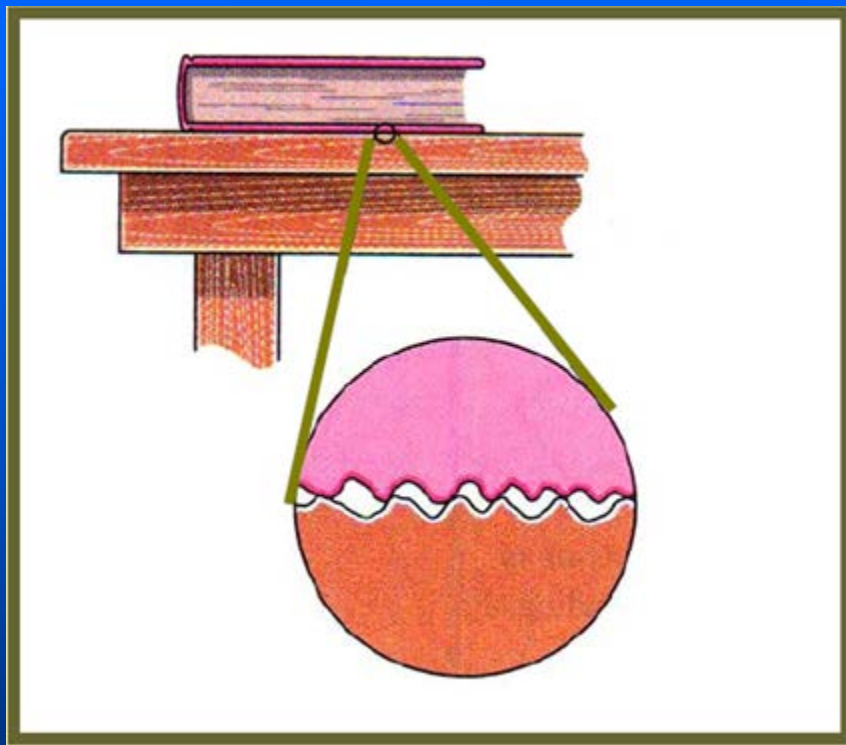


第二节 摩擦



光滑接触面约束是一个理想模型，是对实际情况的抽象和简化。

摩擦分类

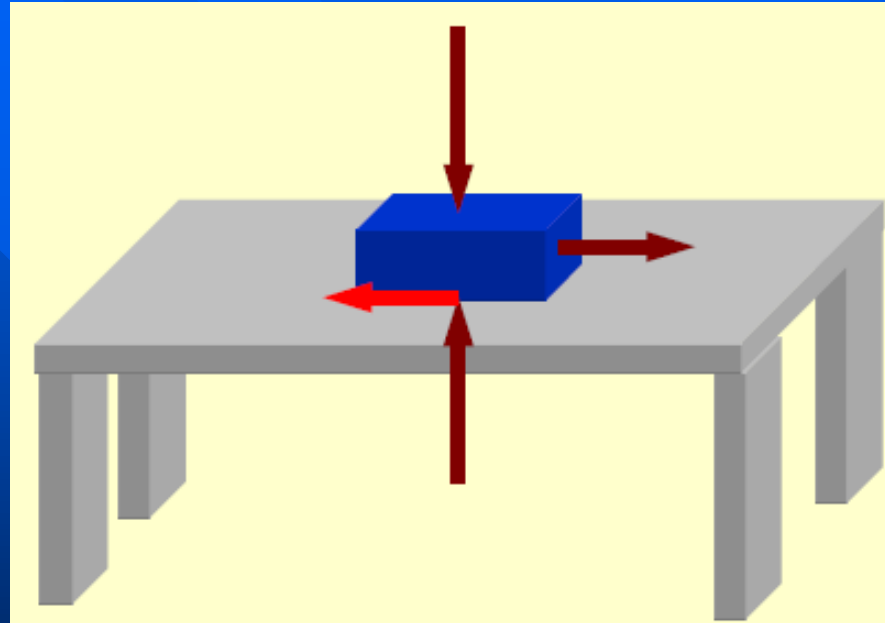
按运动形式分类：滑动摩擦；滚动摩擦（滚动摩阻）

按有无相对运动：静摩擦；动摩擦

两物体之间是否有润滑剂：干摩擦；湿摩擦

- 摩擦问题的两重性：
 - 有利：制动、传动
 - 不利：产生阻力、消耗能量、降低效率

2-1 滑动摩擦



两个相互接触的物体，如果彼此之间有相对滑动或相对滑动的趋势，在接触面上就产生彼此阻碍滑动的切向力，这种阻力称为滑动摩擦力。

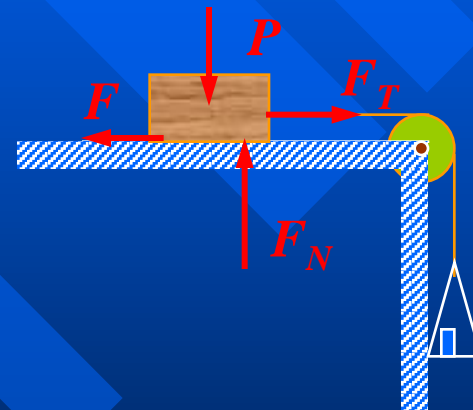
/// **静滑动摩擦力**——在仅有相对滑动趋势而尚未滑动时产生的摩擦力。

/// **动滑动摩擦力**——在物体接触面间已经滑动时产生的摩擦力。

一、静、动滑动摩擦定律

- 方向：与物体滑动趋势的方向相反。
- 大小：由平衡方程决定（ $F = F_T$ ）。

静摩擦力是一范围值： $0 \leq F \leq F_{\max}$



最大静摩擦力——物体将动还未动时，摩擦力达到最大值。

$$F_{\max} = f_s F_N \quad (\text{到达临界状态})$$

f_s ——静摩擦因数， F_N ——法向压力。

最大静摩擦力： $F_{\max} = f_s F_N$ 。

静滑动摩擦定律

静摩擦因数（系数）：无量纲，与两接触物体的材料性质及接触面的粗糙程度有关，可用实验方法确定。

在一般情况下（非临界状态）

$$0 \leq F < F_{\max}$$

临界平衡状态

$$F = F_{\max}$$

动滑动摩擦力: $F_d = f_d F_N$

动滑动摩擦定律

动摩擦因数（系数） f_d ：无量纲，可用实验方法确定，略小于静摩擦因数（系数）。

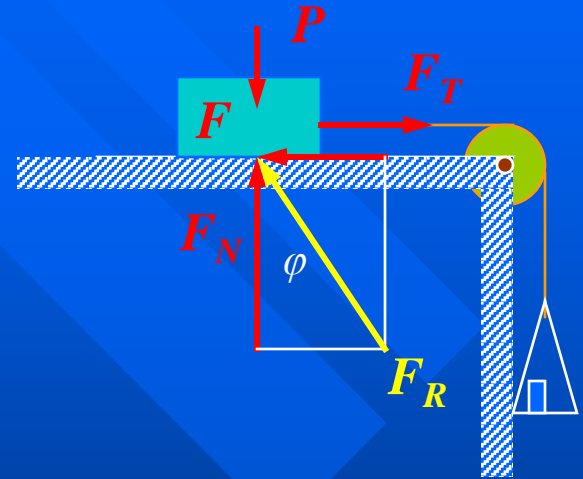
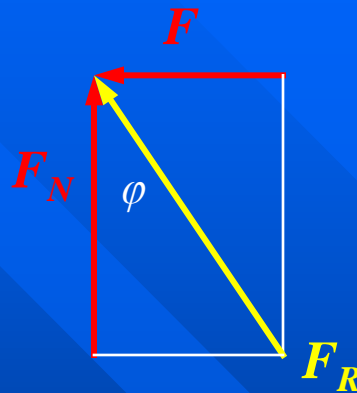
表 5-1 常用材料的摩擦系数

材料名称	摩擦系数			
	静摩擦系数 (f)		动摩擦系数 (f')	
	无润滑剂	有润滑剂	无润滑剂	有润滑剂
钢——钢	0.15	0.10~0.12	0.15	0.05~0.10
钢——铸铁	0.30		0.18	0.05~0.15
钢——青铜	0.15	0.10~0.15	0.15	0.10~0.15
铸铁——铸铁		0.18	0.15	0.07~0.12
铸铁——青铜			0.15~0.20	0.07~0.15
青铜——青铜		0.10	0.20	0.07~0.10
皮革——铸铁	0.30~0.50	0.15	0.60	0.15
橡皮——铸铁			0.80	0.50
木——木	0.40~0.60	0.10	0.20~0.50	0.07~0.15

此表摘自《机械设计手册》(燃料化学工业出版社)

二、摩擦角与自锁

摩擦力F：广义的约束反力



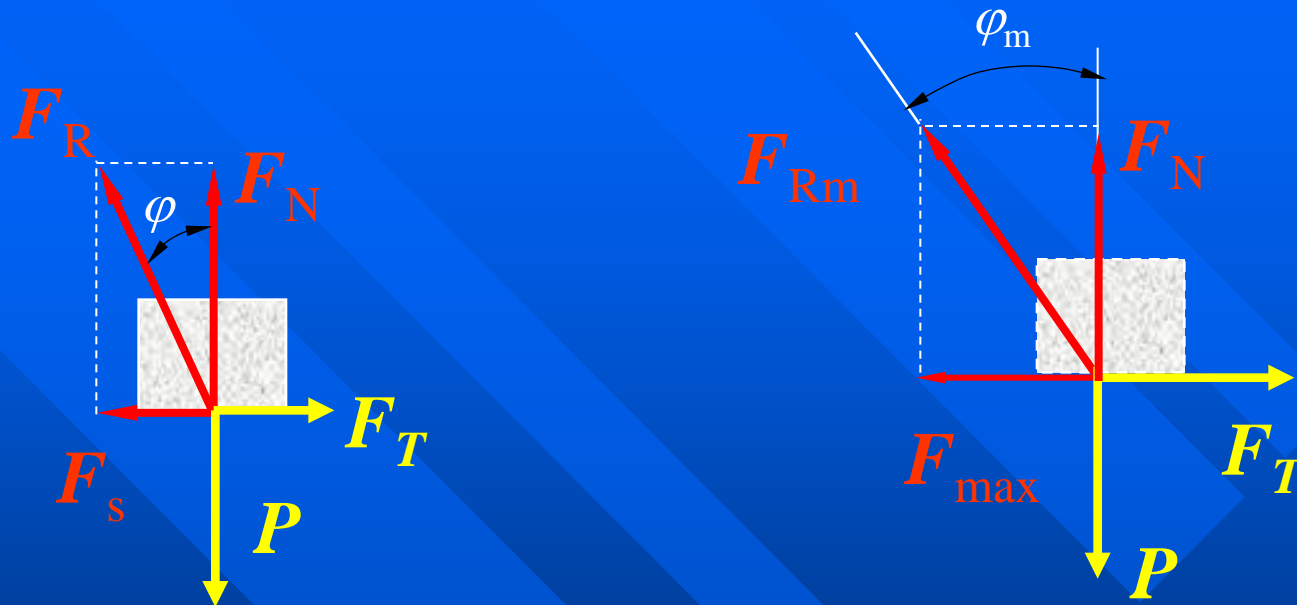
摩擦角：

F_R ——约束全反力

φ ——约束全反力与法线的夹角

摩擦角和自锁现象

1. 摩擦角



约束全反力与法线间的夹角的最大值（临界情况下约束力全反力与法线间的夹角）称为摩擦角。

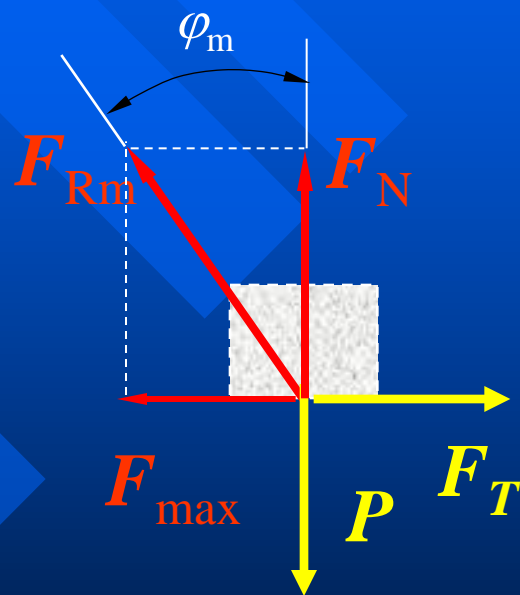
摩擦角和自锁现象

φ_m 与静滑动摩擦因数 f_s 的关系为：

$$\tan \varphi_m = \frac{F_{\max}}{F_N} = \frac{f_s F_N}{F_N} = f_s$$

摩擦角的正切等于静摩擦因数

与主动力的大小无关



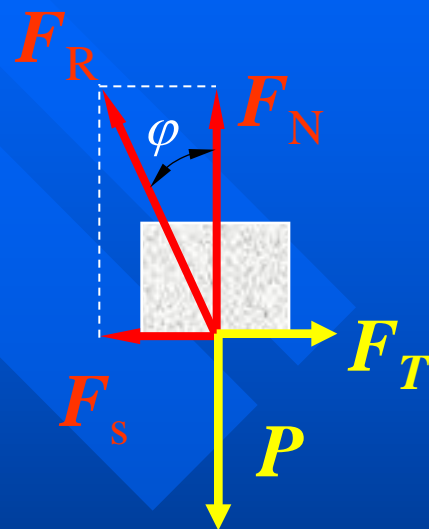
2 自锁现象

为什么?

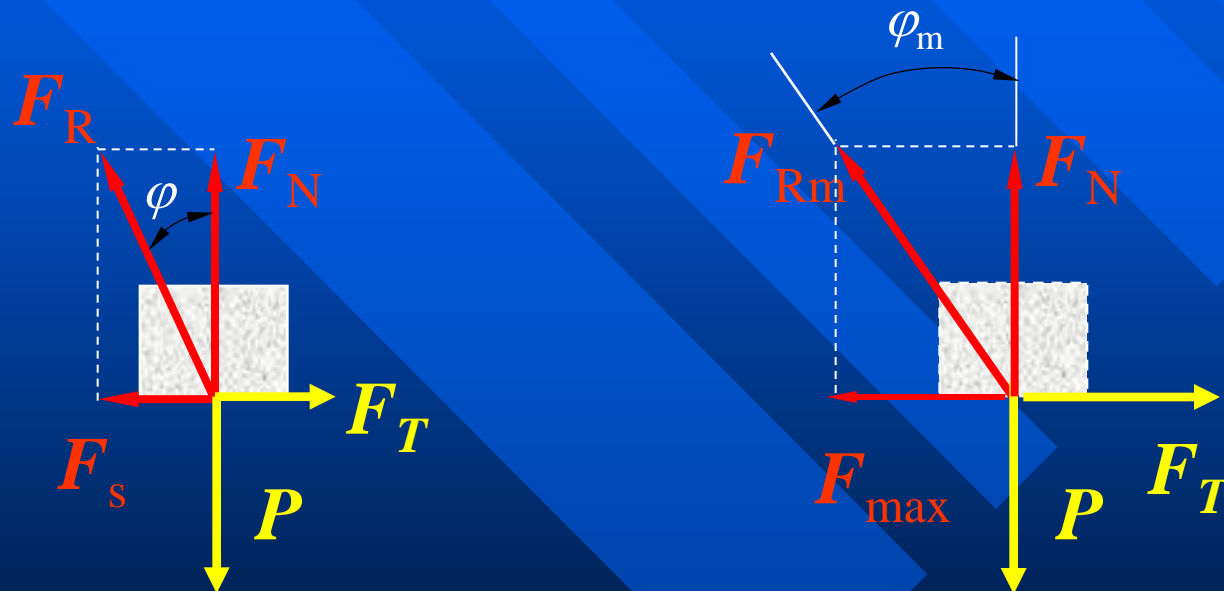
约束全反力的作用线一定在摩擦角之内

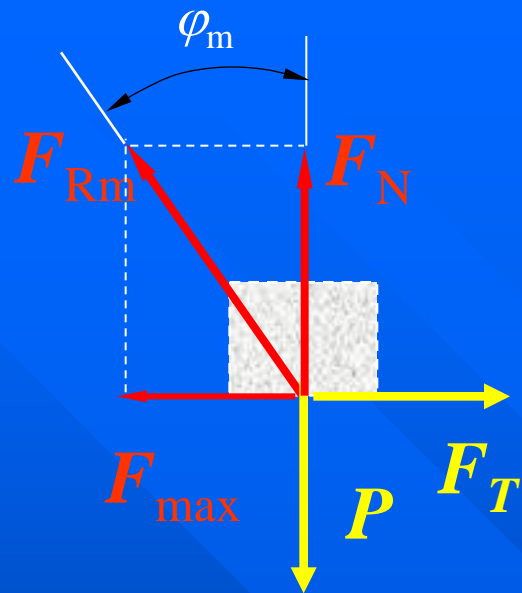
物块平衡时，静摩擦力不一定达到最大值，可在零与最大值 F_{\max} 之间变化，所以约束全反力与法线间的夹角 φ 也在零与摩擦角 φ_m 之间变化，即

$$0 < \varphi \leq \varphi_m$$



由于静摩擦力不可能超过最大值，因此约束全反力的作用线也不可能超出摩擦角之外，即约束全反力必在摩擦角之内。





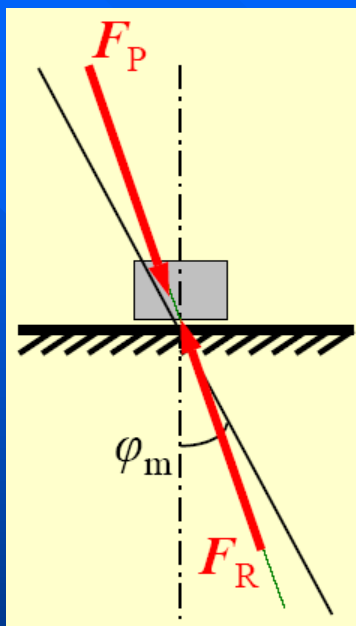
要保持静止（平衡），全部主动力的合力的作用线在摩擦角之内，即

全部主动力的合力与接触面法线间的夹角也要满足：

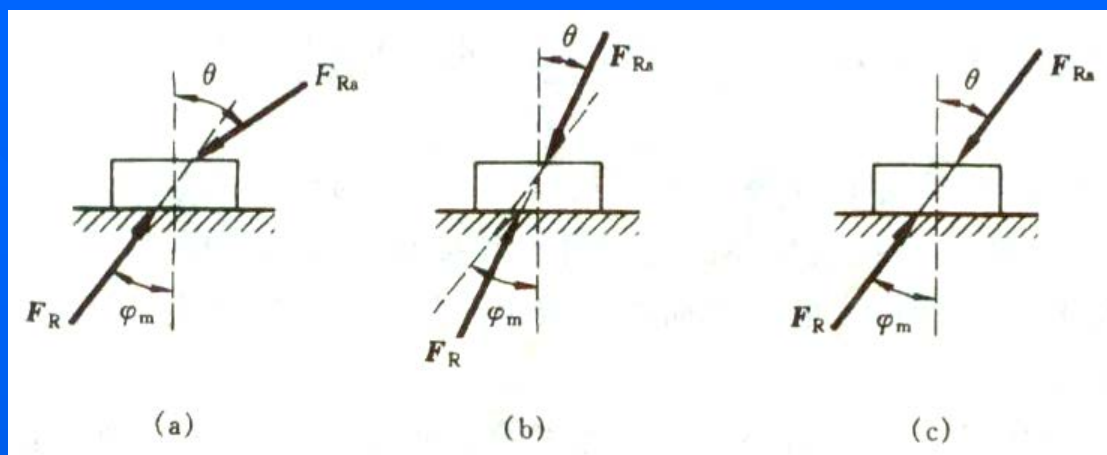
$$0 < \varphi \leq \varphi_m$$

反之，如果全部主动力的合力 F_R 的作用线在摩擦角之外，则无论这个力怎样小，都不能与约束全反力保持平衡，物块一定会滑动。

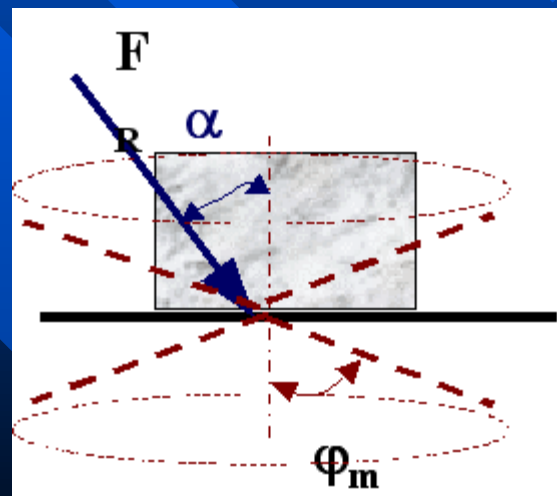
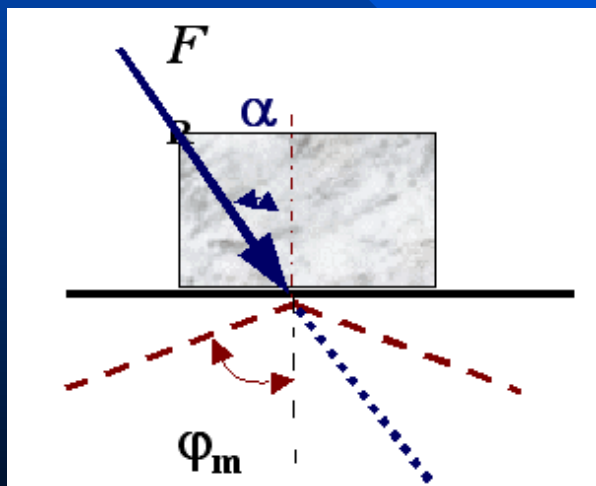
自锁：



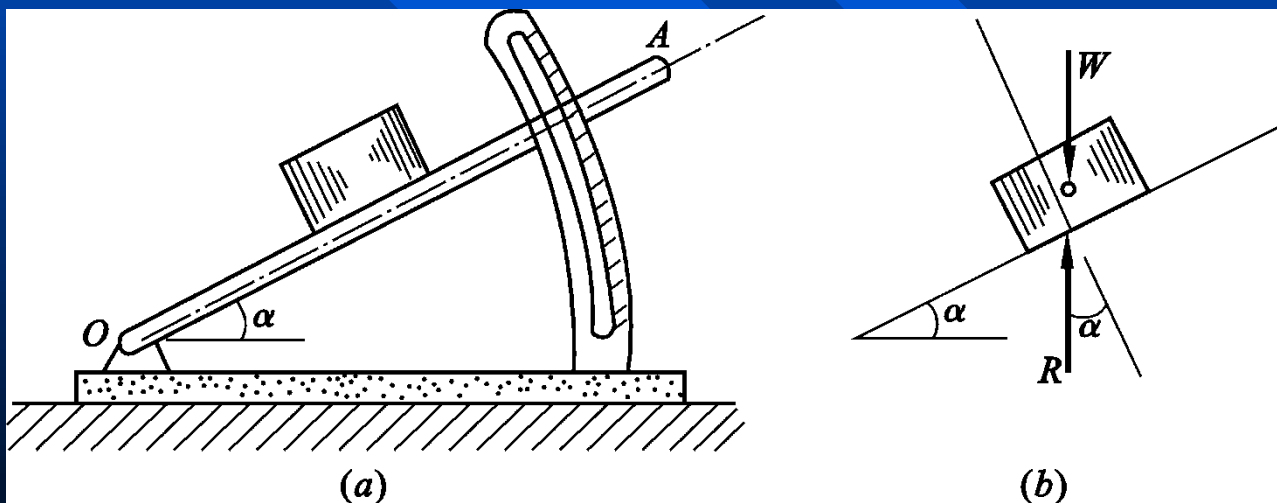
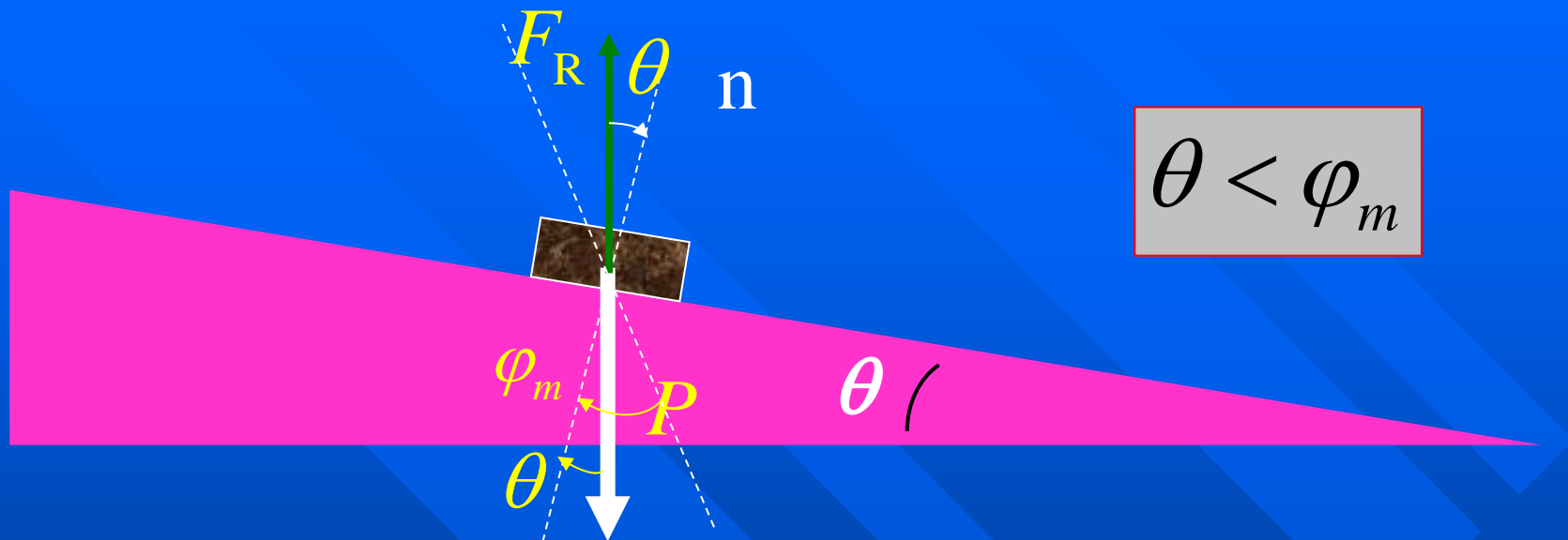
当主动力合力的作用线位于摩擦角范围内时，不论主动力多大，物体都保持平衡，这种现象称为自锁。（刚体）

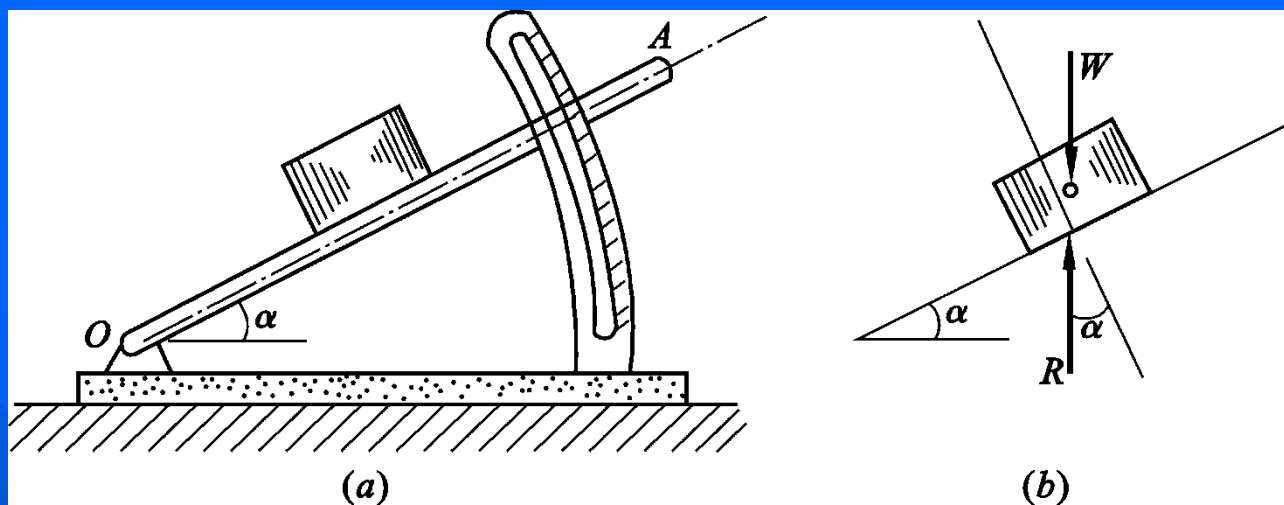


1. 摩擦角是静摩擦力取值范围的几何表示。
2. 三维受力状态下，摩擦角变为摩擦锥。

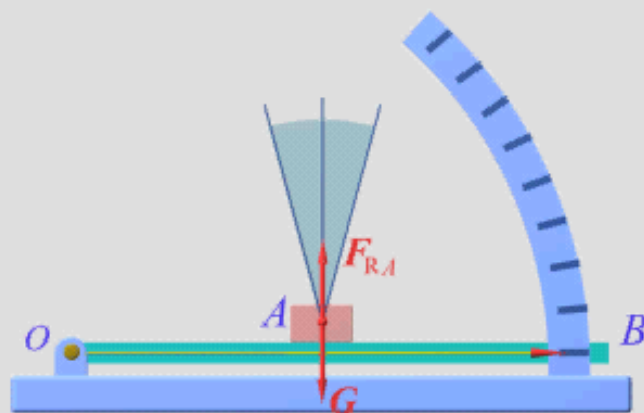


斜面上的重物



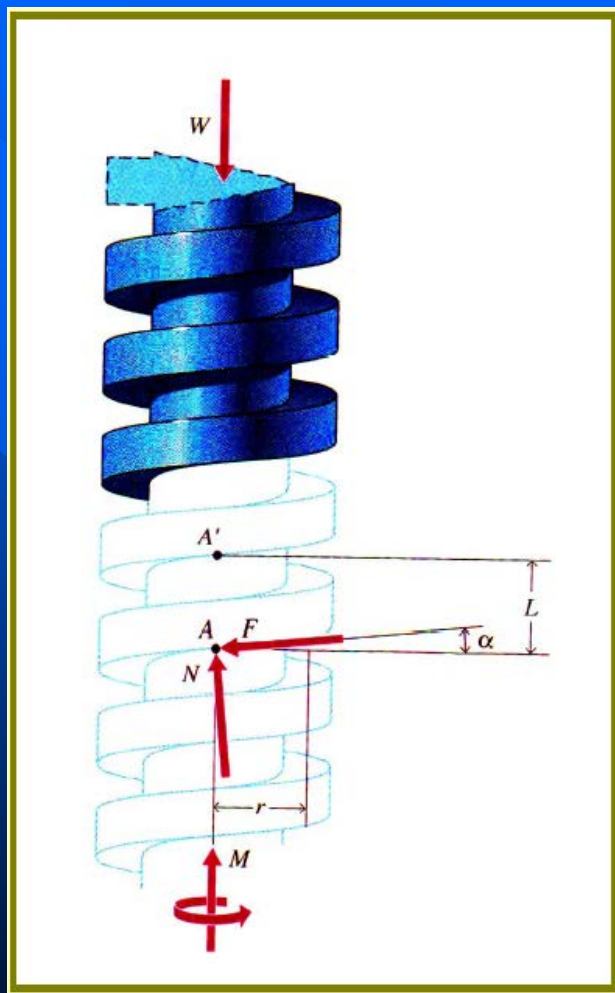


利用摩擦角测定静摩擦因数



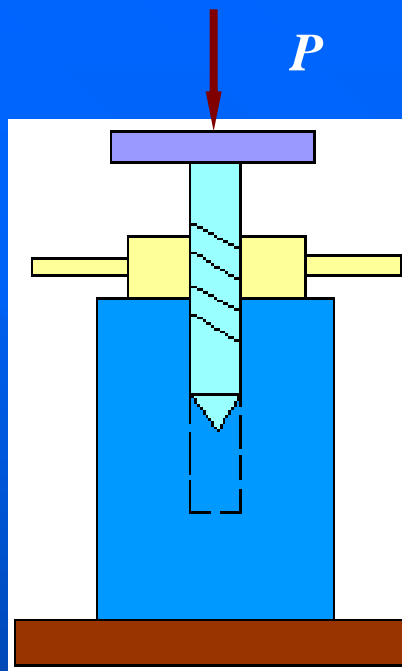
自锁的应用

螺旋

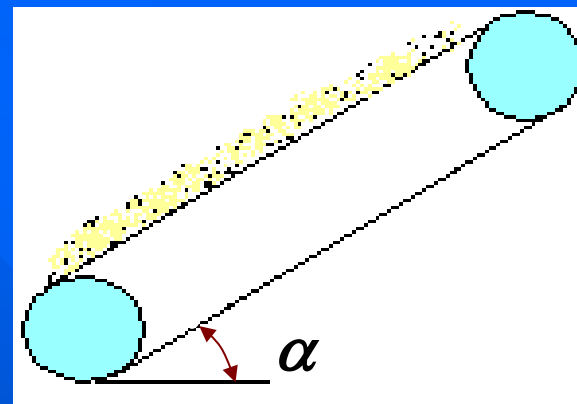


螺纹的自锁条件就是斜面的自锁条件。螺纹可看成是绕在一圆柱体上的斜面，螺纹的升角就是斜面倾角。螺母就相当于斜面上的滑块。

自锁在工程中的应用

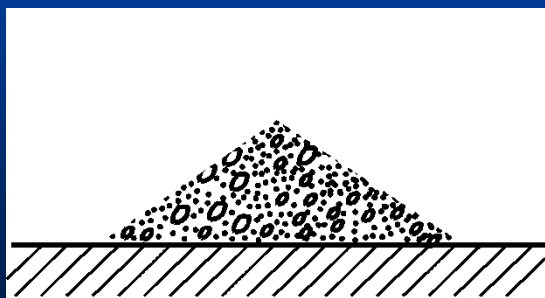


千斤顶

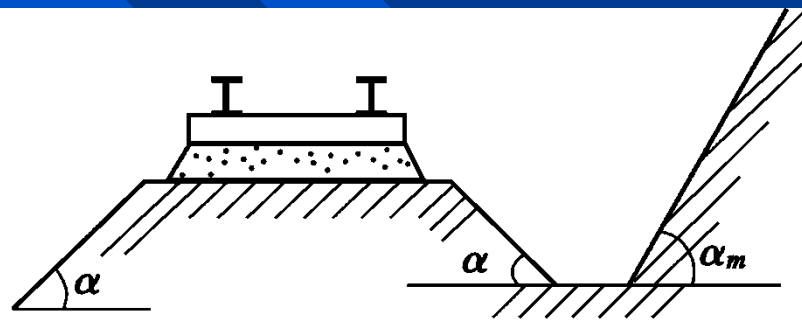


黄沙输送带的锥角值 α

$$\alpha \leq \varphi_m$$

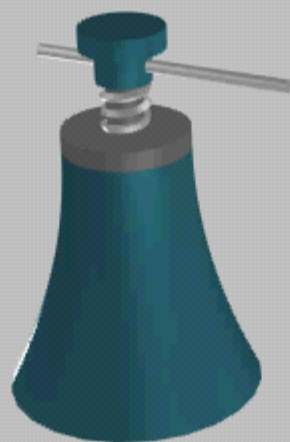


(a)



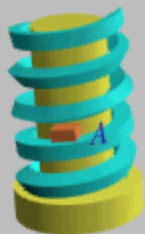
(b)

螺旋千斤顶



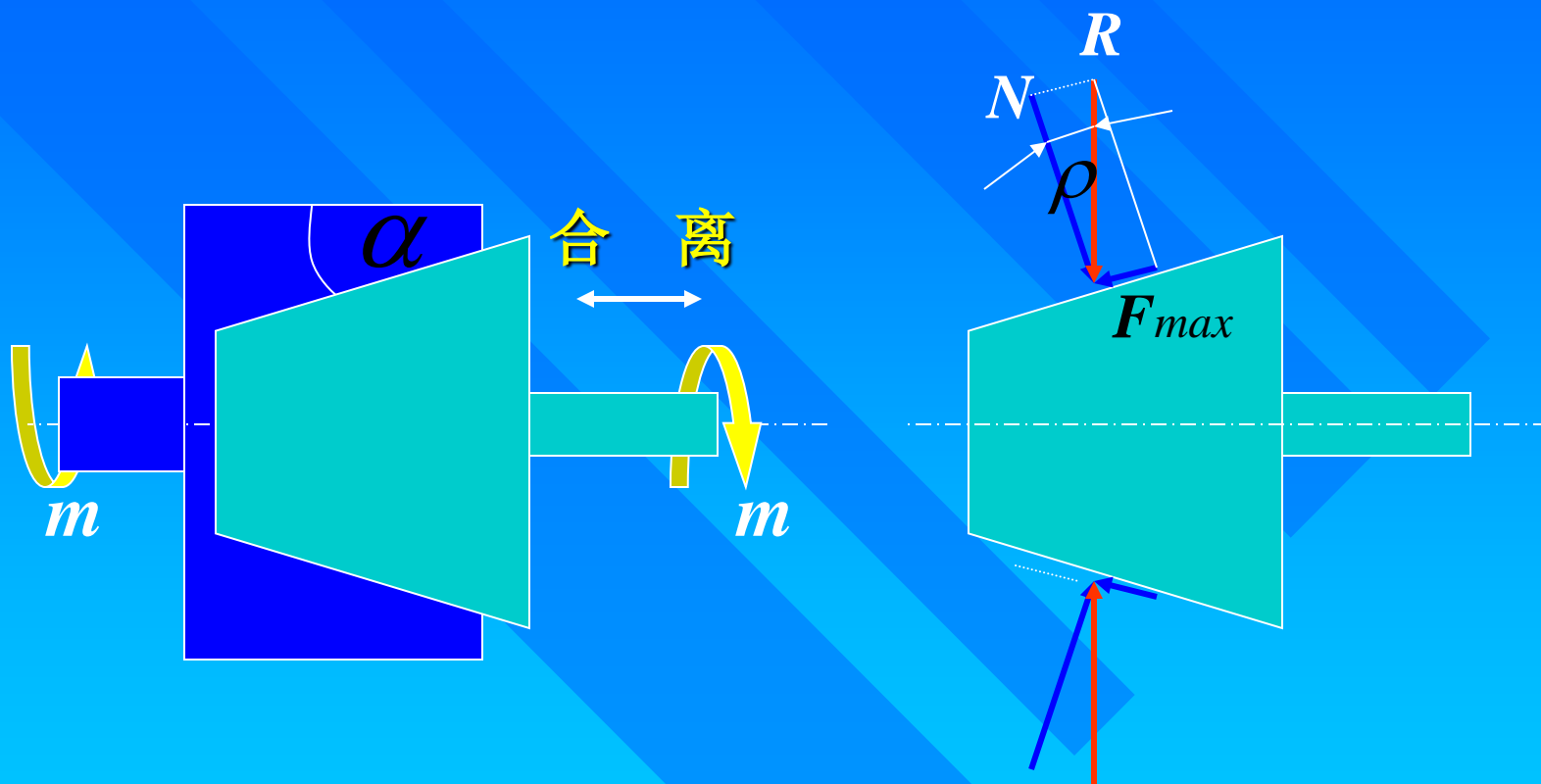
三十 J6千斤顶.avi

斜面自锁的条件



三十一 J6斜面自锁.avi

锥体摩擦离合器自锁条件

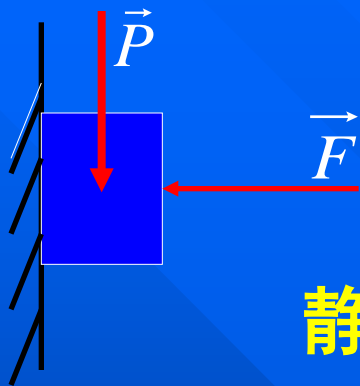


自锁条件: $\alpha \leq \rho$

小 结

- 静摩擦力： $0 \leq F \leq F_{\max}$ 由平衡方程确定
- 最大静摩擦力： $F_{\max} = f_s F_N$ 由静滑动摩擦定律确定
- 动摩擦力： $F' = f F_N$ 由动滑动摩擦定律确定

思考题



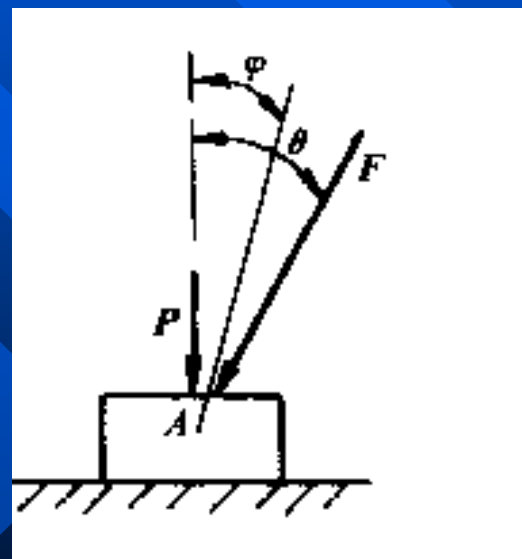
$$P=100\text{N}$$

$$F=300\text{N}$$

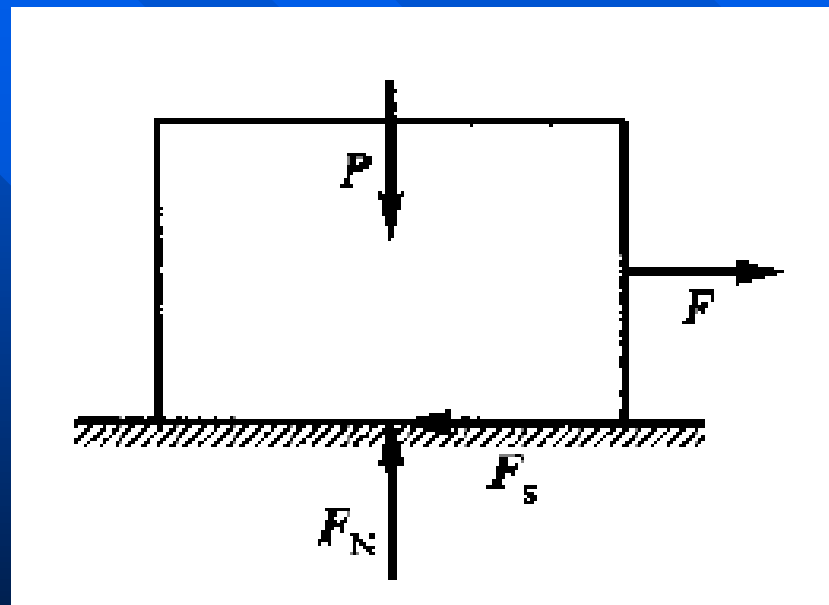
静滑动摩擦力多大？120N？

静摩擦因数为0.4

物块A重为 P ，放在粗糙的水平面上，其摩擦角 $\varphi_m=20^\circ$ 。若一力 F 作用于摩擦角之外并已知 $\theta=30^\circ$ ， $F=P$ ，试问物块能否保持平衡？为什么？



例：图示一均质矩形块，高度为 a ，重为 P ，与地面间的静滑动摩擦因数为 f ，其上作用水平力 F 。若矩形块处于平衡状态，试问图示受力图是否正确？并说明理由。



三、考虑摩擦时物体的平衡问题

按静摩擦力的性质，常见的考虑摩擦的平衡问题大致分为如下4类：

- (1) 物体处于临界平衡状态时，求解有关未知量的值。即求解物体处于临界状态下的平衡问题。
- (2) 已知物体所受的主动力，判断物体处于静止还是滑动。
- (3) 对应于静摩擦力可取值的范围，物体的平衡同样具有一定的范围，如何来确定这个平衡范围。
- (4) 倾覆问题。

考虑摩擦时物体的平衡问题与不考虑摩擦时的平衡问题
解题方法、步骤大致相同，区别如下：

- (1) 分析物体受力时，要考虑摩擦力，未知量个数增加了；
- (2) 为确定增加的未知量，必须建立补充方程：

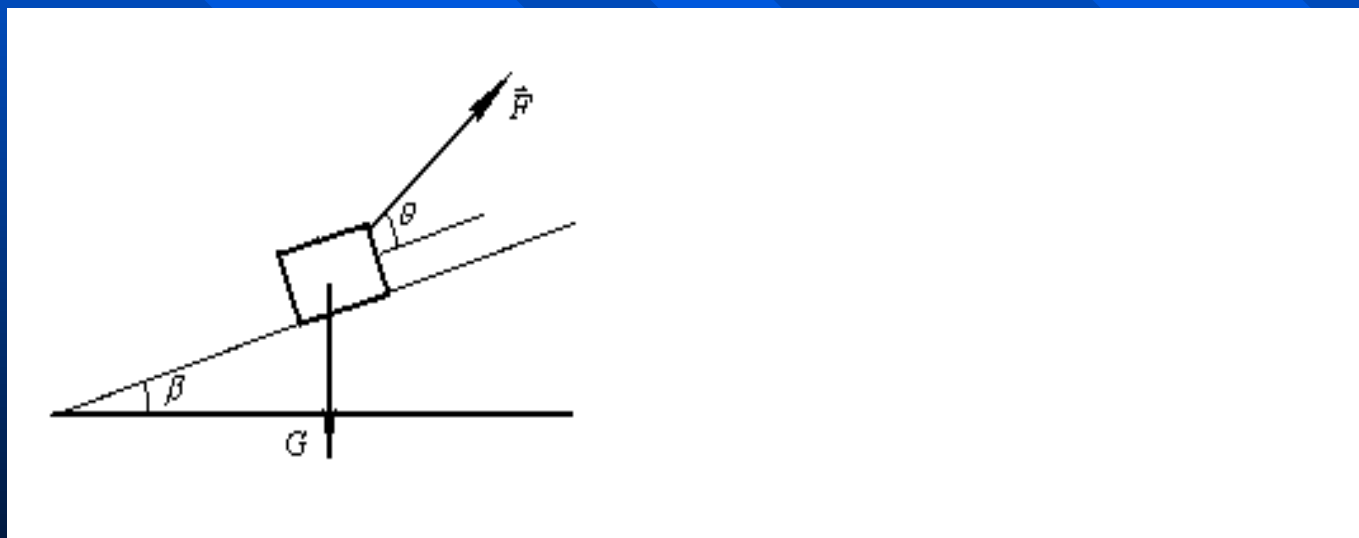
$$0 < F_S \leq F_{\max} = f_s N$$

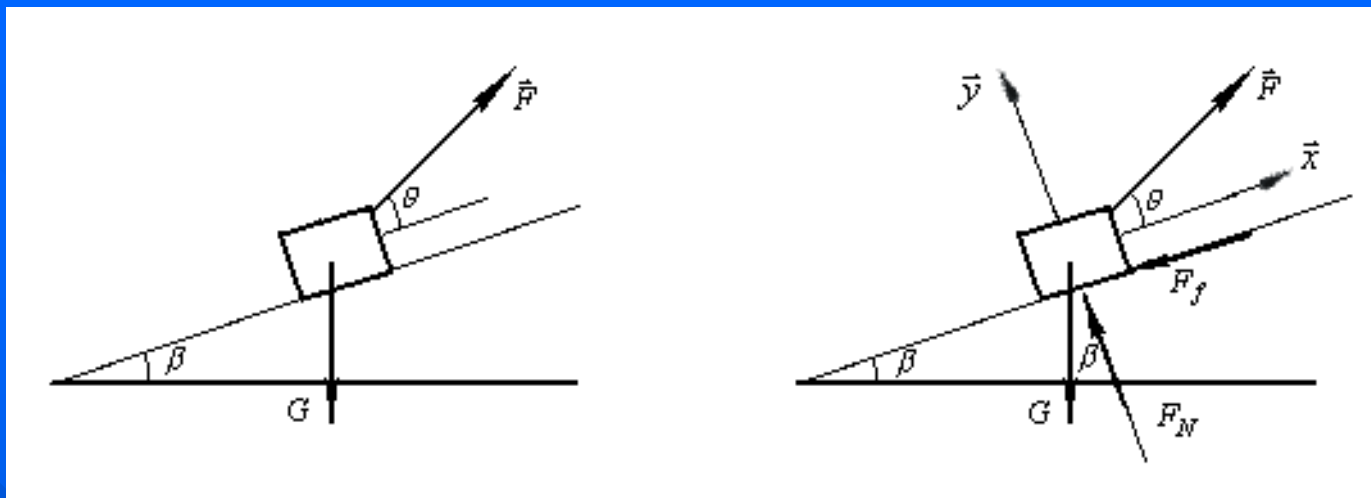
补充方程的数目等于摩擦力的个数。

- (3) 由于物体平衡时摩擦力有一定的范围， $(0 < F_S \leq F_{\max} = f_s N)$ ，因此在一般情况下，问题的解也是一个范围值，而不是一个确定值。只有在临界情况下，补充方程取等号，解才可能是个确定值。在一般情况下，常常先在临界情况下计算，求得结果后再分析、讨论其平衡范围。
- (4) 在临界情况下求解有摩擦的平衡问题时，摩擦力方向必须根据物体相对滑动的趋势正确判定，不能任意假设。而在非临界状态时，摩擦力方向可以任意假设。

习题1

重 G 的物体放在倾角为 β 的斜面上，物体与斜面间的摩擦角为 ϕ ，如在物体上作用力 F ，此时与斜面的交角为 θ ，求拉动物体上行时的 F 值，并问当角 θ 为何值时，此力最小。





如图建立坐标系，拉动物体时， $F_f = F_N \cdot f_s = F_N \cdot \tan \phi$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0$$

$$F \sin \theta + F_N - G \cos \beta = 0$$

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0$$

$$F \cos \theta - F_f - G \sin \beta = 0$$

$$\theta = \phi$$

$$F = G \sin(\beta + \phi)$$

$$F \cos \theta \cos \phi - G \cos \beta \sin \phi + F \sin \theta \sin \phi - G \sin \beta \cos \phi = 0$$

$$\longrightarrow F = G \frac{\sin(\beta + \phi)}{\cos(\theta - \phi)}$$

分母最大， F 为极小值

例：人重为 P ，不计重量的梯子放在粗糙的地面、墙面上，梯长 L ，求：人到达最大高度时的 x_{\min} 。 $f = f_A = f_B$

解： $\sum F_{ix} = 0, F_{BN} - F_{Am} = 0 \quad (1)$

$\sum F_{iy} = 0, F_{AN} + F_{Bm} - P = 0 \quad (2)$

$\sum M_{iB} = 0,$
 $F_{Am} L \sin \alpha + P x_{\min} - F_{AN} L \cos \alpha = 0 \quad (3)$

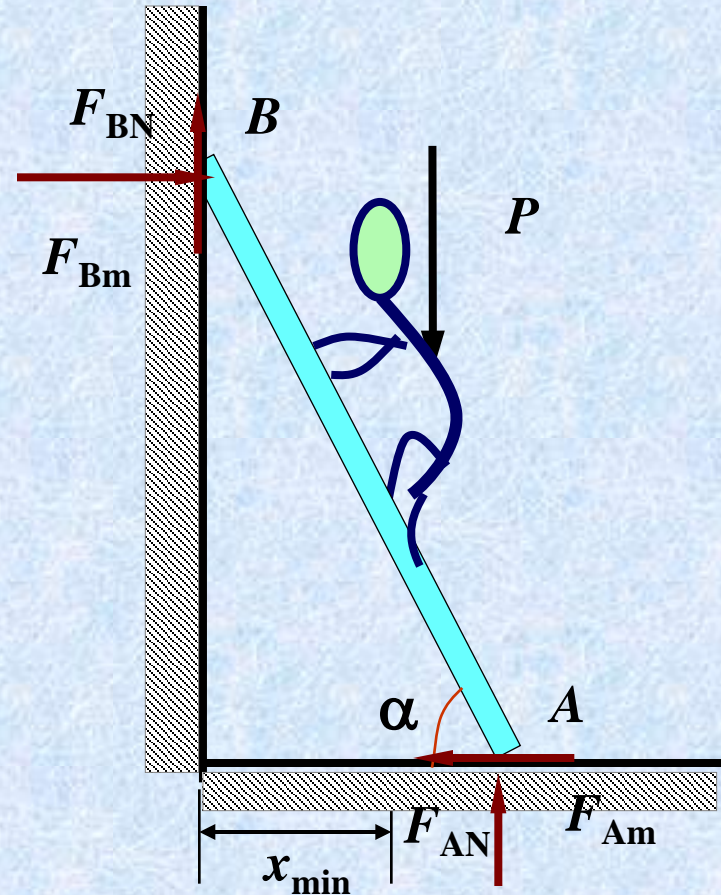
$F_{Am} = f_A F_{AN} \quad (4), \quad F_{Bm} = f_B F_{BN} \quad (5)$

$$x_{\min} = \frac{(\cos \alpha - f_A \sin \alpha) L}{1 + f_A f_B}$$

$$f = f_A = f_B$$

$$x_{\min} = \frac{(\cos \alpha - f \sin \alpha) L}{1 + f^2}$$

x_{\min} 与 P 无关。



[例3] 均质杆 OC 长 $l=4\text{m}$ ，重 $P=500\text{N}$ ；轮重 $W=300\text{N}$ ，与杆 OC 及水平面的摩擦系数 $f_A=0.4$ ， $f_B=0.2$ ，滚动摩擦不计。求**拉动**圆轮所需力 Q 的**最小值**。

解：(一) 研究 OC 杆

受力分析如图，列平

衡方程求解：

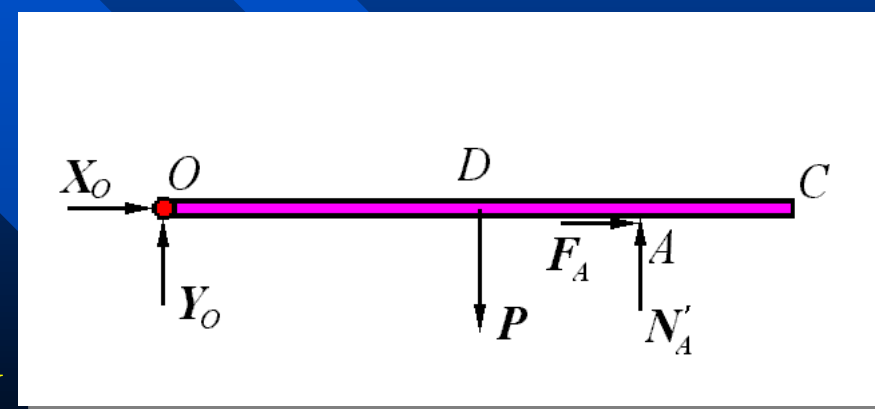
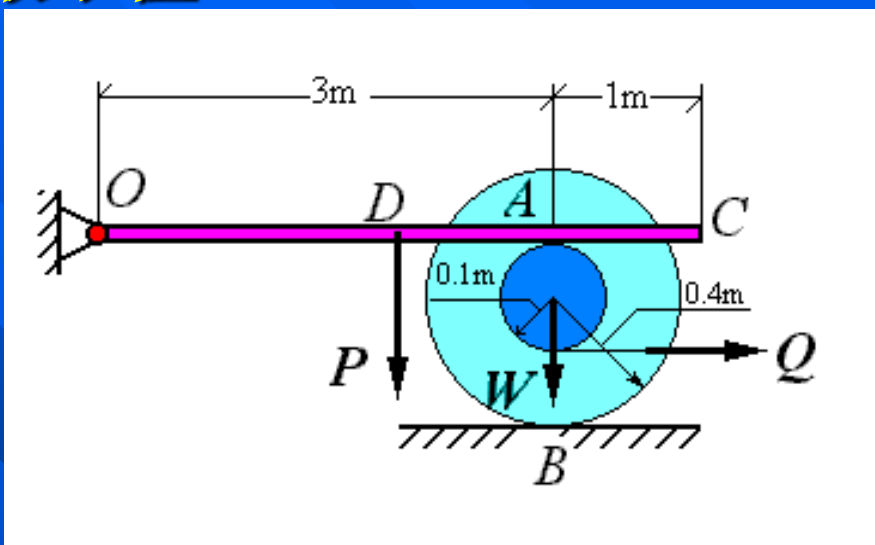
$$\sum m_O(\bar{F}) = 0,$$

$$N'_A \cdot \frac{3l}{4} - P \cdot \frac{l}{2} = 0 \quad (1)$$

解得：

$$N'_A = N_A = \frac{2}{3} \cdot 500 = 333 \text{ N}$$

$$N'_A = -N_A = -\frac{2}{3} \cdot 500 = -333 \text{ N}$$



(二) 研究轮 O_1

$$\sum Y = 0, N_B - N_A - W = 0 \quad (2)$$

解得: $N_B = 633 \text{ N}$

(1) 若 A 点不动, $F_B = F_{B\max}$

$$\sum m_A(\bar{F}) = 0, Q_1 \cdot 0.2 - F_{B\max} \cdot 0.5 = 0 \quad (3)$$

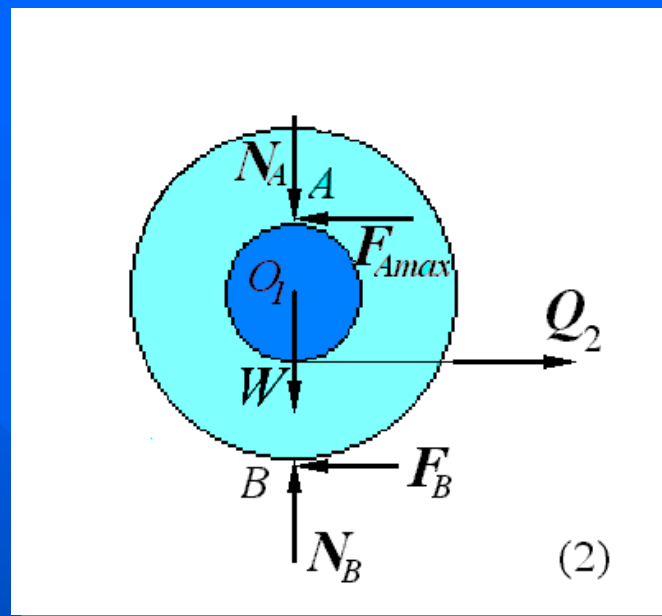
$$F_{B\max} = f_B \cdot N_B = 0.2 \cdot 633 = 127 \text{ N} \quad (4)$$

解得: $Q_1 = 317 \text{ N}$

(2) 若 B 点不动, $F_A = F_{A\max}$

$$\sum m_B(\bar{F}) = 0, F_{A\max} \cdot 0.5 - Q_2 \cdot 0.3 = 0 \quad (5)$$

$$F_{A\max} = f_A \cdot N_A = 0.4 \cdot 333 = 133 \text{ N} \quad (6)$$



解得:

$$Q_2 = 222 \text{ N}$$

因此取:

$$Q_{\min} = Q_2 = 222 \text{ N}$$

注意: 本例题与前面两个摩擦面例题 (梯子) 的区别。

[例]图示一折叠梯放在地面上，与地面的夹角 $\theta = 60^\circ$ 。脚端A与B和地面的摩擦因数分别为 $f_{sA} = 0.2$ ， $f_{sB} = 0.6$ 。在折叠梯的AC侧的中点处有一重为500N的重物。不计折叠梯的重量，问它是否平衡？如果平衡，计算两脚与地面的摩擦力。

处理此类问题时首先**假定系统为平衡**。由于系统不一定处于静摩擦的临界情况，可通过**平衡方程**求得这些未知的**静摩擦力**。所得的结果必须与**最大静摩擦力**进行比较，以确认上述系统平衡的假定是否成立。

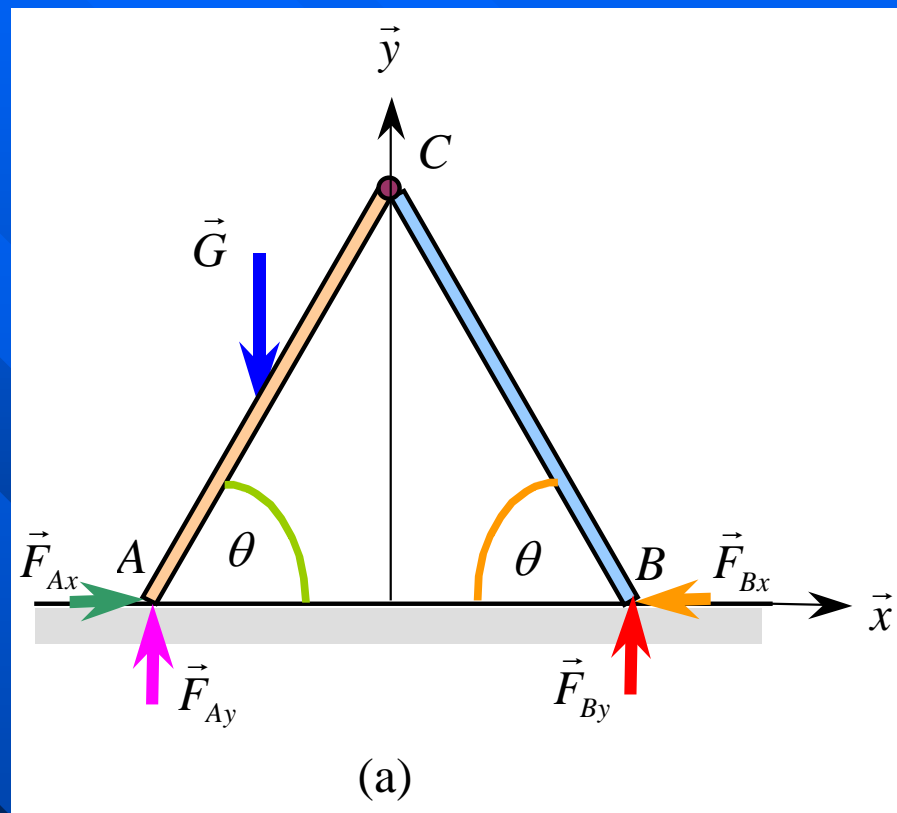
令脚端A与B的法向约束力分别为

$$\vec{F}_{Ay} \text{ 与 } \vec{F}_{By}$$

静摩擦力分别为

$$\vec{F}_{Ax} \text{ 与 } \vec{F}_{Bx}$$

6个独立平衡方程求解6个未知量。



以整体为对象，令等边三角形的边长为 b ，建立坐标系如图，有平衡方程

$$\sum_{i=1}^n M_A(\vec{F}_i) = 0$$

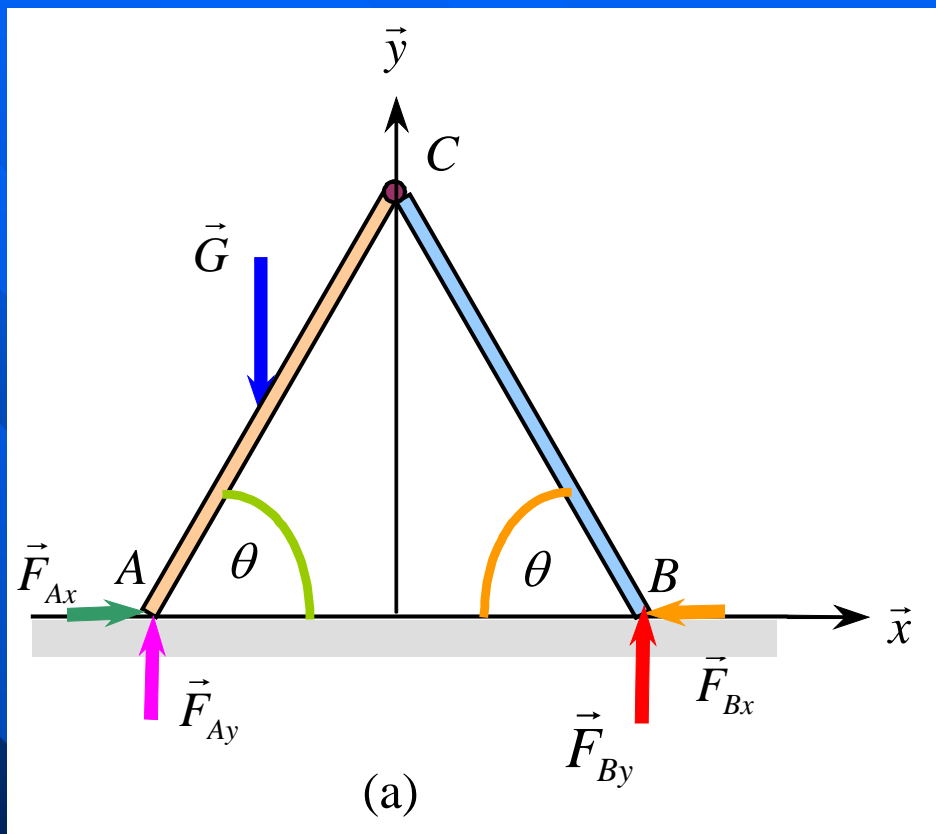
$$\longrightarrow bF_{By} - 0.25bG = 0$$

$$\longrightarrow F_{By} = 0.25G = 125 \text{ N}$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0$$

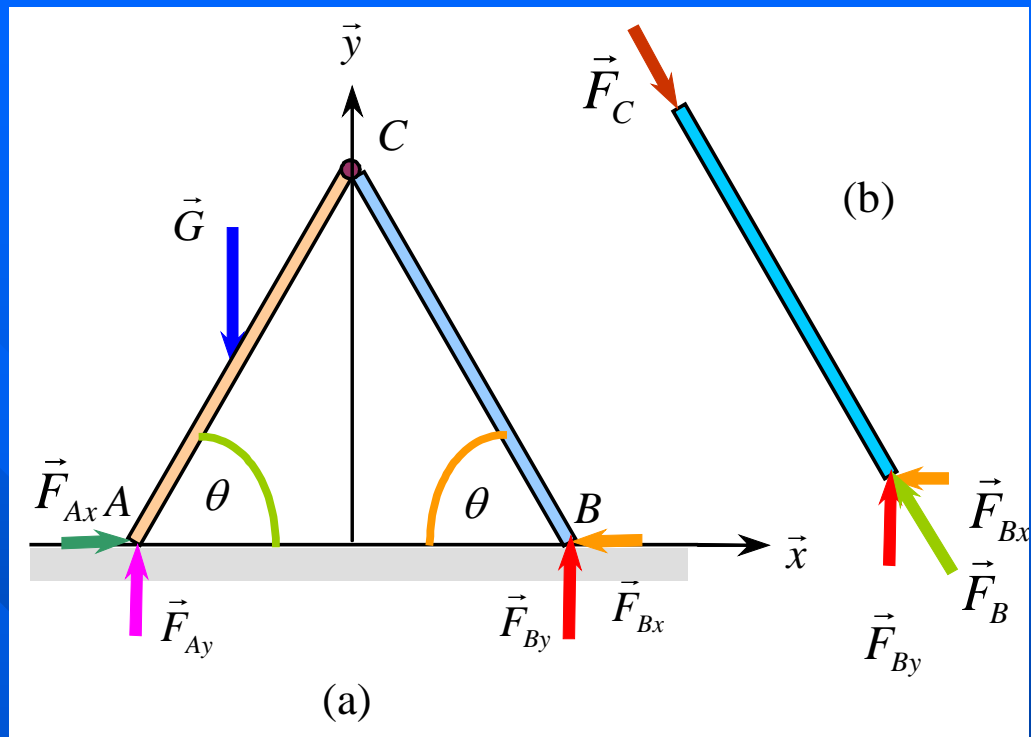
$$\longrightarrow F_{Ay} + F_{By} - G = 0$$

$$\longrightarrow F_{Ay} = G - F_{By} = 375 \text{ N}$$



以杆 **BC** 为对象，由于不计杆件的重量，该杆为**二力杆**，即摩擦力与法向约束力的合力与铰 C 的约束力均沿杆的轴线。由图 b 的矢量几何，有：

$$F_{Bx} = F_{By} \tan 30^\circ = 72.17 \text{ N}$$



(或者以**BC**为研究对象对C点取矩)

再以**整体**为对象，有平衡方程

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \quad F_{Ax} - F_{Bx} = 0$$

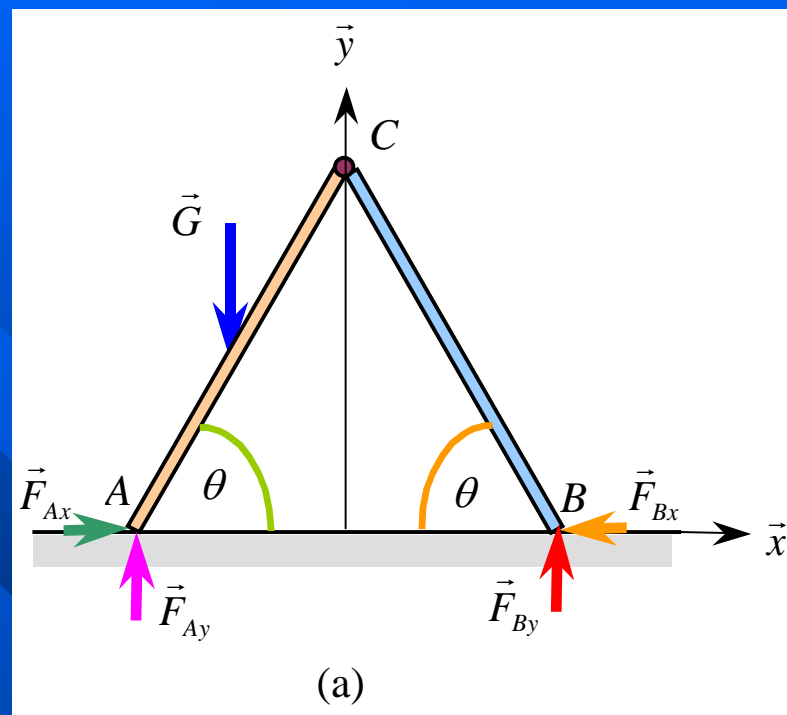
$$F_{Ax} = F_{Bx} = 72.17 \text{ N}$$

下面判断系统是否处于静平衡

脚端A 与B 的极限静摩擦力分别为：

$$F_{mA} = f_{sA} F_{Ay} = 75 \text{ N}$$

$$F_{mB} = f_{sB} F_{By} = 75 \text{ N}$$



脚端A与B的摩擦力均小于极限静摩擦力，可见折梯处于平衡的假定成立。

例

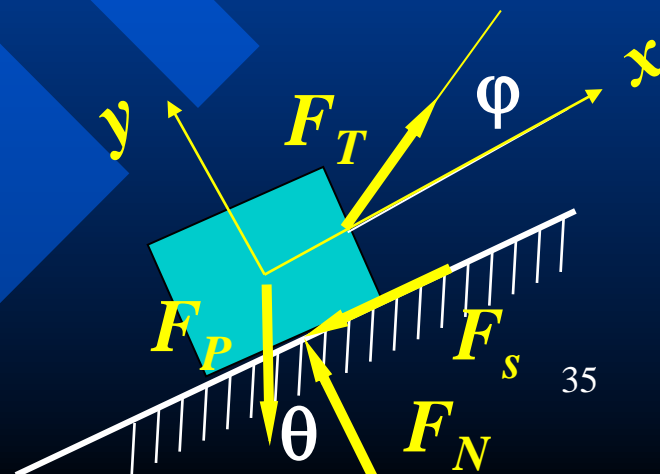
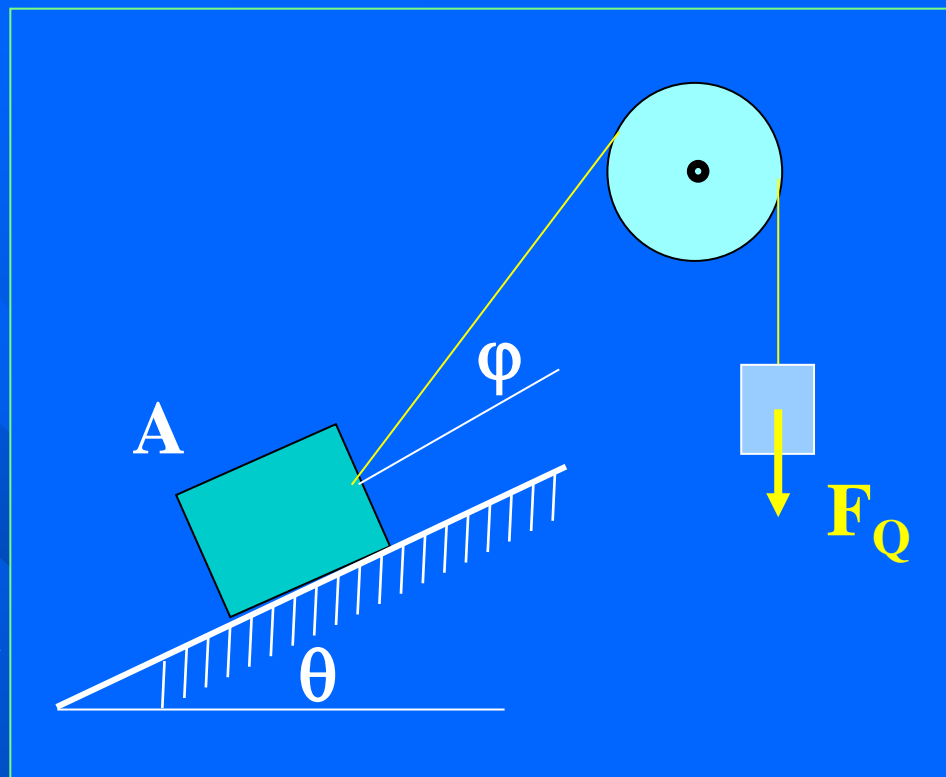
已知：A块重 F_P , θ , φ , 物块与斜面间的摩擦因数为 f_s 。

求：能使A块保持平衡的 F_Q 的值。

解：取A块，分析受力
摩擦力的方向？

○ 设有上滑趋势。

此时，摩擦力方向如图。
建立坐标系如图。

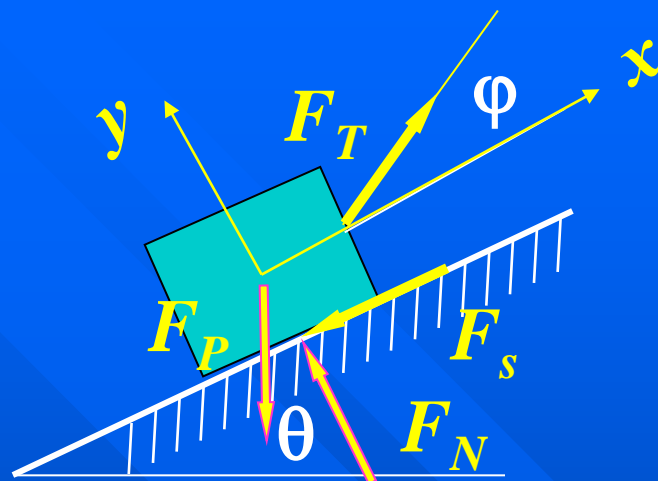


$$\sum X = 0$$

$$F_T \cos \varphi - F_P \sin \theta - F_s = 0$$

$$\sum Y = 0$$

$$F_N + F_T \sin \varphi - F_P \cos \theta = 0$$



设达到临界状态，则有： $F_s = f_s F_N$

解出：

$$F_T = \frac{\sin \theta + f_s \cos \theta}{\cos \varphi + f_s \sin \varphi} F_P$$

记为：

$$= F_{Q \max}$$

○设有下滑趋势

这时，摩擦力方向向上。

$$\sum X = 0 \quad F_T \cos \varphi - F_P \sin \theta + \underline{F_s} = 0$$

$$\sum Y = 0$$

$$F_N + F_T \sin \varphi - F_P \cos \theta = 0$$

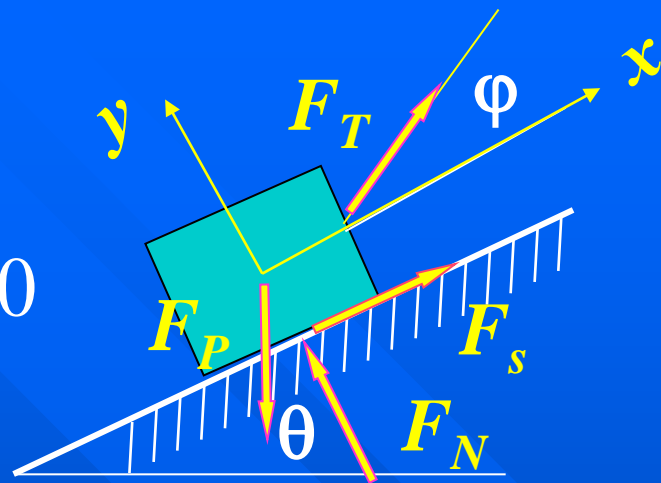
设达到临界状态，则有： $F_s = f_s F_N$

$$\text{解出： } F_T = \frac{\sin \theta - f_s \cos \theta}{\cos \varphi - f_s \sin \varphi} F_P$$

$$\text{记为： } = F_{Q \min}$$

结论：平衡时， F_Q 的值为：

$$F_{Q \min} \leq F_Q \leq F_{Q \max}$$



倾覆问题（翻倒问题）

例6：矩形柜如图，柜重 G ，重心 C 在其几何中心，柜与地面间的静摩擦因数是 f_s ，施加水平向右的力 F ，求能使柜**运动**所需推力 F 的最小值。

解：〔矩形柜〕

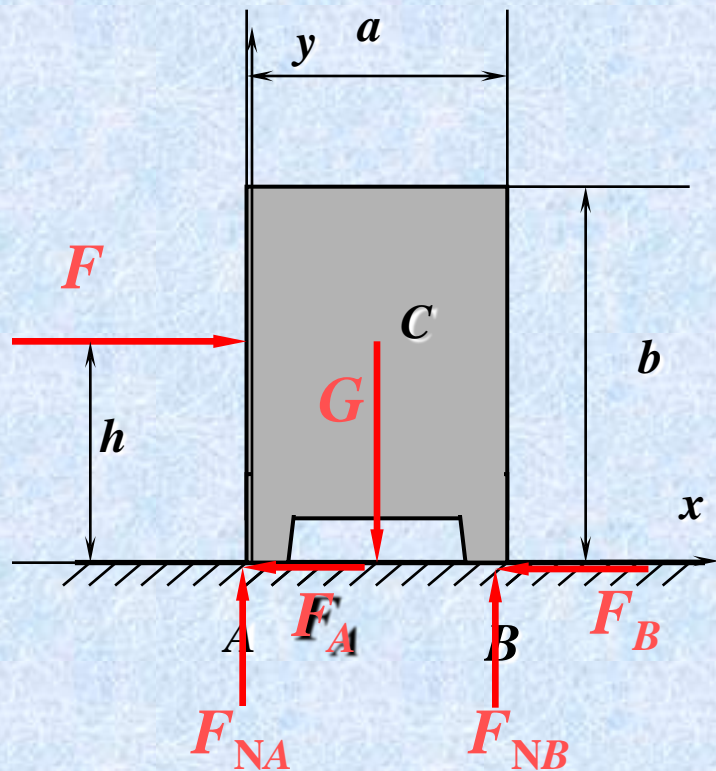
1 . 假设其处于滑动的临界平衡状态。

$$\sum F_x \equiv 0 \quad F - F_A - F_B \equiv 0$$

$$\sum F_y \equiv 0 \quad F_{NA} + F_{NB} - G \equiv 0$$

补充方程：

$$F_A \equiv f_s F_{NA}, \quad F_B \equiv f_s F_{NB}$$



最小推力:

$$F_{\text{滑}} \equiv G f_{\text{fs}}$$

2. 假设矩形柜处于即将绕 B 点倾覆的临界平衡状态。

$$\sum M_B \equiv 0 \quad G \times \frac{a}{2} - F \times h - F_{\text{NA}} \times a = 0$$

即将绕 B 点倾覆的临界状态: $F_{\text{NA}} = 0$

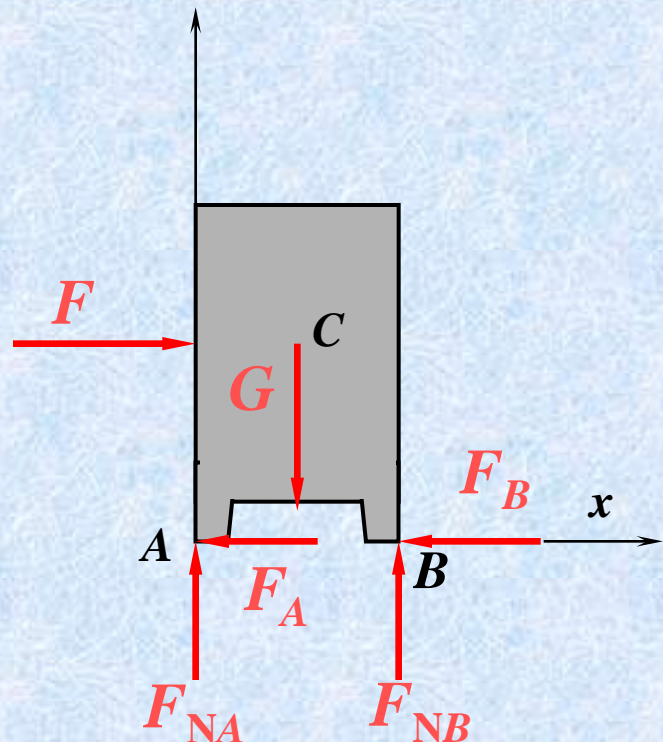
$$F \leq \frac{Ga}{2h}$$

使柜翻倒的最小推力为:

$$F_{\text{翻}} \equiv \frac{Ga}{2h}$$

能使柜运动所需推力

$$F \equiv \min\{F_{\text{滑}}, F_{\text{翻}}\}$$



通过以上各例分析，现将考虑摩擦时物体的平衡问题的解题要点归纳如下：□

(1) 在临界情况下求解有摩擦的平衡问题时，摩擦力方向必须根据物体相对滑动的趋势正确判定，不能任意假设。

(2) 在判断物体是否处于静止时，可以先假定物体处于静止而分别计算物体接触面上的静摩擦力 F 和可能达到的最大静摩擦力 F_{\max} ，然后比较 F 和 F_{\max} 的大小。

(3) 在求解临界平衡问题时，除列出平衡方程外，还要列出补充方程 $F_{max}=f_s N$ ，将其与平衡方程联立求解未知量。□

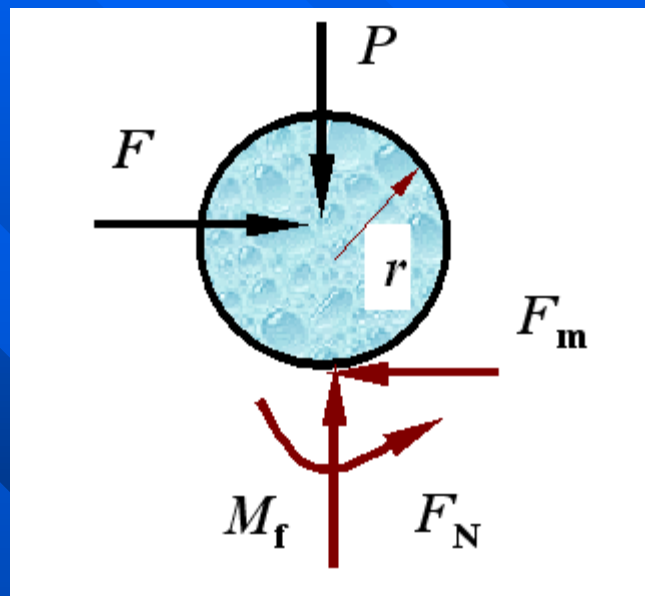
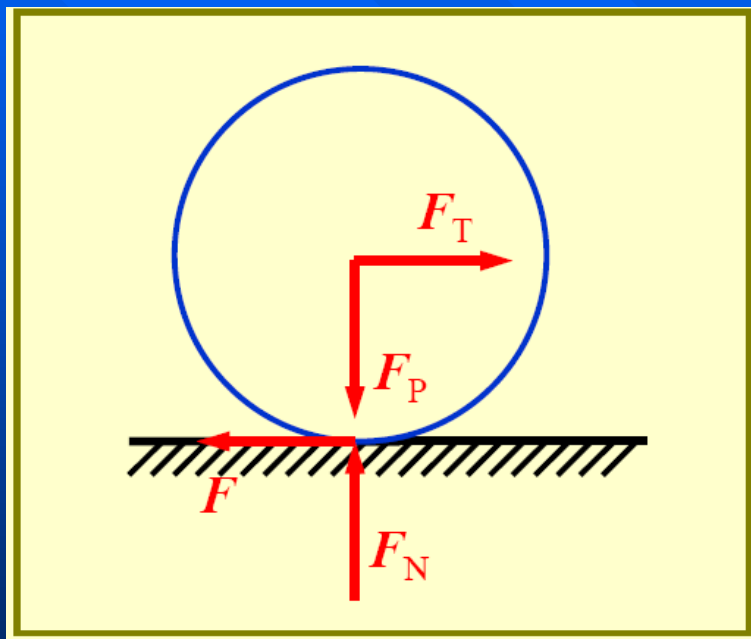
(4) 在求解平衡范围问题时，常常先在临界情况下计算，求得结果后再分析、讨论其平衡范围。

(5) 对于多个摩擦面的临界平衡问题要注意区分是所有摩擦力都达到最大值物体才会运动还是部分摩擦力达到最大值物体就会运动。

2-1 滚动摩擦（滚动摩阻）

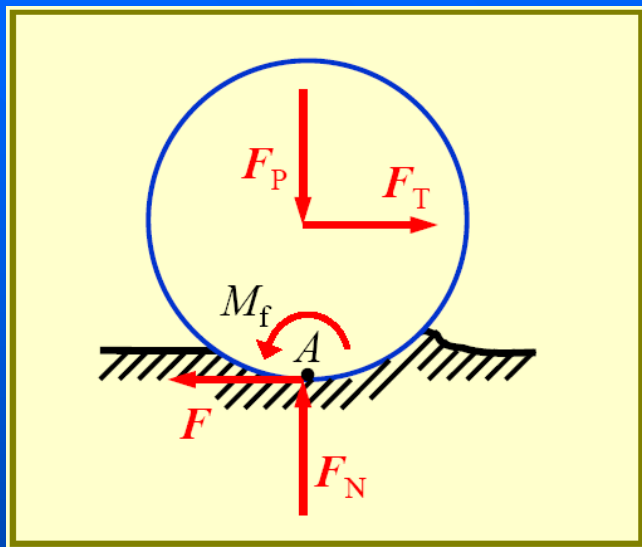
滚动摩擦又称为滚动摩阻，是指一物体沿另一物体表面相对滚动（或有相对滚动趋势）时接触面产生的一种作用，这种作用阻碍物体的相对滚动。

刚性约束假设所带来的问题



M_f 称为滚动摩阻力偶（简称为滚动阻力偶。）

滚动摩阻力偶矩是怎样产生的？



滚子与支承面事实上均非刚体，在受力后会发生变形，因而滚子与支承面为**面接触**，分布在接触面上的约束反力，严格讲是一个空间力系。

与静滑动摩擦力相似，滚动摩阻力偶矩 M_f 随主动力偶矩（ F_T ， F ）的增大而增大，当滚子处于将动未动的临界状态时，滚动摩阻力偶矩达到最大值 M_{max} ，称为最大滚动摩阻力偶矩。在滚子滚动后，滚动摩阻力偶矩近似等于 M_{max} 。

在一般情况（非临界情况）下，滚动摩阻力偶矩介于0和 M_{max} 之间，即 $0 \leq M_f < M_{f \max}$

$$M_{f \max} = F_N \delta \quad (\text{滚动摩阻定律})$$

其中比例常数 δ 称为滚动摩阻系数（长度单位）。

滚动摩阻系数由接触面材料确定，单位一般为mm。

对比：在一般情况下（非临界状态） $0 \leq F < F_{\max}$

临界平衡状态 $F = F_{\max}$

/// **最大静摩擦力**——物体将动还未动时，摩擦力达到最大值。

$$F_{\max} = f_s F_N$$

f_s ——静摩擦因数， F_N ——法向压力。

例 轮胎半径为 $r=40\text{cm}$,载重 $W=2000\text{N}$,轴传来的推力为 P ,设滑动摩擦系数 $f=0.6$,滚动摩阻系数 $\delta=2.4\text{mm}$,试求推动此轮胎前进的力 P .

解: (1)选轮子为研究对象,画出轮子的受力图. 轮子受力有载重 W 、推力 P 、法向反力 N 、滑动摩擦力 F 、滚动摩擦力偶矩 m ,这是一个平面任意力系.

(2)列平衡方程,求未知量

轮子前进有两种可能: 一.向前滚动 二.向前滑动

(a).分析向前滚动的临界状态:列平衡方程 (P 、 N 、 F 、 m 共4个未知量,需要1个补充方程):

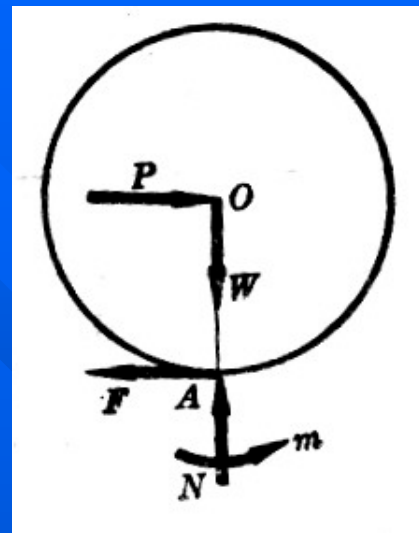
$$\sum X=0 \quad P-F=0 \quad P=F$$

$$\sum Y=0 \quad N-W=0 \quad N=W$$

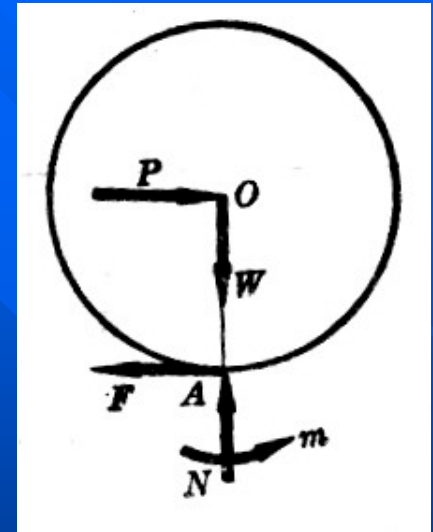
$$\sum m_A=0 \quad m-Pr=0 \quad m=Pr$$

轮子刚要开始向前滚动时,滚动摩擦力偶矩为 $m=m_{\max}=\delta N$. (补充方程)

$\rightarrow Pr=\delta N \quad \rightarrow P=\delta W/r=0.24\times 2000/40=12\text{N}$, 所以只要12N的力就可以使轮子向前滚动. (注意: 此时静滑动摩擦力 $F=12\text{N}$ 并未达到最大值, 故轮胎未滑动. 这种只滚不滑的运动称为纯滚动).



- (b).分析向前滑动的临界状态: :如果轮子刚要开始滑动, 3个静力平衡方程不变, 则摩擦力 F 等于最大摩擦力, 补充方程变为 $F=F_{max}=fN$, 同理求解可得,
 $P=fW=0.6\times 2000=1200\text{N}$.这就是说, 要使轮子向前滑动, 需加1200N的力, 这种状态是不可能出现的, 因此当推力 P 到达12N时, 轮子就向前滚动了.



- (3)分析讨论. 一般情况下, $\frac{\delta}{r} \ll f$ 说明滚动要比滑动省力得多. 所以工程中通常以滚动代替滑动.

由于在工程实践中滚动摩阻力偶矩通常比较小。因此以后除非特别说明（滚动摩阻力偶矩或滚动摩阻系数），一般情况下，滚动摩阻力偶可忽略不计。