各种力系作用下的独立方程数

力系名称	空间任意力系	空间汇交力系	空间平行力系	空间力偶系
独立方程数	6	3	3	3
力系名称	平面任意力系	平面汇交力系	平面平行力系	平面力偶系
独立方程数	3	2	2	1

对于 n 个物体组成的物体（刚体）系统，在平面任意力系作用下，最多可以列出 $3n$ 个独立平衡方程，求解$3n$ 个未知量。

第二节　物体系统的平衡　静定与静不定（超静定）问题

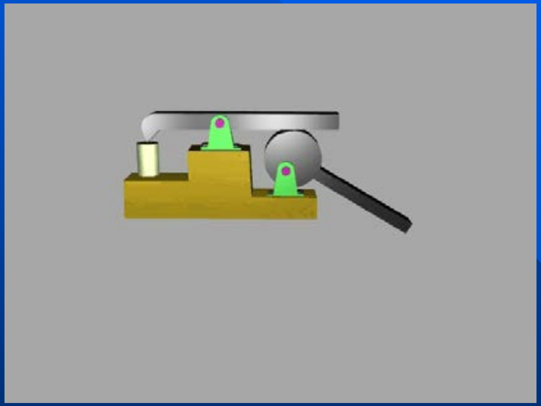
外力：物体系以外的物体作用于这个物体的力。

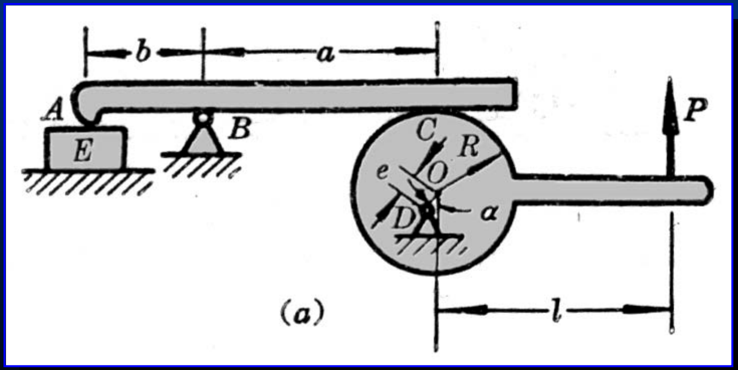
内力：物体系内各物体之间的相互作用力。

主动力（荷载）

约束反力

内力在物体系内部，总是成对出现的，整体考虑物体系的平衡时，不必考虑。





一、静定与超静定（静不定）的概念

对每一种力系而言，若未知量的数目等于独立平衡方程的数目。则应用刚体静力学的理论，就可以求得全部未知量，这样的问题称为静定问题。（理论力学）

若未知量的数目超过独立平衡方程的数目，则单独应用刚体静力学的理论，就不能求出全部未知量，这样的问题称为静不定问题（超静定问题）。（材料力学）（结构力学）

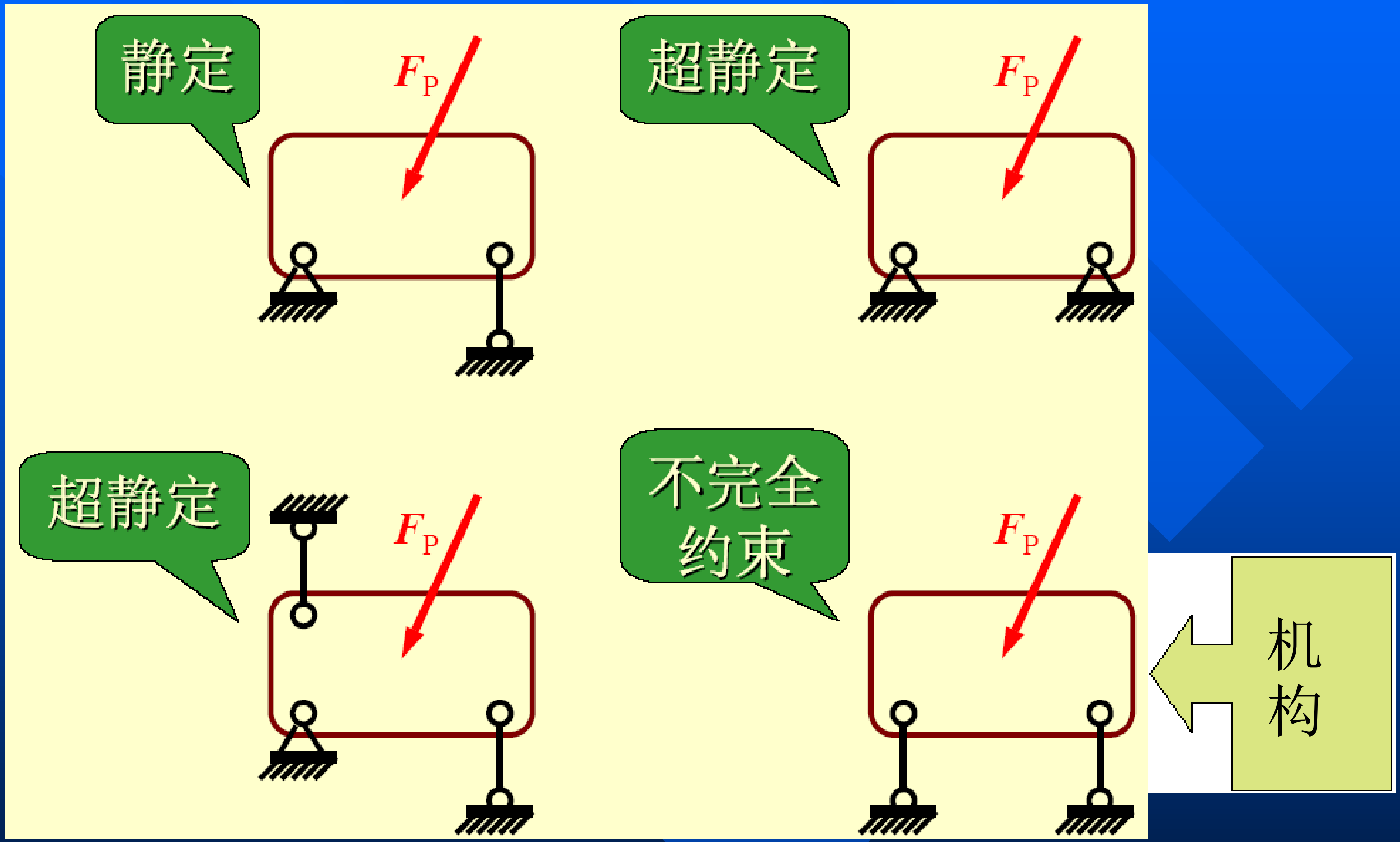
静定：未知量个数等于独立的平衡方程数；

未知量的数目= 独立平衡方程的数目

静不定(超静定)：未知量个数大于独立的平衡方程数。

未知量的数目> 独立平衡方程的数目

超静定次数：未知量个数与独立的平衡方程数之差。

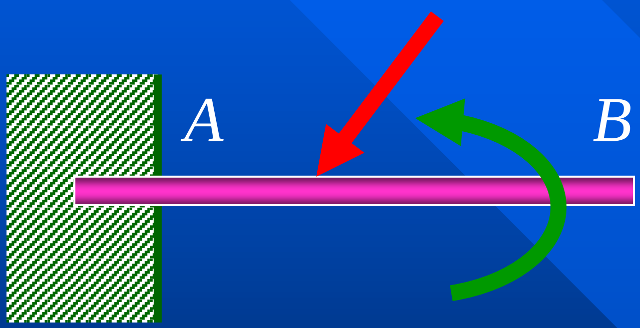

静定
F_P
超静定
F_P
超静定
F_P
不完全约束
F_P
机构

具有n个物体组成的平面静定物体系统：

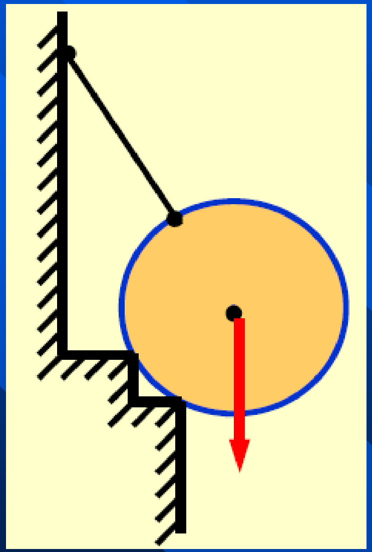
最多3n个独立平衡方程，求解3n个未知量。

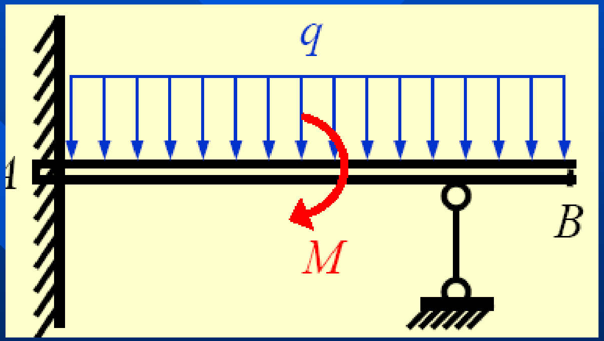
超静定问题：材料力学原理建立补充方程求解。

静定结构的例子

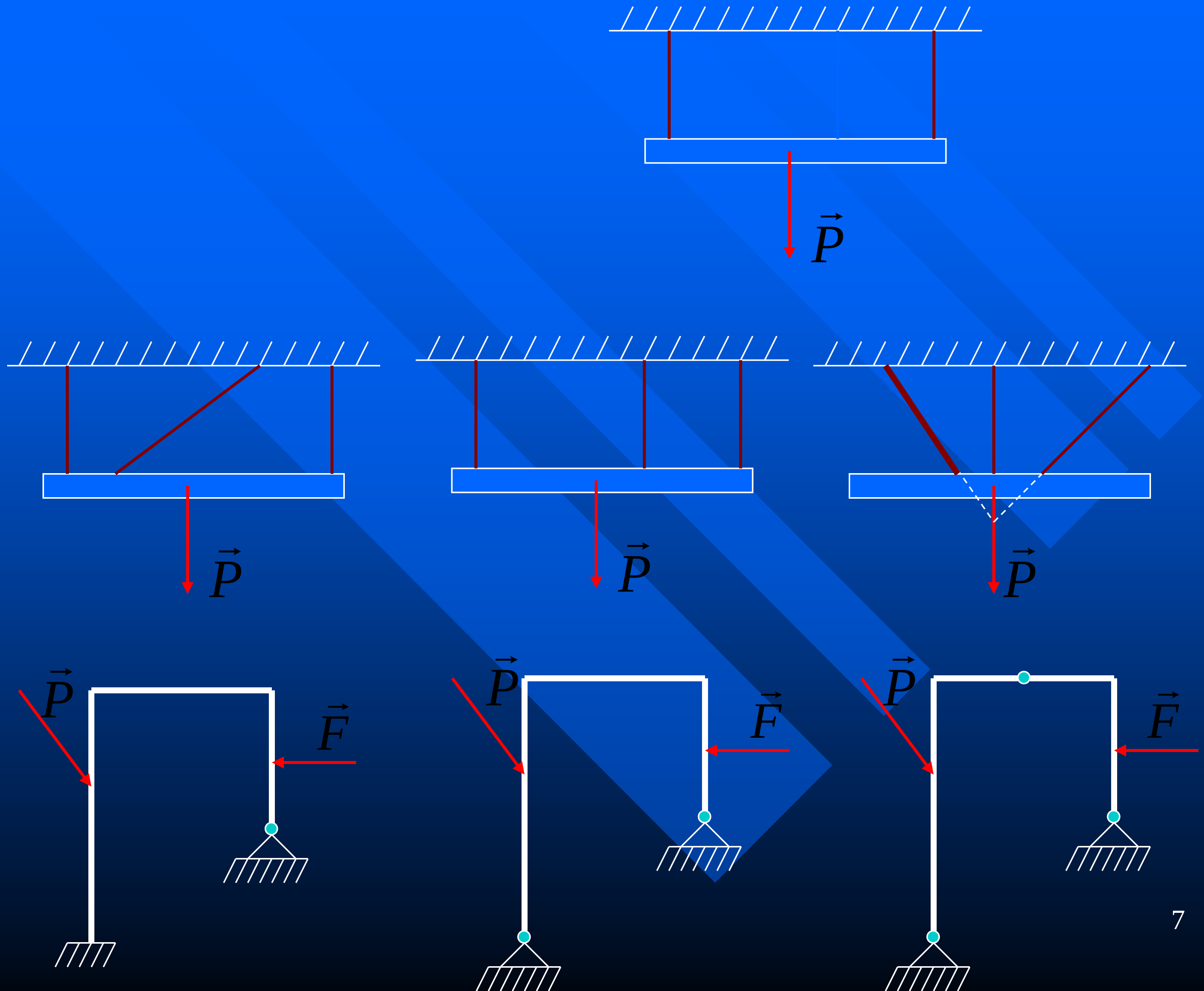


超静定结构的例子

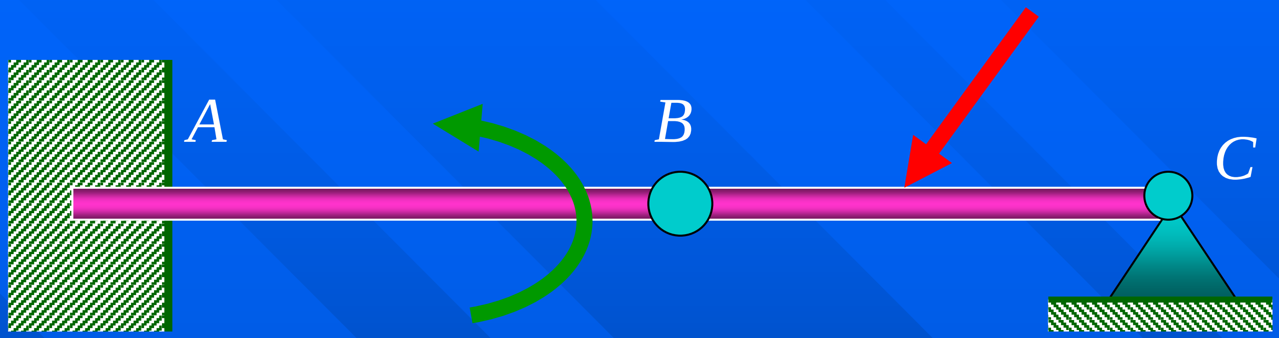




判断各图的超静定次数



思考：确定图示系统的静定性。



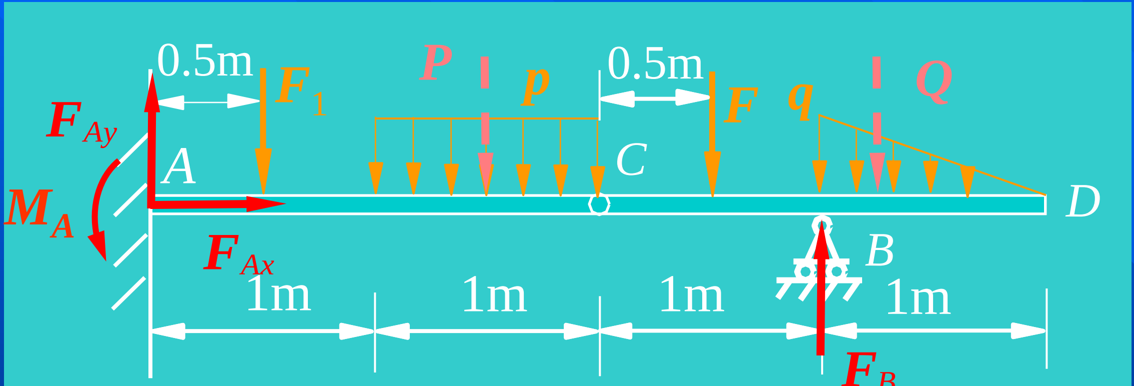
二、刚体系统（物体系统）的平衡问题*

1. 两个或两个以上刚体用一定的方式连接起来组成的系统，称为刚体系统；

2. 刚体系统整体处于平衡时，每一局部均处于平衡。

局部：组成系统的单个或几个刚体所构成的子系统。

刚体系统平衡问题的特点是：仅仅考察系统整体平衡，无法求得全部未知力。



(a)

$$\sum M_A = 0 \qquad \sum M_C = 0 \qquad \sum X = 0$$

$$\sum M_B = 0 \qquad \sum M_D = 0 \qquad \sum Y = 0$$

刚体系统平衡问题的解法有2种：

1. 一般解法：编程，运用计算机求解线性代数方程组。
2. 分析解法：通过力学分析，**先后**选取恰当的研究对象（整个系统、系统中某个刚体或系统的某个局部（系统内几个相互连接的刚体），分别列出其平衡方程，尽可能达到一个方程求解一个未知量的要求，避免求解联立方程组。

   运用分析解法需要运用经验和解题技巧。

   刚体系统平衡问题求解的关键词：**研究对象的合理选取**

3. 在运用分析解法时要分清内力和外力、作用力与反作用力，特别是**能正确识别二力杆（二力构件）**，以简化计算。

（1） 先分析整体，再分析局部；

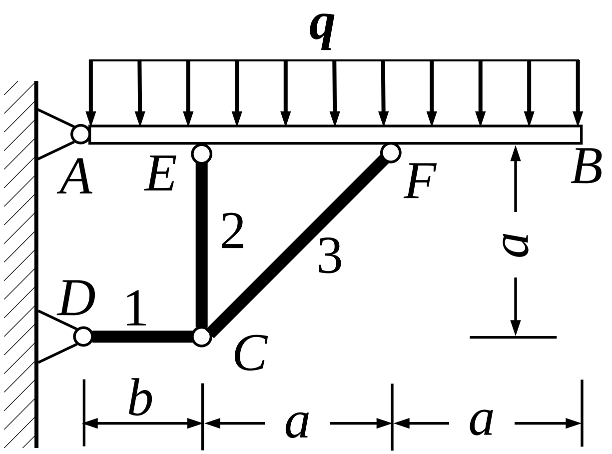
（2）先分析局部，再分析整体；

（3）先分析整体，再分析局部，最后回到整体。

个人观点供参考：

一般先从整体分析，不能解决再考虑局部。

例8　组合结构如图所示，求支座反力和各杆的内力。



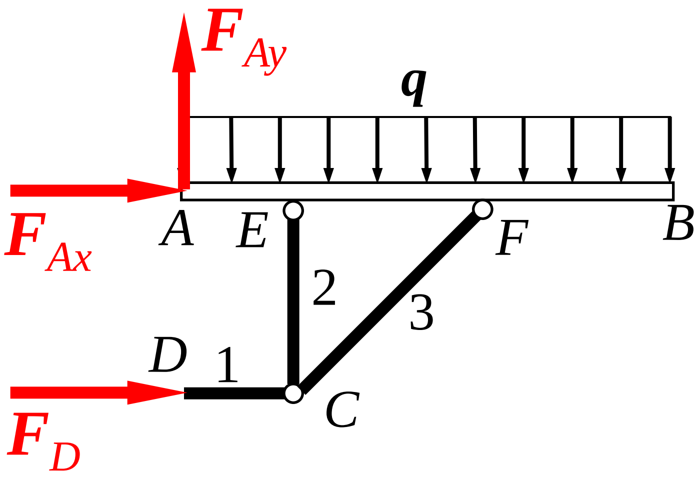
解：先以整体为研究对象，受力如图。

$$\sum F_x = 0: \quad F_{Ax} + F_D = 0$$

$$\sum F_y = 0: \quad F_{Ay} - q(2a+b) = 0$$

$$\sum M_A(\boldsymbol{F}) = 0$$

$$F_D a - \tfrac{1}{2} q(2a+b)^2 = 0$$



解之得：

$$F_D = \frac{q(2a+b)^2}{2a}$$

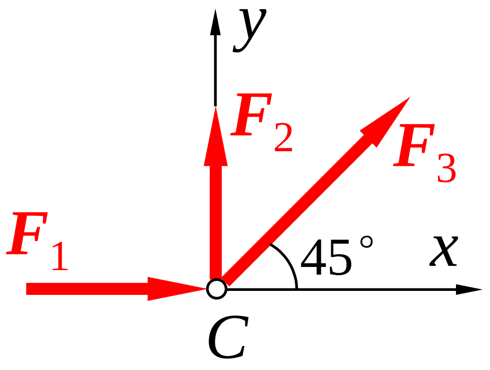
$$F_{Ax} = -\frac{q(2a+b)^2}{2a}$$

$$F_{Ay} = q(2a+b)$$

再以铰C为研究对象，受力如图，建立如图坐标。

$$\sum F_x = 0: \quad F_1 + F_3 \cos 45^\circ = 0$$

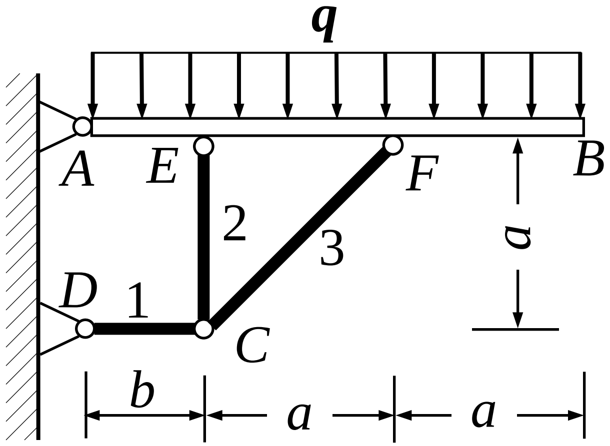
$$\sum F_y = 0: \quad F_2 + F_3 \sin 45^\circ = 0$$



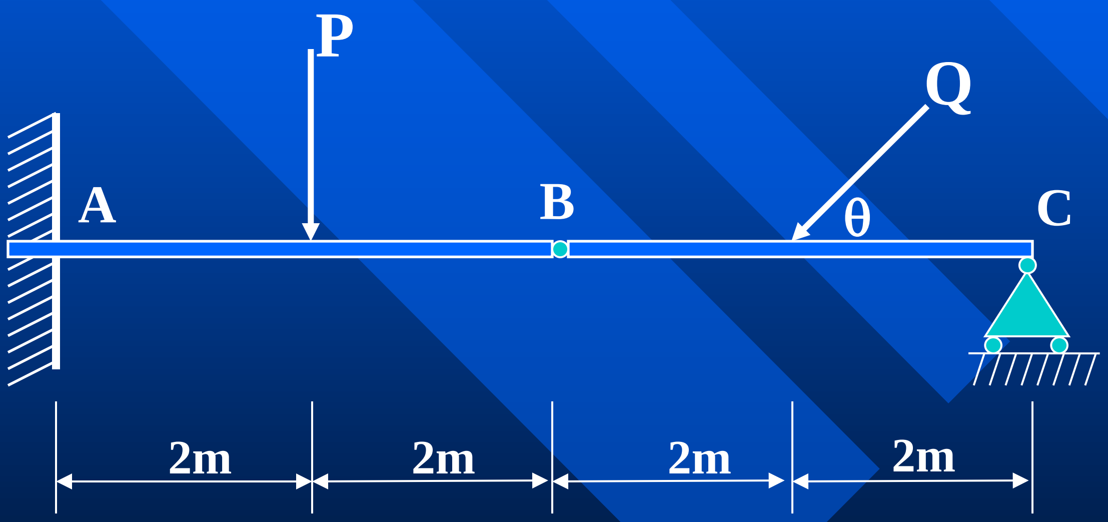
$$F_1 = F_D$$

$$F_3 = -\frac{q(2a+b)^2}{\sqrt{2}a}$$

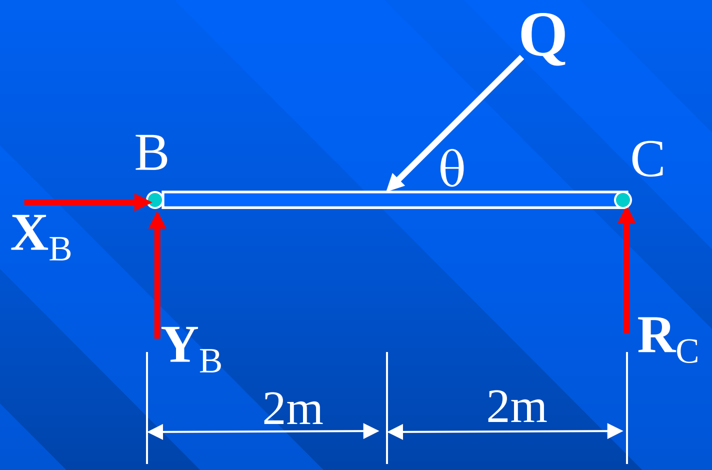
$$F_2 = \frac{q(2a+b)^2}{2a}$$



例　．组合梁ABC 的支承与受力情况如图所示. 已知 $P = 30\text{kN}$, $Q = 20\text{kN}$, $\theta = 45^\circ$, 求支座A和C的约束反力.



解：（1）取BC杆为研究对象画受力图.

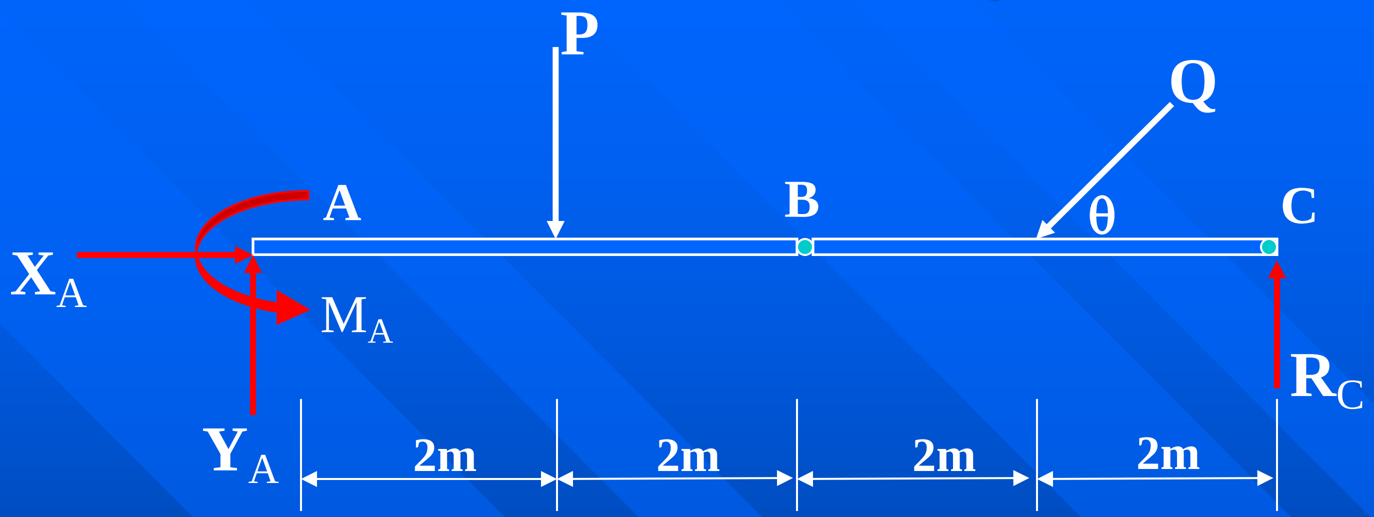


$$\sum M_B(\boldsymbol{F}_i) = 0$$

$$-2\times 20\sin 45^{o} + 4\times R_C = 0$$

$$R_C = 7.07\ kN$$

(2)取整体为研究对象画受力图。



$$\sum F_x = 0$$

$$X_A - 20\cos 45^o = 0 \qquad X_A = 14.14\ kN$$

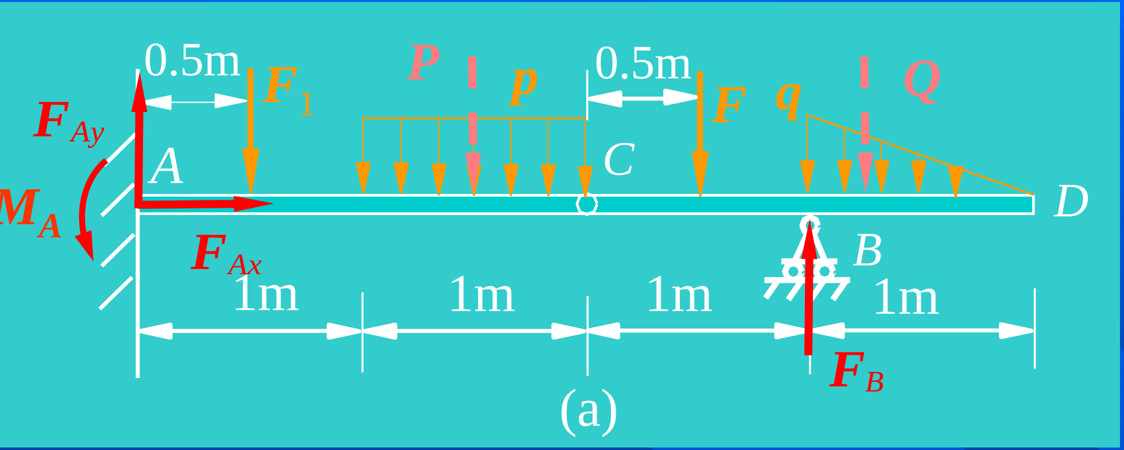
$$\sum F_y = 0$$

$$Y_A - 30 - 20\sin 45^o + R_C = 0 \qquad Y_A = 37.07KN$$

$$\sum M_A(F_i) = 0 \qquad M_A - P \times 2 - 6 \times Q\sin 45^0 + R_C \times 8 = 0$$

$$M_A = 88.293KN \cdot m$$

例 水平梁由AC和CB两部分组成，它们在C处用铰链连接。已知作用在梁上的力F=200kN，F_1=100kN， p=50kN/m，q_2=60kN/m，**求：**A和B处的约束反力。



解：（1）取整体为研究对象，受力如图。

均布载荷合力$P=1\times p$kN，作用于距C点 **0.5 m**处;

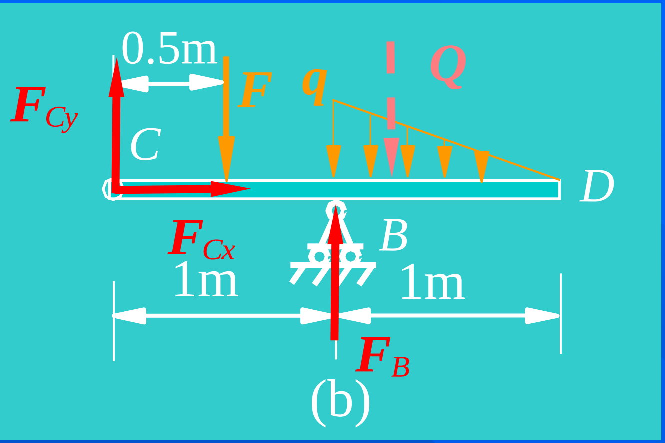
线性分布载荷合力$Q=\frac{1}{2}\cdot q$kN，作用点在距B为$BD/3$处

列平衡方程：

由 $\sum X=0$　　$F_{Ax}=0$　　(a)

由 $\sum Y=0$　　$F_{Ay}+F_B-F-F_1-P-Q=0$　　(b)

由 $\sum M_A(\boldsymbol{F})=0$　　$3F_B+M_A-0.5F_1-1.5P-2.5F-3\frac{1}{3}Q=0$　　(c)



上述3个式子中共有4个未知量，显然不能全部求出，需要先取部分为研究对象，加列平衡方程求出部分未知力。在此，取CBD段为研究对象，受力如图。

为尽量不引入新的未知数，以C为矩心列力矩平衡方程。

由 $\sum M_C(\boldsymbol{F})=0$ $\quad F_B\cdot 1-0.5F-\frac{4}{3}Q=0 \qquad$ (d)

和前三式联立可解欲求的四个未知数。由式(a)得：

$$F_{Ax}=0$$

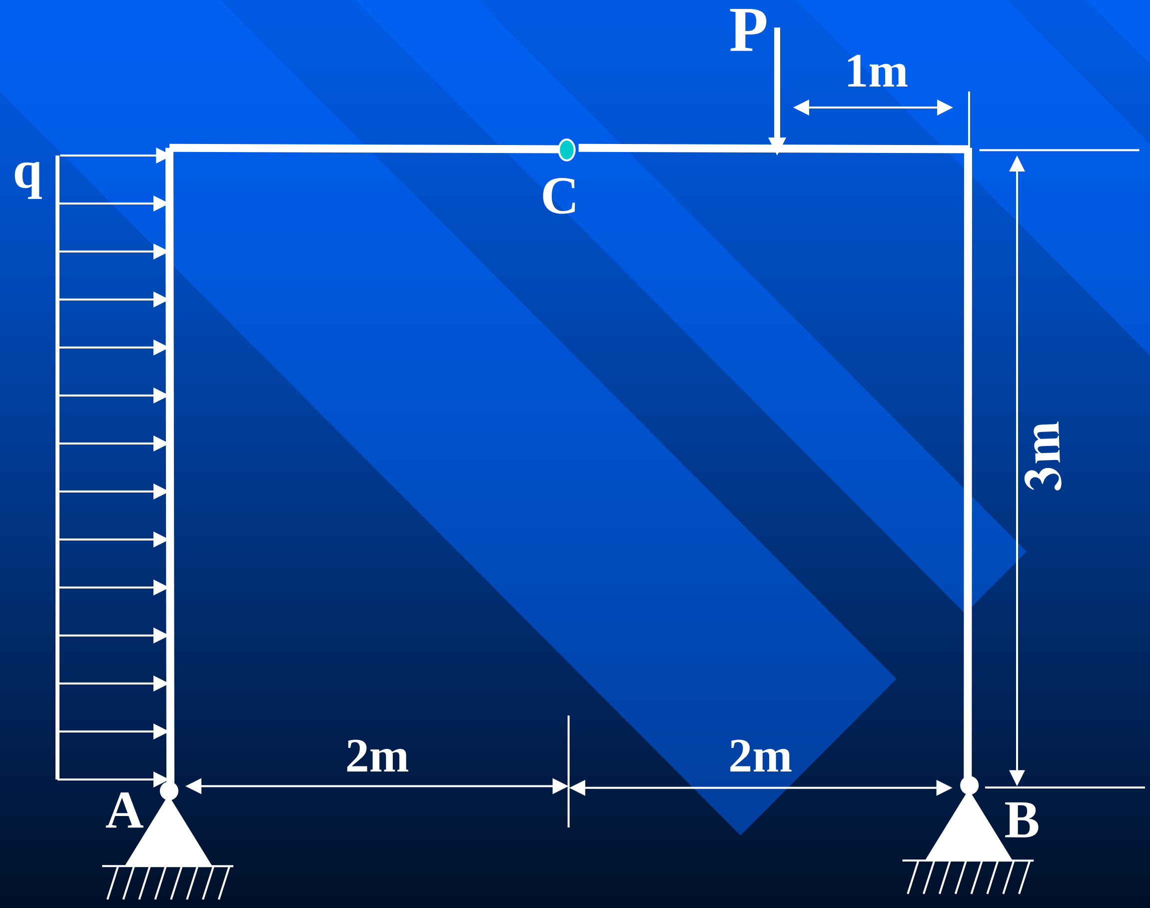
由式(d)得：

$$F_B=0.5F+\frac{4}{3}Q=140\,\mathrm{kN}$$

代入式(b)、(c)，分别求得：

$$F_{Ay}=240\mathrm{kN} \qquad M_A=305\,\mathrm{kN\cdot m}$$

例题．三铰拱ABC的支承及荷载情况如图所示．已知$P=20kN$，均布荷载$q=4kN/m$．求铰链支座A和B的约束反力．




圆柱铰链和固定铰链支座
十五 J1三铰拱.avi

解：(1) 取整体为研究对象画受力图.

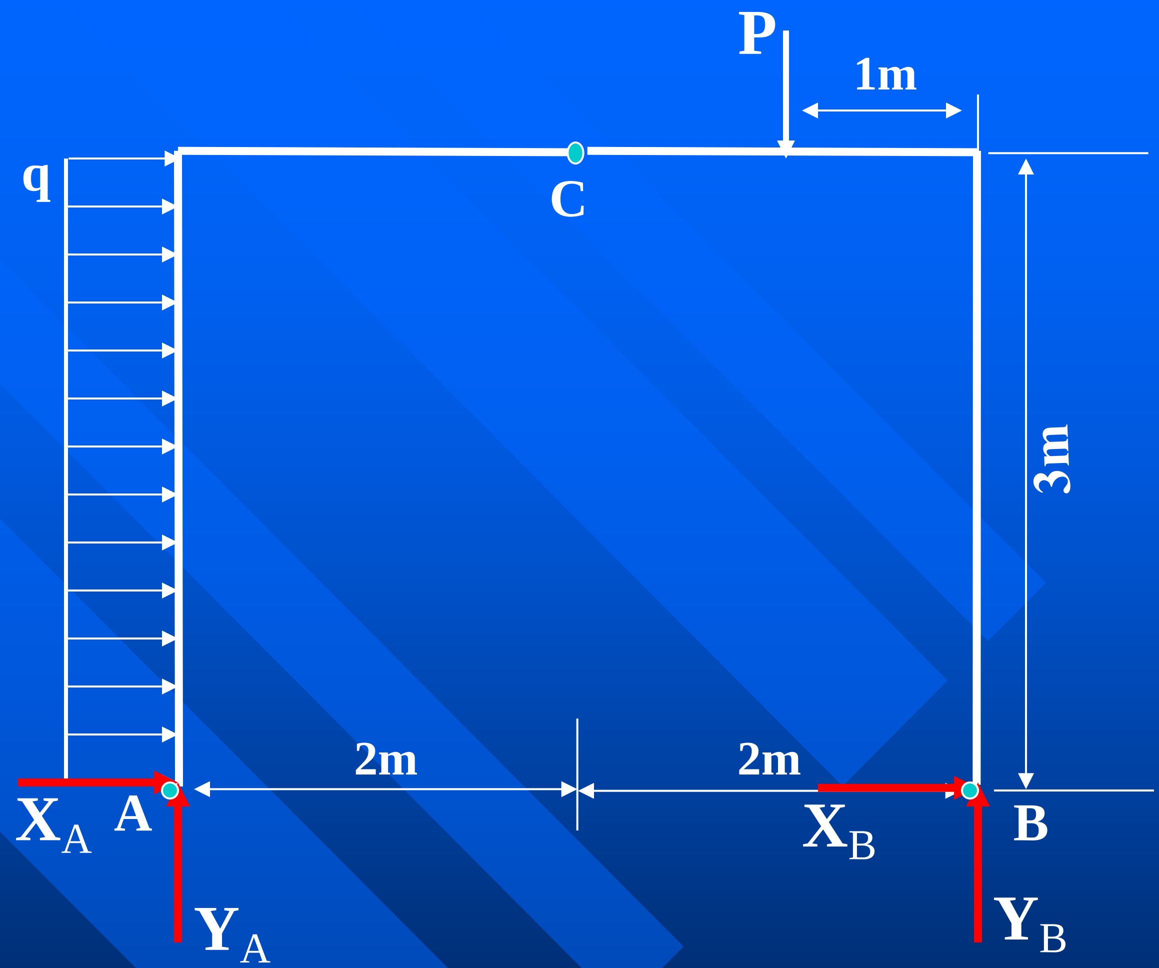
$$\sum M_A(F_i) = 0$$

$$-4 \times 3 \times 1.5$$

$$-20 \times 3$$

$$+4Y_B = 0$$

$$Y_B = 19.5\ kN$$

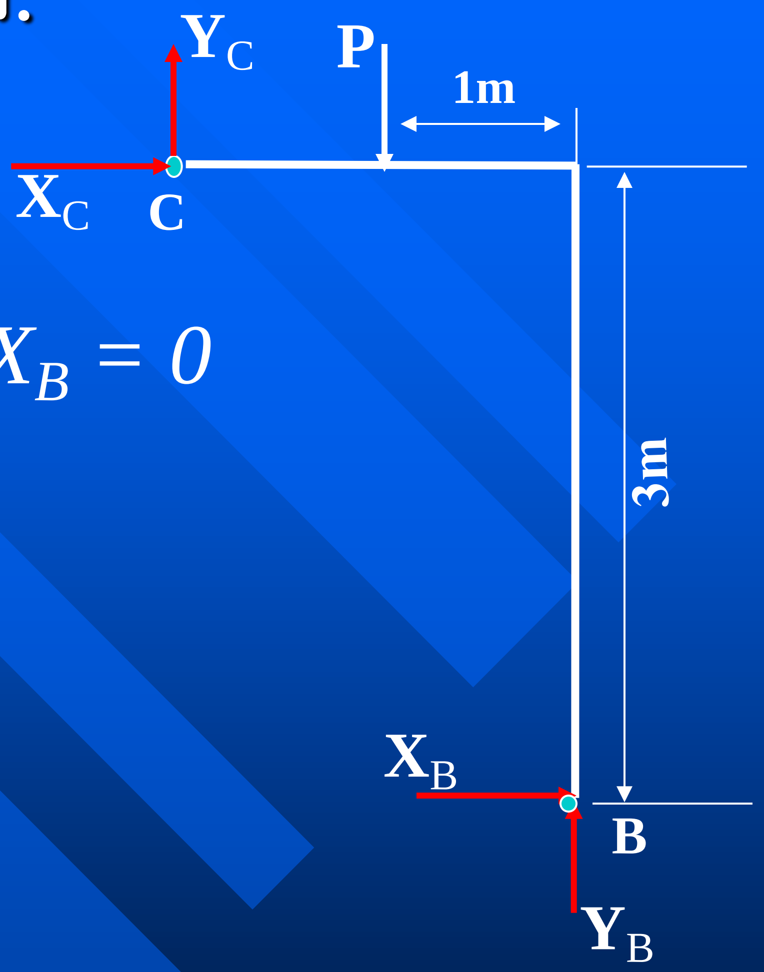


$$\sum F_y = 0 \quad Y_A - 20 + 19.5 = 0$$

$$Y_A = 0.5\ kN$$

(2) 取BC为研究对象画受力图.

$$\sum M_C(\boldsymbol{F}_i) = 0$$



$$-1\times 20 + 2\times 19.5 + 4 \times X_B = 0$$

$$X_B = -4.75\ kN$$

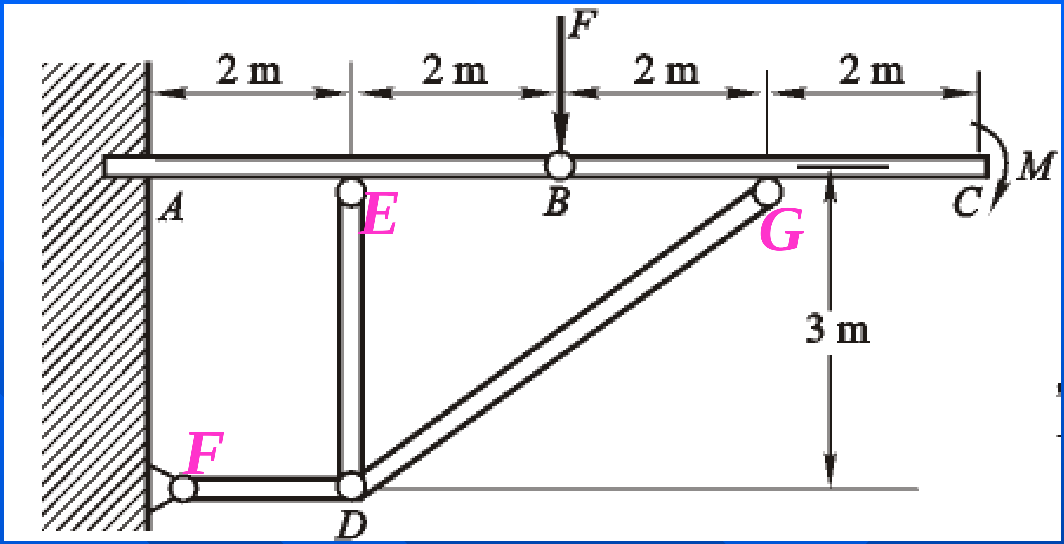
(3) 取整体为研究对象

$$\sum F_x = 0$$

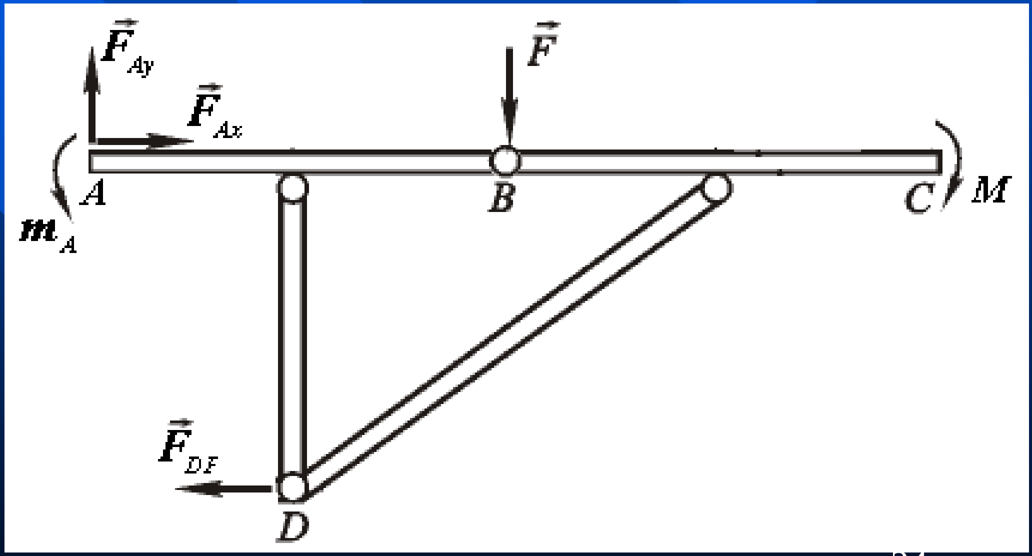
$$4\times 3 + X_A + X_B = 0$$

$$X_A = -7.25\ kN$$

例 一组合梁*ABC* 的支承及载荷如图示。已知*F*＝1*KN*，*M*＝0.5*KN.m*，求固定端*A* 的约束力。



DE、*DF*、*DG* 杆为二力杆

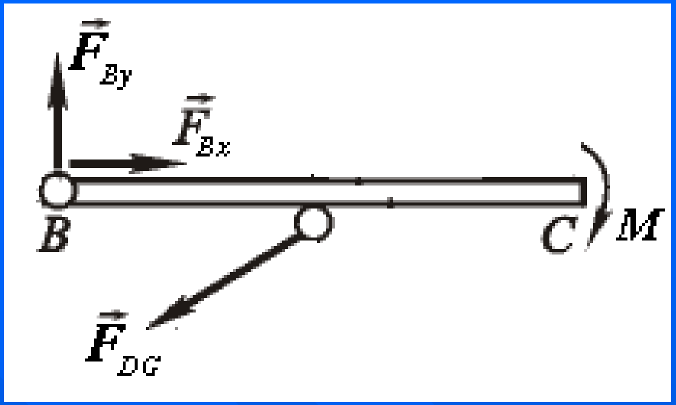


整体受力分析

A 为固定端

D 受水平力

以*BC* 杆为对象

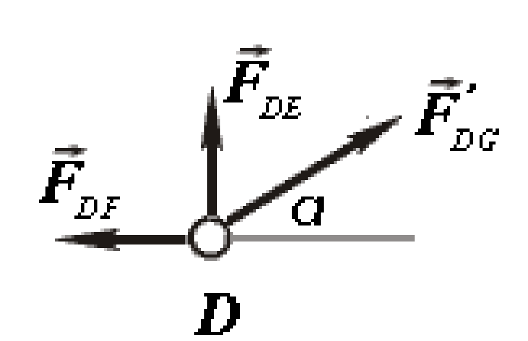


$$\sum_{i=1}^{n} m_{Bz}(\vec{F}_i) = 0$$

$$M + F_{DG} \cdot 2 \cdot \sin\alpha = 0$$

$$F_{DG} = -\frac{5}{12} KN$$

以节点*D* 为对象



$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0$$

$$F_{DG} \cdot \cos\alpha - F_{DF} = 0$$

$$F_{DF} = -\frac{1}{3} KN$$

回到整个系统

$$\sum_{i=1}^{n} m_{Az}(\vec{F}_i) = 0$$

$$F \cdot 4 + M + F_{DF} \cdot 3 - m_A = 0$$

$$m_A = 3.5KN \cdot m$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0$$

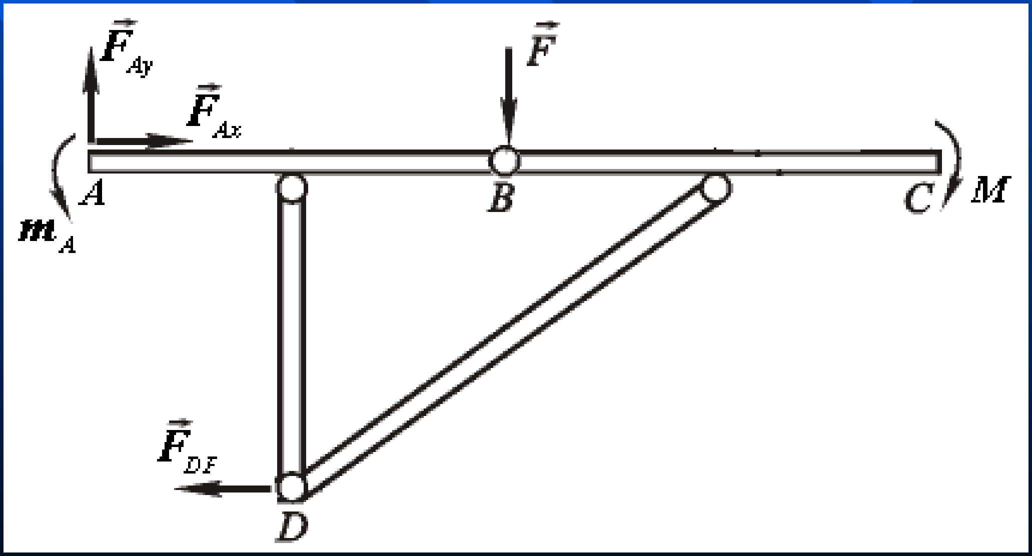
$$F_{Ay} - F = 0$$

$$F_{Ay} = 1KN$$

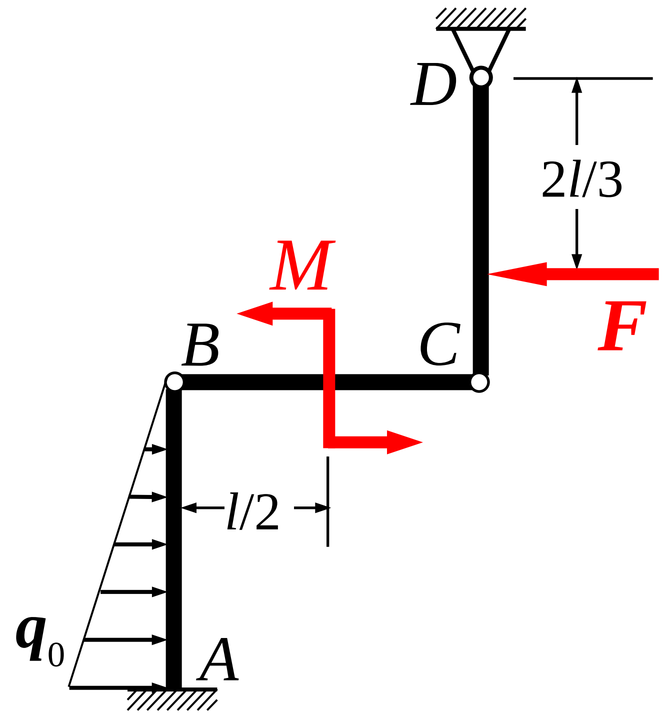
$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0$$

$$F_{Ax} - F_{DF} = 0$$

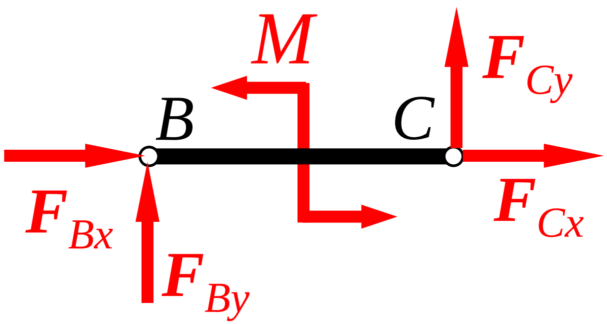
$$F_{Ax} = -\frac{1}{3}KN$$



例　两根铅直梁AB、CD与水平梁BC铰接，B、C、D均为光滑铰链，A为固定支座，各梁的长度均为$l=2$ m，受力情况如图所示。已知水平力$F=6$ kN，$M=4$ kN·m，$q=3$ kN/m。求固定端A及铰链C的约束反力。



解: (1) 取BC分析

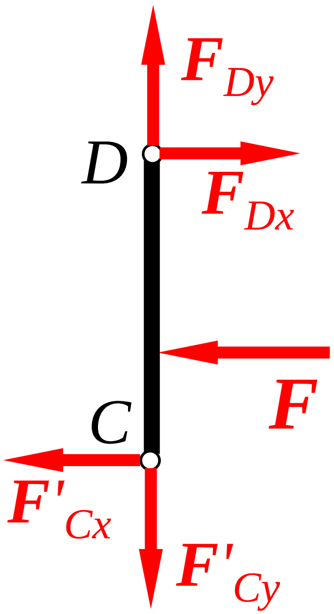


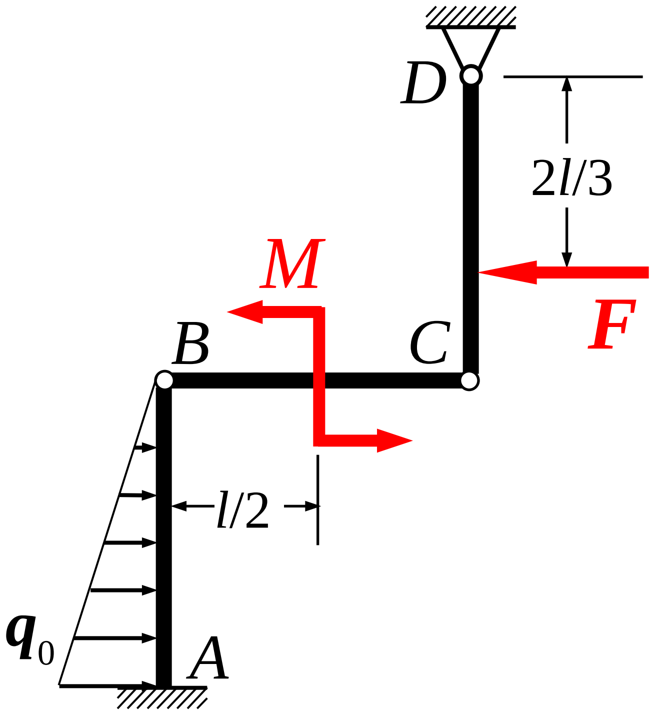
$$\sum M_B(\boldsymbol{F})=0: \quad M+F_{Cy}\cdot l=0$$

$$F_{Cy}=-\frac{M}{l}=-2\text{ kN}$$

求得结果为负说明与假设方向相反。

(2) 取CD分析



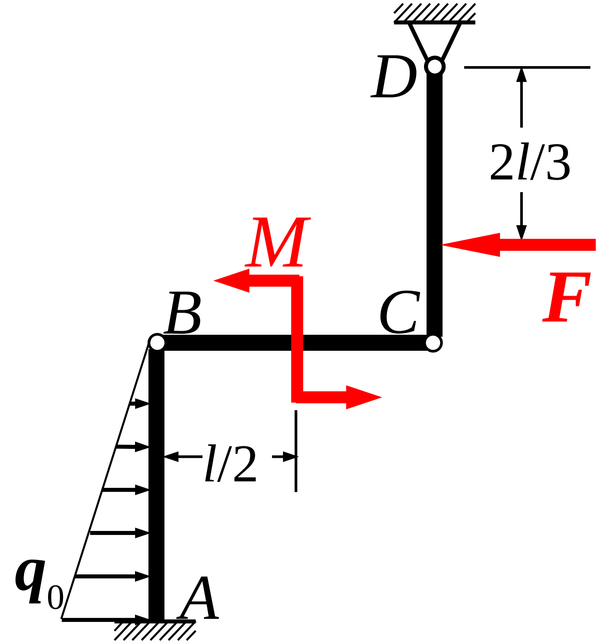


$$\sum M_D(\boldsymbol{F})=0: \quad -F'_{Cx}\cdot l - F\cdot\frac{2l}{3}=0$$

$$F'_{Cx}=-\frac{2}{3}F=-4\ \mathrm{kN}$$

求得结果为负说明与假设方向相反。

(3) 取AB、BC分析

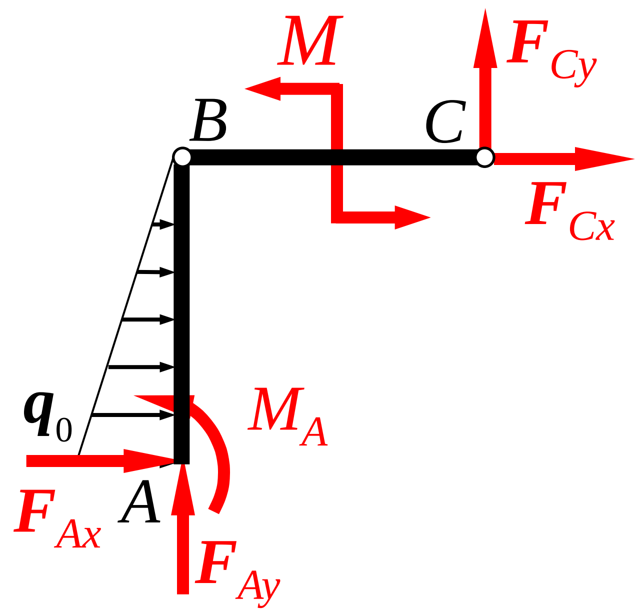


$$\sum F_x = 0: \quad F_{Cx} + F_{Ax} + \frac{1}{2}ql = 0$$

$$F_{Ax} = -F_{Cx} - \frac{1}{2}ql = -(-4) - \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2 = 1\,\text{kN}$$

$$\sum F_y = 0: \quad F_{Ay} + F_{Cy} = 0$$

$$F_{Ay} = -F_{Cy} = -(-2) = 2\,\text{kN}$$



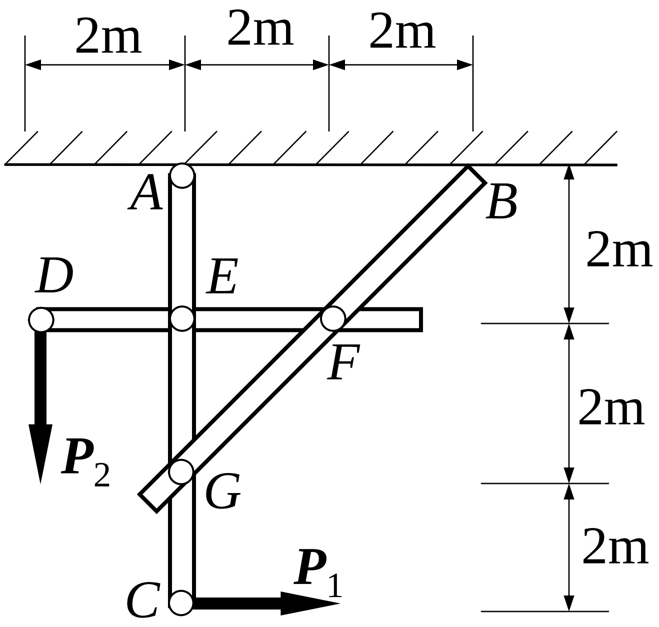
$$\sum M_A(\boldsymbol{F}) = 0:$$

$$M_A + M - \frac{1}{2}ql\cdot\frac{1}{3}l + F_{Cy}\cdot l - F_{Cx}\cdot l = 0$$

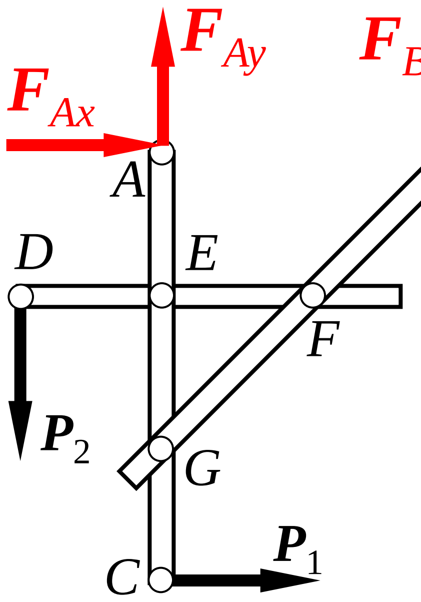
$$M_A = -6\,\text{kN}\cdot\text{m}$$

求得结果为负说明与假设方向相反，即为顺时针方向。

例　图示结构，各杆在A、E、F、G处均为铰接，B处为光滑接触。在C、D两处分别作用力$\boldsymbol{P}_1$和$\boldsymbol{P}_2$，且$P_1=P_2=500$　N，各杆自重不计，求F处的约束反力。



解：先以整体为研究对象，受力如图。



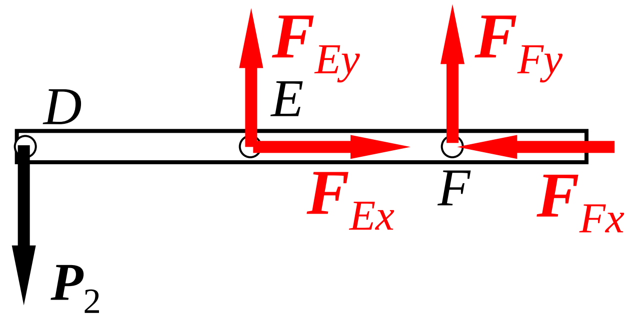
$$\sum M_A(\boldsymbol{F})=0:$$

$$-4F_B+2P_2+6P_1=0$$

解得：

$$F_B=1000\text{N}$$

再以DF为研究对象，受力如图。



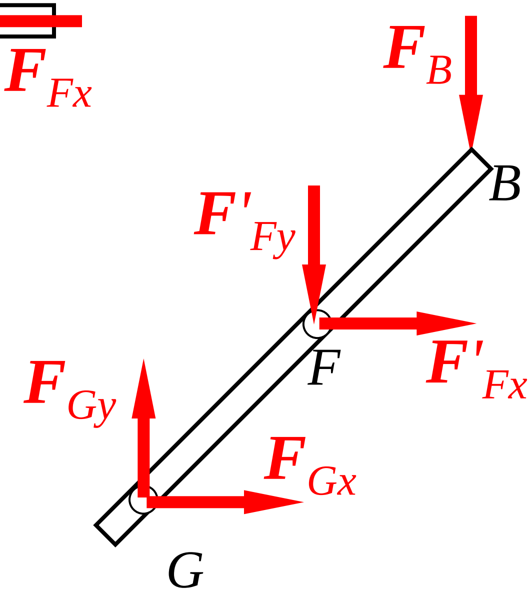
$$\sum M_E(\boldsymbol{F})=0:$$

$$2P_2+2F_{Fy}=0$$

解得：

$$F_{Fy}=-P_2=-500\ \text{N}$$

最后以杆BG为研究对象，受力如图。

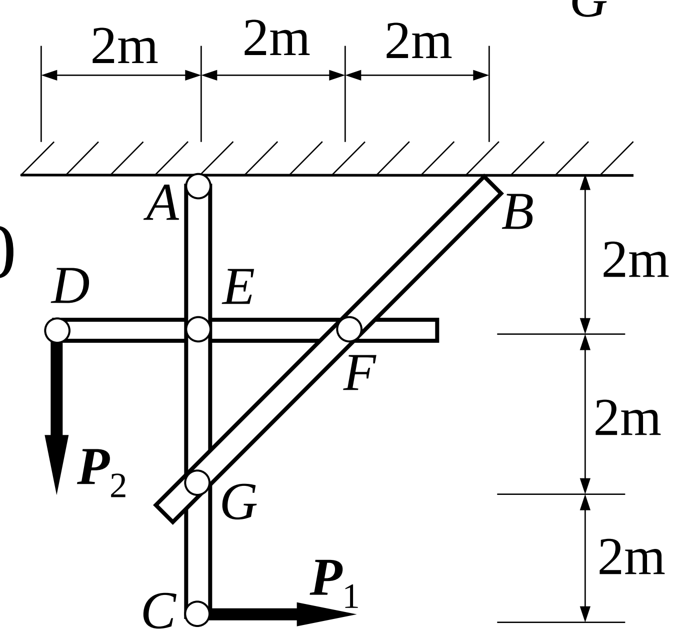


$$\sum M_G(\boldsymbol{F})=0:$$

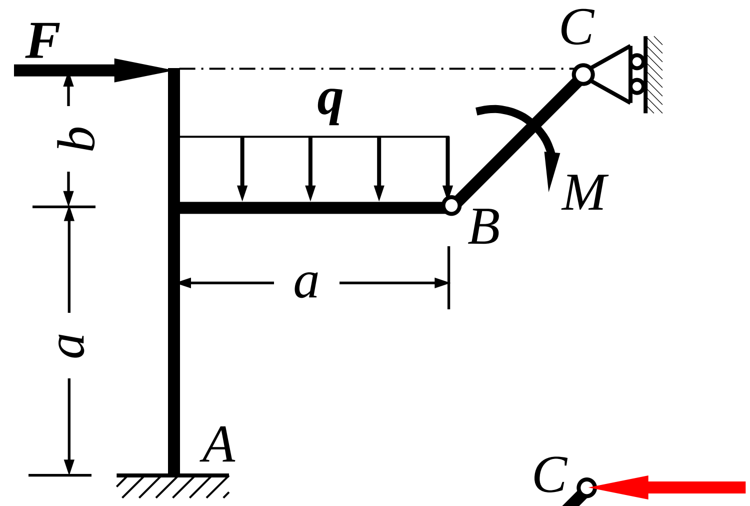
$$-4F_B-2F'_{Fy}-2F'_{Fx}=0$$

解得：

$$F'_{Fx}=-1500\ \text{N}$$



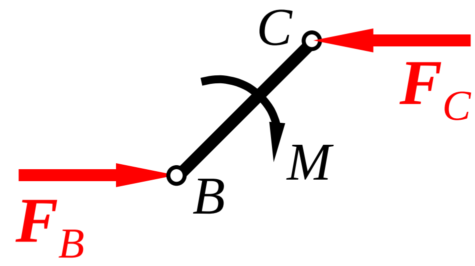
例 求图示结构固定端的约束反力。



解：先以BC为研究对象，受力如图。

$$\sum M = 0: F_C b - M = 0$$

$$\boldsymbol{F_C = \frac{M}{b} = F_B}$$



再以AB部分为研究对象，受力如图。

$$\sum F_x = 0: F_{Ax} + F - F_B' = 0$$

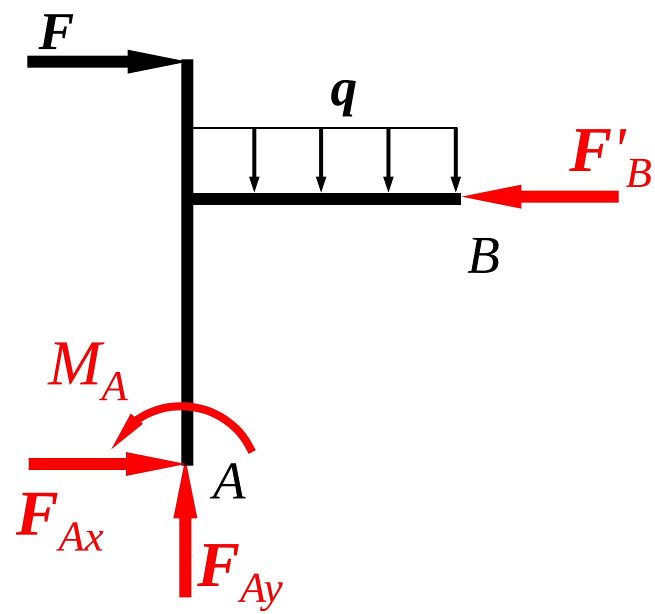
$$\sum F_y = 0: F_{Ay} - qa = 0$$

$$\sum M_A(F) = 0$$

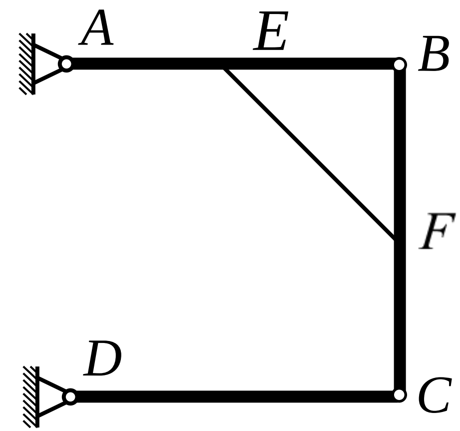
$$M_A - F(a+b) - \frac{1}{2}qa^2 + F_B'a = 0$$

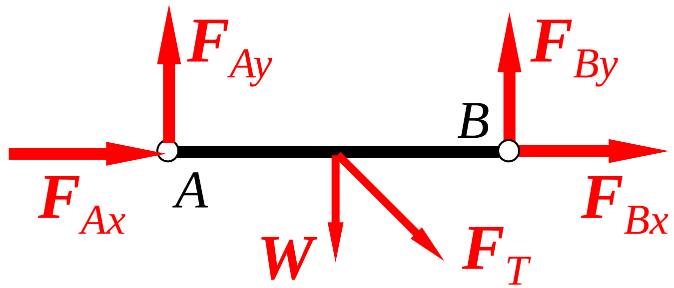
$F_B' = F_B$ 求得

$$F_{Ax} = \frac{M}{b} - F,\ F_{Ay} = qa,\ M_A = \cdots$$



例　三根等长同重均质杆(重W)如图在铅垂面内以铰链和绳EF构成正方形。已知：E、F是AB、BC中点，AB水平，求绳EF的张力。



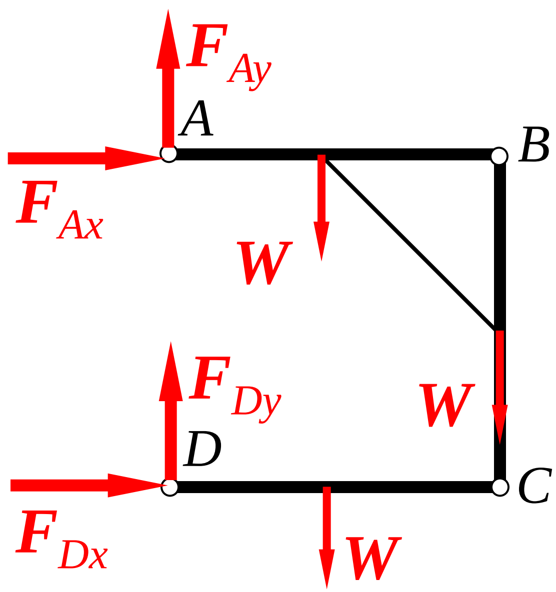


解1：取AB分析，受力如图。不妨设杆长为l。

$$\sum M_B(\boldsymbol{F})=0:$$

$$-F_{Ay}l+W\frac{l}{2}+F_T\sin 45^\circ\frac{l}{2}=0 \qquad (1)$$

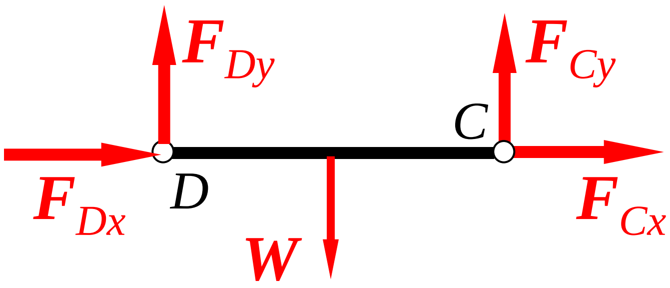
再以整体为研究对象，受力如图。



$$\sum F_y=0:$$

$$F_{Ay}+F_{Dy}-3W=0 \qquad (2)$$

最后以*DC*为研究对象，受力如图。

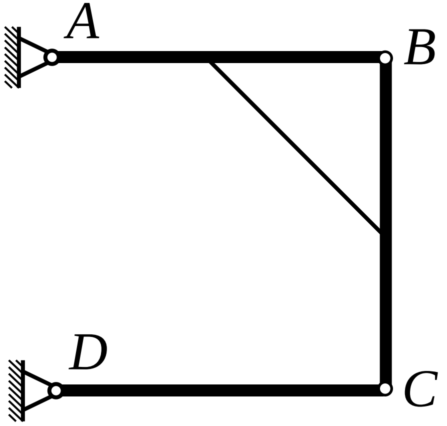


$$\sum M_C(\boldsymbol{F})=0:$$

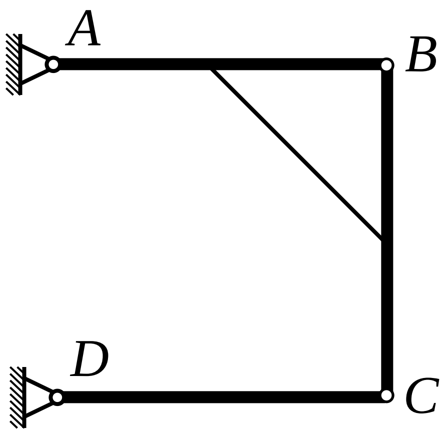
$$-F_{Dy}l+W\frac{l}{2}=0 \qquad (3)$$

联立求解(1)、(2)、(3)得：

$$F_T=4\sqrt{2}W$$



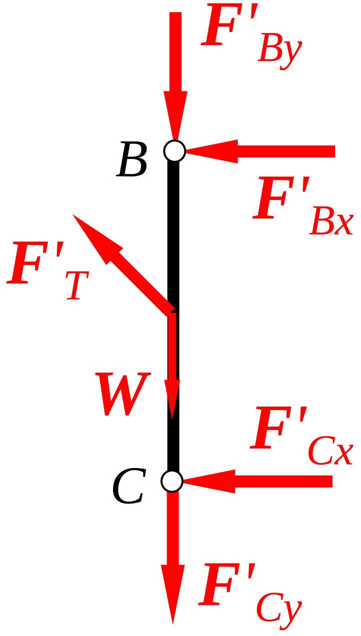
解2：先以BC为研究对象，受力如图。



$$\sum M_B(\boldsymbol{F})=0:$$

$$-F'_{Cx}\cdot l-F'_T\sin 45^\circ\frac{l}{2}=0 \qquad (4)$$

再以DC为研究对象，受力如图。



$$\sum F_x=0$$

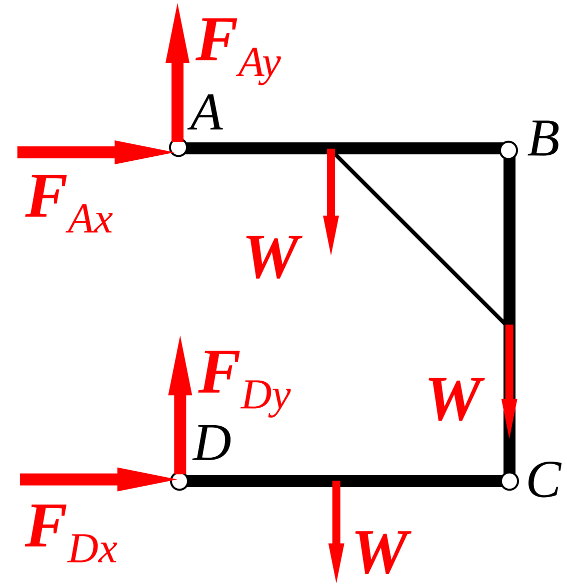
$$F_{Dx}+F_{Cx}=0 \qquad (5)$$

解2：先以BC为研究对象，受力如图。

$$\sum M_B(\boldsymbol{F})=0:$$

$$-F'_{Cx}\cdot l-F'_T\sin 45^\circ\frac{l}{2}=0 \qquad (4)$$

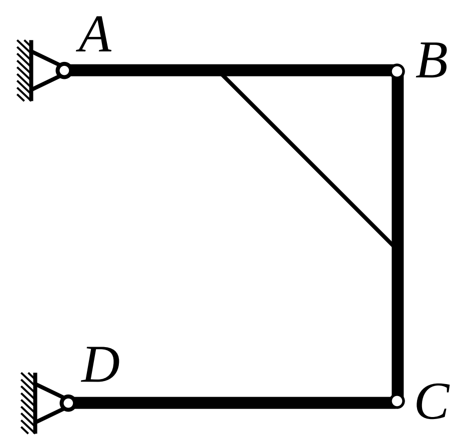
再以DC为研究对象，受力如图。



$$\sum F_x=0$$

$$F_{Dx}+F_{Cx}=0 \qquad (5)$$

最后以整体为研究对象，受力如图。



$$\sum M_A(\boldsymbol{F})=0:$$

$$F_{Dx}l-2W\frac{l}{2}-Wl=0 \qquad (6)$$

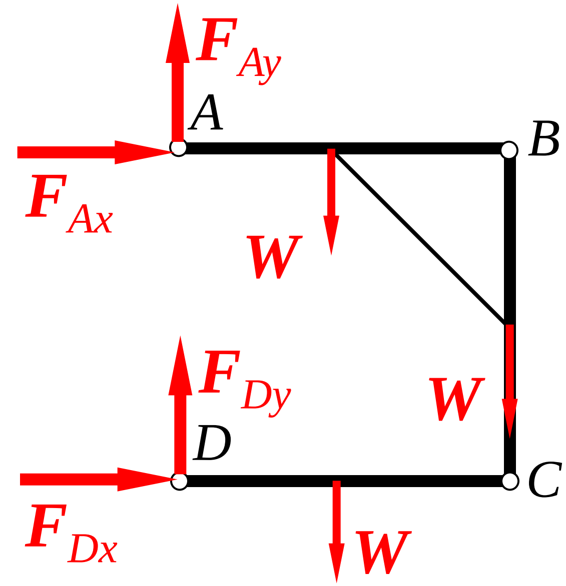
联立求解(4)、(5)、(6)即可的同样结果。

解3：1) 先以整体为研究对象求出F_{Ax}，即

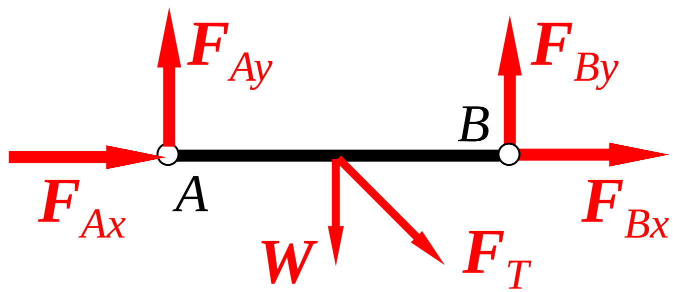
$$\sum M_D(\boldsymbol{F})=0$$

2) 再以*AB*、*BC*组成的系统为研究对象(受力图略），求出F_{Ay}，即

$$\sum M_C(\boldsymbol{F})=0$$



3) 最后以AB为研究对象，求出F_T，即



$$\sum M_B(\boldsymbol{F})=0$$

解法3避免了求解联立方程组，是建议大家采用的方法（还可以采用其他合适方法）。