同济大学课程考核试卷（期中试卷解答）
2023—2024 学年第二学期

命题教师签名：　　　　　　　审核教师签名：

课号：122005　　　课名：高等数学 B 下　　　考试考查：

此卷选为：期中考试(√)、期终考试( )、重考( )试卷

年级____专业________学号______姓名______任课教师______

题号	一 (30)	二 (10)	三 (8)	四 (10)	五 (12)	六 (8)	七 (12)	八 (10)	总分
得分									

（注意：本试卷共八大题，三大张，满分 100 分．考试时间为 100 分钟．要求写出解题过程，否则不予计分）

一、填空选择题(每小题 3 分, 共 30 分)

1. 已知向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 垂直，且 $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$，设 $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}$，$\vec{y}=\vec{a}+k\vec{b}$，若以 $\vec{x}$ 和 $\vec{y}$ 为邻边的平行四边形的面积为 4，则 $k=$ __ -1 或 3 __.

2. 将 xoy 面上的曲线 $x^2+(y-3)^2=4$ 绕 x 轴旋转一周，所生成的旋转曲面方程为 $x^2+y^2+z^2-6\sqrt{y^2+z^2}+5=0$.

3. 若函数 $f(u,v)$ 可微，则由方程 $f(cx-az,cy+bz)=0$ 确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 满足 $az_x-bz_y=$ __ c __.

4. 设函数 $z=\ln\left(xy+\sqrt{1+x^2y^2}\right)$，则 $\mathrm{d}z=$ __ $\dfrac{y}{\sqrt{1+x^2y^2}}\mathrm{d}x+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2y^2}}\mathrm{d}y$ __.

5. 点 $M(2,-1,3)$ 关于平面 $x-y+z-3=0$ 的对称点 N 的坐标为 __ $(0,1,1)$ __.

6. 曲面 $z-\mathrm{e}^z+xy=1$ 在点 $(2,1,0)$ 处的切平面方程为 __ $x+2y-4=0$ __.

7. 曲面 $x^2+4y^2+z^2=4$ 与平面 $x+z=a$ 的交线在 yoz 面上的投影曲线方程为 __B__.

A. $\begin{cases}x^2+4y^2+(a-x)^2=4,\\ z=0\end{cases}$　　B. $\begin{cases}(a-z)^2+4y^2+z^2=4,\\ x=0\end{cases}$

C. $\begin{cases}x^2+4y^2+(a-x)^2=4,\\ x=0\end{cases}$　　D. $(a-z)^2+4y^2+z^2=4$

8. 考虑二元函数 $f(x,y)$ 的下面 4 条性质：

(1) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续；　(2) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数连续；

(3) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微；　(4) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数存在.

若用“$P\Rightarrow Q$”表示可由性质 P 推出性质 Q，则有 __A__.

A. $(2)\Rightarrow(3)\Rightarrow(1)$　　B. $(3)\Rightarrow(2)\Rightarrow(1)$

C. $(3)\Rightarrow(4)\Rightarrow(1)$　　D. $(3)\Rightarrow(1)\Rightarrow(4)$

9. 将二次积分 $\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^{\frac{x^2}{2}}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_2^{2\sqrt{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{8-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$ 交换积分次序得 __A__.

A. $\int_0^2\mathrm{d}y\int_{\sqrt{2y}}^{\sqrt{8-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$　　B. $\int_0^2\mathrm{d}y\int_1^{\sqrt{8-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$

C. $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\sqrt{2y}}^{\sqrt{8-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$　　D. $\int_0^2\mathrm{d}y\int_{\sqrt{2y}}^1 f(x,y)\mathrm{d}x$

10. 设二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{|x|^m+|y|^n}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$（$m,n$ 为正整数）在点 $(0,0)$ 处不连续，但偏导数存在，则 m,n 需满足的条件是 __B__.

A. $m\ge 2,n<2$　　B. $m\ge 2,n\ge 2$　　C. $m<2,n\ge 2$　　D. $m<2,n<2$

二、(10 分) 设函数 $f(x)$ 连续，令 $F(t)=\int_1^t\mathrm{d}y\int_y^t f(x)\mathrm{d}x$，求 $F'(2)$.

解：$F(t)=\int_1^t\mathrm{d}y\int_y^t f(x)\mathrm{d}x=\int_1^t\mathrm{d}x\int_1^x f(x)\mathrm{d}y=\int_1^t f(x)(x-1)\mathrm{d}x$，

$F'(t)=f(t)(t-1)$，

$F'(2)=f(2)(2-1)=f(2)$.

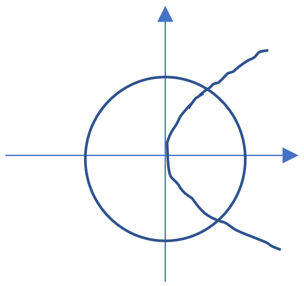
三、(8 分) 设 $z=f\left(x^2+y^2,\mathrm{e}^{x+y}\right)$，函数 $f\left(u,v\right)$ 具有连续的二阶偏导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 及 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xf_1'+\mathrm{e}^{x+y}f_2'$， $\dfrac{\partial z}{\partial y}=2yf_1'+\mathrm{e}^{x+y}f_2'$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=4xyf_{11}''+2\left(x+y\right)\mathrm{e}^{x+y}f_{12}''+\mathrm{e}^{2(x+y)}f_{22}''+\mathrm{e}^{x+y}f_2'.$$

四、(10 分) 计算二重积分 $\iint\limits_D y\left(x+y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\left\{\left(x,y\right)\middle|x^2+y^2\le 2,x\ge y^2\right\}$.

解：



$$\iint\limits_D y\left(x+y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D y^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-1}^{1}y^2\mathrm{d}y\int_{y^2}^{\sqrt{2-y^2}}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}y^2\left(\sqrt{2-y^2}-y^2\right)\mathrm{d}y$$

$$=2\int_0^1 y^2\left(\sqrt{2-y^2}-y^2\right)\mathrm{d}y$$

$$=2\int_0^1 y^2\sqrt{2-y^2}\mathrm{d}y-2\int_0^1 y^4\mathrm{d}y,$$

$$2\int_0^1 y^2\sqrt{2-y^2}\mathrm{d}y\overset{y=\sqrt{2}\sin t}{=}2\int_0^{\frac{\pi}{4}}2\sin^2 t\sqrt{2-2\sin^2 t}\cdot\sqrt{2}\cos t\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4},$$

$$2\int_0^1 y^4\mathrm{d}y=\frac{2}{5},$$

$$\iint\limits_D y\left(x+y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{5}.$$

五、(12 分) 已知函数 $z=f\left(x,y\right)$ 的全微分 $\mathrm{d}z=2x\mathrm{d}x-2y\mathrm{d}y$，并且 $f\left(1,1\right)=2$，求 $f\left(x,y\right)$ 在条件 $x^2+y^2=4$ 下的条件极值.

解 1：由全微分 $\mathrm{d}z=2x\mathrm{d}x-2y\mathrm{d}y$ 可知， $f_x\left(x,y\right)=2x$， $f_y\left(x,y\right)=-2y$，

于是， $z=x^2-y^2+C$，再由 $f\left(1,1\right)=2$，有 $C=2$，从而 $z=x^2-y^2+2$.

令 $L=x^2-y^2+2+\lambda\left(x^2+y^2-4\right)$，

$$\begin{cases}L_x=2x+2\lambda x=0\\ L_y=-2y+2\lambda y=0\\ x^2+y^2=4\end{cases}$$ 驻点为 $\left(0,\pm 2\right)$ 和 $\left(\pm 2,0\right)$，

$f\left(x,y\right)$ 在条件 $x^2+y^2=4$ 下的条件极值为 $f\left(0,\pm 2\right)=-2$， $f\left(\pm 2,0\right)=6$.

解 2：或用代入法求极值：

由 $x^2+y^2=4$ 得 $y^2=4-x^2$， $z=x^2-y^2+2=2x^2-2$， $x=0$ 时有极小值 -2；

由 $x^2+y^2=4$ 得 $x^2=4-y^2$， $z=x^2-y^2+2=6-2y^2$， $y=0$ 时有极大值 6；

解 3：或用参数方程代入法求极值：

由 $x^2+y^2=4$ 得 $x=2\cos t,y=2\sin t$， $0\le t\le 2\pi$，

$z=x^2-y^2+2=4\cos 2t+2$，驻点 $t=0,\dfrac{\pi}{2},\pi,\dfrac{3\pi}{2}$，均为极值点，

$t=0,\ \pi$ 时，取极大值 6， $t=\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}$ 时，取极小值 -2.

六、(8 分) 求一过直线 $L:\begin{cases}x+y+z+1=0,\\2x+y+z=0\end{cases}$ 的平面 $\prod$，使原点到平面 $\prod$ 的距离为最长.

解：过直线 L 的平面束方程为 $\left(1+2\lambda\right)x+\left(1+\lambda\right)y+\left(1+\lambda\right)z+1=0$，原点到平面的距离为

$$d=\frac{1}{\sqrt{\left(1+2\lambda\right)^2+\left(1+\lambda\right)^2+\left(1+\lambda\right)^2}},$$

当 $f\left(\lambda\right)=\left(1+2\lambda\right)^2+\left(1+\lambda\right)^2+\left(1+\lambda\right)^2=6\left(\lambda+\dfrac{2}{3}\right)^2+\dfrac{1}{3}$ 取最小值 $\dfrac{1}{3}$ 时， d 有最大值.

即当 $\lambda=-\dfrac{2}{3}$ 时， d 有最大值，

此时，平面方程为 $\prod:x-y-z-3=0$.

七、(12 分) 求曲线 $\begin{cases} x^2-z=0, \\ 3x+2y+1=0 \end{cases}$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的切线 L 的方程，并求该切线绕 z 轴旋转而成的旋转曲面 Σ 的方程.

解：曲面 $x^2-z=0$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的法向量 $\overrightarrow{n_1}=(2x,0,-1)\big|_{(1,-2,1)}=(2,0,-1)$，

平面 $3x+2y+1=0$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的法向量 $\overrightarrow{n_2}=(3,2,0)$，

切线 L 的方向向量为 $\vec{s}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}=(2,-3,4)$，

切线 L 的方程为 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-1}{4}$，

将切线 L 的方程写为参数方程 $\begin{cases} x=2t+1, \\ y=-3t-2, \\ z=4t+1. \end{cases}$

设旋转曲面 Σ 上的任一点为 $P(x,y,z)$，则由点 $P_0(x_0,y_0,z_0)\in L$，及点 $A(0,0,z)$，满足

$|PA|=|P_0A|$，且 $z=z_0$，

即 $x^2+y^2=x_0^2+y_0^2$，且 $z=z_0$.

即 $x^2+y^2=(2t_0+1)^2+(-3t_0-2)^2$，且 $z=z_0=4t_0+1$，

将 $t_0=\dfrac{z-1}{4}$ 代入，得旋转曲面 Σ 的方程为 $x^2+y^2=\left(\dfrac{z+1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{3z+5}{4}\right)^2$，

即 $16x^2+16y^2-13z^2-38z=29$.

八、(10 分) 设二元函数 $f(x,y)$ 可微，$\vec{l_1}$，$\vec{l_2}$ 是两个给定的方向，它们之间的夹角为 $\varphi\in(0,\pi)$，证明：$\left[f_x(x,y)\right]^2+\left[f_y(x,y)\right]^2\le\dfrac{2}{\sin^2\varphi}\left[\left(\dfrac{\partial f}{\partial\vec{l}_1}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial\vec{l}_2}\right)^2\right]$.

证明： 设方向 $\vec{l_1}$ 的一个方向角为 θ，则 $\vec{l_1}$ 的方向余弦为 $(\cos\theta,\sin\theta)$，

$\vec{l_2}$ 的方向余弦为 $(\cos(\theta+\varphi),\sin(\theta+\varphi))$，

由 $f(x,y)$ 可微，得

$\dfrac{\partial f}{\partial\vec{l}_1}=f_x(x,y)\cos\theta+f_y(x,y)\sin\theta$，

$\dfrac{\partial f}{\partial\vec{l}_2}=f_x(x,y)\cos(\theta+\varphi)+f_y(x,y)\sin(\theta+\varphi)$，

即 $f_x(x,y)=\dfrac{1}{\sin\varphi}\left(\dfrac{\partial f}{\partial\vec{l}_1}\sin(\theta+\varphi)-\dfrac{\partial f}{\partial\vec{l}_2}\sin\theta\right)$，

$f_y(x,y)=\dfrac{1}{\sin\varphi}\left(-\dfrac{\partial f}{\partial\vec{l}_1}\cos(\theta+\varphi)+\dfrac{\partial f}{\partial\vec{l}_2}\cos\theta\right)$，

所以

$$\begin{aligned}\left[f_x(x,y)\right]^2+\left[f_y(x,y)\right]^2&=\frac{1}{\sin^2\varphi}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial\vec{l}_1}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial\vec{l}_2}\right)^2-2\frac{\partial f}{\partial\vec{l}_1}\cdot\frac{\partial f}{\partial\vec{l}_2}\cos\varphi\right)\\&\le\frac{1}{\sin^2\varphi}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial\vec{l}_1}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial\vec{l}_2}\right)^2+2\left|\frac{\partial f}{\partial\vec{l}_1}\right|\cdot\left|\frac{\partial f}{\partial\vec{l}_2}\right|\right)\\&\le\frac{2}{\sin^2\varphi}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial\vec{l}_1}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial\vec{l}_2}\right)^2\right).\end{aligned}$$