 为 $\sqrt[n]{x}$ 或者 $x^{1/n}$，称为 x 的 n **次算术根**.

证明. 唯一性是显然的[8]，我们来证明存在性. 设

$$S=\{z\in\mathbb{R}|z^n\ge x, z\ge 0\}.$$

8: 利用因式分解

$$a^n-b^n=(a-b)\sum_{j=0}^{n}a^jb^{n-j}.$$

由二项式定理和阿基米德性易知 S 非空. 再者，0 是 S 的下界. 所以，由确界原理可知 S 存在下确界，记为 $\eta:=\inf S$. 由于 0 是 S 的下界，而 η 是最大的下界，所以必有 $\eta\ge 0$.

下面证明 $\eta^n=x$. 利用实数的三**歧性**,[9] 只要说明 $\eta^n<x$ 和 $\eta^n>x$ 均不可能.

9: 三歧性是指, 任给实数 a,b，关系式 $a>b, a=b, a<b$ 中有且仅有一个成立.

- 先来说明 $\eta^n<x$ 不成立. 对于任一正数 $\epsilon\in(0,1)$，存在 $z\in S$ 使得 $\eta\le z<\eta+\epsilon$. 从而

  $$z^n\le(\eta+\epsilon)^n\le\eta^n+\epsilon(\eta+1)^n.$$

  如果 $\eta^n<x$，那么对于

  $$\epsilon=\min\left\{\frac{x-\eta^n}{2(\eta+1)^n},\frac{1}{2}\right\},$$

  会导致 $z^n<x$, 矛盾.
- 再排除 $\eta^n>x$. 否则，必有 $\eta>0$，进而对于 $\epsilon\in(0,\eta)$ 有

  $$(\eta-\epsilon)^n\ge\eta^n-\epsilon(\eta+1)^n.$$

  对于

  $$\epsilon=\min\left\{\frac{\eta^n-x}{2(\eta+1)^n},\frac{\eta}{2},\frac{1}{2}\right\},$$

  可推得 $\eta-\epsilon\in S$，这与 η 是下界矛盾.

综上可知，η 就是满足 $y^n=x$ 的唯一非负实数. □

3 课时/3 课时

1.2 函数

函数的概念

函数[10]是大家熟悉的概念，它是一个映射 $f:D\to\mathbb{R}$，其中 $D(\subseteq\mathbb{R})$ 叫做函数 f 的**定义域 (domain)**，也常写为 D_f. 函数 f 的**值域 (range)** 是 $f(D)$，记作 R_f. 通常函数也简写为 $y=f(x)$，其中 x 称为**自变量**，y 称

10: 此处所指为实值函数. 后文会出现简单的复值函数，届时会加以说明.

为**因变量**，$f(x)$ 称为函数 f 在 x 点的**值**. 函数 f 的**图像 (graph)** 是指 xy 平面上的点集

$$G_f = \{(x, y) | y = f(x), x \in D_f\}.$$

值得指出，变量的符号并不重要, 函数的符号才是重要的. 如 $y = f(x)$, $u = f(v), s = f(t)$ 甚至 $x = f(y)$ 都表示同一个函数, 而 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 则未必相同. 习惯上, 在不引起混淆时，常常用变量符号代替函数符号，比如 $y = y(x), u = u(v)$ 等等. 此外，两个**函数相等**是指它们的定义域相等、对应法则相同.

最简单的函数就是利用实数的四则运算定义的多项式函数与有理函数.

多项式函数 $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. 其中 $a_n, \cdots, a_0$ 都是常数，称为多项式的系数.

有理函数 $P(x)/Q(x)$. 其中 P 和 Q 都是多项式，并且 Q 不恒为零.

除有理函数之外，还有很多常用的函数，比如有理幂函数和三角函数.[11]

11: 三角函数是从几何角度定义的，需要弧长的概念，我们姑且接受这个设定. 三角函数的分析定义将在级数理论中给出.

有理幂函数 $x^{\pm n/m} = (x^{\pm n})^{1/m}$，其中 n/m 是既约分数.[12] 如果 m 是奇数，则函数的定义域可以自然推广到负半轴上.

12: 对于 $x > 0$，按照根式的定义，可以证明 $x^{pn/pm} = x^{n/m}$. 进一步, 对于任意有理数 r, s 成立 $x^{r+s} = x^r x^s$ 和 $(x^r)^s = x^{rs}$.

三角函数 正弦函数 $\sin x$, 余弦函数 $\cos x$; 正切函数 $\tan x = \sin x / \cos x$, 余切函数$\cot x = \cos x / \sin x$；正割函数$\sec x = 1/\cos x$，余割函数$\csc x = 1/\sin x$.

除了用一个解析式表示函数之外，也可以用多个解析式分段表示函数.

阶跃函数/赫维赛德 (Heaviside) 函数 [13]

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \le 0; \end{cases}$$

13: 不同的文献，$H(0)$ 的定义可能有所不同，$H(0) = 1$ 和 $H(0) = 1/2$ 也是常见的.

符号函数 (sign function/signum)

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

类似符号函数这种分段常值的函数也叫做**阶梯函数 (step function)**，因为它们的图像呈阶梯状. 常见的阶梯函数还有取整函数. **上取整函数 (ceiling function)** 定义为不小于 x 的最小整数 $\lceil x \rceil = \inf\{n \in \mathbb{Z} | n \ge x\}$, **下取整函数 (floor function)** 定义为不超过 x 的最大整数 $\lfloor x \rfloor = \sup\{n \in \mathbb{Z} | n \le x\}$. 通常把下取整函数简称为**取整函数**，记为 $[x]$. 进而，x 的**小数部分**可以表示为 $\{x\} = x - [x]$.

数列 $\{a_n\}$ 是特殊的函数，它的定义域是自然数集，即 $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $a(n) = a_n$.

函数的运算

函数之间最简单的运算是**四则运算**. 比如函数 f 与 g 的和、差、积、商的取值可以定义为

$$(f \pm g)(x) := f(x) \pm g(x), \ (f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x), \ \left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}.$$

在作和、差、积时，x 必须属于 f 与 g 的公共定义域；为了作商，x 还要满足 $g(x) \neq 0$. 可见，有理函数是由**恒等 (identity) 函数** $\mathrm{id}(x) = x$ 和**常值函数**在有限次四则运算下形成的.

除了四则运算，两个函数 f 与 g 还能通过**复合**得到一个新的函数，记作 $f \circ g$，它在 x 处的取值定义为

$$(f \circ g)(x) := f(g(x)).$$

显然，x 必须落在 g 的定义域中，同时 $g(x)$ 必须落在 f 的定义域中. 习惯上，称 g 为**内函数**、f 为**外函数**. 如果把 f 的自变量记为 u、因变量记为 y，那么复合函数可以写为 $y = f(u) = f(g(x))$，称 u 为**中间变量**. 复合可以进行多重，例如函数 $y = 3\sin(\sqrt{x}) + 1$ 可以看做多项式函数 $y = 3u + 1$、三角函数 $u = \sin v$、有理幂函数 $v = \sqrt{x}$ 的复合，如果把变量名当作函数名则可写为 $y = y(u(v(x)))$.

下面介绍**反函数**. 如果函数 $f : D_f \to R_f$ 是双射，那么任给 $y \in R_f$，存在唯一的 $x \in D_f$ 满足 $f(x) = y$. 这就建立了从 R_f 到 D_f 的一个对应关系，它就是 f 的反函数，记作 $f^{-1} : R_f \to D_f$.[14] 也就是说，$f^{-1}(y) = x$ 的充要条件是 $f(x) = y$. 从图像的角度来说，函数 $y = f(x)$ 与 $x = f^{-1}(y)$ 事实上描述的是 xy 平面上的同一个图形. 区别在于，前者是站在 x 轴上考察曲线的高度，而后者则是站在 y 轴上考察. 如果把反函数写成 $y = f^{-1}(x)$，那么它与 $y = f(x)$ 在 xy 平面上的图像关于直线 $y = x$ 对称.

14: 注意到 $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_{D_f}$ 且 $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{R_f}$，因此如果把复合 "$\circ$" 理解为函数的一种 "乘法"，那么 f^{-1} 就是 f 在这种乘法下的 "倒数".

还有一种产生函数的重要方法，就是用一个函数各种比例的组合生成一个新的函数，称之为函数的**叠加**（**superposition**）. 比如给定函数 ϕ，那么它的一个叠加指的是有限和式

$$\Phi(x) = c_1\phi(a_1x + b_1) + c_2\phi(a_2x + b_2) + \cdots + c_n\phi(a_nx + b_n)$$

其中 a_j, b_j, c_j 都是常数. 比如阶跃函数 $H(x)$ 的叠加 $H(x) - H(x-4)$ 就表示了一个矩形脉冲. 叠加的方法在函数逼近中是极有用的.

函数的性质

我们来介绍函数的一些简单性质，包括有界性、单调性、奇偶性、周期性.

函数的有界性

设函数 f 在 D 上有定义. 若像集 $f(D)$ 有上界，则称 f 在 D 上**有上界**；若 $f(D)$ 有下界，则称 f 在 D 上**有下界**；若 $f(D)$ 有界，则称 f 在 D 上**有界**. 此外，函数 f 在 D 上 (广义) 的**上确界**和**下确界**依次定义为

$$\sup_D f = \sup_{x\in D} f(x) := \sup f(D), \quad \inf_D f = \inf_{x\in D} f(x) := \inf f(D).$$

如果 $\sup_D f \in f(D)$，则称其为 f 在 D 上的**最大值**，记为 $\max_D f$；如果 $\inf_D f \in f(D)$，则称其为 f 在 D 上的**最小值**，记为 $\min_D f$.

例如，函数 $f(x) = x^2$ 在 $\mathbb{R}$ 上有下界但无上界，且 $\min f = 0$. 而 $g(x) = 1/(1 + x^2)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有界且 $\sup g = 1, \inf g = 0$，但下确界无法取到，所以它没有最小值.

例 1.2.1 设 f, g 在 D 上有上界，则 $\sup_D(f+g) \leq \sup_D f + \sup_D g$.

证明. 对于任意的 $x \in D$ 有 $f(x)+g(x) \leq \sup_D f + \sup_D g$. 因此 $\sup_D f + \sup_D g$ 是 $f+g$ 的一个上界，自然不小于上确界. □

函数的单调性

设函数 f 在 D 上有定义. 如果对于任意的 $a, b \in D$，当 $a < b$ 时，

- 恒有 $f(a) \leq f(b)$，则称 f 在 D 上**单调递增**.
- 恒有 $f(a) < f(b)$，则称 f 在 D 上**严格单调递增**.
- 恒有 $f(a) \geq f(b)$，则称 f 在 D 上**单调递减**.
- 恒有 $f(a) > f(b)$，则称 f 在 D 上**严格单调递减**.

常值函数 $f(x) = c(c \in \mathbb{R})$ 既单调递增也单调递减. 任给正整数 n，函数 $f(x) = x^n$ 在 $[0, +\infty)$ 上严格单调递增.

例 1.2.2 设函数 $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}, f(r) = a^r$. 如果 $a > 1$，证明：f 严格单调递增.

证明. 设 $r = m/n > s = p/q$, 则 $mq > np$, 进而 $a^{mq-np} > 1$, 所以 $a^{mq} > a^{np}$. 根据 x^{nq} 的严格单调性，可知 $(a^{mq})^{1/nq} > (a^{np})^{1/nq}$, 即 $a^r > a^s$. □

单调性与反函数有很大的关联.

单调反函数定理

若 f 是 D 上的严格单调递增（递减）函数，则它有反函数 $f^{-1} : R_f \to D$，并且 f^{-1} 在 R_f 上也严格单调递增（递减）.

利用三角函数的性质可以定义**反三角函数**. 我们知道正弦函数 $y = \sin x$ 在 $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ 上严格递增，从而它可以确定反函数 $\sin^{-1} y : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$, 称之为**反正弦函数**，一般记为 $\arcsin y$ (the arc whose sine is y). 类似地，定义在 $[0, \pi]$ 上的 $y = \cos x$ 可以确定**反余弦函数** $\arccos y : [-1, 1] \to [0, \pi]$, 定义在 $(-\pi/2, \pi/2)$ 上的 $y = \tan x$ 可确定**反正切函数** $\arctan y : (-\infty, +\infty) \to (-\pi/2, \pi/2)$, 定义在 $(0, \pi)$ 上的 $y = \cot x$ 可确定**反余切函数** $\operatorname{arccot} y : (-\infty, +\infty) \to (0, \pi)$.

函数的奇偶性

设函数 f 在 D 上有定义，并且 $-D := \{-x | x \in D\}$ 与 D 相同.

- 若在 D 上恒有 $f(-x) = f(x)$，则称 f 是 D 上的**偶函数**.
- 若在 D 上恒有 $f(-x) = -f(x)$，则称 f 是 D 上的**奇函数**.

对于正整数 n，$f(x) = x^n$ 是偶函数的充要条件为 n 是偶数，它是奇函数的充要条件为 n 是奇数.

函数的周期性

设函数 f 在 D 上有定义，T 是非零实数，并且 $D+T := \{x+T|x \in D\}$ 与 D 相同.[15] 若在 D 上恒有 $f(x+T) = f(x)$，则称 f 是 D 上的**周期函数**, 非零常数 T 称为 f 的一个**周期**.

15: 在较弱的意义下，只需 $D+T \subseteq D$. 部分文献可能仅讨论 $D = \mathbb{R}$ 的情形.

易知，若 T 是 f 的周期，则对于任意非零整数 n，nT 也是 f 的周期. 如果周期函数 f 存在最小的正周期，那么称这个周期为 f 的**基本周期**. 但一个周期函数未必有最小正周期，比如常值函数以及下面的**狄利克雷 (Dirichlet) 函数**

$$\mathrm{D}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

容易发现，任意的非零有理数都是狄利克雷函数的周期，所以它没有最小正周期.

例 1.2.3 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上的周期函数，P 是它的所有正周期的集合. 若 f 存在基本周期 T，证明：$P = \{nT|n \in \mathbb{Z}_+\}$.

证明. 任取 $\sigma \in P$，存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $nT < \sigma \le (n+1)T$. 若 $\sigma < (n+1)T$，则 $(n+1)T - \sigma$ 是比 T 更小的正周期，矛盾，故 $\sigma = (n+1)T$. □

上例解释了最小正周期被称为基本周期的原因. 此外，它表明，若函数有基本周期，则其任意两个周期的商是有理数.

初等函数

我们平常遇到的有解析表达式的函数种类并不多. 通常，把常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数称为**基本初等函数**，由它们经过有限次的四则运算或复合运算得到的函数称为**初等函数**. 敏锐的读者应已发现，截止目前，除了常值函数外，我们并未给出其他几个基本初等函数的确切定义! 为了解决这一困扰，我们现在给出幂函数、指数函数、对数函数的基本概念，至于三角函数和反三角函数我们留到幂级数处再做介绍.

为了定义幂函数与指数函数，需要给出一般幂次 a^b 的定义. 利用 a^r 在 $r \in \mathbb{Q}$ 上的单调性，可以按如下方式定义

- 当 $a \ge 1$ 时，$a^b := \sup\{a^r|r \le b, r \in \mathbb{Q}\}$;
- 当 $0 < a < 1$ 时，$a^b := \inf\{a^r|r \le b, r \in \mathbb{Q}\}$.

从而，**幂函数** x^α 以及**指数函数** a^x 就有了自然的定义.

例 1.2.4 设 $a > 1$，证明：$f(x) = a^x$ 在 $\mathbb{R}$ 上严格单调递增.

证明. 根据 f 在 $\mathbb{Q}$ 上严格递增，对于 $x > y$ 有

$$a^x = \sup_{r \le x} a^r \ge \sup_{s \le y} a^s = a^y.$$

也就是说 f 在 $\mathbb{R}$ 单调递增. 为了证明严格单调性，只要用有理数在实数中的**稠密性**. 取有理数 r,s 使得 $x>r>s>y$，则

$$a^x \geq a^r > a^s \geq a^y,$$

中间的严格不等式用到了 f 在 $\mathbb{Q}$ 上的严格单调性. □

例 1.2.5 设 $\alpha>0$，证明：$f(x)=x^\alpha$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格单调递增.

证明. 若 α 是有理数 m/n，则 $x^\alpha > y^\alpha$ 等价于 $x^m > y^m$，进而等价于 $x>y$, 所以 f 严格单调递增. 若 α 是无理数, 简单起见仅考虑 $x>y\geq 1$, 此时对任意正有理数 r 成立 $x^r>y^r$，进而

$$x^\alpha = \sup_{r<\alpha} x^r \geq \sup_{r<\alpha} y^r = y^\alpha.$$

为证严格单调，取有理数 $r_0 \in (0,\alpha)$. 根据指数函数单调性，可知

$$y^\alpha = \sup_{r<\alpha} y^r = \sup_{r_0<r<\alpha} y^r.$$

记 $\lambda = x/y > 1$，当有理数 $r\in(r_0,\alpha)$ 时有

$$x^\alpha \geq x^r = (\lambda y)^r = \lambda^r y^r > \lambda^{r_0} y^r.$$

易知对于有理幂次 $\lambda^{r_0} > 1$, 所以

$$x^\alpha \geq \sup_{r_0<r<\alpha} \lambda^{r_0} y^r = \lambda^{r_0} \sup_{r_0<r<\alpha} y^r = \lambda^{r_0} y^\alpha > y^\alpha.$$

所以 $f(x)=x^\alpha$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格单调递增. □

据此，由单调反函数定理可知指数函数 $y=a^x(\alpha>0,\alpha\neq 1)$ 存在反函数，其反函数就是**对数函数**，通常记为 $x=\log_a y$.

3 课时/6 课时