第七章　刚体的平面运动

回顾：运动学研究对象：点和刚体。

第五章讲述刚体的基本运动：平动、定轴转动

本章讲述刚体的另一种常见运动：平面运动

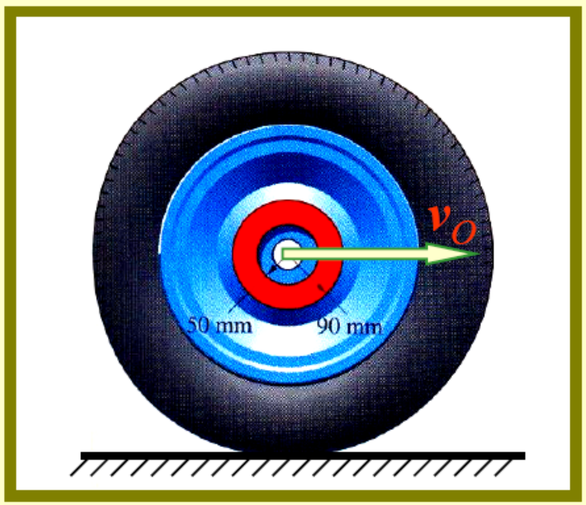
事实上，平面运动可看成是平动、定轴转动的合成。

对土木类专业而言，平面运动的理论是土建工程中对平面结构进行机动分析的理论依据。

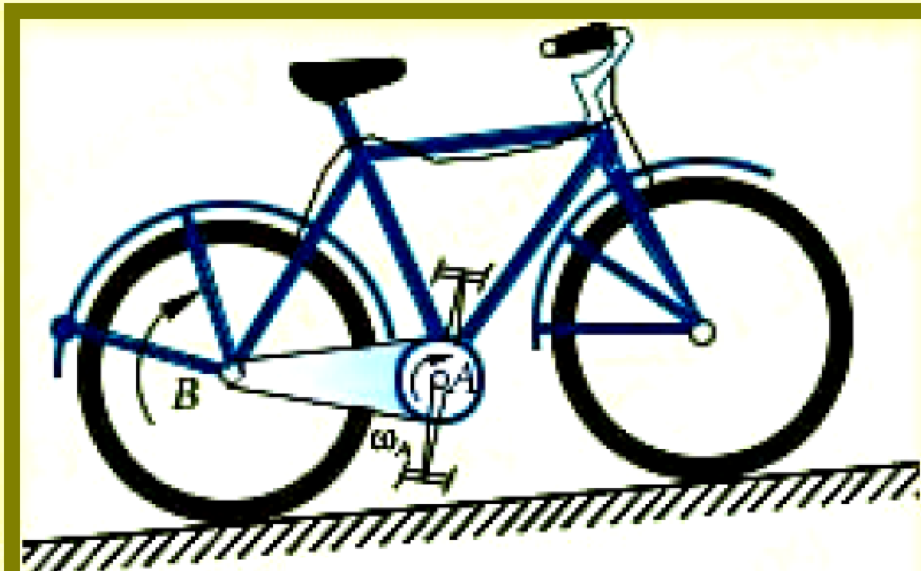
§ 7-1 平面运动的基本概念

平面运动——在运动过程中，刚体上任一点到某一固定平面的距离始终保持不变．也就是说，刚体上任一点都在与该固定平面平行的某一平面内运动．具有这种特点的运动称为刚体的平面运动．

实例

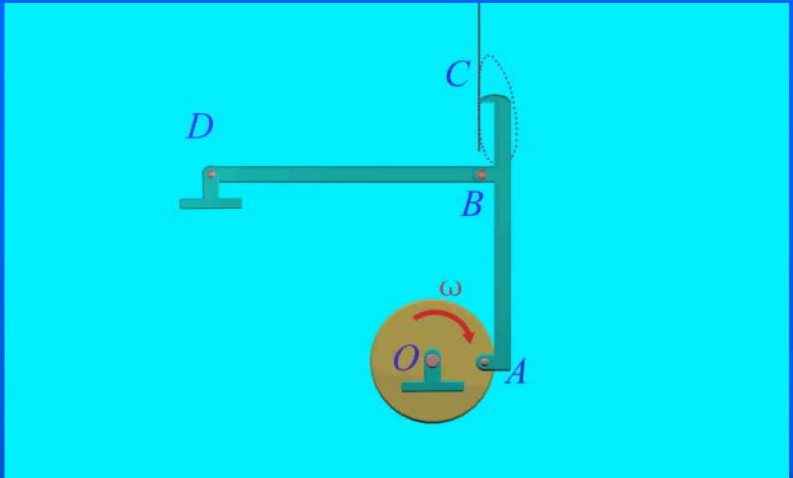


车轮在固定平面上作纯滚动

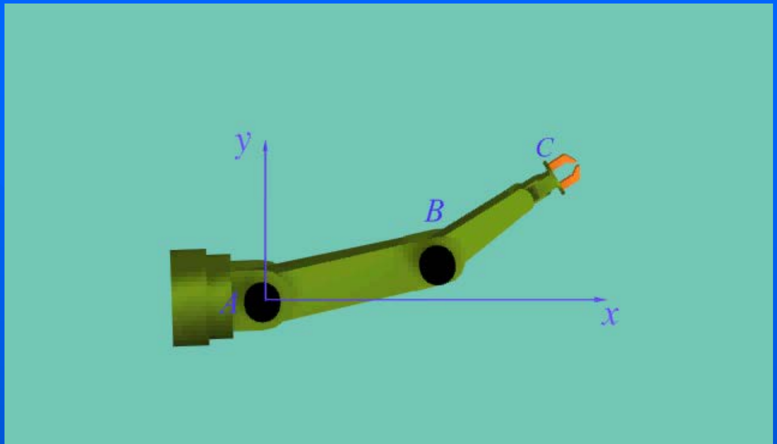


自 行 车

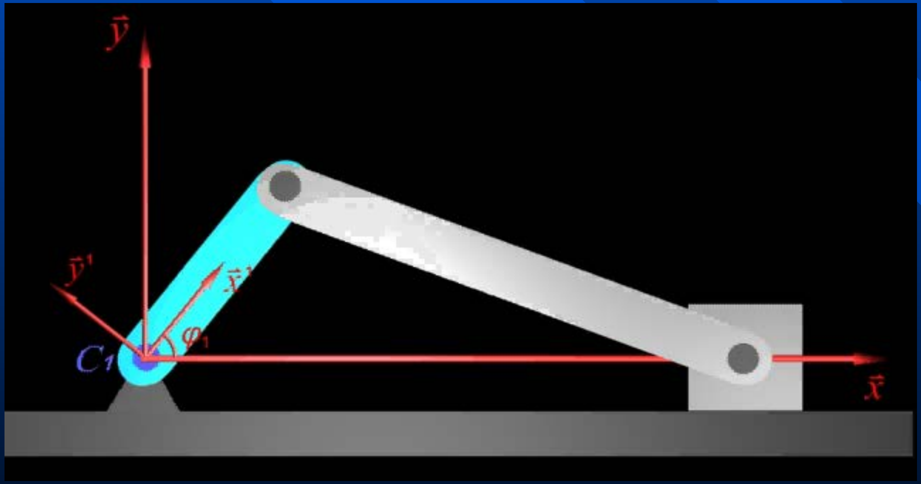
纯滚动：只滚不滑的运动



电影放映机中的四连杆机构



机器人的机械 手的两种运动分解



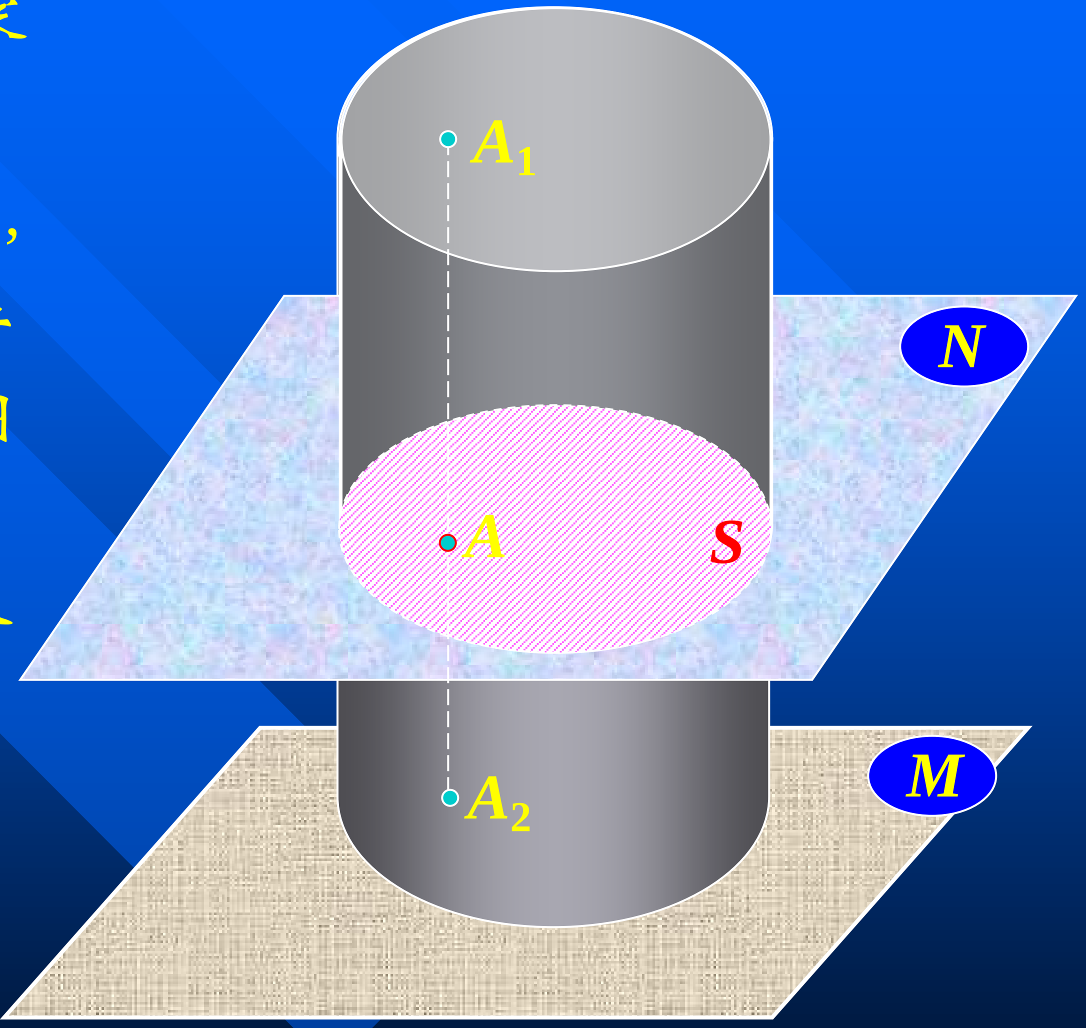
一.平面运动的简化

刚体上每一点都在与固定平面M平行的平面内运动。

若作一平面N与平面M平行，并以此去截割刚体得一平面图形S。可知该平面图形S始终在平面N内运动。

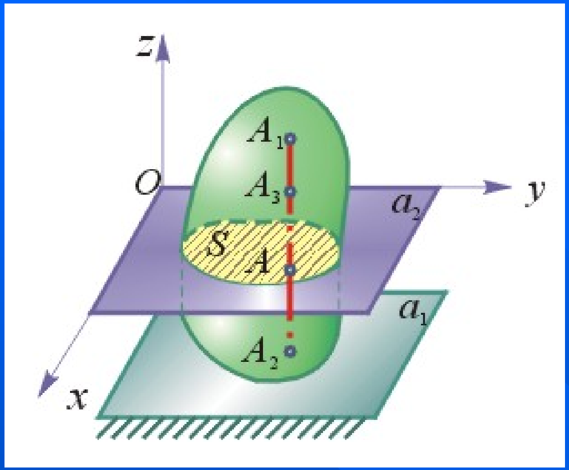
因而垂直于图形S的任一条直线A_1A_2必然作平动。

A_1A_2的运动可用其与图形S的交点A的运动来替代。



刚体的平面运动可以简化为平面图形在其自身平面S内的运动。

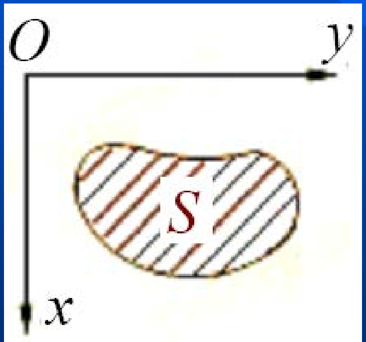
一.平面运动的简化



特点：

1、平面图形S始终在平面内

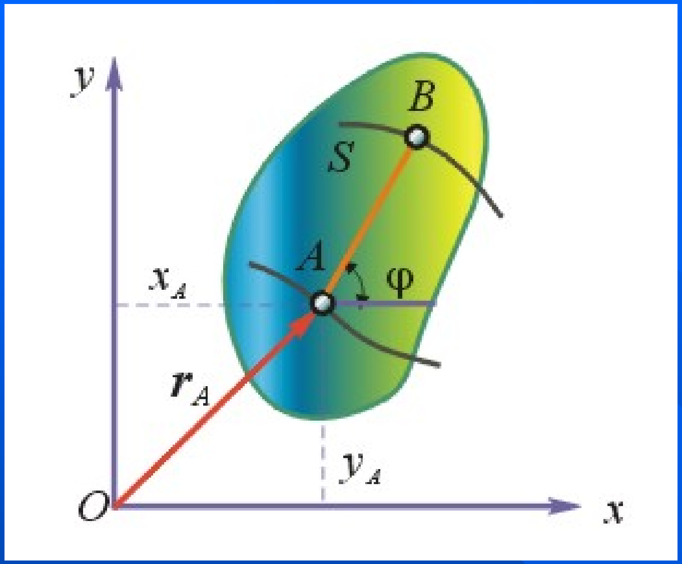
2、作垂线A_1A_2，且始终作平动



结论：

即在研究平面运动时，可以简化为只研究平面图形在自身平面内的运动，确定平面图形上各点的速度和加速度。

二.平面运动方程



确定线段AB的运动，A为**基点**。

A点（基点）的坐标和转角均为时间t的单值连续函数。

$$\begin{cases} x_A = x_A(t) \\ y_A = y_A(t) \\ \varphi = \varphi(t) \end{cases}$$

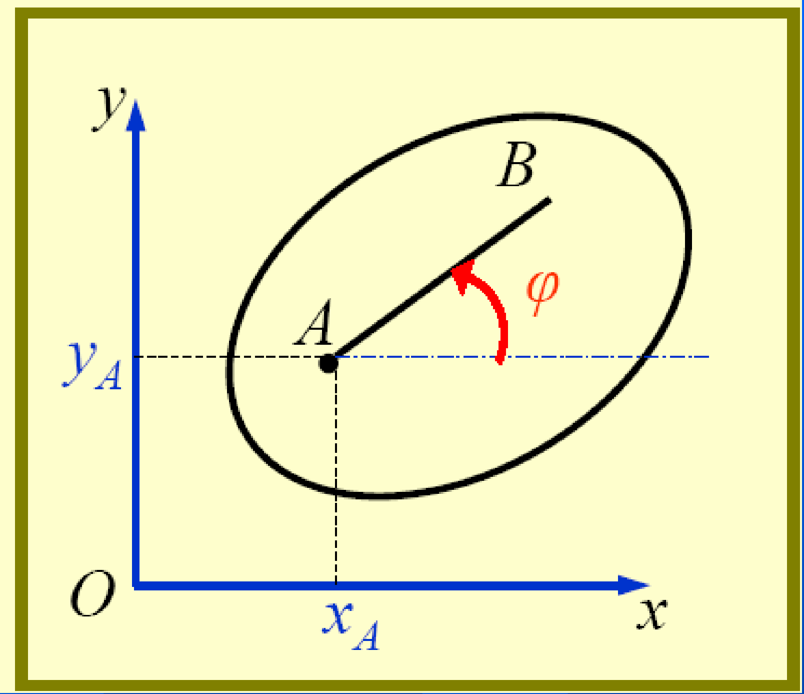
刚体作平面运动时的运动方程

为了确定代表平面运动刚体的平面图形的位置，我们只需确定平面图形内任意一条线段AB的位置.

任意线段AB的位置可用A点的坐标和AB与x轴夹角表示. 因此图形S 的位置决定于 x_A, y_A, φ 三个独立的参变量.

§ 7-2 平面运动分解为平动和转动

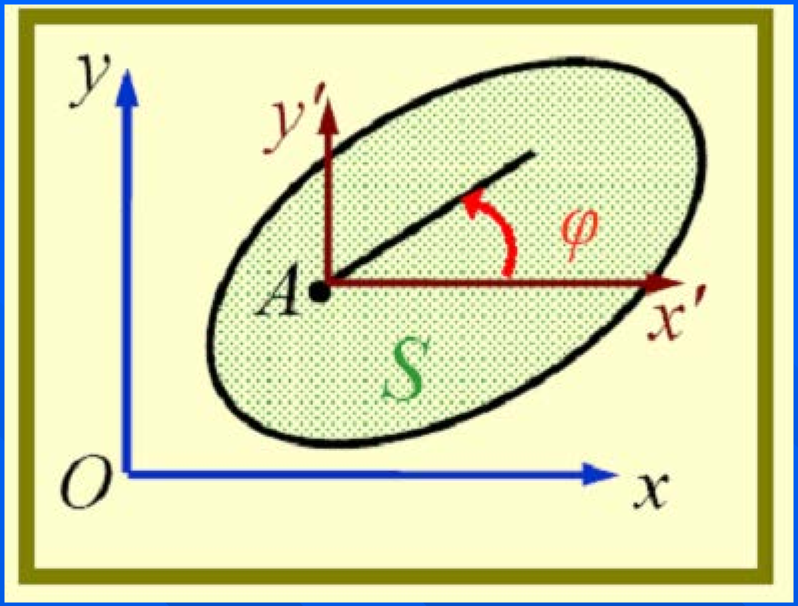
$$\begin{cases} x_A = x_A(t) \\ y_A = y_A(t) \\ \varphi = \varphi(t) \end{cases}$$



当图形 S 上 A 点不动时，则刚体作定轴转动

当图形 S 上 φ 角不变时，则刚体作平动.

故刚体平面运动可以看成是平动和转动的合成运动.



刚体的平面运动可以分解为随基点的平动和绕基点的转动.

视频剪辑

包

包

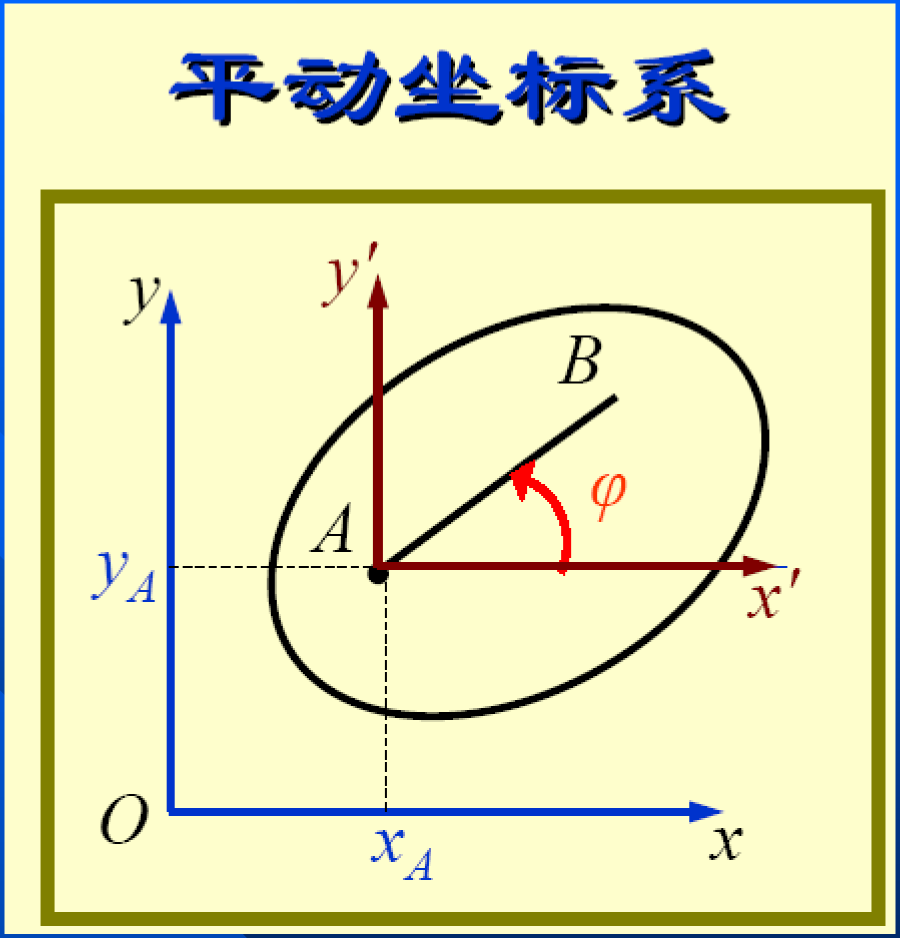
这种研究刚体平面运动的方法称为基点法(method of base point）。

以基点A为原点引入坐标系$Ax'y'$，使坐标轴始终保持：

$$Ax' // Ox$$

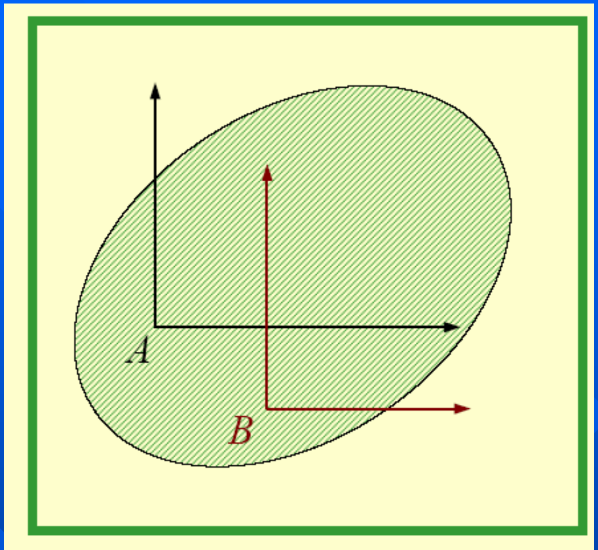
$$Ay' // Oy$$

这样的坐标系$Ax'y'$称为平动坐标系。



基点法是研究刚体平面运动的基本方法

▲ 基点的选择是任意的



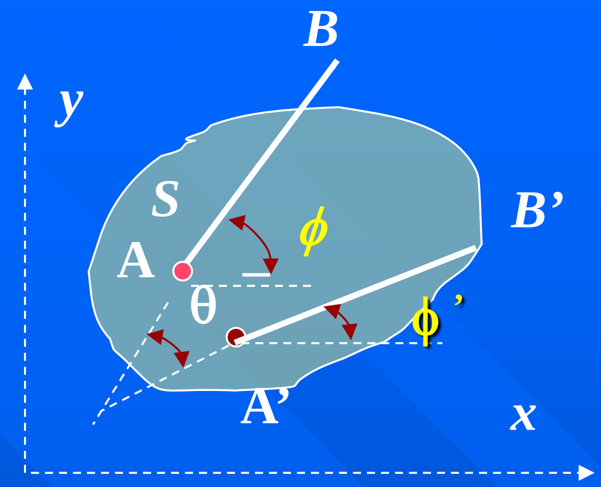
▲ 基点是图形运动分解的基准— —

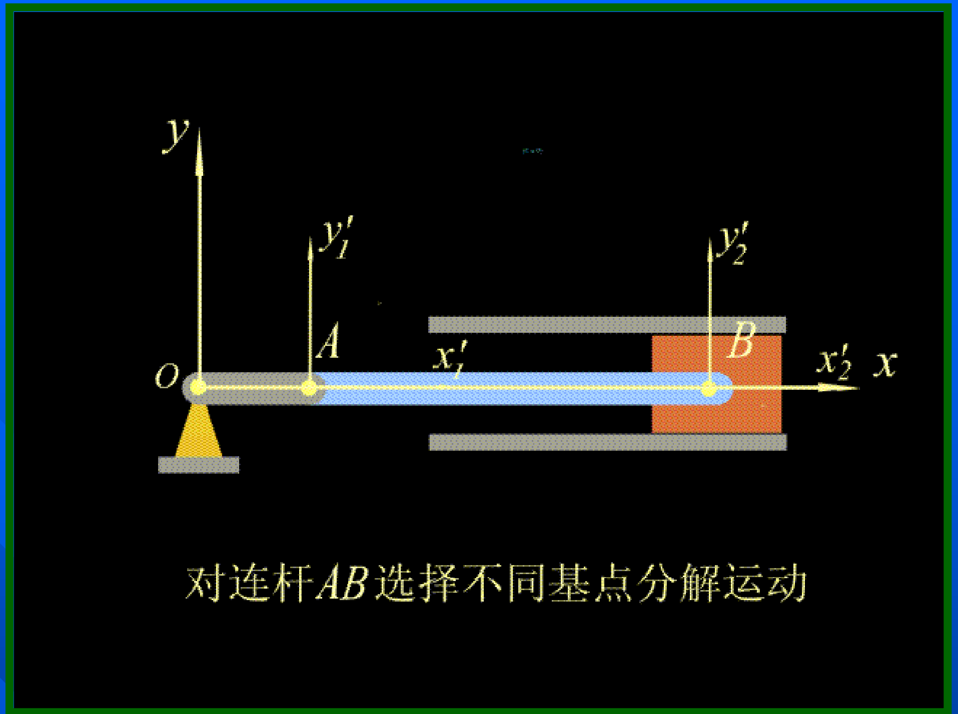
1. 显然，平面运动随基点平动的运动规律与基点的选择有关。

2. 但绕基点转动的规律与基点选取无关. （为什么？）

$\phi - \phi' = \theta$

$= 常数$

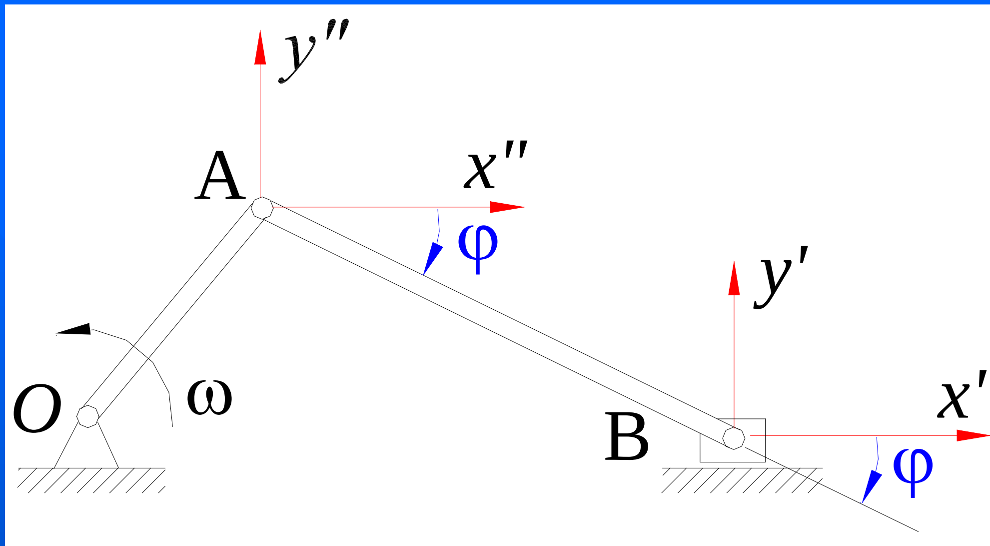




$$\omega = \frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi'}{dt} \qquad \alpha = \frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2\phi'}{\mathrm{d}t^2}$$

ω,α与基点A、A'无关。

对于各平动参考系（包括固定参考系），其转动运动都一样，**一个刚体在同一瞬间只有一个角速度、角加速度，故无需标明绕哪个基点转动。**



基点选取得不同，随基点平动的部分不同

但绕不同基点转动的角速度和角加速度完全相同。

平面运动可取任一点作为基点而分解为平动和转动。其中平动的速度和加速度与基点的选取有关，而平面图形绕基点转动的角速度和角加速度与基点的选取无关。

注意：

虽然基点可任意选取，但在解决实际问题时，往往选取运动情况**已知的点作为基点**。

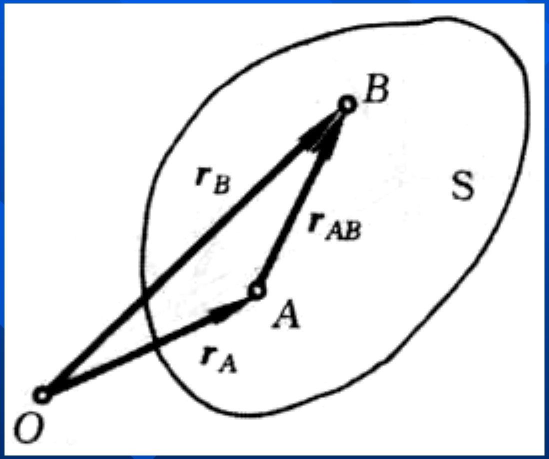
§ 7-3 平面图形内各点的速度

基点法、投影法、瞬心法

一、基点法（基本方法）

在平面图形S上任取两点A和B，以A点为基点，从同平面的一固定点O作A、B的矢径r_A和r_B，再作从A点指向B点的矢径r_{AB}，则有

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{AB}$$



两边对时间t求导，可得

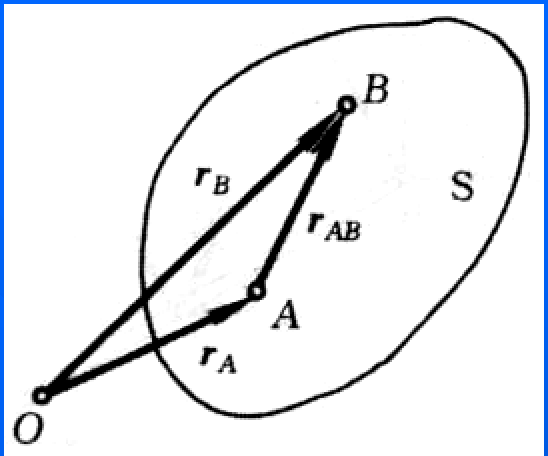
$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{r}_{AB}}{dt}$$

注意到r_A和r_B是绝对矢径，则

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \vec{v}_B \qquad \frac{d\vec{r}_A}{dt} = \vec{v}_A$$

注意到r_{AB}是相对矢径，而且其大小不变，因此它对时间的导数只表示其方位的改变。由于B点相对于A点是圆周运动，所以

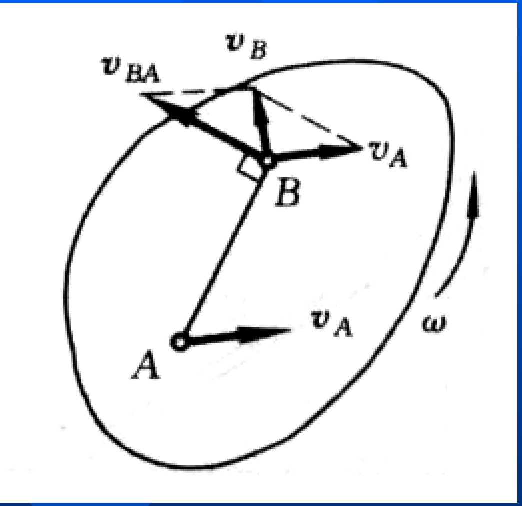
$$\frac{d\vec{r}_{AB}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB}$$



记其为v_{BA}，可得以A点为基点情况下平面运动刚体A和B两点的速度关系为：

$$\boxed{\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}}$$

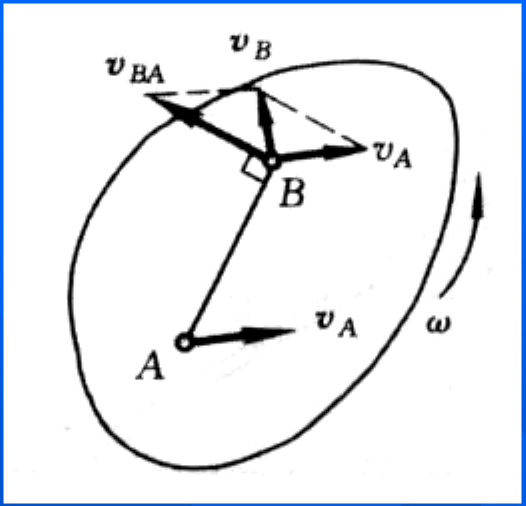
其中，$\left|\vec{v}_{BA}\right| = v_{BA} = \omega r_{AB} = \omega \cdot BA$



结论：平面图形内任意点的速度，等于基点速度与该点绕基点作圆周运动速度的矢量和。——这种方法称为基点法

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$$

式中包含3个速度矢量，大小、方向共6个量，该矢量方程可求解二个未知量。通常已知4个求解二个未知量。



上式建立了平面图形上任意两点速度间的关系，由该式在平面内可以建立两个标量方程求解包括速度大小或方向的两个未知量。

注意：1. v_{BA}下标的次序不能交换。

2. 在速度合成的平行四边形中v_B为对角线。

3. 求解方法：几何法（通常）、解析法

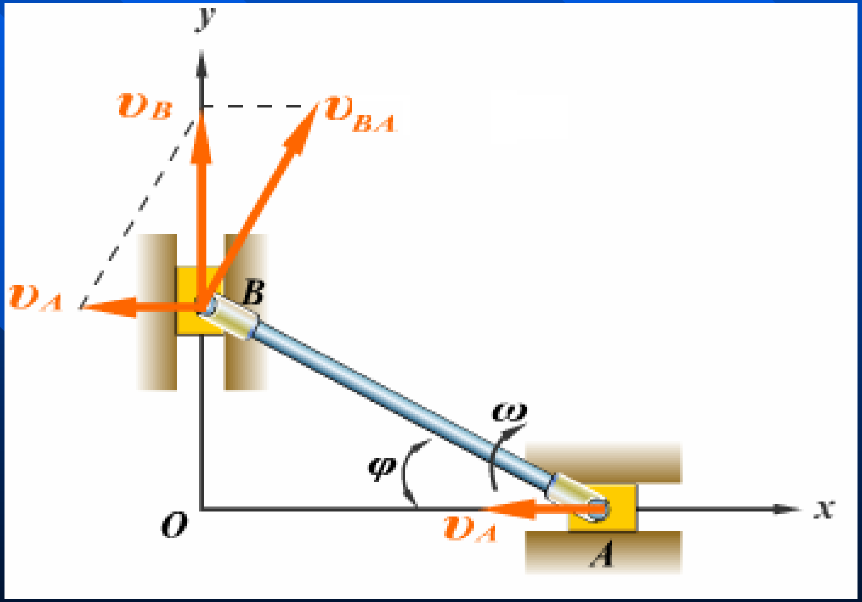
已知： φ, v_A，$AB=l$, 求： v_B, ω_{AB} 。

解：1 AB作平面运动，用基点法，基点：A（速度已知）

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$$

大小 ？ v_A ？

方向 √ √ √ 椭圆规规尺AB



$$v_B = v_A \, ctg\varphi$$

$$v_{BA} = \frac{v_A}{\sin\varphi}$$

$$\omega_{AB} = \frac{v_{BA}}{l} = \frac{v_A}{l\sin\varphi}$$

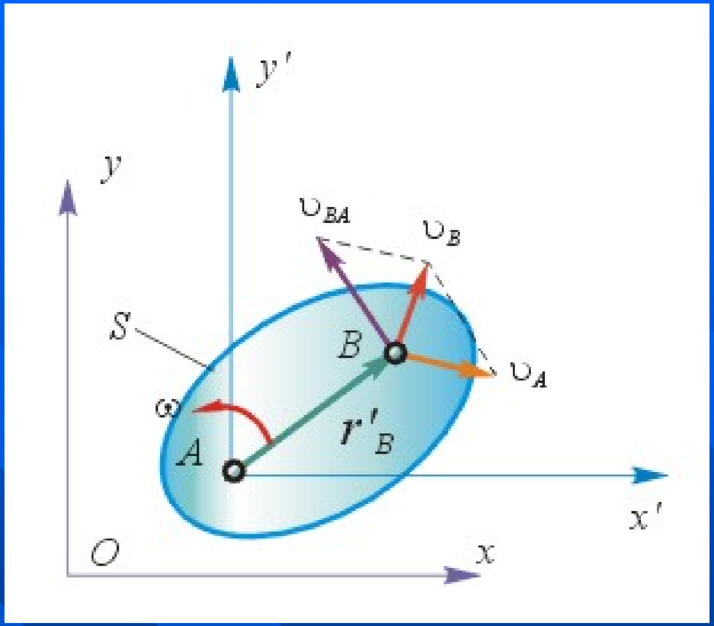
基点法：不仅可以求出某瞬时平面图形上某点的速度，还能求出其作平面运动的角速度。

二、投影法

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$$

将上式向AB轴投影，得

$$[\vec{v}_A]_{\overline{AB}} = [\vec{v}_B]_{\overline{AB}}$$



速度投影定理——平面图形上任意两点的速度在这两点连线上的投影彼此相等。

投影法：根据**速度投影定理**求解平面运动刚体速度的方法，特点是比较简单，但不能求出某瞬时平面图形作平面运动的角速度。

已知：$OA = 100\,\mathbf{mm}$，　$\omega_{OA} = \omega = \mathbf{2rad/s}, CD = 3CB, CD \perp ED$。求：$v_E$

若轮E半径也为100mm，求其角速度。

解： 用投影法。

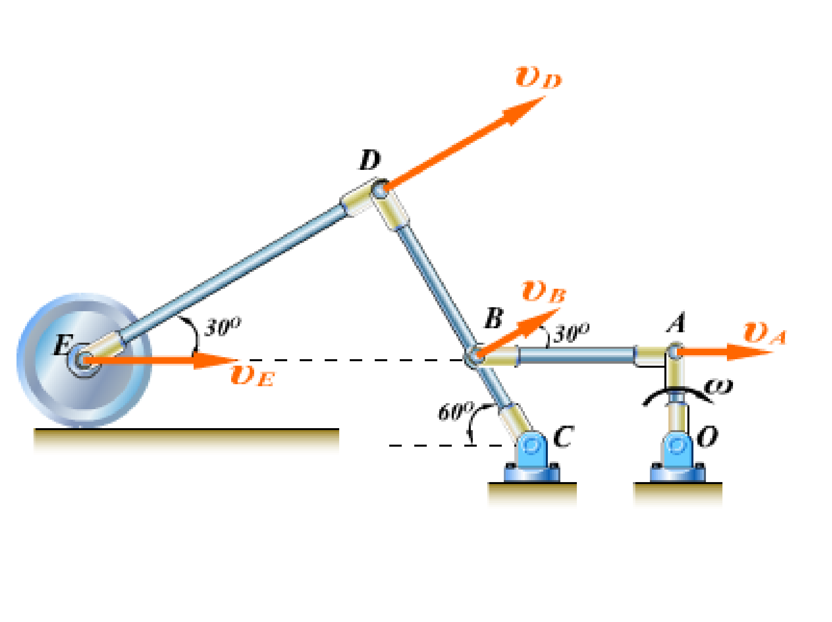
AB作平面运动

$$v_A = \omega \cdot OA$$

$$[\vec{v}_B]_{AB} = [\vec{v}_A]_{AB}$$

$$v_B \cos 30^\circ = \omega \cdot OA$$

$$v_B = \frac{\omega \cdot OA}{\cos 30^\circ} = 0.2309\,\mathbf{m/s}$$



A、B、E共线，轮E作纯滚动

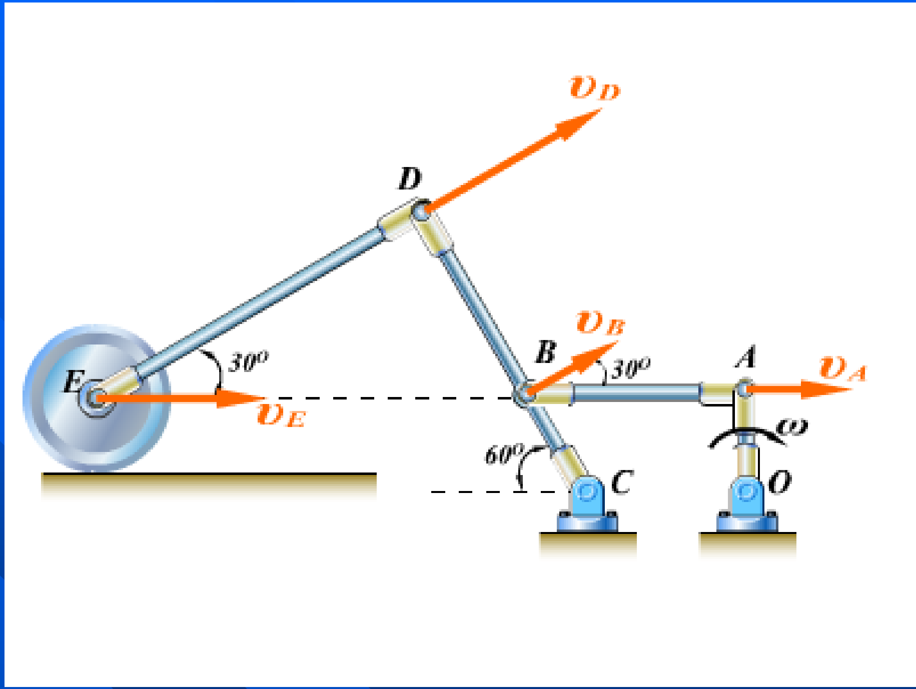
机构传动问题一般按传动顺序，依次分析两个刚体的公共点。

已知：$OA=100\mathbf{mm},\quad \omega_{OA}=\omega=\mathbf{2rad/s}, CD=3CB, CD\perp ED$。求：$v_E$

若轮E半径R也为100mm，求其角速度。

CD作定轴转动，转动轴：C

$$v_D=\frac{v_B}{CB}CD=3v_B=0.6928\mathbf{m/s}$$



DE作平面运动

$$[\vec{v}_E]_{DE}=[\vec{v}_D]_{DE}$$

$$v_E\cos 30^\circ=v_D$$

$$v_E=\frac{v_D}{\cos 30^\circ}=0.8\mathbf{m/s}$$

显然，投影法无法求出平面运动刚体（*AB*、*DE*）的角速度。

$$\omega_E = \frac{v_E}{R} = 8rad/s$$

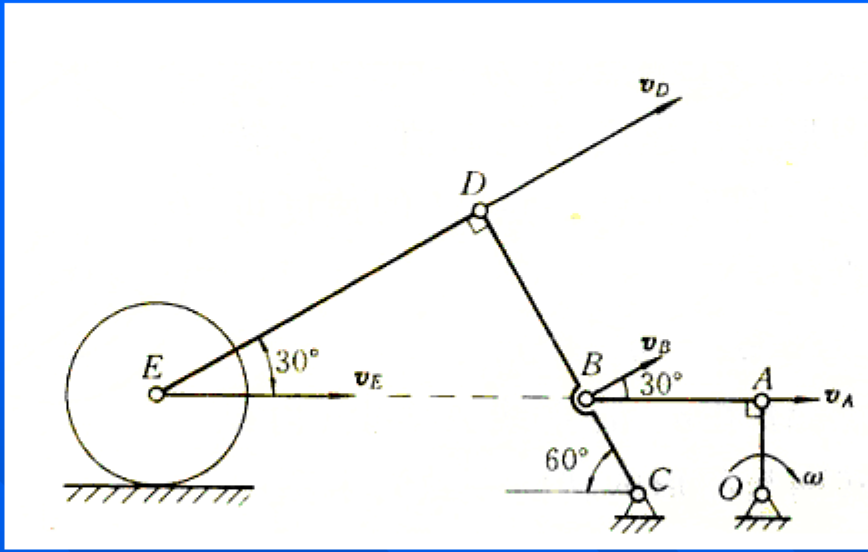
（顺时针）

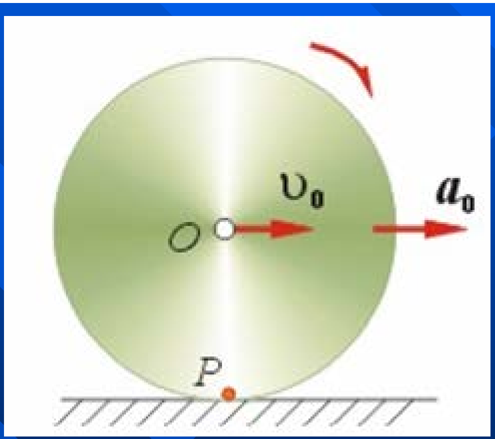
车轮沿直线作纯滚动，已知轮的半径为R，轮心的速度和加速度分别为υ_0和a_0 。

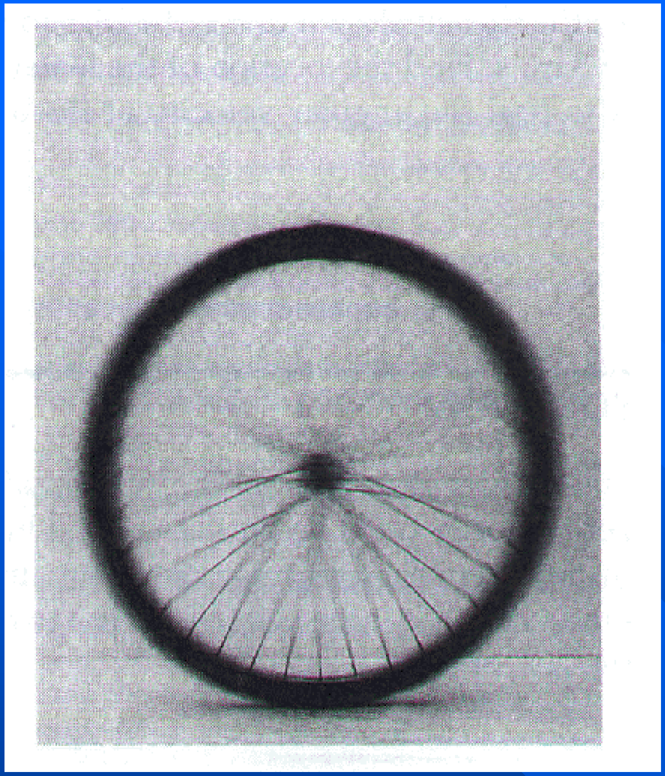
$$x = s = R\varphi$$

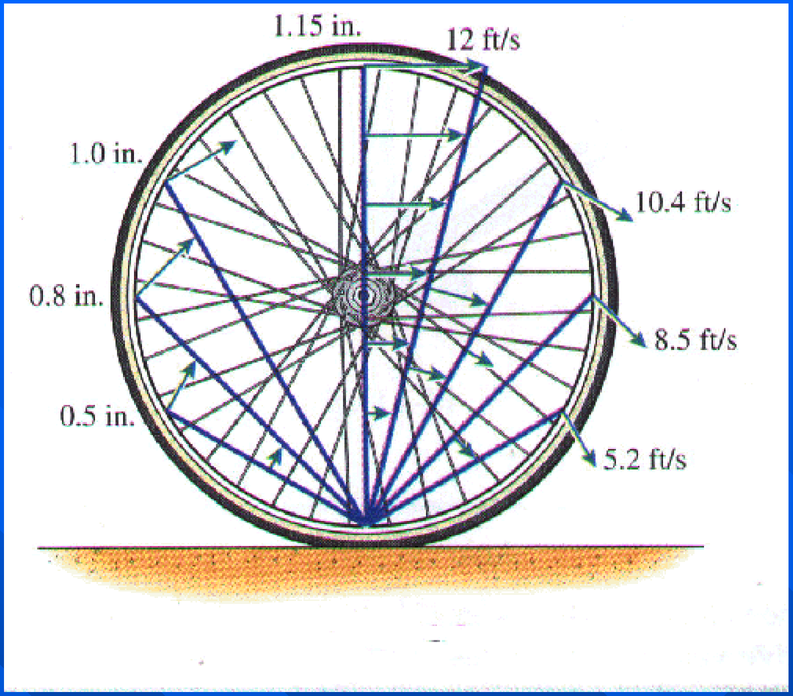
$$v_o = R\omega$$

$$a_o = R\alpha$$







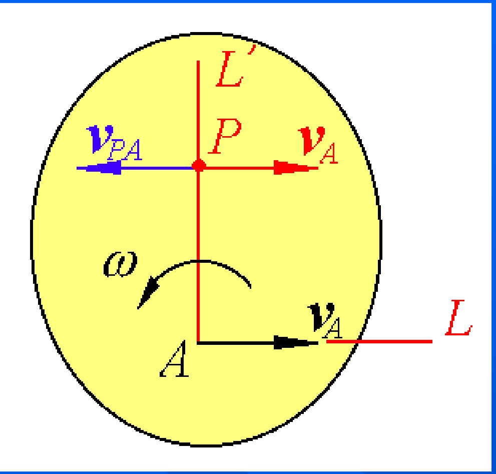


$$\vec{\upsilon}_B = \vec{\upsilon}_A + \vec{\upsilon}_{BA}$$

问题的提出

若选取速度为零的点作为基点，求解速度问题的计算会大大简化。于是，自然会提出，在某一瞬时图形是否有一点速度等于零？如果存在的话，该点如何确定？

三、瞬心法（既能求出角速度，又能避免矢量运算）



1. 瞬时速度中心（简称速度瞬心、瞬心）—— 在某瞬时，在平面图形上（或其延伸部分）速度为零的点。

平面图形S，某瞬时其上一点A速度$\vec{v}_A$，图形角速度ω，沿v_A方向取半直线AL, 然后顺ω的转向转90^o至AL的位置,在AL'上取长度$AP = v_A / \omega$，取A点为基点，则：

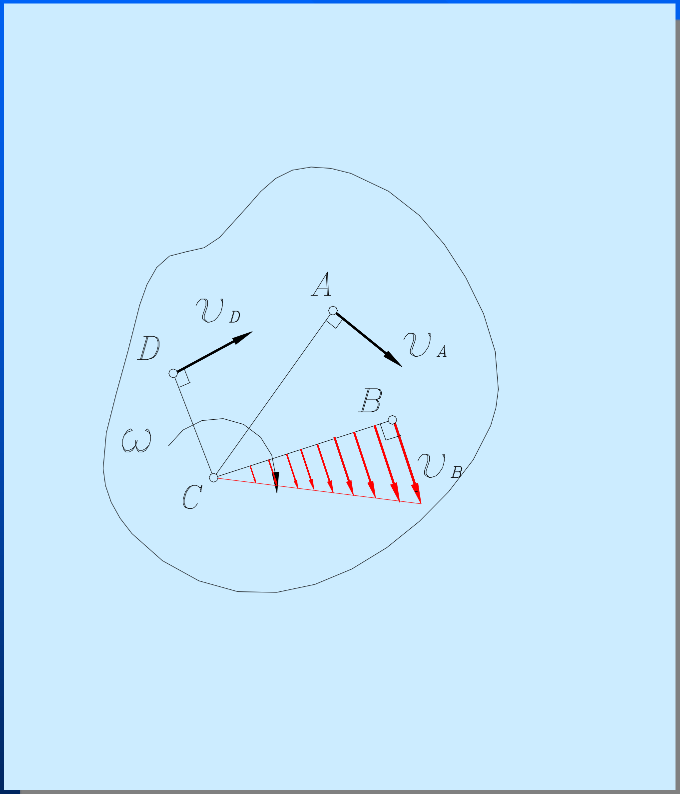
$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{v}_{PA}$$

$v_{PA} = AP \cdot \omega = v_A$， 方向$\perp PA$，恰与$\vec{v}_A$反向. 所以

$$v_P = 0$$

一般情况下，在每一瞬时，平面图形上（或其延伸部分）都唯一存在一个瞬心。

2.平面图形各点速度分布



若C为速度瞬心，以C为基点

A、B、D各点速度为：

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{AC} \qquad v_A = \omega \cdot \overline{AC}$$

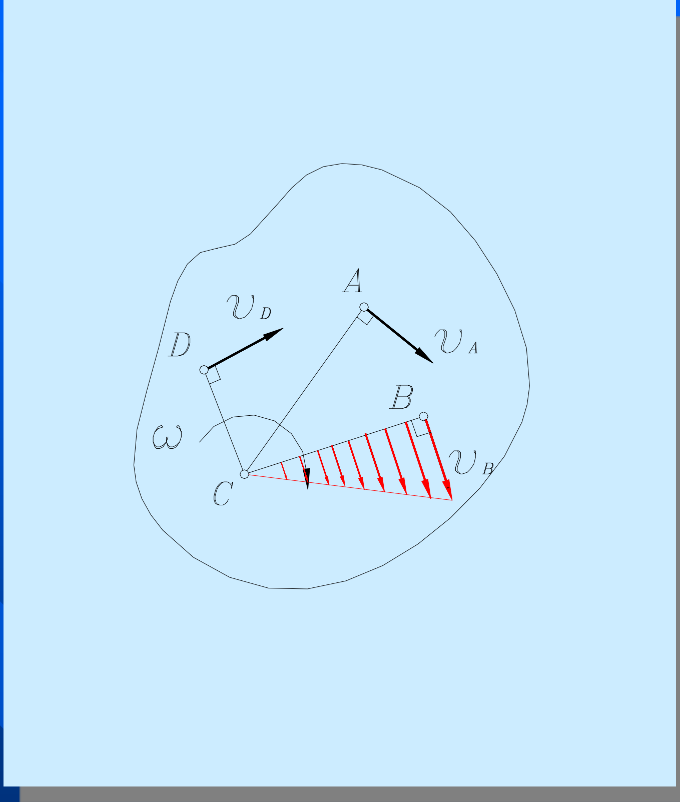
$$\vec{v}_B = \vec{v}_{BC} \qquad v_B = \omega \cdot \overline{BC}$$

$$\vec{v}_D = \vec{v}_{DC} \qquad v_D = \omega \cdot \overline{DC}$$

图形内各点速度在某瞬时的分布情况与图形绕定轴转动时各点速度分布相类似。

平面图形在任一瞬时的运动可以视为绕速度瞬心的瞬时转动，速度瞬心又称为平面图形的瞬时转动中心。

若***C***点为速度瞬心，则任意一点***A***的速度 $v_A = AC \cdot \omega$ 方向⊥***AC***，指向与***ω***一致。



利用速度瞬心求解平面图形上点的速度的方法,称为速度瞬心法.

速度瞬心的特点

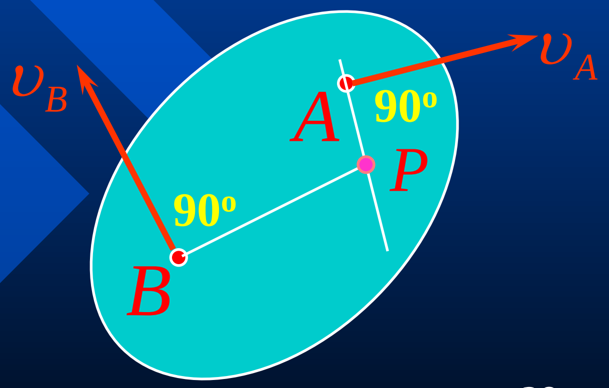
- 1、瞬时性——不同的瞬时，有不同的速度瞬心；
- 2、唯一性——*一般情况下*某一瞬时只有一个速度瞬心；
- 3、瞬时转动特性——平面图形在某一瞬时的运动可以视为绕瞬心作瞬时转动。

速度瞬心法：确定瞬心的位置是关键

确定瞬心的几种典型情况：

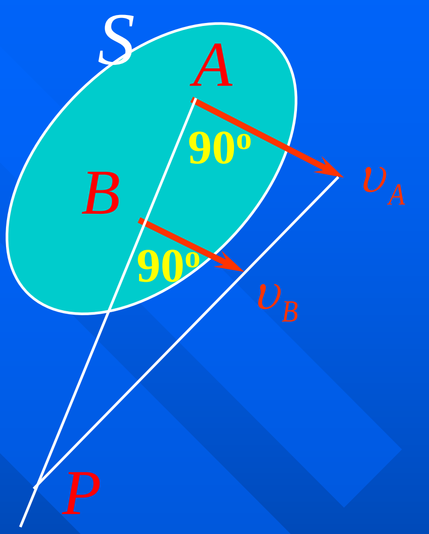
第一种情形

已知平面图形上两点的速度矢量的方位，这两点的速度矢量方位互不平行。



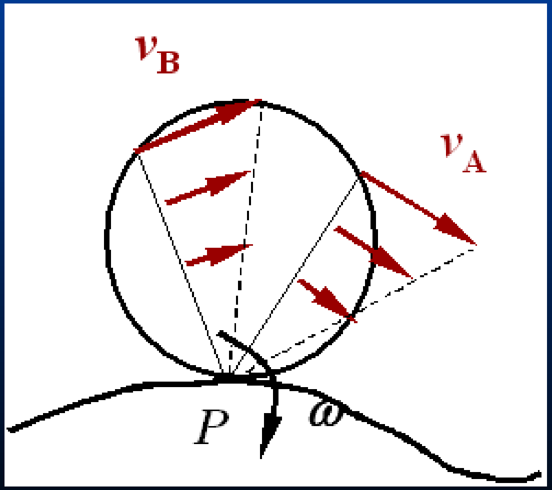
第二种情形

已知平面图形上两点的速度矢量的大小与方向，而且二矢量互相平行，并且都垂直于两点的连线。



第三种情形

平面图形沿固定曲线作无滑动的滚动（纯滚动）。



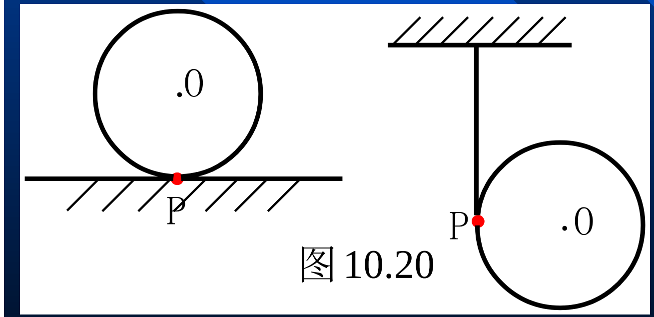
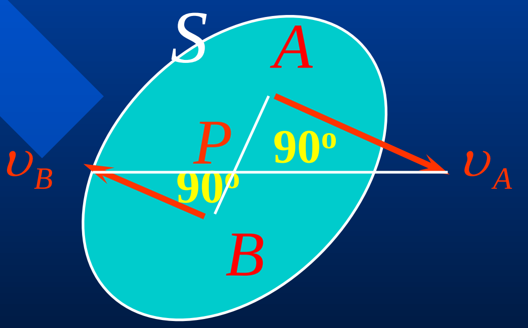


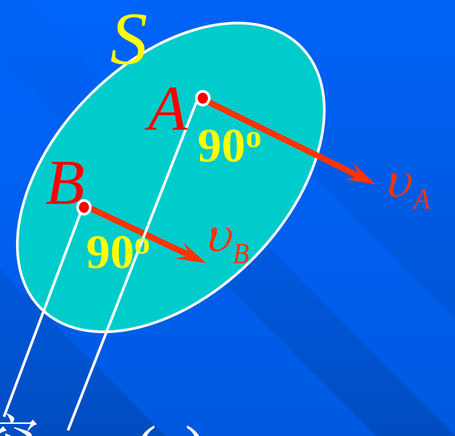
图 10.20



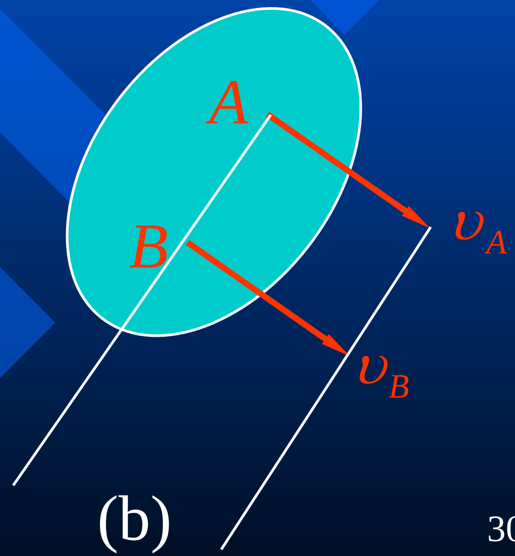
第四种情形（特殊情况：瞬时平动）

已知某瞬时两点速度相互平行但不垂直于两点的连线，如图（a)或已知两点速度垂直于连线，且大小互等，如图（b）。

瞬时平动——平面图形在该瞬时瞬心在无穷远处，其角速度 $\omega = 0$，各点速度大小相等，方向相同。

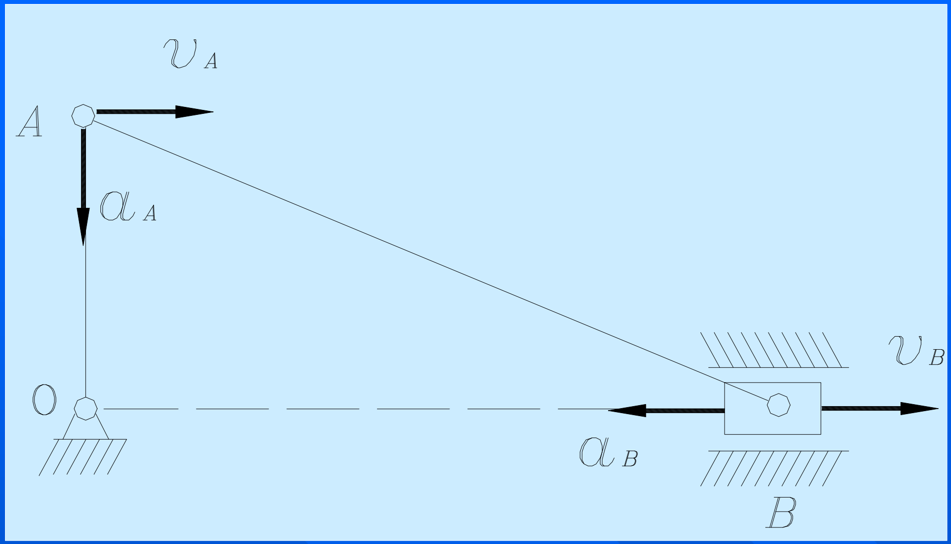


(a)



(b)

应注意平动与瞬时平动的差别。



两点速度平行与两点连线不垂直

$\omega = 0$

瞬时平动

例如：曲柄连杆机构在图示位置时，连杆BC作瞬时平动.

此时连杆BC的图形角速度 $\omega_{BC}=0$ ，

BC杆上各点的速度都相等. 但各点的加速度并不相等.

设匀ω，则 $a_B = a_B{}^n = AB \cdot \omega^2 (\downarrow)$

而 $\vec{a}_c$ 的方向沿AC的，$\vec{a}_B \neq \vec{a}_c$ **瞬时平动与平动不同**

瞬时平动：该瞬时图形的瞬心在无穷远处，该瞬时角速度等于零，各点速度都相等。

注意：瞬时平动时加速度并不相等（**瞬时平动与平动不同**）

注意的问题

★速度瞬心在平面图形上的位置不是固定的，而是随时间不 断变化的（刚体平面运动是一种比较复杂的运动）。*一般情况下*在任一瞬时是唯一存在的。

✸速度瞬心处的速度为零, 加速度不一定为零。不同于定轴转动

✸刚体作瞬时平动时，虽然各点的速度相同，但各点的加速度是不一定相同的。不同于刚体作平动。

视频剪辑

包

视频剪辑

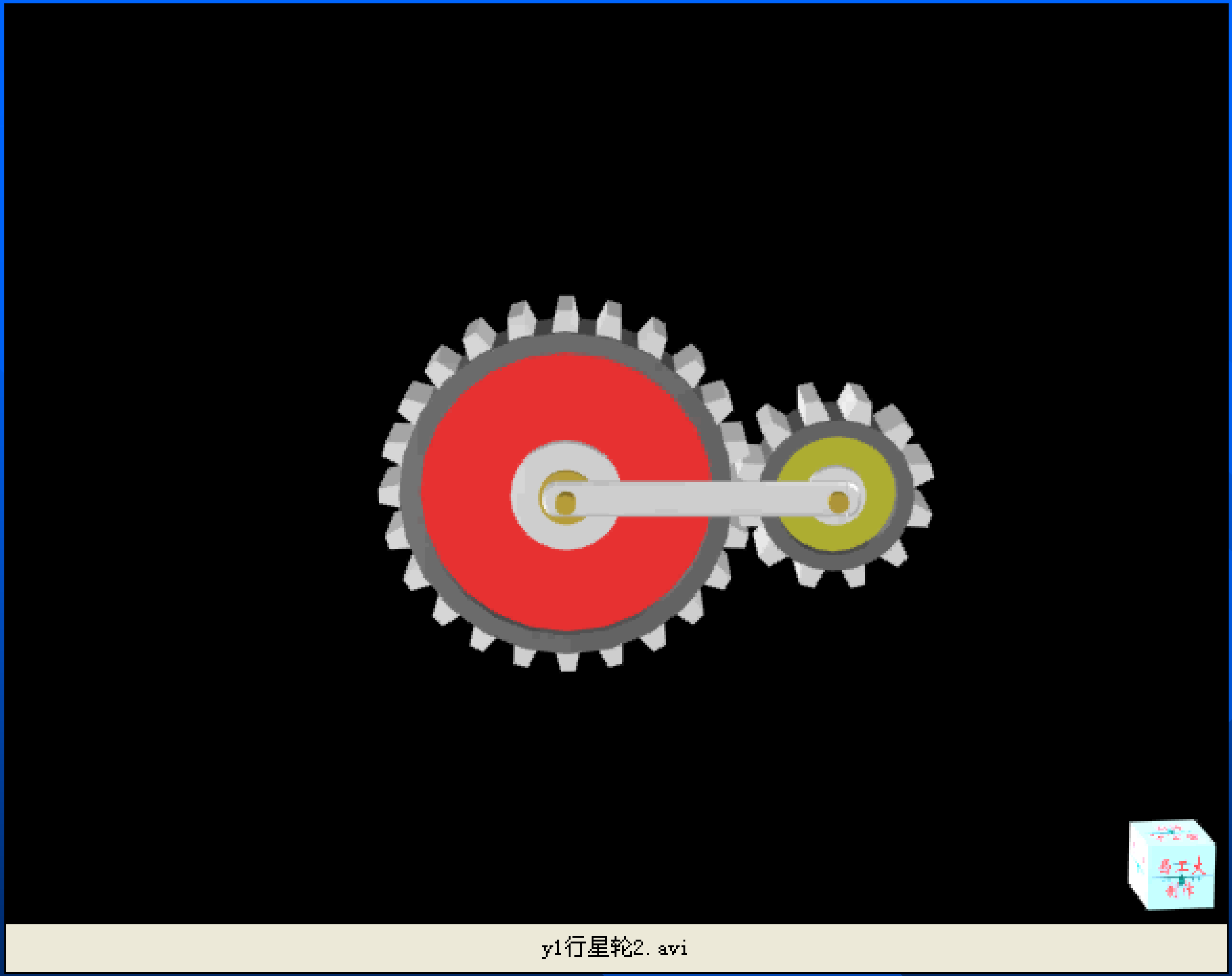
包

注意:

瞬心*C*并不是平面图形*S*上的一个固定点,只是在该瞬时其速度等于零。

瞬心在平面图形上的位置和在空间的位置都是随时间不断变化的。

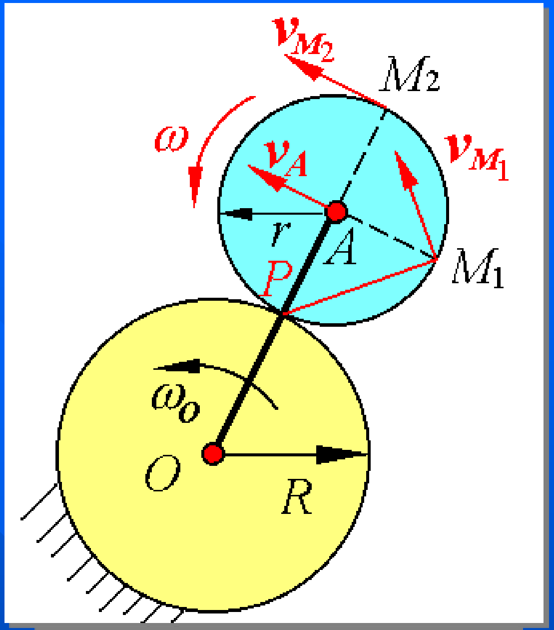
用基点法、投影法、瞬心法求出的平面图形内任意点的速度是都绝对速度（相对于地面）。



行星齿轮机构

[例] 行星齿轮机构

已知: R, r, ω_o 轮A作纯滚动，求 $\bar{v}_{M1}, \bar{v}_{M2}$



解： 1. **运动分析**：OA定轴转动，

轮A作平面运动；

2. 研究轮A:

速度分析，用速度瞬心法求 $\bar{v}_{M1}, \bar{v}_{M2}$ **:**

轮A速度瞬心为P点

$$v_A = (R+r)\omega_o = r\omega \qquad \therefore \omega = \frac{v_A}{r} = \frac{R+r}{r}\omega_o \quad (\curvearrowleft)$$

$$v_{M1} = PM_1 \cdot \omega = \sqrt{2}r \cdot \frac{R+r}{r}\omega_o = \sqrt{2}(R+r)\omega_o,$$

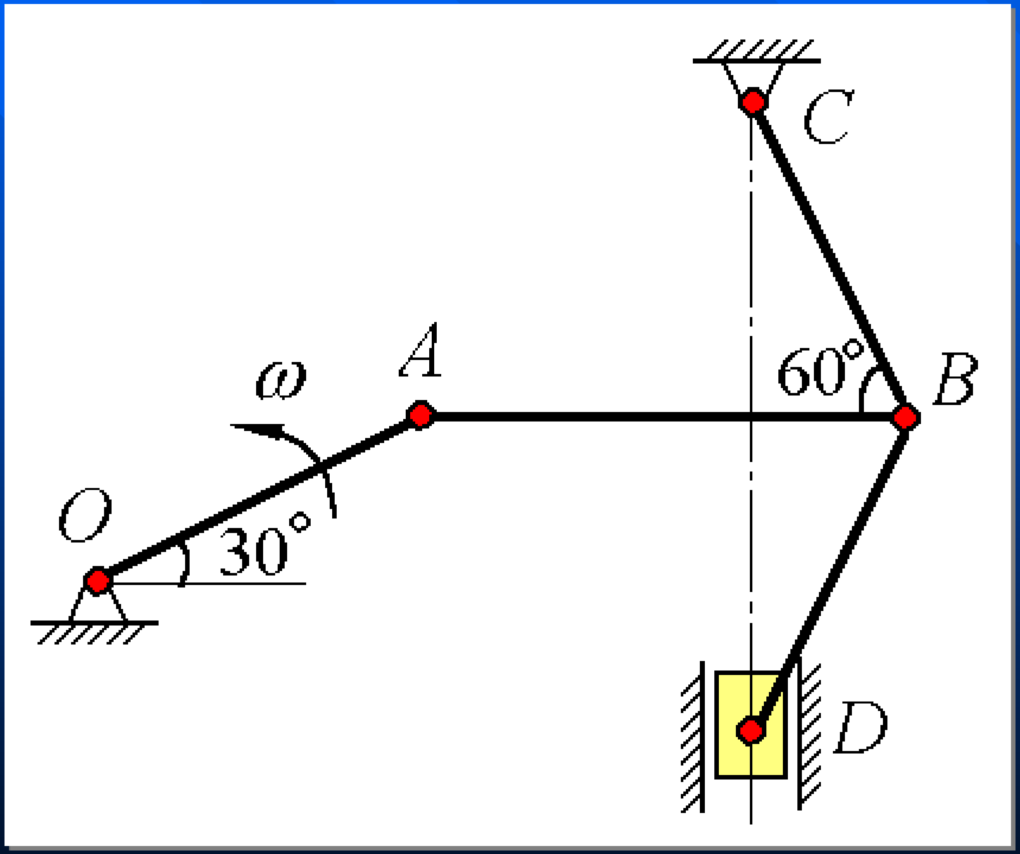
$$v_{M2} = PM_2 \cdot \omega = 2r \cdot \frac{R+r}{r}\omega_o = 2(R+r)\omega_o,$$ 方向均如图示

[例] 曲柄肘杆压床机构

已知：OA=0.15m , n=300 rpm , AB=0.76m,

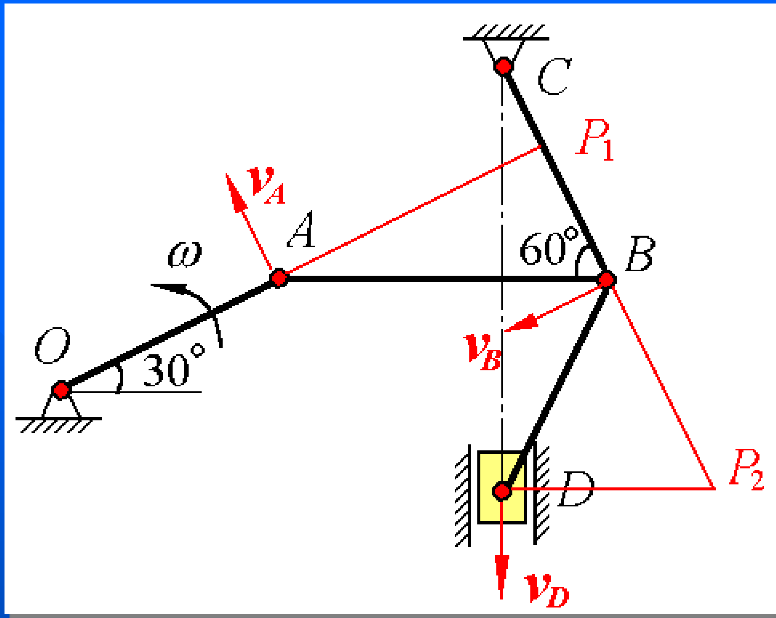
BC=BD=0.53m. 图示位置时, AB水平

求该位置时的 ω_{BD}、ω_{AB} 及 $\bar{v}_D$



[例] 曲柄肘杆压床机构

已知:OA=0.15m,n=300 rpm,AB=0.76m, BC=BD=0.53m. 图示位置时, AB水平. 求该位置时的 ω_{BD}, ω_{AB} 及 $\bar{v}_D$



解： 1. **运动分析：** OA,BC作定轴 转动， AB,BD均作平面运动

2. **研究*AB*;**

速度分析，用速度瞬心法求v_B和ω_{AB}：

$$\omega = \frac{n\pi}{30} = \frac{300\pi}{30} = 10\pi \text{rad/s} \qquad v_A = OA \cdot \omega = 0.15 \times 10\pi = 1.5\pi \text{ m/s}$$

P_1 为AB 杆速度瞬心

$$\therefore \omega_{AB} = \frac{v_A}{AP_1} = \frac{1.5\pi}{AB\sin 60^\circ} = \frac{1.5\pi \times 2}{0.76 \times \sqrt{3}} = 7.16 \text{ rad/s} \qquad (\curvearrowright)$$

$$v_B = BP_1 \cdot \omega_{AB} = AB\cos 60^\circ \times 7.16 = 0.76 \times 0.5 \times 7.16 = 2.72 \text{ m/s}$$

3. 研究BD;

速度分析，用速度瞬心法求v_D和ω_{BD}：

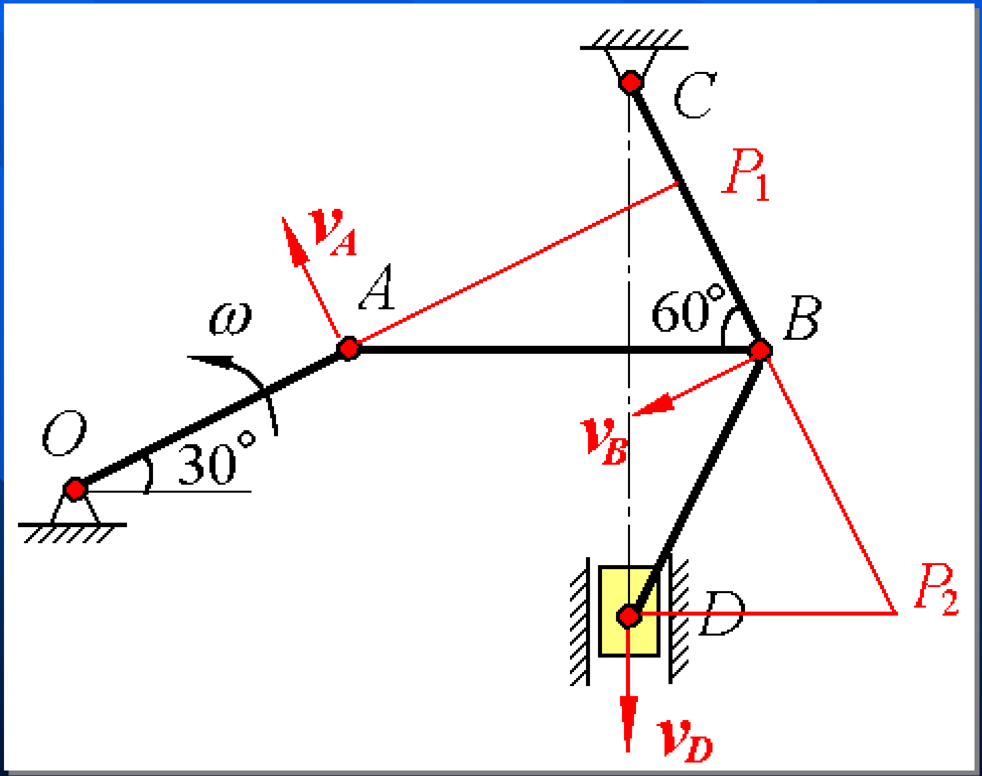
P_2为其速度瞬心, ΔBDP_2为等边三角形$DP_2=BP_2=BD$

$$\therefore \omega_{BD}=\frac{v_B}{BP_2}=\frac{2.73}{0.53}=5.13\ \text{rad/s} \quad (\curvearrowleft)$$

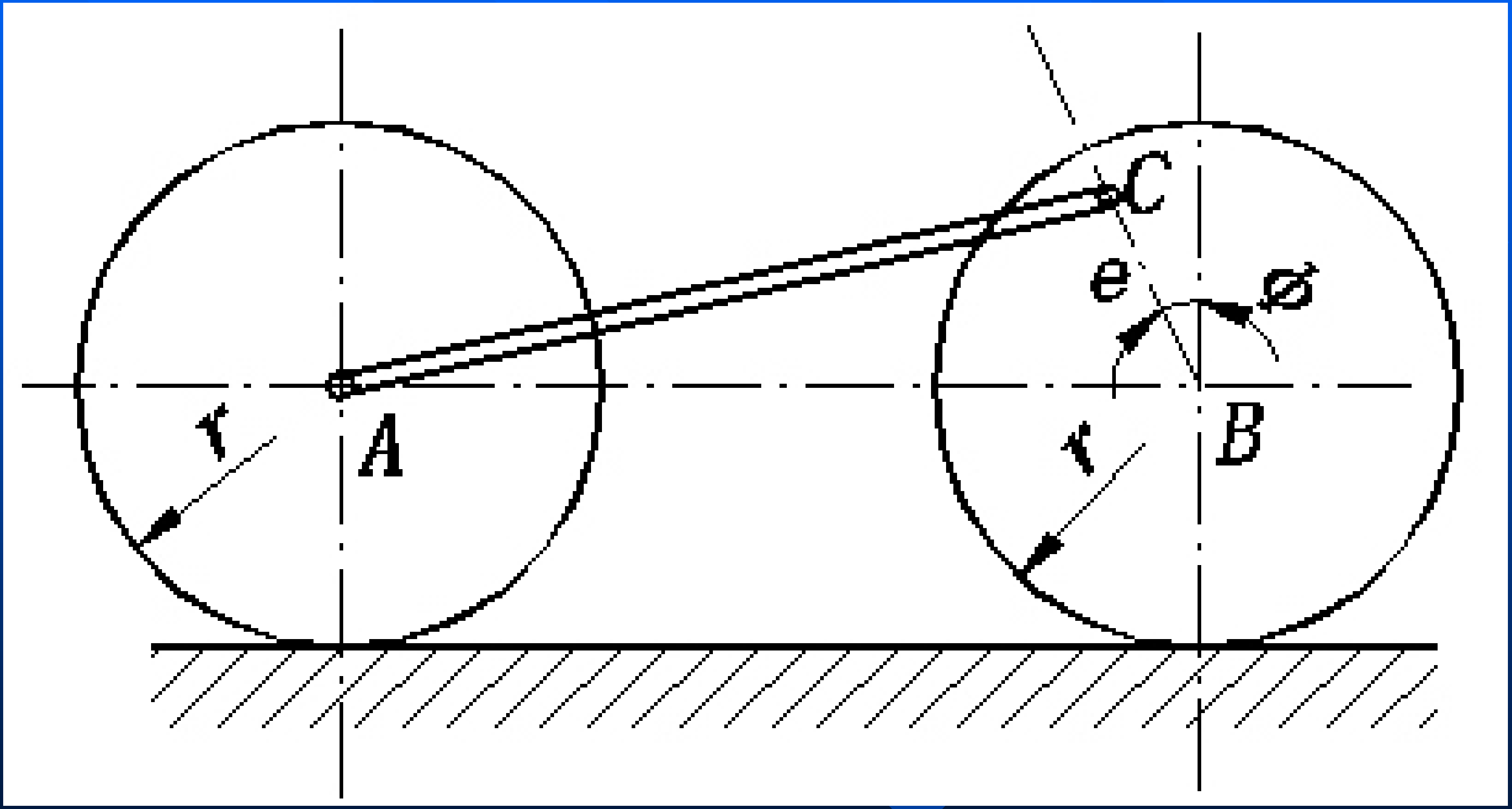
$$\begin{aligned} v_D &= DP_2 \cdot \omega_{BD} \\ &= 0.53\times 5.13 \\ &= 2.72\ \text{m/s}\ (\downarrow) \end{aligned}$$

每个平面运动物体都有各自的瞬心，不存在“公共瞬心”

注意瞬心法中各“转动半径”的正确计算



例3 两个齿轮A和B由连杆AC连接，可在固定齿条上滚动。当φ=0时，齿轮B的中心的速度v_B=200(mm/s),求此时齿轮A的角速度。已知r=50mm,e=30mm。

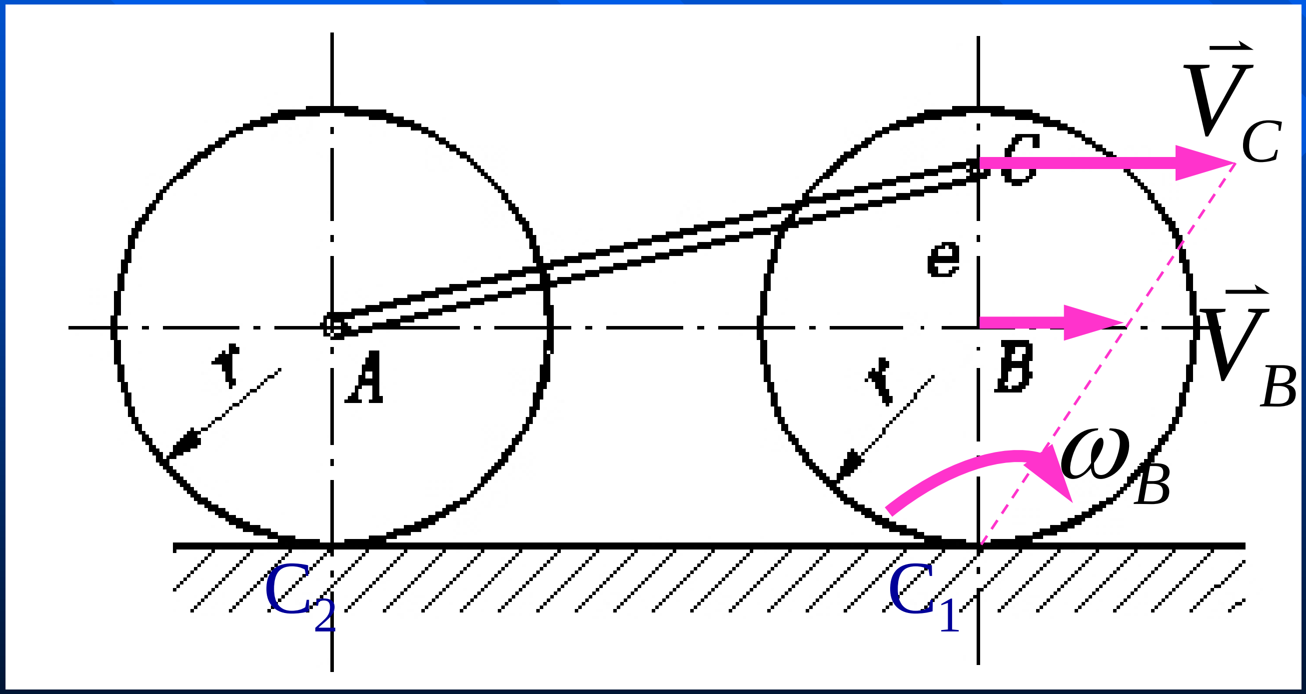


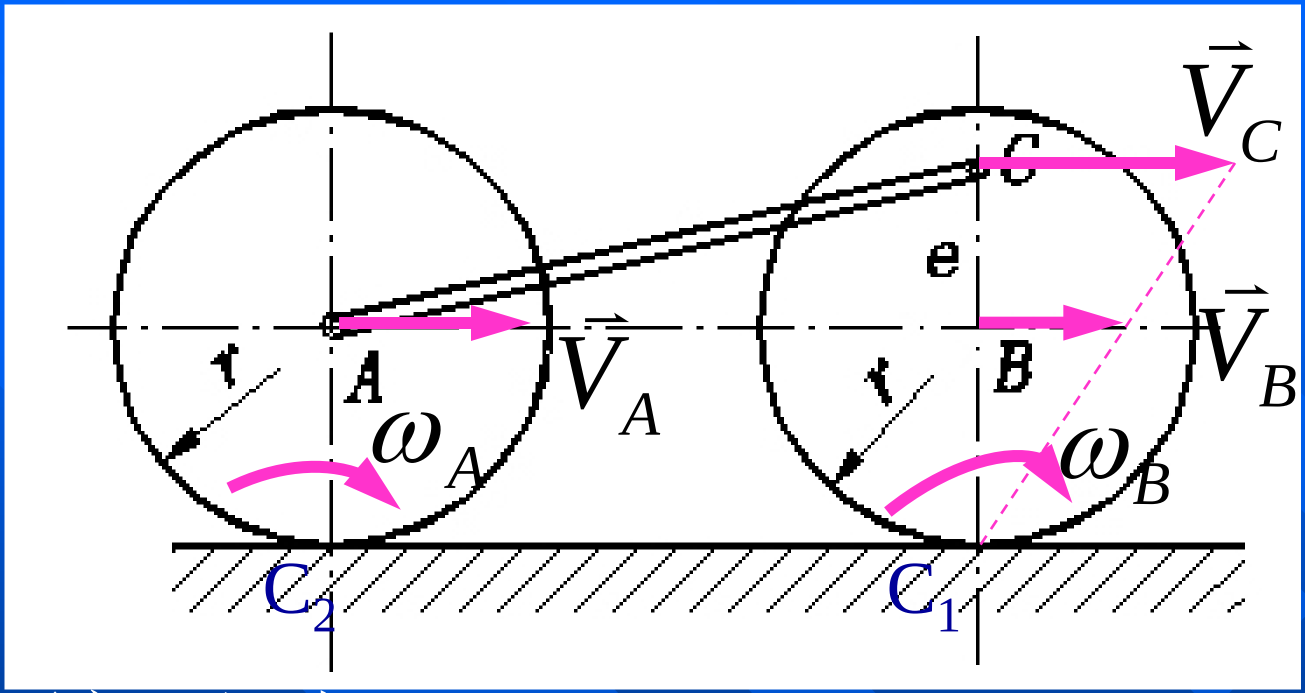
解：齿轮A、B及连杆AC作平面运动

运动的传递：B→CA→A

B→C：研究齿轮B的运动　瞬心在C_1处

$$\omega_B = \frac{v_B}{BC_1} = \frac{v_B}{r}\text{（顺时针转）} \qquad v_C = CC_1 \cdot \omega_B = \frac{r+e}{r} v_B\text{(水平向右)}$$





C→A：研究AC运动　AC瞬时平动

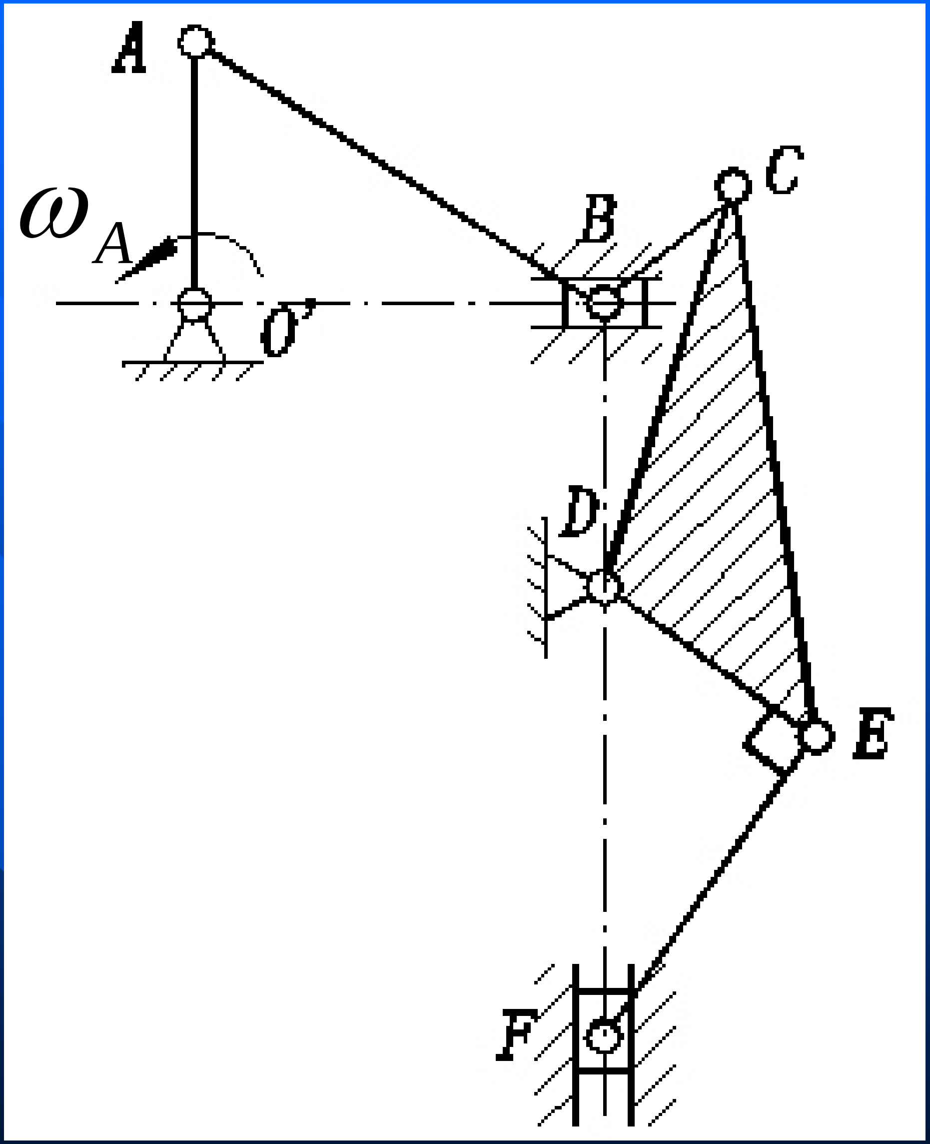
齿轮A作纯滚动，瞬心在C_2处

$$v_A = v_C = \frac{r+e}{r} v_B$$

$$\omega_A = \frac{v_A}{AC_2} = \frac{r+e}{r^2} v_B = \frac{50+30}{50^2} \times 200 = 6.4 rad/s$$

（顺时针转向）

例4、图示机构中，已知：OA=10cm，BD=10cm，DE=10cm，EF=17.32cm，（角DFE＝30º，）ω_A=4rad/s。在图示位置时，曲柄OA与水平线OB垂直，且B、D和F在同一铅直线上，又DE垂直于EF。求杆EF的角速度和点F的速度。



解：平面机构运动分析

定轴转动：OA、CDE
平面运动：AB、BC、EF
传递路线：OA→AB→BC→CDE→EF

1、OA（定轴转动）→AB（瞬时平动）

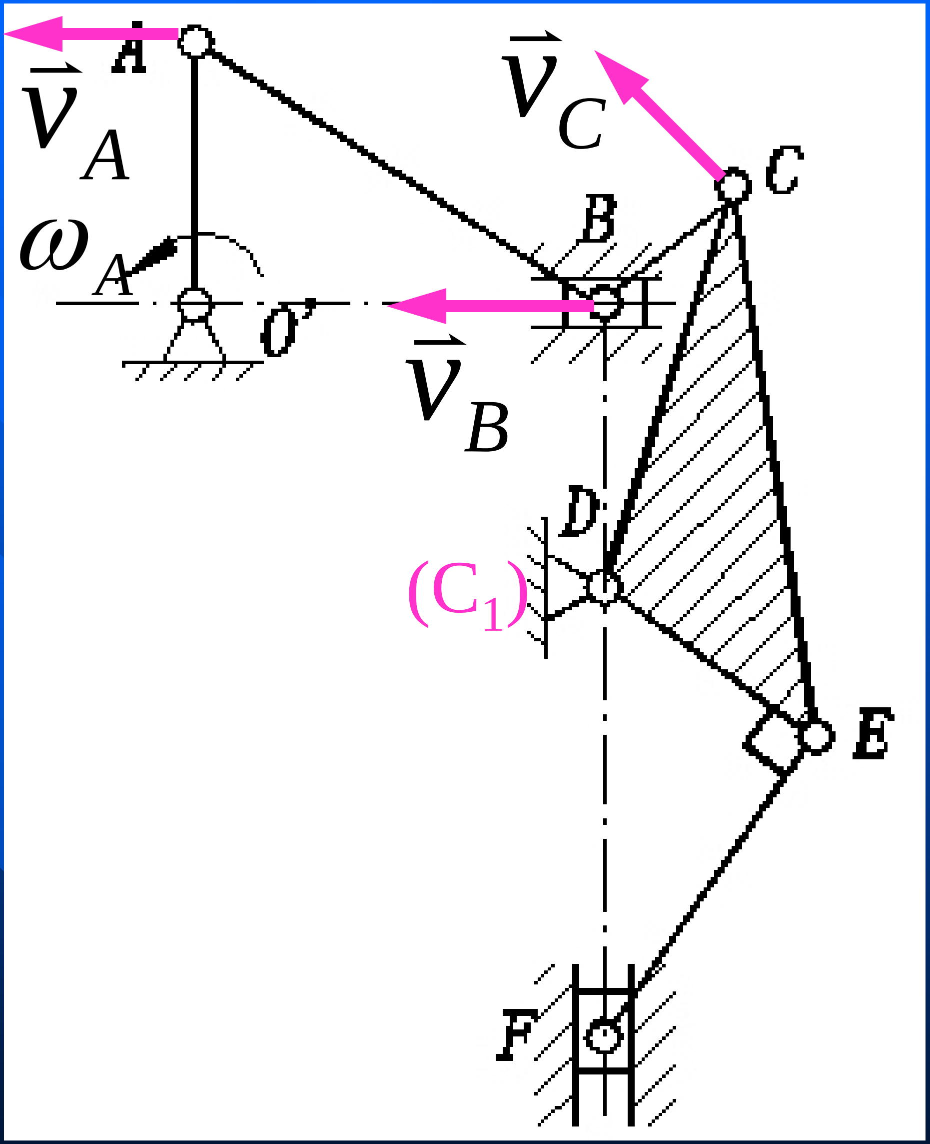
$$v_A = v_B = \omega_{OA} \cdot OA$$

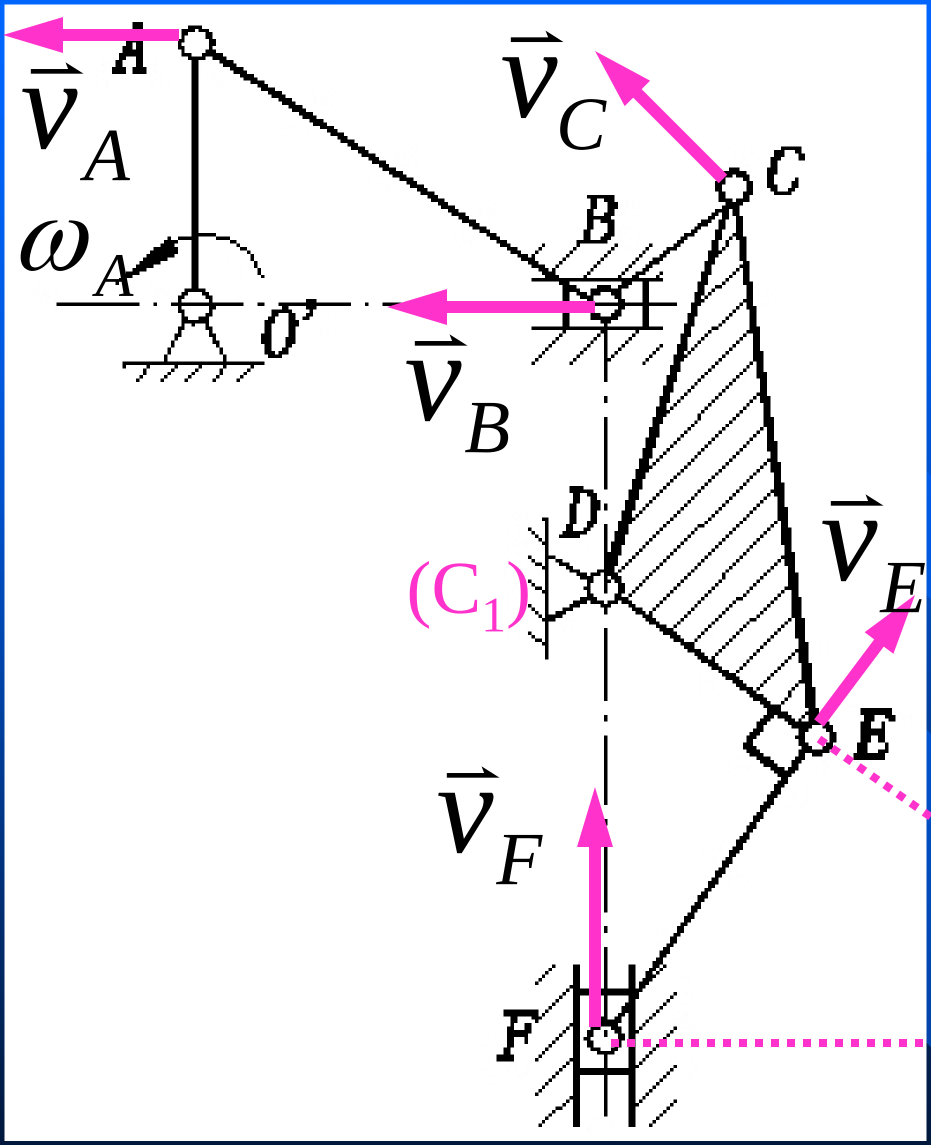
2 、BC（平面运动）

瞬心在D

$$v_C = \frac{v_B}{BD} \cdot CD = \frac{\omega_A \cdot OA}{BD} \cdot CD$$

（速度方向垂直CD）





3、 CDE（定轴转动）

$$v_E = \frac{v_C}{CD}\cdot DE$$

$$= \frac{\omega_A \cdot OA}{BD}\cdot DE = 40cm/s$$

4、 EF（平面运动）

瞬心在C$_2$

$$v_F = \frac{v_E}{EC_2}\cdot FC_2$$

$$= 40\times\frac{2}{\sqrt{3}} = 46.19cm/s$$

$$\omega_{EF} = \frac{v_E}{EC_2} = \frac{40}{30} = 1.33rad/s$$

(C$_2$)

（顺时针转向）

瞬心法：正确求出*EC$_2$*、*FC$_2$*的长度

例

机构如图示，杆0A绕0作匀角速度转动，已知: DC=6r, OA=ED=r, 求:滑杆F的速度和杆DC 、 ED的角速度。

解: AB作瞬时平动: $v_A=v_B=\omega r$

BC作平动: $v_F=v_B=v_C=\omega r$

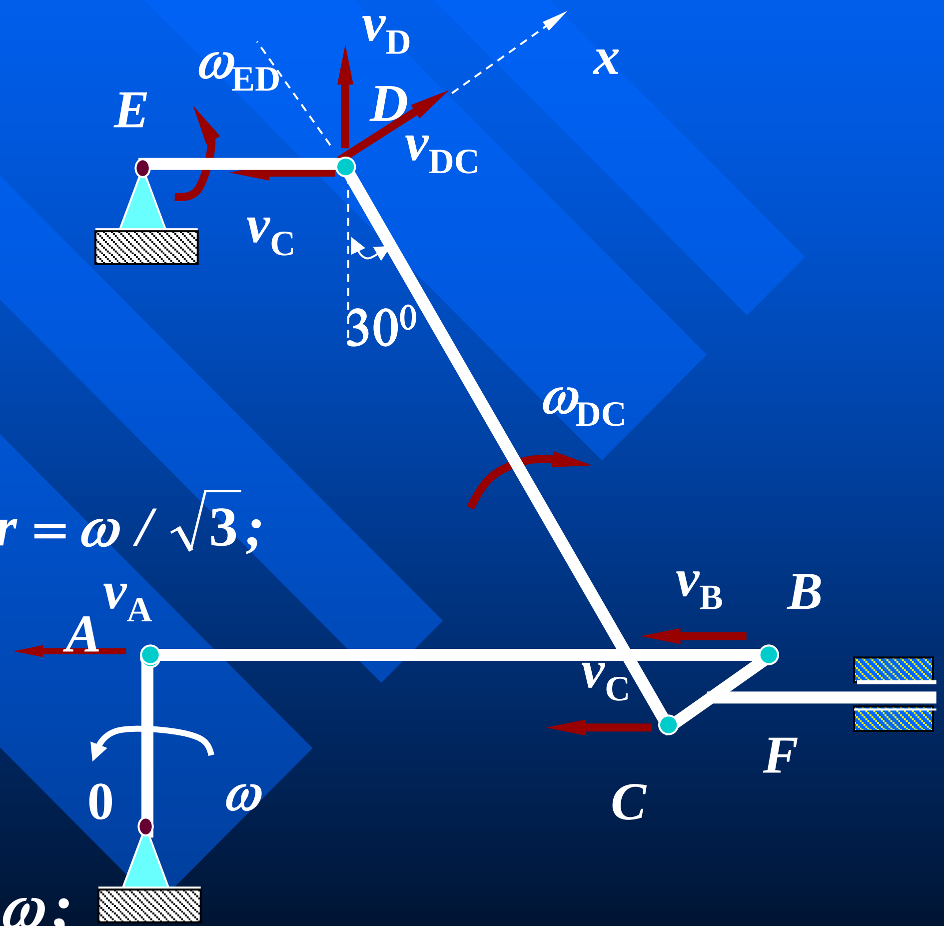
以C为基点 $\vec{v}_D=\vec{v}_C+\vec{v}_{DC}$

"CD": $v_D\cos 30^0=v_C\cos 60^0$;

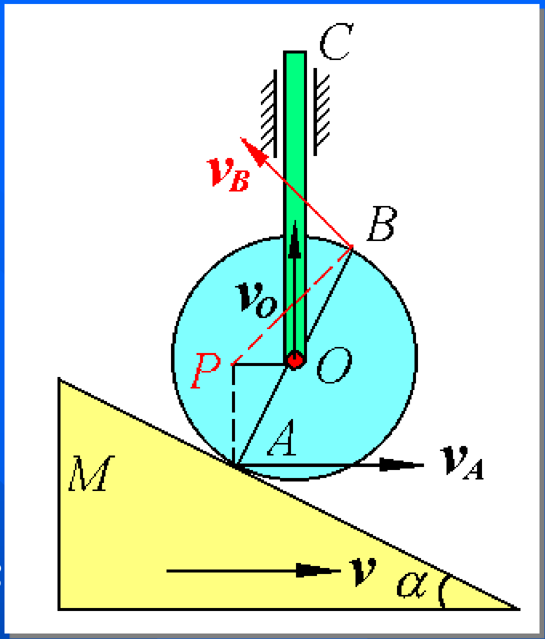
$v_D=r\omega/\sqrt{3}$; $\omega_{ED}=v_D/r=\omega/\sqrt{3}$;

x: $v_D\cos 60^0=v_{DC}-v_C\cos 30^0$;

$v_{DC}=2\frac{\sqrt{3}}{3}r\omega$; $\omega_{DC}=\frac{v_{DC}}{6r}=\frac{\sqrt{3}}{9}\omega$;



[例] 平面机构中, 楔块M: $\alpha=30^{\circ}$, v=12cm/s； 盘: r = 4cm , 与 楔块间无滑动. 求圆盘的ω及轴O的速度和B点速度.



解： 1. **运动分析：**轴O, 杆OC, 楔块M均作平动, 圆盘作平面运动;

2. **研究轮O：**

速度分析，用速度瞬心法求ω 、v_O及 v_B ：

P为速度瞬心， $v_A=v=12$ cm/s ,

$$\omega=v_A/PA=12/r\cos\alpha=12/4\cos30^{\circ}=2\sqrt{3}\ \text{rad/s} \quad (\curvearrowleft)$$

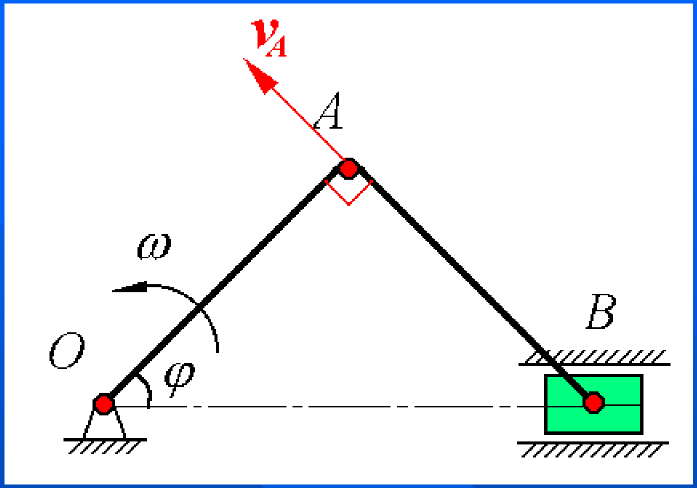
$$v_o=PO\cdot\omega=r\sin\alpha\cdot\omega=4\sin30^{\circ}\times2\sqrt{3}=4\sqrt{3}\ \text{m/s}\,(\uparrow)$$

$$PB=\sqrt{PO^2+OB^2-2\cdot PO\cdot OB\cos120^{\circ}}=\sqrt{2^2+4^2+2\times2\times4\times\frac{1}{2}}=2\sqrt{7}\text{m}$$

$$v_B=PB\cdot\omega=2\sqrt{7}\times2\sqrt{3}=4\sqrt{21}\approx18.3\ \text{m/s} \quad (\perp PB)$$

已知：曲柄连杆机构*OA*=*AB*=*l*，取柄*OA*以匀ω转动。求：当φ=45°时，滑块*B*的速度及*AB*杆的角速度。

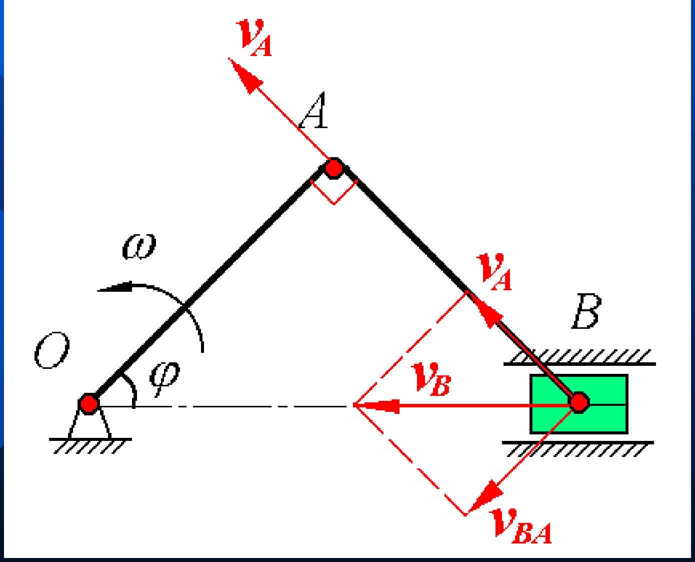
解：机构中，*OA*作定轴转动，*AB*作平面运动。



★基点法

研究 *AB*，以 *A*为基点，且 $v_A = l\omega$，方向如图示。 $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$

在 *B*点做 速度平行四边形，如图示。



$$v_B = v_A / \cos\varphi$$

$$= l\omega / \cos 45^\circ = \sqrt{2} l\omega (\leftarrow)$$

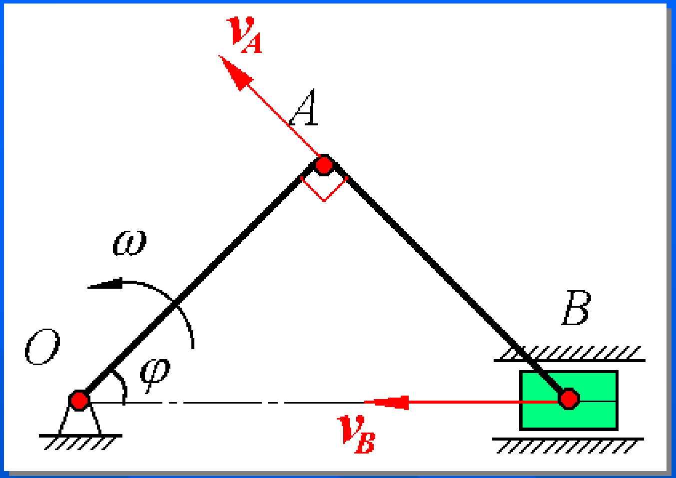
$$v_{BA} = v_A \mathrm{tg}\varphi = l\omega \cdot \mathrm{tg}45^\circ = l\omega$$

$$\therefore \omega_{AB} = v_{BA} / AB = l\omega / l = \omega (\curvearrowright)$$

✸速度投影法

研究AB，$v_A = l\omega$，

方向⊥OA，$\vec{v}_B$ 方向沿BO直线



根据速度投影定理 $[\vec{v}_B]_{AB} = [\vec{v}_A]_{AB}$

$$v_A = v_B \cos\varphi$$

$$\therefore v_B = v_A/\cos\varphi$$

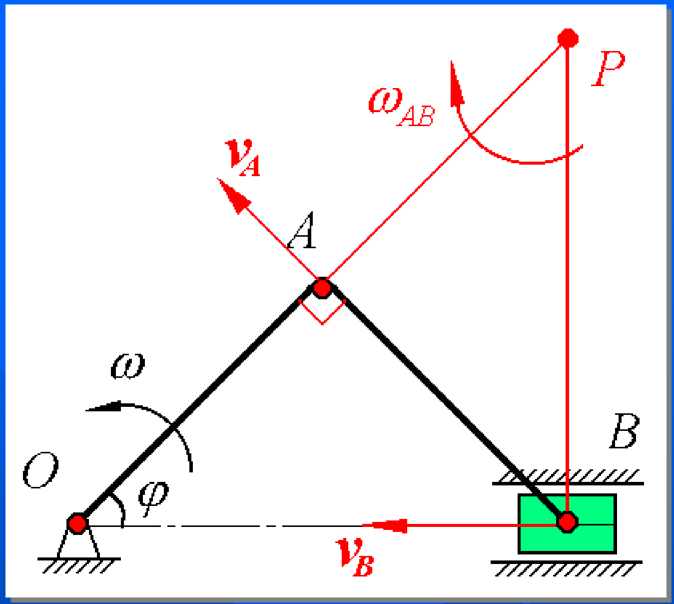
$$= l\omega/\cos 45^\circ = \sqrt{2} l\omega (\leftarrow)$$

$$\therefore v_B = v_A / \cos\varphi = l\omega / \cos 45^\circ = \sqrt{2} l\omega (\leftarrow)$$

投影法不能求出AB杆角速度 ω_{AB}

速度瞬心法

研究AB，已知 $\bar{v}_A, \bar{v}_B$的方向，因此可确定出P点为速度瞬心。



$$\because v_A = l\omega, AP = l$$

$$\therefore \omega_{AB} = v_A / AP = l\omega / l = \omega \ (\curvearrowright)$$

$$v_B = BP \cdot \omega_{AB} = \sqrt{2} l\omega (\leftarrow)$$

比较上述三种方法的特点。

小结：

1. 求解作平面运动刚体的速度：基点法、投影法、瞬心法。

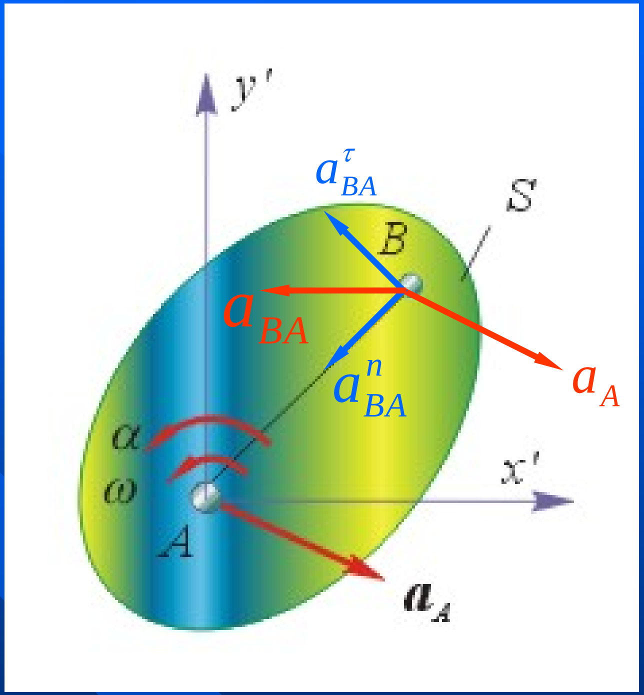
2. 投影法最简单，但无法同时求解作平面运动刚体的角速度；基点法、瞬心法可以求解作平面运动刚体的角速度。

3. 运用投影法或用瞬心法找瞬心时必须已知速度的方向；若所求速度的方向未知，基点法仍可使用，但基点法要进行矢量运算，相对计算最复杂。

4. 基点法是最基本的公式，瞬心法、投影法都由基点法导出。

§ 7-4 用基点法求平面图形内各点的加速度

已知平面图形上一点A 的加速度a_A、图形的角速度ω 与角加速度α ，选择加速度已知的点A为基点，可以确定平面图形上任意点的加速度。



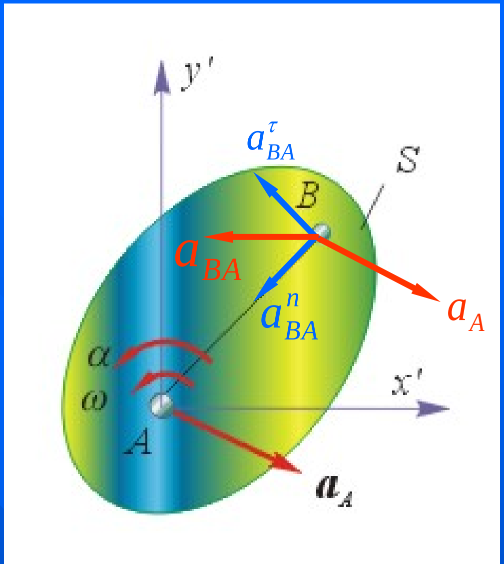
当刚体作平面运动时，刚体上各点的运动轨迹为平面轨迹，加速度的各项都位于同一平面。

将速度合成公式两边同时对时间t求导，可得

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA} \qquad \frac{d\vec{v}_B}{dt} = \frac{d\vec{v}_A}{dt} + \frac{d\vec{v}_{BA}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{v}_B}{dt}=\frac{d\vec{v}_A}{dt}+\frac{d\vec{v}_{BA}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{v}_B}{dt}=\vec{a}_B \qquad \frac{d\vec{v}_A}{dt}=\vec{a}_A$$



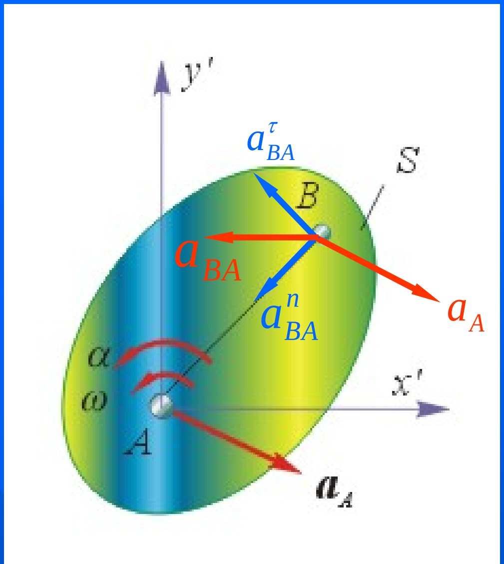
$$\frac{d\vec{v}_{BA}}{dt}=\frac{d}{dt}(\vec{\omega}\times\vec{r}_{AB})=\vec{\alpha}\times\vec{r}_{AB}+\vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}_{AB}}{dt}=\vec{a}_{BA}^{\tau}+\vec{a}_{BA}^{n}$$

$$\boxed{\vec{a}_B=\vec{a}_A+\vec{a}_{BA}^{\tau}+\vec{a}_{BA}^{n}}$$

平面图形内任一点的加速度，等于基点的加速度与该点绕基点作圆周运动的切向加速度、法向加速度的矢量和。

——基点法或称为加速度合成法

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{\tau} + \vec{a}_{BA}^{n}$$



上式中点B相对于基点A作圆周运动的切向加速度分量，其方位应与AB垂直，指向按右手法则确定，其大小为

$$a_{BA}^{\tau} = \alpha \cdot r_{AB} = \alpha \cdot \overline{AB}$$

上式中点B相对于基点A作圆周运动的法向加速度分量，指向由B点指向A点，其大小为

$$a_{BA}^{n} = \omega^2 \cdot r_{AB} = \omega^2 \cdot \overline{AB}$$

加速度矢量合成图如图所示。

$$\vec{a}_B^{n} + \vec{a}_B^{\tau} = \vec{a}_A^{n} + \vec{a}_A^{\tau} + \vec{a}_{BA}^{n} + \vec{a}_{BA}^{\tau}$$

注意事项：

1．在加速度公式的应用中常用解析法，将公式投影到两个坐标轴上，可得两个独立的标量方程，求解两个未知量。

2．投影时应按公式的原始形式进行投影，与坐标轴的指向一致为正，相反为负。

$$\vec{a}_B^n + \vec{a}_B^\tau = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau \quad a_{Bx}^n + a_{Bx}^\tau = a_{Ax}^n + a_{Ax}^\tau + a_{BAx}^n + a_{BAx}^\tau$$

3. 速度瞬心的加速度一般不为零，因此不能像计算速度一样基于速度瞬心求解加速度：

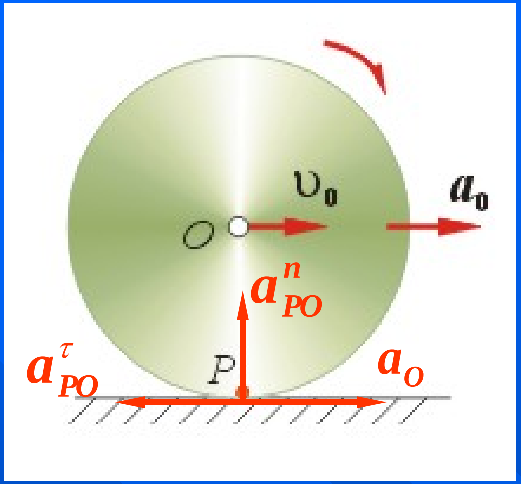
4．用基点法求速度或加速度时，必须首先明确以哪一点为基点。

5. 一般应先分析速度（基点法、瞬心法），求出角速度等，再以此为基础分析加速度：

例

车轮沿直线作纯滚动，已知轮的半径为R，轮心的速度和加速度分别为 v_0和 a_0 。

求：图示瞬时车轮上速度瞬心P的加速度



解：

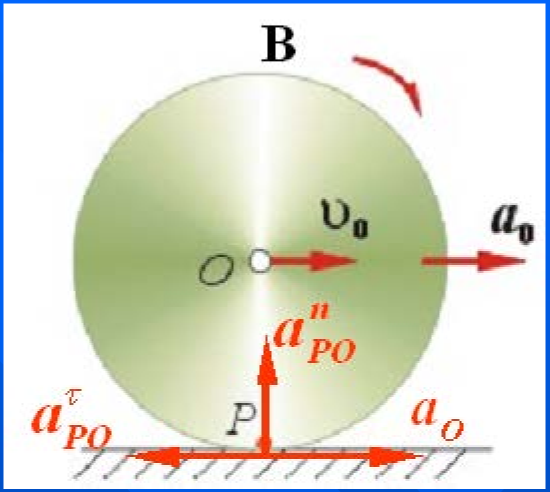
- 以O为基点分析P点的加速度，如图所示。
- 为了应用基点法求P点的加速度，需求出轮的角速度和角加速度。

由于P点为速度瞬心，则 $$\omega = \frac{v_0}{R}$$

轮的加速度为 $$\alpha = \frac{a_0}{R}$$

由加速度合成定理

$$\vec{a}_P = \vec{a}_O + \vec{a}_{PO}^n + \vec{a}_{PO}^\tau$$



$$a_{PO}^\tau = R\alpha = a_0 \qquad a_{PO}^n = \omega^2 R = \frac{\upsilon_0^2}{R}$$

所以 $$a_P = a_{PO}^n = \frac{\upsilon_0^2}{R} \quad \uparrow$$

结论： 速度为零的点——速度瞬心，加速度不为零。

同理可得：最高点B的切向加速度、法向加速度分别为：

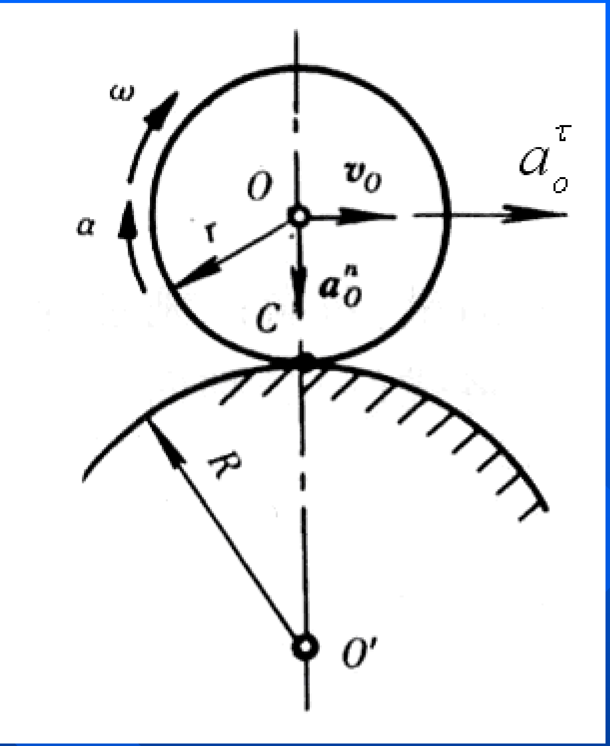
$$a_B^\tau = 2a_o \qquad a_B^n = \frac{v_o^2}{R}$$

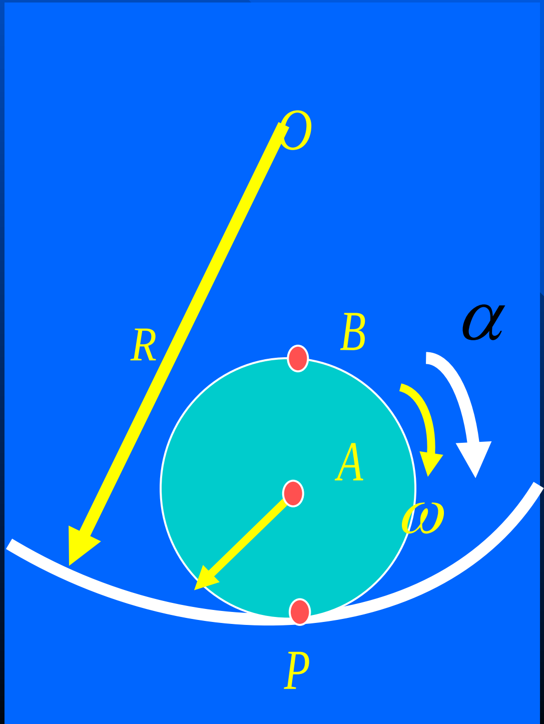
思考：

$$v_o = \omega r$$

$$a_o^{\tau} = \alpha r$$

$$a_o^n = \frac{v_o^2}{\rho} = \frac{v_o^2}{R+r}$$





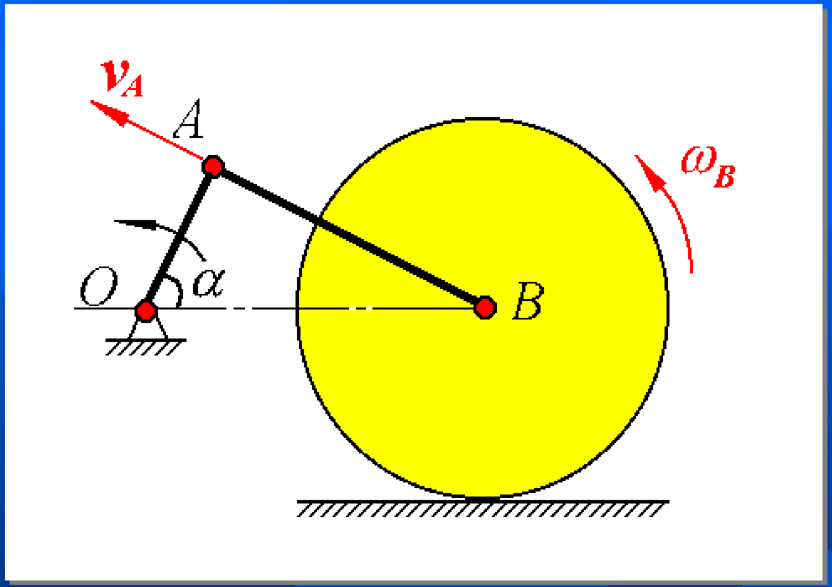
$$v_o = \omega r$$

$$a_o^{\tau} = \alpha r$$

$$a_o^n = \frac{v_o^2}{\rho} = \frac{v_o^2}{R-r}$$

[例] 曲柄滚轮机构　滚子半径$R=OA=15$cm，（纯滚动），$n=60$ r/min（匀角速度）

求：当$\alpha=60°$时 ($OA \perp AB$),滚轮的ω_B，α_B.



分析: 要想求出滚轮的ω_B, α_B 先要求出$\boldsymbol{v}_B$, $\boldsymbol{a}_B$
而$\boldsymbol{v}_B$, $\boldsymbol{a}_B$可通过平面运动刚体AB求解。

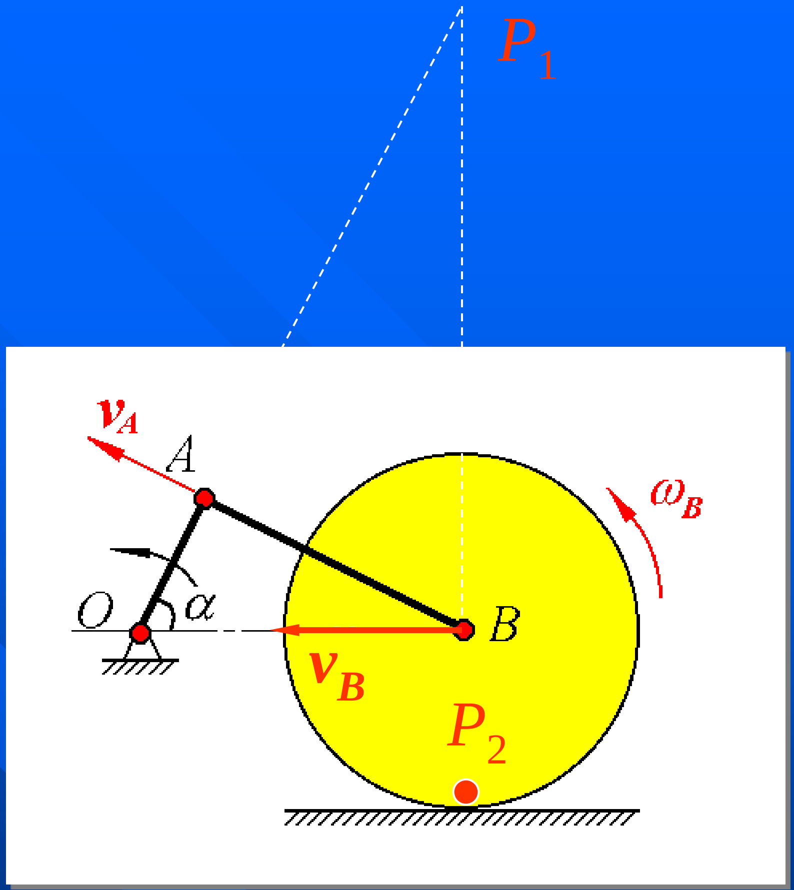
解：OA定轴转动，AB杆和轮B作平面运动，研究AB，先分析速度（基点法、瞬心法），再分析加速度：

$\omega = n\pi/30 = 60\pi/30 = 2\pi$ rad/s

$v_A = OA \cdot \omega = 15 \times 2\pi = 30\pi$ cm/s

P_1为AB杆速度瞬心

P_2为轮速度瞬心



$$\therefore \omega_{AB} = v_A / AP_1 = 30\pi/3 \times 15 = \frac{2}{3}\pi \text{ rad/s}$$

(↶)

$$v_B = BP_1 \cdot \omega_{AB} = 2\sqrt{3} \times 15 \times \frac{2\pi}{3} = 20\sqrt{3}\pi \text{ cm/s} (\leftarrow)$$

$AB = 15\sqrt{3}$cm

$AP_1 = 45$cm

$BP_1 = 30\sqrt{3}$cm

研究轮B：P_2为其速度瞬心

$$\omega_B = v_B / BP_2 = 20\sqrt{3}\pi / 15 = 7.25 \text{rad/s}$$

（逆时针转向）

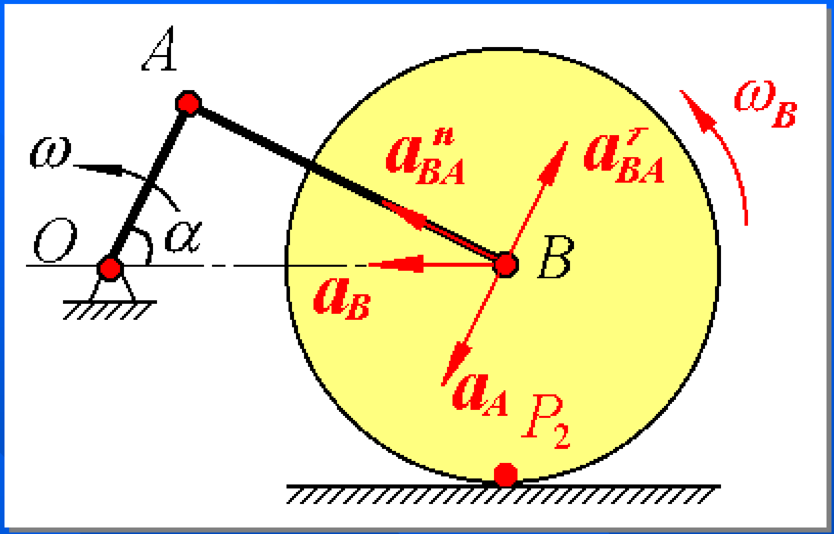
思考：能否对滚轮轮心B的速度求导得到其加速度？

取A为基点， $a_A^n = OA\cdot\omega^2 = 15\times(2\pi)^2 = 60\pi^2\text{cm/s}^2$ 指向O点

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}{}^{\tau} + \vec{a}_{BA}{}^{n}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A^n + \vec{a}_{BA}{}^{\tau} + \vec{a}_{BA}{}^{n}$$

大小	?	√	?	√
方向	√	√	√	√



$$a_{BA}{}^{n} = AB\cdot\omega_{AB}{}^{2} = \sqrt{3}\times15\times\left(\frac{2\pi}{3}\right)^2 = \frac{20\sqrt{3}}{3}\pi$$

方向沿AB由B点指向A点 $a_{BA}{}^{\tau} = \alpha_{BA}\cdot BA$

作加速度矢量图，将上式向BA线上投影

$$a_B\cos30^\circ = 0 + 0 + a_{BA}{}^{n}$$

$$a_B\cos30^\circ + a_{BA}{}^{n} = 0 \qquad ?$$

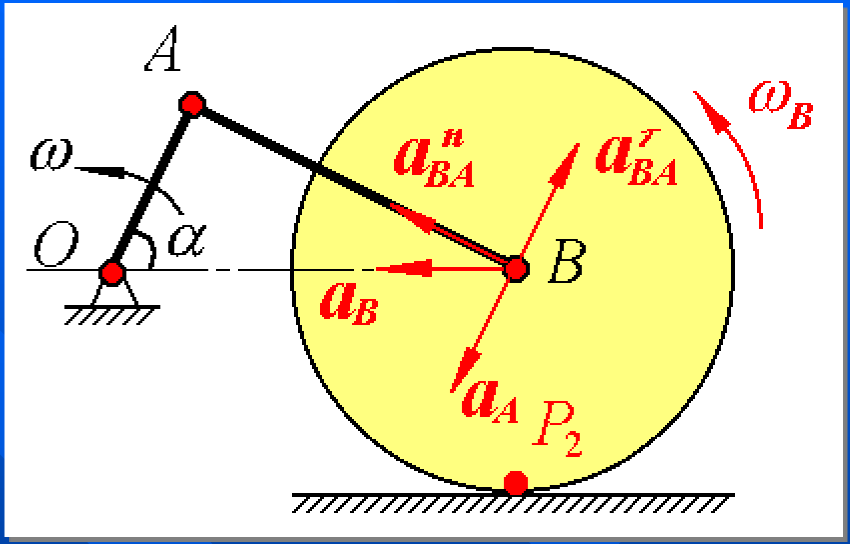
$$a_B = a_{BA}{}^{n}/\cos30^\circ = \frac{20\sqrt{3}}{3}\pi^2/\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{40}}{3}\pi^2 = 131.5\text{cm/s}^2(\leftarrow)$$

思考：用瞬心法求出的角速度计算B点绕基点A作圆周运动的法向加速度正确吗？

轮B：纯滚动

$$\alpha_B = a_B / BP_2 = 131.5/15 = 8.77 \text{rad/s}^2$$

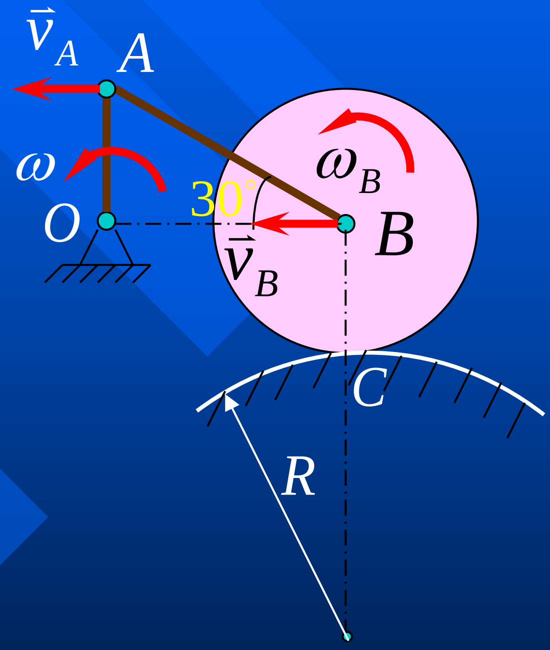
（均为逆时针转向）



思考：

- ***如果轮B在曲线上作纯滚动，求解有何不同？***
- ***能否对滚轮的角速度求导得到其角加速度？***

图示平面机构中，OA杆以匀角速度ω绕O轴转动，通过连杆AB带动轮B在固定轮上作纯滚动。已知$OA=r$，轮B半径也为r，固定轮半径$R=2r$。求图示位置B轮的角速度和角加速度及AB杆的角加速度。



解：AB在图示瞬时作瞬时平动。因此

$$v_B = v_A = r\omega \qquad \omega_{AB} = 0$$

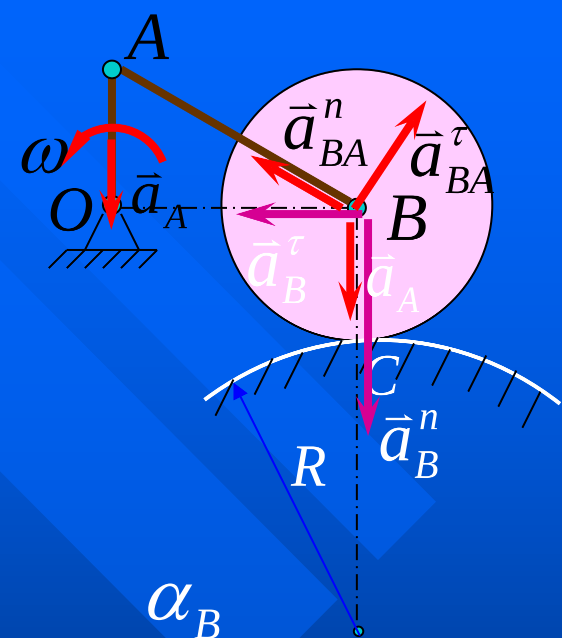
轮B作纯滚动，故

$$\omega_B = \frac{v_B}{r} = \frac{r\omega}{r} = \omega$$

AB作平面运动，以A为基点，则B点的加速度为

$$\vec a_B^\tau + \vec a_B^n = \vec a_A + \vec a_{BA}^\tau + \vec a_{BA}^n$$

大小	?	√	√	?	√
方向	√	√	√	√	√



其中 $a_A = a_A^n = r\omega^2$ $a_{BA}^n = 0$

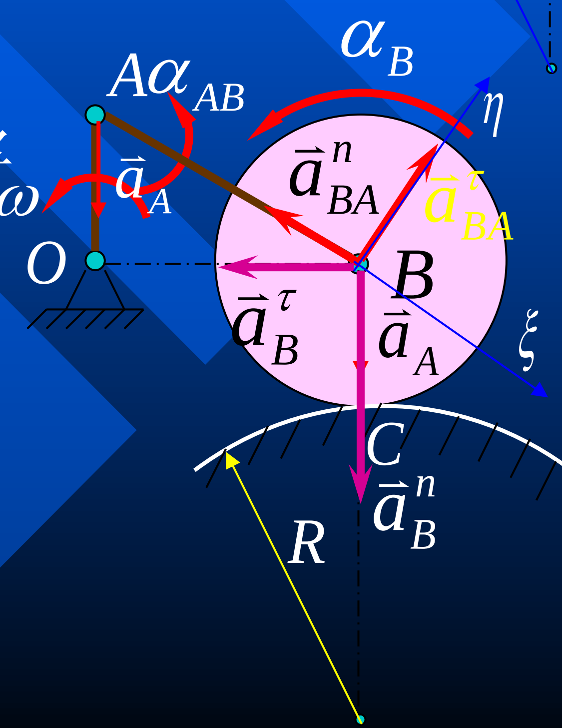
$$a_B^n = \frac{v_B^2}{r+R} = \frac{(r\omega)^2}{3r} = \frac{1}{3} r\omega^2 \qquad a_B^\tau = \alpha_B r$$

$$a_{BA}^\tau = \alpha_{AB} AB$$

建立如图所示的投影轴，由 $\vec a_B^\tau + \vec a_B^n = \vec a_A + \vec a_{BA}^\tau + \vec a_{BA}^n$ 将各矢量投影到投影轴上得

$$-a_B^\tau \cos 30^\circ + a_B^n \cos 60^\circ$$

$$= a_A \cos 60^\circ$$



$$-a_B^\tau\cos 60^\circ - a_B^n\cos 30^\circ = -a_A\cos 30^\circ + a_{BA}^\tau$$

解得 $a_B^\tau = -\dfrac{2\sqrt{3}}{9}r\omega^2 \quad a_{BA}^\tau = \dfrac{4\sqrt{3}}{9}r\omega^2$

于是得 $\alpha_B = \dfrac{a_B^\tau}{r} = -\dfrac{2\sqrt{3}}{9}\omega^2$ 转向与图示方向相反。

$\alpha_{AB} = \dfrac{a_{BA}^\tau}{AB} = \dfrac{2\sqrt{3}}{9}\omega^2$ 转向如图。

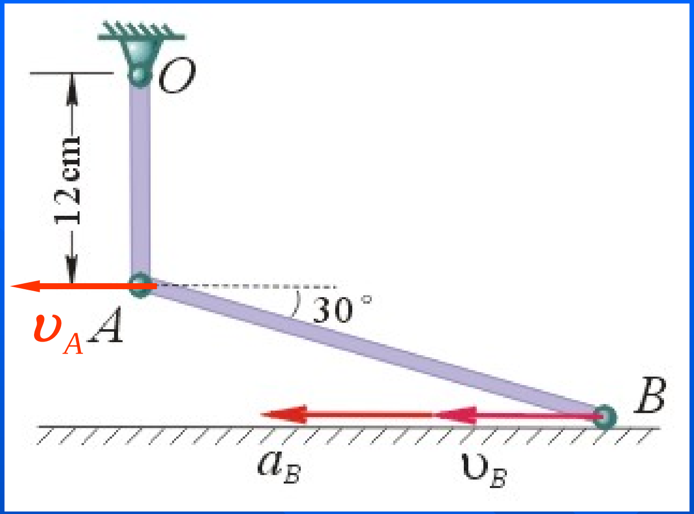
思考：如果B点的加速度写成如下的全加速度形式（不分解成切向加速度和法向加速度）可以求解吗？

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^\tau + \vec{a}_{BA}^n$$

	$\vec{a}_B$	$\vec{a}_A$	$\vec{a}_{BA}^\tau$	$\vec{a}_{BA}^n$
大小	?	√	?	√
方向	?	√	√	√

例

图示机构中，$OA=12\text{cm}$，$AB=30\text{cm}$，AB杆的B端以$\upsilon_B=2\text{m/s}$，$a_B=1\text{m/s}^2$向左沿固定平面运动。求图示瞬时，AB杆的角速度和角加速度。



解：AB杆作平面运动，由A、B两点的速度方向可知AB杆作瞬时平移，如图所示。

则有

$$\upsilon_A=\upsilon_B \qquad \omega_{AB}=0 \qquad \omega_0=\frac{\upsilon_A}{OA}=\frac{\upsilon_B}{OA}$$

以A为基点，求B点的加速度，画加速度图（2），且

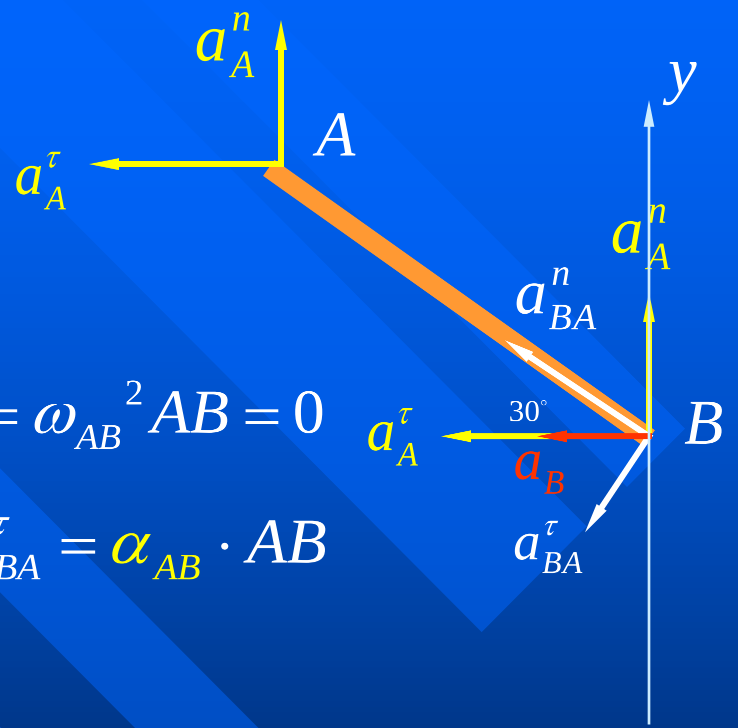
$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A^n + \boldsymbol{a}_A^\tau + \boldsymbol{a}_{BA}^n + \boldsymbol{a}_{BA}^\tau$$

大小 √ √ ? 0 ?

方向 √ √ √ √ √

$\mathbf{a}_{BA}^n = \omega_{AB}{}^2 AB = 0$

$a_A^n = \omega^2 OA = \upsilon_A^2 / OA$　　$\mathbf{a}_{BA}^\tau = \alpha_{AB} \cdot AB$



在y轴上投影

$$0 = a_A^n - a_{BA}^\tau \cos 30^\circ$$

$$a_{BA}^\tau = \frac{a_A^n}{\cos 30^\circ}$$

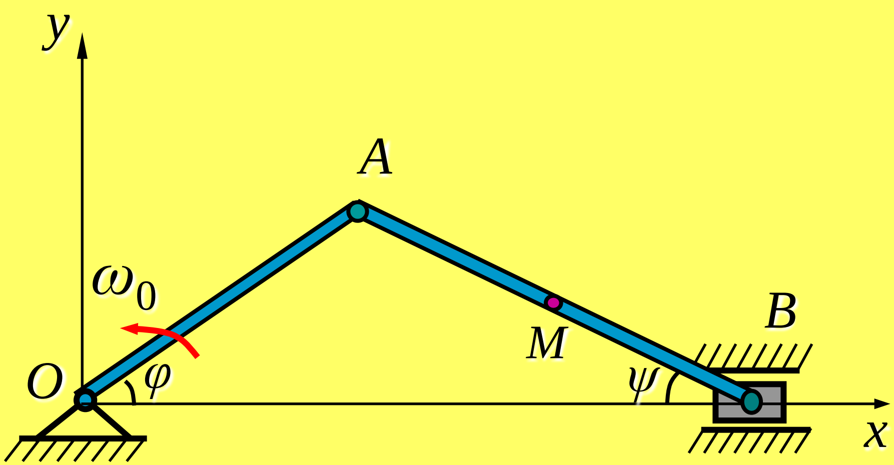
$$\alpha_{AB} = \frac{\upsilon_A^2 / OA}{AB \cos 30^\circ} = \frac{2^2 \times 2}{0.12 \times 0.3\sqrt{3}}$$

$$= 128 \text{ rad/s}^2$$

（顺时针转向）

刚体的平面运动

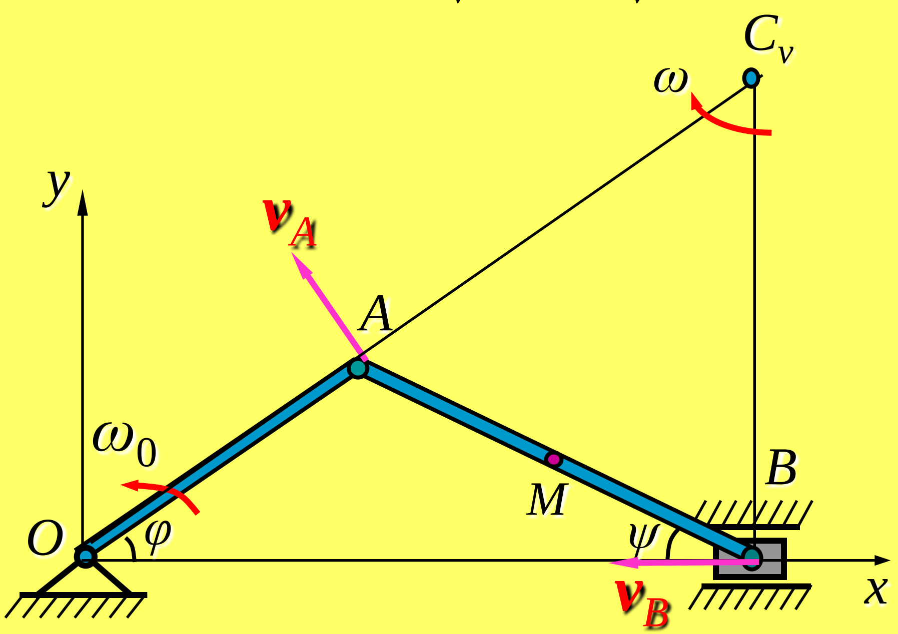
例 题



曲柄滑块连杆机构如图所示，曲柄OA长R，连杆AB长l。曲柄以匀角速ω_0转动。求图示位置时（角度已知）连杆AB中心点M的加速度。

解： 1. 速度分析. 首先求得连杆AB 的瞬心C_v 如图所示，利用瞬心法分析，可得连杆的角速度为

$$\omega = \frac{v_A}{AC_v} = \frac{R \cdot \omega_0}{AC_v}$$



2. 加速度分析。

选 A点为基点，则M点的加速度为

$$\boxed{\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}^{\tau}_{MA} + \vec{a}^{n}_{MA}}$$

大小	?	√	?	√
方向	?	√	√	√

因OA点作匀角速度定轴转动，则

$a_A = a_A^n = R\omega_0^2$ 方向由A指向O

M点相对基点A 的法向加速度

$$a^n_{MA} = AM \cdot \underline{\omega}^2 = AM \cdot \left(\frac{R\omega_0}{AC_v}\right)^2$$

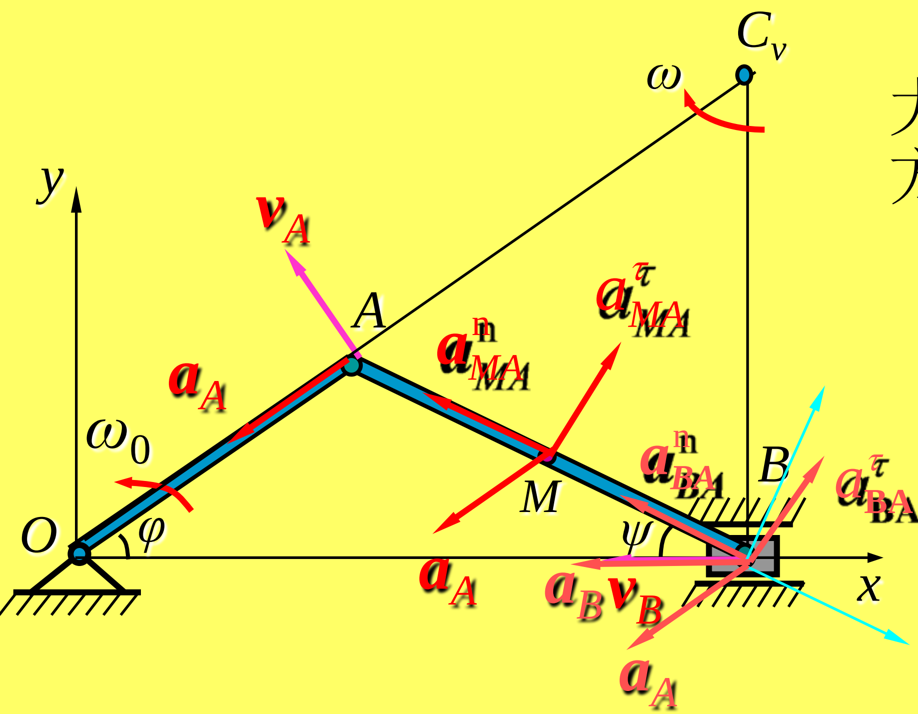
方向由M指向A

M点相对基点A 的切向加速度

$a^{\tau}_{MA} = AM \cdot \alpha$ 方向垂直AM

<u>需先求连杆的角加速度α</u>

连杆的角加速度α，可通过B点的加速度求出，选 A点为基点，则B点的加速度



$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{\tau} + \vec{a}_{BA}^{n}$$

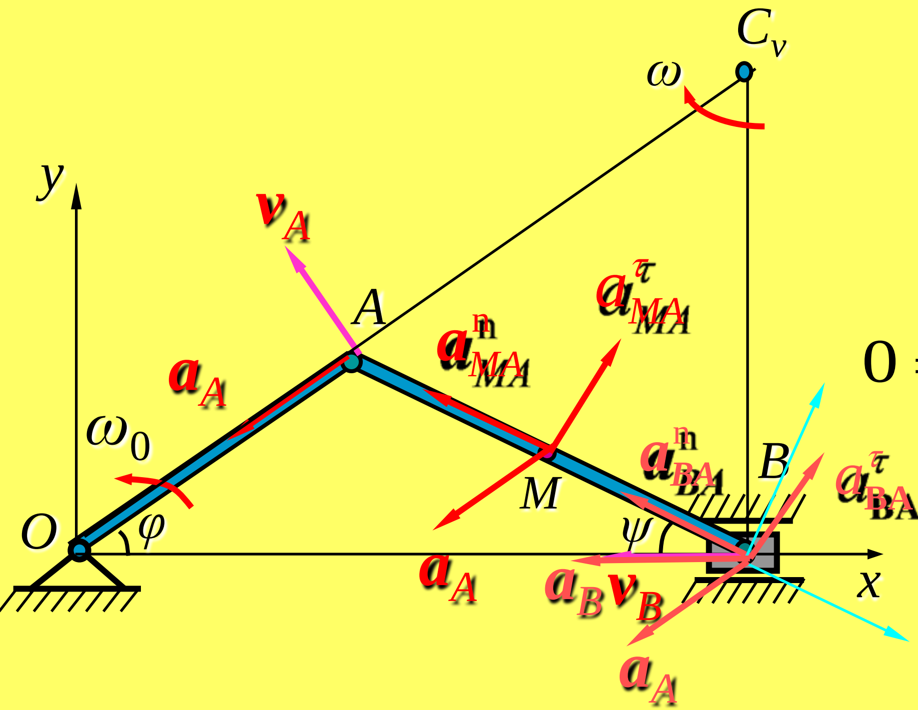
大小	?	√	?	√
方向	√	√	√	√

$a_A = R\omega_0^{\ 2}$　方向由**A**指向***O***

$a_{BA}^{\tau} = AB \cdot \alpha$　方向垂直***AB***

$a_{BA}^{n} = AB\underline{\omega}^2 = l \cdot (\dfrac{R\omega_0}{AC_v})^2$

方向由***B***指向***A***



$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}^{\,t}_{BA} + \vec{a}^{\,n}_{BA}$$

投影到 y轴上，可求出 a^τ_{BA}

$$0 = -a_A \sin\varphi + a^n_{BA}\sin\psi + a^\tau_{BA}\cos\psi$$

求得连杆AB的角加速度α大小为

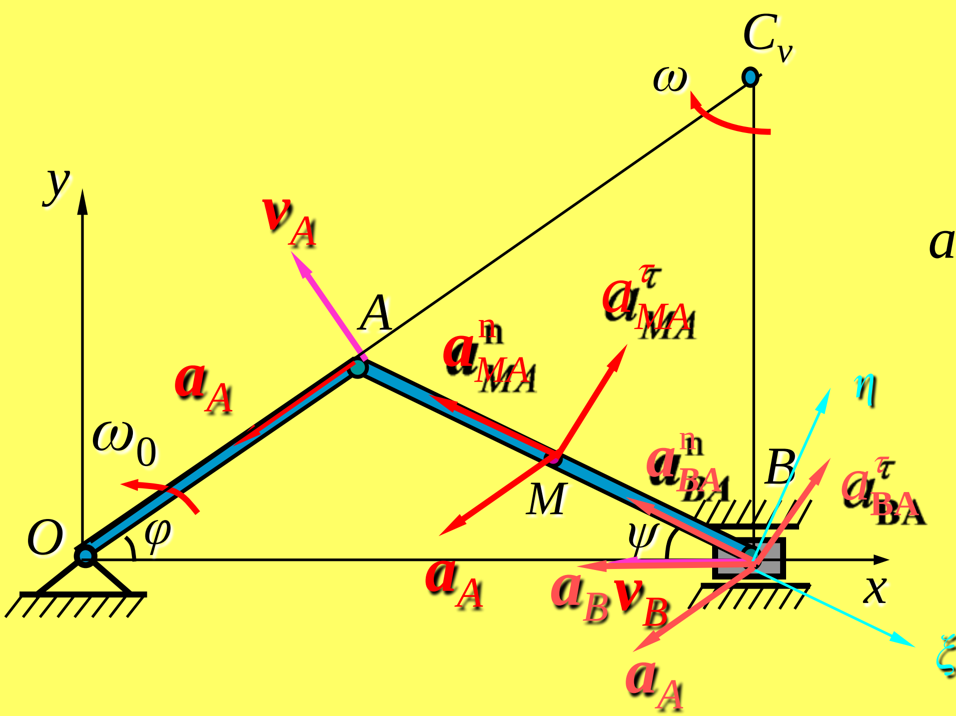
$$\alpha = \frac{a^\tau_{BA}}{AB} = \frac{R\omega_0^{\;2}}{l}\left\{\sin(\varphi+\psi) - \left[\cos(\varphi+\psi) + \frac{R}{l}\frac{\cos^2\varphi}{\cos^2\psi}\right]\tan\psi\right\}$$

逆时针转向

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}^{\,\tau}_{MA} + \vec{a}^{\,n}_{MA}$$

大小	?	√	√	√
方向	?	√	√	√

$$a^\tau_{MA} = AM \cdot \alpha$$



对 $\boxed{\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}_{MA}^{\mathrm{t}} + \vec{a}_{MA}^{\mathrm{n}}}$

分别投影到 ξ，η 轴上得

$$a_{M\xi} = -a_A\cos(\varphi+\psi) - a_{MA}^{\mathrm{n}}$$

$$= -R\omega_0^2\left[\cos(\varphi+\psi) + \frac{R}{2l}\cdot\frac{\cos^2\varphi}{\cos^2\psi}\right]$$

$$a_{M\eta} = -a_A\sin(\varphi+\psi) + a_{MA}^{\tau}$$

由于 $a_{MA}^{\tau} = AM\cdot\alpha = \frac{1}{2}\cdot a_{BA}^{\tau}$

所以 $$a_{M\eta} = -\frac{R\omega_0^2}{2}\left\{\sin(\varphi+\psi) + \left[\cos(\varphi+\psi) + \frac{R}{l}\frac{\cos^2\varphi}{\cos^2\psi}\right]\tan\psi\right\}$$

由此即可求得M 点加速度的大小和方向。