黎曼积分 1

积分源自面积与体积的计算问题. 成书于公元前 17 世纪的古埃及数学著作《莱因德纸草书》就记载了正方形、圆等图形的面积公式，其中圆面积被定为直径的九分之八的平方. 之后几千年，人们发展了各种各样的方法以计算图形的面积或体积. 直到牛顿与莱布尼茨发现微积分基本定理，求积问题才有了令人满意的解答. 然而，积分的严格定义却要等到 19 世纪才由德国数学家黎曼 (Riemann) 给出，此时人类已经在积分的道路上摸索了三千多年.

1.1 积分的概念 1
1.2 可积函数类 5
1.3 微积分基本定理 8
1.4 积分法 11
1.5 积分中值定理 17
1.6 Newton-Cotes 公式 24

我们必须知道，我们必将知道.

Hilbert

1.1 积分的概念

积分有着明确的几何与物理背景，我们先通过几个引例来建立初步的印象.

面积 阿基米德曾计算了抛物弓形的面积，我们用现代的观点来重新处理此问题. 简单起见，仅计算图形 $P=\{(x,y)|0\le y\le x^2, 0\le x\le 1\}$ 的面积 A.

- 将区间 $[0,1]$ 划分为 n 等份，则直线族 $x=j/n(j=1,2,\cdots n)$ 将图形 P 分割为 n 个小图形，对应地记作 P_j.
- 当 n 很大时，每个 P_j 可近似看做细长的矩形，它的高度可近似取为 $(j/n)^2$，进而面积近似为 j^2/n^3. 累加可得

$$A_n=\sum_{j=1}^{n}\frac{j^2}{n^3}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}.$$

- 可以相信，随着 n 越来越大，A_n 应越来越接近 A. 因此

$$A=\lim_{n\to\infty}A_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}=\frac{1}{3}.$$

位移 由速度计算位移应当是牛顿遇到的最简单的运动学问题，我们来看一个例子. 假设一质点作直线运动，其速度 $v(t)=1/(1+t)$ 是时间 t 的函数，计算时间间隔 $[0,1]$ 内质点的位移 x.

- 将时间间隔 $[0,1]$ 分为 n 等份的方法将导致难以计算和式. 我们选择另一种方式：取时间点 $t_j=2^{j/n}-1(j=1,2,\cdots,n)$.
- 由于

$$t_j-t_{j-1}=2^{(j-1)/n}(2^{1/n}-1)\le 2^{1/n}-1,$$

因此当 n 足够大时，每个时间间隔 $[t_{j-1},t_j]$ 都足够短，以至于可以将质点在此时间段内的运动近似看做匀速直线运动. 若取 $v(t_j)$ 作为时间段 $[t_{j-1},t_j]$ 上的典型速度，则这一段时间质点的位移可近似为

$$v(t_j)(t_j-t_{j-1})=2^{-j/n}\cdot(2^{j/n}-2^{(j-1)/n})=1-2^{-1/n}.$$

进而总位移可近似取为

$$x_n = \sum_{j=1}^{n}(1 - 2^{-1/n}) = n(1 - 2^{-1/n}).$$

- 随着 n 趋于无穷大，x_n 应当逼近 x. 所以

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} n(1 - 2^{-1/n}) = \ln 2.$$

质量 物体质量的计算也是普遍的实际问题，我们来考虑一个简单的例子. 假设有一根长度为 L 的松针，以针尾为原点、针尖方向为正方向建立数轴之后，它的线密度为 $\rho(x)$. 下面推导此松针的质量 M.

- 仿照前面两例，把松针切割为 n 段，切割点设为 $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = L$. 此处我们并不假定分割的特殊性，以便展开一般的讨论.
- 只要每一小段切割得足够短，则每一段松针的密度可以认为是常数. 因此，任取一点 $x_j^* \in [x_{j-1}, x_j]$，可视 $\rho(x_j^*)$ 为松针在这一小段上的近似密度，进而此段松针的质量可近似为 $\rho(x_j^*)(x_j - x_{j-1})$. 于是，总质量可近似为

$$M_n = \sum_{j=1}^{n} \rho(x_j^*)(x_j - x_{j-1}).$$

- 现在的问题是如何求极限，更准确的说，是在什么趋势下求极限. 按照前面两个例子，直觉上是 n 趋于无穷大，但这并不正确. 注意，上述近似的关键在于每一小段松针可视为密度均匀，这就要求每一小段足够短，而 n 足够大并不能保证这一点（因为此处的分割并无特定规则，既非等差也非等比）. 如果记最长的一小段松针长度为 ℓ，那么我们应当在 $\ell \to 0$ 的趋势下求极限，即

$$M = \lim_{\ell\to 0} M_n = \lim_{\ell\to 0} \sum_{j=1}^{n} \rho(x_j^*)(x_j - x_{j-1}).$$

当然，此极限的具体涵义仍有待我们进一步阐释.

上述三个例子都使用了分割、近似、求和、取极限的方式，这就是所谓的积分思想或积分方法. 值得商榷之处在于这种方法是否具有普适性，为此，黎曼和达布（Darboux）先后提出了事实上等价的严格化积分定义. 在介绍他们的想法之前，我们先给出几个概念，并作若干符号上的约定.

- 若 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$，其中 $N \geq 1$，则称 $T := \{x_0, \cdots, x_N\}$ 为 $[a, b]$ 的一个**分割**. 称 $I_j := [x_{j-1}, x_j]$ 为**子区间**，其长度记为 Δx_j. 分割 T 的**模**定义为 $\|T\| = \max_j \Delta x_j$.
- 分割 T 的一个**采样**是指满足 $x_j^* \in I_j$ 的一个点集 $\{x_1^*, \cdots, x_N^*\}$. 每个 x_j^* 称为**样本点**.
- 设 f 是 $[a, b]$ 上的函数，给定分割 T 和采样 $\{x_j^*\}$，和式

$$\sum_{j=1}^{N} f(x_j^*)\Delta x_j$$

称为 f 关于分割 T 和采样 $\{x_j^*\}$ 的**黎曼和 (Riemann sum)**.

黎曼积分

设 f 是 $[a,b]$ 上的有界函数，I 是常数. 如果对于任意 $\epsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，当分割 T 满足 $\|T\| < \delta$ 时，对于 T 的任意采样 $\{x_j^*\}$，均有

$$\left|\sum_{j=1}^{N} f(x_j^*)\Delta x_j - I\right| < \epsilon,$$

则称 f 在 $[a,b]$ 上**黎曼可积 (integrable)**，称数值 I 为 f 在 $[a,b]$ 上的**黎曼积分 (integral)**，记作[1] [2]

$$\int_a^b f(x)dx = I.$$

称 f 为**被积函数**，a,b 分别称为**积分下限与积分上限**.

1: 积分符号是莱布尼茨的杰作. 若将黎曼和写为

$$sum\ f(x_j^*)\Delta x_j,$$

再将 s 拉长为 $\int$，那么莱布尼茨的符号便已扑面而来. 而反微分与积分的符号如此相似的原因，待到微积分基本定理之后便能揭晓.

2: 黎曼积分是黎曼和的极限，通常也写作

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|T\|\to 0}\sum_{j=1}^{n} f(x_j^*)\Delta x_j.$$

简言之，黎曼积分就是黎曼和的极限. 黎曼积分通常简称为**积分**，为了与不定积分 (indefinite integral) 作区别，习惯上也称为**定积分 (definite integral)**.

若从定义考察函数的黎曼可积性，则需考虑任意的分割和任意的采样，这显然并非易事. 达布的策略是采用极小极大 (minmax) 法，[3]将问题分解为较为明确的两步.

3: 极小极大法是一种普遍且有效的方法，在泛函分析、统计学、博弈论、决策论、人工智能等方面有着广泛的应用.

达布积分

设 f 是 $[a,b]$ 上的有界函数. 对于 $[a,b]$ 的任意分割 T，函数 f 关于分割 T 的**达布上和 (upper Darboux sum)** 与**达布下和 (lower Darboux sum)** 依次为

$$U(f,T) = \sum_j M_j \cdot \Delta x_j, \quad L(f,T) = \sum_j m_j \cdot \Delta x_j$$

其中 $M_j = \sup_{I_j} f$, $m_j = \inf_{I_j} f$. 分别称

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx := \inf_T U(f,T), \quad \underline{\int_a^b} f(x)dx := \sup_T L(f,T)$$

为 f 在 $[a,b]$ 上的**达布上积分 (upper Darboux integral)** 与**达布下积分 (lower Darboux integral)**. 若两者相等，则称 f 在 $[a,b]$ 上**达布可积**，它们的共同值称为 f 在 $[a,b]$ 上的**达布积分**.

值得指出以下几点:

- **有界函数必然有上积分与下积分**. 这一点与有界数列的上下极限类似，而且两者均采用了极小极大法.[4]
- **上和不增、下和不减**. 若 T' 是 T 的**加细**即 $T \subset T'$，则必有

$$L(f,T) \le L(f,T') \le U(f,T') \le U(f,T).$$

- **上积分不小于下积分**. 对于任意的分割 T', T'', 它们的合并 $T' \cup T''$

4: $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \inf_n \left(\sup_{k\ge n} a_k\right)$

是一个新的分割，且是之前两个分割的加细，因此

$$L(f,T') \le L(f,T' \cup T'') \le U(f,T' \cup T'') \le U(f,T'').$$

从而

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup_{T'} L(f,T') \le \inf_{T''} U(f,T'') = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

下面证明黎曼积分与达布积分的等价性.

达布积分定理
黎曼可积等价于达布可积；可积时，黎曼积分等于达布积分.

证明. 设 f 是 $[a,b]$ 上的有界函数. 简单起见，记其上积分与下积分分别为 $U(f)$ 和 $L(f)$.

先来证明黎曼可积蕴含达布可积. 设 $\int_a^b f(x)dx = I$, 则对于任意 $\epsilon > 0$, 可取恰当的分割 T_0，对于任意的采样 $\{x_j^*\}$ 有

$$I - \epsilon < \sum_j f(x_j^*) \cdot \Delta x_j < I + \epsilon.$$

对于此固定分割 T_0，令采样取遍所有可能，可得

$$I - \epsilon \le L(f,T_0) \le U(f,T_0) \le I + \epsilon.$$

于是

$$I - \epsilon \le L(f,T_0) \le L(f) \le U(f) \le U(f,T_0) \le I + \epsilon.$$

根据 ϵ 的任意性，可知 $U(f) = L(f) = I$.

下面证明达布可积蕴含黎曼可积. 假设 $U(f) = L(f) = J$, 则对任意 $\epsilon > 0$，可取 T', T'' 使得

$$J - \epsilon \le L(f,T') \le U(f,T'') \le J + \epsilon.$$

考虑合并加细 $T_0 = T' \cup T''$，利用达布和的单调性有

$$J - \epsilon \le L(f,T_0) \le U(f,T_0) \le J + \epsilon.$$

下面来讨论一般的分割 T 与 T_0 的达布上下和之间的差异. 假设 T_0 的分点个数为 N_0，而 $|f| \le M$. 因为分割 T 中至多有 $2N_0$ 的子区间含有 T_0 的分点，所以 $U(f,T)$ 与 $U(f,T \cup T_0)$ 至多相差 $2N_0$ 项, 进而

$$U(f,T) \le U(f,T \cup T_0) + 4N_0M\|T\| \le U(f,T_0) + 4N_0M\|T\|.$$

类似可得 $L(f,T)$ 的估计. 故而，可取 $\delta = \frac{1}{4N_0M}\epsilon$，当 $\|T\| < \delta$ 时，有

$$J - 2\epsilon \le L(f,T) \le \sum_j f(x_j^*)\Delta x_j \le U(f,T) \le J + 2\epsilon.$$

从而 f 满足黎曼可积的定义.[5] □

5: 事实上，我们证明了

$$\lim_{\|T\| \to 0} U(f,T) = \overline{\int_a^b} f(x)dx,$$

$$\lim_{\|T\| \to 0} L(f,T) = \underline{\int_a^b} f(x)dx.$$

有些文献把这两个极限式称为 Darboux 定理.

例 1.1.1 证明：狄利克雷函数 $\mathrm{D}(x)$ 在 $[0,1]$ 上不可积.

证明. 对于任意的分割 T，都有

$$U(\mathrm{D},T)=1,\quad L(\mathrm{D},T)=0.$$

因此

$$\overline{\int_0^1}\mathrm{D}(x)dx=1,\quad \underline{\int_0^1}\mathrm{D}(x)=0.$$

故而 $\mathrm{D}(x)$ 在 $[0,1]$ 上不可积. □

应用达布积分定理还可以得到下述推论.

振幅判别法

设 f 在 $[a,b]$ 上有界，则 f 在 $[a,b]$ 上黎曼可积的充要条件是，对于任意 $\epsilon>0$，存在分割 T 使得

$$\Omega(f,T):=\sum_j \omega_j\Delta x_j<\epsilon,$$

其中 $\omega_j=\sup_{I_j}f-\inf_{I_j}f$.

证明. 注意到 $U(f)-L(f)\le U(f,T)-L(f,T)=\Omega(f,T)$. 因此若条件成立，则 $U(f)=L(f)$，函数达布可积，进而黎曼可积. 条件的必要性留给读者完成. □

例 1.1.2 证明：黎曼函数 $\mathrm{R}(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积.

证明. 任意给定 $\epsilon>0$. 因为 $\mathrm{R}(x)>\epsilon$ 只有有限个点，可从小到大依次记作 $c_1,\cdots,c_N$. 取 $\delta<\epsilon/N$，使得 $c_j+\delta<c_{j+1}-\delta$. 考虑分割 $T=\{c_j\pm\delta\}$. 在每个 $[c_j+\delta,c_{j+1}-\delta]$ 上 $\mathrm{R}(x)$ 的振幅小于 ϵ；而在 $[c_j-\delta,c_j+\delta]$ 上 $\mathrm{R}(x)$ 的振幅小于 1. 从而

$$\Omega(\mathrm{R},T)\le(b-a)\cdot\epsilon+2\delta N\cdot 1<(b-a+2)\epsilon.$$

根据振幅判别法可知 $\mathrm{R}(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积. 由于无理点稠密，黎曼函数的积分显然是零. □

1.2 可积函数类

闭区间 $[a,b]$ 上的可积函数全体记作 $R([a,b])$，这是一个比较大的类别. 下面两个结论告诉我们，平时遇到的较好的函数都是黎曼可积的.

特殊的可积函数

- 连续函数是可积函数.
- 单调函数是可积函数.

证明. 设所考虑的函数为 f，闭区间为 $[a,b]$.

连续函数的可积性 若 f 在 $[a,b]$ 上连续，根据 Cantor 定理，f 必然一致连续. 因此对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $\delta > 0$, 当分割满足 $\|T\| < \delta$ 时，函数在每个子区间的振幅 $\omega_j < \epsilon$. 从而

$$\Omega(f,T) = \sum \omega_j \Delta x_j \le (b-a)\epsilon.$$

根据振幅判别法可知 f 可积.

单调函数的可积性 若 f 在 $[a,b]$ 上单调，不妨假设它单调递增，则对任意分割 T，成立

$$\begin{aligned}\Omega(f,T) &= \sum (f(x_j) - f(x_{j-1}))\Delta x_j \\ &\le \sum (f(x_j) - f(x_{j-1}))\|T\| \le (f(b) - f(a))\|T\|.\end{aligned}$$

因此，只要 $\|T\|$ 充分小，必有 $\Omega(f,T)$ 充分小，进而函数 f 在 $[a,b]$ 上可积.

事实上，上述两个结论可以推广至分段连续函数和分段单调函数，证明留作练习. □

3 课时/69 课时

可积函数的封闭性 I
可积函数类 $R([a,b])$ 关于线性运算和乘法是封闭的.

证明. 设 $f, g \in R([a,b])$.

线性运算封闭性 设 $\int_a^b f(x)dx = J_f, \int_a^b g(x)dx = J_g$. 则对于任意常数 λ 和 μ，有

$$\begin{aligned}&\left|\sum (\lambda f(\xi_j) + \mu g(\xi_j))\Delta x_j - (\lambda J_f + \mu J_g)\right| \\ \le &|\lambda| \left|\sum f(\xi_j)\Delta x_j - J_f\right| + |\mu| \left|\sum g(\xi_j)\Delta x_j - J_g\right|.\end{aligned}$$

根据黎曼积分的定义，可知 $\lambda f + \mu g \in R([a,b])$ 且

$$\boxed{\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx.}$$

乘法的封闭性 用振幅判别法. 设 $|f| \le M_f, |g| \le M_g$. 注意到一般区间上 fg 的振幅与 f, g 的振幅有以下关系

$$\begin{aligned}\omega^{fg} &= \sup |f(x')g(x') - f(x'')g(x'')| \\ &\le \sup |f(x')g(x') - f(x')g(x'')| \\ &\quad + \sup |f(x')g(x'') - f(x'')g(x'')| \\ &\le M_f \omega^g + M_g \omega^f.\end{aligned}$$

任给 $\epsilon > 0$. 设分割 T_f 使得 $\Omega(f, T_f) < \epsilon$, 分割 T_g 使得 $\Omega(g, T_g) < \epsilon$. 考虑合并分割 $T = T_f \cup T_g$, 有 $\Omega(f,T) \le \Omega(f,T_f) < \epsilon, \Omega(g,T) \le \Omega(g,T_g) < \epsilon$. 从而，根据前述振幅关系，有

$$\Omega(fg, T) \le M_f \Omega(g,T) + M_g \Omega(f,T) \le (M_f + M_g)\epsilon.$$

根据振幅判别法知 fg 可积.

与线性运算不同，函数乘积的积分不能用函数积分的乘积表示. □

一般情况下，除法的封闭性是不可能的，因为 $1/f$ 很有可能是无界函数. 此外，复合函数、反函数的封闭性也不成立.

可积函数的封闭性 II

若 $f, g \in R([a,b])$，则 $\max\{f,g\}, \min\{f,g\} \in R([a,b])$.

证明. 注意到

$$\max\{f,g\} = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|),\ \min\{f,g\} = \frac{1}{2}(f+g-|f-g|).$$

因此只需要证明可积函数的绝对值仍然是可积函数即可，而这只要利用振幅关系

$$\omega^{|f|} = \sup ||f(x')|-|f(x'')|| \le \sup |f(x')-f(x'')| = \omega^f.$$

再利用振幅判别法可知. □

可积函数的限制与扩张

设 f 是 $[a,b]$ 上的有界函数, $c \in (a,b)$ 是任一给定的点, 则 $f \in R([a,b])$ 的充要条件是 $f \in R([a,c]) \cap R([c,b])$.

证明. 先证必要性. 任意给定 $\epsilon > 0$, 存在 $[a,b]$ 的分割 T 使得 $\Omega(f,T) < \epsilon$. 将 c 加入分割 $T' = T \cup \{c\}$, 则 $\Omega(f,T') \le \Omega(f,T) < \epsilon$. 记 $T^+ = T' \cap [c,b], T^- = T' \cap [a,c]$，则

$$\Omega(f,T^{\pm}) \le \Omega(f,T') < \epsilon.$$

因此，$f \in R([a,c]) \cap R([c,b])$.

充分性的证明是简单的. 只要将 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上的分割合并即得 $[a,b]$ 上满足条件的分割. □

当满足函数满足上述定理条件时，还可以将母区间的积分转化为子区间的积分之和. 事实上，取 $[a,c]$ 的分割列 $\|T_n^-\| \to 0$ 和 $[c,b]$ 的分割列 $\|T_n^+\| \to 0$, 令 $T_n = T_n^- \cup T_n^+$ 则 $\|T_n\| \to 0$. 进而

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \lim_{n\to\infty}\left[\sum f(x_j^-)\Delta x_j^- + \sum f(x_k^+)\Delta x_k^+\right] \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum f(x_j^-)\Delta x_j^- + \lim_{n\to\infty}\sum f(x_k^+)\Delta x_k^+ \\ &= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.\end{aligned}$$

此结论称为积分的区间可加性.

积分的区间可加性

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

为了应用上的方便，我们作如下约定

- **约定** I. 若 $a = b$，则 $\int_a^b f(x)dx := 0$.
- **约定** II. 若 $a < b$，则 $\int_a^b f(x)dx := -\int_b^a f(x)dx$.

在上述两条约定下，积分的区间可加性公式对于任意大小关系的 a, b, c 均成立.

1.3 微积分基本定理

顾名思义，微积分基本定理是微积分中最重要的定理. 在介绍它之前，我们先给出下述积分保序性.

积分保序性

- 设 $f, g \in R([a, b])$ 且 $f \geq g$，则
$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$
- 设 $f \in R([a, b])$，则
$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$
- 设 $f \in R([a, b])$ 且 $m \leq f \leq M$，则
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

利用黎曼积分的定义，可以直接得到上述结果，此处不再赘述.

微积分基本定理

- **牛顿莱布尼茨公式**. 若 $f \in R([a, b])$ 且 F 是 f 在 $[a, b]$ 上的一个反导数，则
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - f(a).$$
- **反导数存在性**. 设 $f \in C([a, b])$，则 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ 是 f 在 $[a, b]$ 上的一个反导数，即
$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x), \quad d\int_a^x f(t)dt = f(x)dx.$$

在给出证明之前，先给出几个注记.

- 如果将 f 看做速度，F 看做位移，则微积分基本定理的物理意义是明显的. 在几何上可以这样理解，想象一根粉刷滚筒，它的长

度会自动适应 f 图像的高度. 当滚筒沿着 x 轴从 a 出发匀速向右滚动时，它粉刷过的面积是 $\int_a^x f(t)dt$，而面积的增长率是 $f(x)$.

- 习惯上，记 $F(b)-F(a)=F(x)|_a^b$ 或者 $F(x)]_a^b$. 因此，牛顿莱布尼茨公式也可写为
$$\int_a^b F'(x)dx = F(x)|_a^b.$$
右端是 F 在 $[a,b]$ 端点上的代数和，它可以看做某种意义的“积分”.
- 如果用反导数的符号，牛顿莱布尼茨公式可写为
$$\int_a^b f(x)dx = \int f(x)dx\Big|_a^b$$
这就是反导数符号的来源.
- 函数有定积分未必有反导数，比如黎曼函数 R(x); 反之，函数有反导数也未必有定积分，如 $f(x)=(x^2\sin\frac{1}{x^2})'$ 显然有反导数，但它是无界函数，不可积（有界的反例可参阅 Volterra 函数）.
- 由反导数存在性，连续函数必然有反导数. 另一方面，连续函数必然可积，从而牛顿莱布尼茨公式必然适用于连续函数.
- 牛顿莱布尼茨公式意味着可以用反导数计算定积分，而反导数存在定理标明可以用积分计算反导数. 因此这两个定理宣告了微分和积分在本质上的同一性，从此微分学与积分学统一成了微积分学，所以该定理被称为微积分基本定理.

证明. 先来证明牛顿莱布尼茨公式. 设 $T=\{x_j\}$ 是 $[a,b]$ 的任一分割，根据拉格朗日中值定理，有

$$F(b)-F(a)=\sum_j (F(x_j)-F(x_{j-1}))=\sum_j f'(\xi_j)\Delta x_j.$$

注意到右端是 f 的一个黎曼和. 由于 f 可积，因此当 $\|T\|\to 0$ 时，该黎曼和趋于 f 的积分. 所以

$$F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx.$$

再来证明反导数存在性定理. 简单起见，仅考虑 F 的右导数. 根据积分的区间可加性，有

$$\Delta F = F(x+\Delta x)-F(x)=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

再根据保序性，有

$$\inf_{[x,x+\Delta x]} f \le \frac{\Delta F}{\Delta x} \le \sup_{[x,x+\Delta x]} f.$$

由于 f 连续，因此

$$\lim_{\Delta x\to 0}\sup_{[x,x+\Delta x]} f = \lim_{\Delta x\to 0}\inf_{[x,x+\Delta x]} f = f(x).$$

由极限的迫敛性易知

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta F}{\Delta x}=f(x).$$

故而，F 右可导且 $F'_+(x) = f(x)$. 左导数是类似的. □

例 1.3.1 设 $L_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}$，求 $\{L_n\}$ 的极限.

解. 注意到

$$L_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{j}{n}} \cdot \frac{1}{n}.$$

这可以看做函数 $1/(1+x)$ 在 $[0,1]$ 上的一个黎曼和. 因此

$$\lim_{n\to\infty} L_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x)|_0^1 = \ln 2.$$

□

通常，把 $\int_a^x f(t)dt$ 称为**变上限积分（函数）**. 类似地，还有**变下限积分（函数）** $\int_x^b f(t)dt$. 一般地，下述形式的积分称为**变限积分**

$$\int_{l(x)}^{u(x)} f(t)dt,$$

其中 $l(x), u(x)$ 是落在 f 可积范围内的函数.

根据复合函数连续性以及求导链式法则，变限积分还有下面进一步的性质，它们的证明留给读者.

变限积分的性质

设 f 在 $[a,b]$ 上可积，则对函数 $l(x), u(x) : [c,d] \to [a,b]$ 可定义变限积分函数 $\Phi(x) = \int_{l(x)}^{u(x)} f(t)dt$.

- 若 l, u 连续，则 Φ 在 $[c,d]$ 上连续.
- 若 f 连续且 l, u 可导，则 Φ 在 $[c,d]$ 上可导且

$$\Phi'(x) = u'(x)f(u(x)) - l'(x)f(l(x)).$$

利用变限积分的求导公式，可以计算某些积分型的极限，比如

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\int_0^x e^{t^2} dt\right)^{\frac{1}{x^2}} = \exp\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(\int_0^x e^{t^2} dt\right)}{x^2}\right) = \exp(1) = e;$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_x^{2x} t^t\,dt}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2(2x)^{2x} - x^x}{2} = \frac{1}{2}.$$

变限积分还给出了一种全新的函数构造方式.[6] 下面是若干用变限积分定义的著名函数:

- **误差函数** $\mathrm{erf}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^{x} e^{-t^2} dt$.
- **对数积分函数** $\mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t}$.
- **正弦积分函数** $\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$.
- **阿贝尔椭圆函数** $u = \int_0^{\phi(u)} \frac{dt}{\sqrt{(1-c^2t^2)(1+e^2t^2)}}$.

6: 可以用变限积分定义反正弦函数

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

及自然对数函数

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

它们的反函数就可定义为 $\sin x$ 和 e^x.

可见，虽然很多函数不存在初等的反导数，但我们仍可通过变限积分的方式来表示它们.

3 课时/72 课时

1.4 积分法

微积分基本定理意味着可以用反微分的方法来计算定积分. 下面介绍分部积分法和换元积分法，本质上它们与反微分法相同，只是写法上有些差别.

分部积分法

设 f,g 在 $[a,b]$ 上可导，且它们的导函数 f',g' 在 $[a,b]$ 上可积, 则

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx.$$

或写为

$$\int_a^b f(x)dg(x) = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b g(x)df(x).$$

证明. 注意到 $fg'+f'g$ 既有原函数又可积，因此根据牛顿莱布尼茨公式可知

$$\int_a^b (f(x)g'(x)+f'(x)g(x))dx = f(x)g(x)|_a^b.$$

移项即得. □

例 1.4.1 计算 $\int_1^e x^2\ln x dx$.

解.

$$\int_1^e x^2\ln x dx = \frac{1}{3}\int_1^e \ln x d(x^3) = \frac{1}{9}(2e^3+1).$$

□

换元积分法

设 f 在 $[a,b]$ 上连续，ϕ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可微且 $\phi(\alpha)=a,\phi(\beta)=b$，又 ϕ' 在 $[\alpha,\beta]$ 上可积，则

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt.$$

证明. 因为 f 连续, 所以有原函数 F 并且成立

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(\phi(t))|_\alpha^\beta.$$

另一方面，$(F(\phi(t)))' = f(\phi(t))\phi'(t)$，所以 $f(\phi(t))\phi'(t)$ 既可积又有原函数, 从而

$$\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt = F(\phi(t))|_\alpha^\beta.$$

故而成立换元公式. □

以下几点值得注意：

- 换元函数 ϕ 的值域可以超过 f 的定义域. 事实上只要对 f 做连续延拓即可，并且积分结果与 f 连续延拓的方式无关. 通常使用单调函数作为换元，此时不必有定义域的担忧.
- 使用换元积分法时，积分限必须随着积分变量的变化而变化. 变量换了上下限必须相应更换，变量不换则上下限保持不变.
- $\phi(\alpha) = b$，$\phi(\beta) = a$ 的情形也可以使用，此时的公式为

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\beta^\alpha f(\phi(t))\phi'(t)dt.$$

  换言之，换元积分时，积分的上下限是做相应的变化，未必总是从小到大.
- 与反微分换元法不同，定积分的换元法并不需要变换可逆.

例 1.4.2 计算 $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$

解.

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx \xlongequal[0\le\theta\le\frac{\pi}{2}]{x=\sin\theta} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)d\theta = \frac{1}{4}\int_0^\pi (1+\cos t)dt = \frac{\pi}{4}.$$

当然，从积分的几何意义可直接得到结果. □

例 1.4.3 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos^2\theta d\theta$.

解.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos^2\theta d\theta = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\cos\theta = -\int_1^0 x^2dx = \frac{1}{3}.$$

□

使用换元法时务必注意变换在区间上的可微性，柯西曾给出过一个著名的例子来说明这一点. 对于同一个积分，他用两种算法得到了不同的

结果:

$$\begin{aligned}\int_0^{3\pi/4}\frac{\sin x dx}{1+\cos^2 x} &= -\int_0^{3\pi/4}\frac{d\cos x}{1+\cos^2 x}\\ &= -\int_0^{3\pi/4} d\arctan\cos x = \arctan\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{4},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{3\pi/4}\frac{\sin x dx}{1+\cos^2 x} &= \int_0^{3\pi/4}\frac{\tan x\sec x dx}{1+\sec^2 x} = \int_0^{3\pi/4}\frac{d\sec x}{1+\sec^2 x}\\ &= \int_0^{3\pi/4} d\arctan\sec x = -\arctan\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

事实上，上述第二种解法是错误的，因为 $\sec x$ 在 $\pi/2$ 处是奇点.

除了分部积分法和换元法之外，计算定积分时，还可以充分利用区间和函数的对称性. 下面举例说明.

例 1.4.4 计算 $\int_{-1}^1(1-x)\sqrt{1-x^2}dx$

解. 注意到 $x\sqrt{1-x^2}$ 是奇函数，所以

$$\int_{-1}^1 x\sqrt{1-x^2}dx = 0.$$

而 $\sqrt{1-x^2}$ 是偶函数，所以

$$\int_{-1}^1\sqrt{1-x^2}dx = 2\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{2}.$$

故而所求积分为 $\pi/2$. □

例 1.4.5 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}dx$.

解. 注意到

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}dx \xlongequal{x=\frac{\pi}{2}-t} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\sin t+\cos t}dt.$$

由于它们的和为 $\pi/2$，所以所求积分为 $\pi/4$. □

例 1.4.6 计算 $\int_{-1}^1\frac{\cos x}{e^x+1}dx$.

解. 对于一般的可积函数 f，有

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \xlongequal{x=-t} \int_{-1}^1 f(-t)dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^1(f(x)+f(-x))dx.$$

所以，本例的积分为

$$\int_{-1}^{1}\frac{\cos x}{e^x+1}dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(\frac{\cos x}{e^x+1}+\frac{\cos x}{e^{-x}+1}\right)dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\cos x dx=\sin 1.$$

一般地，函数在对称区间的积分，只要取函数的偶部即可. □

例 1.4.7 计算 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$.

解.

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan\theta)d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}[\ln(\sin\theta+\cos\theta)-\ln\cos\theta]d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}[\ln\sqrt{2}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)-\ln\cos\theta]d\theta\\&=\frac{\pi\ln 2}{8}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}[\ln\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)-\ln\cos\theta]d\theta\\&=\frac{1}{8}\pi\ln 2.\end{aligned}$$

□

下面再来看几个一般函数的例子.

例 1.4.8 设 f 在 $[0,1]$ 上连续，$F(x)=\int_0^x tf(x-t)dt$. 求 F''.

解. 换元可得

$$F(x)\,\frac{s=x-t}{\overline{\overline{t=x-s}}}\,x\int_0^x f(s)ds-\int_0^x sf(s)ds.$$

直接求导可得 $F''(x)=f(x)$. □

例 1.4.9 设 f 在 $[0,1]$ 上连续，证明:

$$\int_0^1\left(\int_0^x f(t)dt\right)dx=\int_0^1(1-x)f(x)dx.$$

证明. 利用分部积分法可得

$$\int_0^1\left(\int_0^x f(t)dt\right)dx=x\int_0^x f(t)dt|_0^1-\int_0^1 xf(x)dx=\int_0^1(1-x)f(x)dx.$$

下面再给出一种解法. 考虑

$$F(s)=\int_0^s\left(\int_0^x f(t)dt\right)dx-\int_0^s(s-x)f(x)dx.$$

显然 $F(0)=0$, 容易验证 $F'(t)=0$, 所以 $F(1)=0$. □

Wallis 公式

1655 年，Wallis 发表了计算圆周率的著名的 **Wallis 乘积公式**

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{(2k)(2k)}{(2k-1)(2k+1)}.$$

现在我们来证明此公式. 考虑 **Wallis 积分**

$$W_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x dx.$$

利用分部积分法，可得

$$\begin{aligned}W_n&=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x d\cos x\\&=0+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cdot\cos^2 x dx\\&=(n-1)W_{n-2}-(n-1)W_n.\end{aligned}$$

因此有递推公式

$$W_n=\frac{n-1}{n}W_{n-2}.$$

从而可得 **Wallis 公式**

$$\begin{aligned}W_{2n}&=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}W_0=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2},\\W_{2n+1}&=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}W_1=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.\end{aligned}$$

结合 Wallis 积分的单调性，可知

$$1\le\frac{W_{2n}}{W_{2n+1}}\le\frac{W_{2n-1}}{W_{2n+1}}=\frac{2n+1}{2n}.$$

再由迫敛性得

$$1=\lim_{n\to\infty}\frac{W_{2n}}{W_{2n+1}}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}\right]\cdot\frac{\pi}{2}.$$

这就是 Wallis 乘积公式.[7]

Wallis 乘积收敛速度较慢，可以证明误差为 $O(\frac{1}{n})$.

7: 亦可从 Euler 的 $\sin x$ 的乘积展开得到 $\frac{2}{\pi}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(2n)^2}\right)$.

推广的分部积分公式与换元公式 *

在分部积分公式中，由于 g' 可积，所以根据牛顿莱布尼茨公式有

$$\int_a^x g'(t)dt=g(x)-g(a).$$

进而，有

$$\frac{d}{dx}\int_a^x g'(t)dt = g'(x).$$

因此，下述定理是前述分部积分公式的推广.

分部积分公式

设 f 在 $[a,b]$ 上可导，且 f' 在 $[a,b]$ 上可积. 又 h 在 $[a,b]$ 上可积，记 $H(x) = \int_a^x h(t)dt$，则

$$\int_a^b f(x)h(x)dx = f(x)H(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)H(x)dx.$$

证明. 对 $[a,b]$ 做分割 $T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. 有

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)h(x)dx &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)h(x)dx \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(x) - f(x_i)]h(x)dx + \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_i)h(x)dx.\end{aligned}$$

由于 h 可积，可设 $|h| \le M$，则第一项可以控制为

$$\left|\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(x) - f(x_i)]h(x)dx\right| \le M\Omega(f,T).$$

由于 f 也可积，因此当 $\|T\| \to 0$ 时 $\Omega(f,T) \to 0$，进而第一项趋于零. 对于第二项，有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_i)h(x)dx &= \sum_{i=1}^n f(x_i)[H(x_i) - H(x_{i-1})] \\ &= \sum_{i=1}^n f(x_i)H(x_i) - \sum_{i=1}^n f(x_i)H(x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n f(x_i)H(x_i) - \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})H(x_i) \\ &= f(x)H(x)|_a^b - \sum_{i=0}^{n-1}[f(x_{i+1}) - f(x_i)]H(x_i).\end{aligned}$$

利用微分中值定理，最后一项可以表示为

$$\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{n-1}[f(x_{i+1}) - f(x_i)]H(x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} f'(\xi_i)H(x_i)\Delta x_i \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} f'(x_i)H(x_i)\Delta x_i + \sum_{i=0}^{n-1}[f'(\xi_i) - f'(x_i)]H(x_i)\Delta x_i\end{aligned}$$

注意到上式第一项成立

$$\lim_{\|T\|\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f'(x_i)H(x_i)\Delta x_i = \int_a^b f'(x)H(x)dx.$$

而第二项可用 $\Omega(f',T)$ 控制.

综合上述等式，令 $\|T\|\to 0$ 可得推广的分部积分公式. □

类似地，换元公式可以推广至光滑性更弱的函数.

换元公式

设 f 在 $[a,b]$ 上可积，ϕ 在 $[\alpha,\beta]$ 上严格单调且 $\phi(\alpha)=a,\phi(\beta)=b$，又 ϕ' 在 $[\alpha,\beta]$ 上可积. 证明:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt.$$

证明. 注意，右端被积函数的可积性是需要证明的. 设 $T=\{t_i\}$ 是 $[\alpha,\beta]$ 的一个分割，相应的 $X=\{x_i\}$ 是 $[\alpha,\beta]$ 的一个分割，其中 $x_i=\phi(t_i)$. 根据拉格朗日中值定理，有

$$\Delta x_i=\phi(t_i)-\phi(t_{i-1})=\phi'(\tau_i)\Delta t_i.$$

设 $\{t_i^*\}$ 是分割 T 的一个采样，则 $\{x_i^*=\phi(t_i^*)\}$ 是 X 的一个采样. 进而，两个积分相应的黎曼和的差为

$$\begin{aligned}\left|\sum f(x_i^*)\Delta x_i-\sum f(\phi(t_i^*))\phi'(t_i^*)\Delta t_i\right|&=\left|\sum f(x_i^*)(\phi'(\tau_i)-\phi'(x_i^*))\Delta t_i\right|\\&\le \sup|f|\cdot\Omega(\phi',T).\end{aligned}$$

注意到 $\|X\|\le\sup|\phi'|\|T\|$，所以当 $\|T\|\to 0$ 时必有 $\|X\|\to 0$. 因此，对前述黎曼和的估计式取极限即得

$$\lim_{\|T\|\to 0}\sum f(\phi(t_i^*))\phi'(t_i^*)\Delta t_i=\int_a^b f(x)dx.$$

这既证明了可积性，也得到了积分值. □

1.5 积分中值定理

仿照有限个数的平均值的概念，利用积分定义函数在一段区间上的平均值. 设 f 在 $[a,b]$ 上可积，则其 $[a,b]$ 上的**平均值**[8]定义为

$$\operatorname{ave}f=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

通常而言，平均值未必被函数取到. 但如果函数连续，则其必可达到平均值，这就是积分第一中值定理.

8: 函数 f 的 n 个函数值的算术平均为

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

如果 $\{x_j\}$ 恰好是等分点，那么上式可以表示为

$$\frac{1}{b-a}\sum_{j=1}^n f(x_j)\Delta x_j.$$

令 $n\to\infty$，上式的极限可以表示为积分.

积分第一中值定理 I

设 f 在 $[a,b]$ 上连续，则存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f(\xi)=\operatorname{ave}f$ 即

$$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a).$$

证明. 令 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$. 根据微积分基本定理，F 在 $[a,b]$ 上可微. 利用拉格朗日中值定理，存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $F(b)-F(a)=F'(\xi)(b-a)$. □

例 1.5.1 设 f 是 $[a,b]$ 上的非负连续函数，如果 $\int_a^b f(x)dx=0$，证明：f 在 $[a,b]$ 上恒为零.

证明. 若 f 不恒为零，则必然存在 $x_0\in[a,b]$ 使得 $f(x_0)>0$. 根据连续性，存在含 x_0 的闭区间 $[c,d]\subseteq[a,b]$，使得当 $x\in[c,d]$ 时有 $f(x)>0$. 根据区间可加性，有

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^d f(x)dx+\int_d^b f(x)dx$$

因为 $f\geq 0$，所以

$$\int_a^c f(x)dx\geq 0,\ \int_d^b f(x)dx\geq 0.$$

再根据积分中值定理，存在 $\xi\in(c,d)$ 使得

$$\int_c^d f(x)dx=f(\xi)(d-c)>0.$$

这与条件矛盾. 因此 f 在 $[a,b]$ 上恒为零. □

例 1.5.2 设 $I_n=\int_0^{\pi/2}(\sin x)^n dx$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

解. 若直接使用积分中值定理，则存在 $\xi_n\in(0,\pi/2)$ 使得

$$I_n=\frac{\pi}{2}(\sin\xi_n)^n.$$

虽然 $0<\sin\xi_n<1$，但它仍然含有 n，因此不能断定 $I_n\to 0$. 显然问题出在 $x=\pi/2$ 附近，因此将积分区间分为两段. 取充分小的正数 ϵ，有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}-\epsilon}(\sin x)^n dx\leq\frac{\pi}{2}(\cos\epsilon)^n$$

及

$$\int_{\frac{\pi}{2}-\epsilon}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^n dx\leq\epsilon.$$

因此，

$$I_n=\int_0^{\pi/2-\epsilon}(\sin x)^n dx+\int_{\pi/2-\epsilon}^{\pi/2}(\sin x)^n dx\leq\frac{\pi}{2}(\cos\epsilon)^n+\epsilon.$$

对于固定的 ϵ，令 $n\to\infty$ 可得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} I_n\leq\epsilon.$$

根据 ϵ 的任意性，可知 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} I_n \le 0$. 另一方面，显然有 $\varliminf\limits_{n\to\infty} I_n \ge 0$. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$. □

积分第一中值定理还可以推广为下述加权平均的形式.

积分第一中值定理 II

设 f, w 在 $[a,b]$ 上连续且 $w \ge 0$，则存在 $\xi \in (a,b)$ 使得

$$\int_a^b f(x)w(x)dx = f(\xi)\int_a^b w(x)dx.$$

此处的 w 可以理解为加权函数或者密度函数，它刻画了 x 轴的不均匀性. 若 w 不恒为零，则可定义函数 f 在 $[a,b]$ 上的 w-**加权平均**为

$$\mathrm{ave}_w f = \frac{\int_a^b f(x)w(x)dx}{\int_a^b w(x)dx}.$$

进而，上述中值定理可理解为连续函数的加权平均能够被取到.

证明. 不妨假设 w 不恒为零，从而 $\int_a^b w(x)dx > 0$. 于是

$$\max_{[a,b]} f \le \mathrm{ave}_w f \le \max_{[a,b]} f.$$

根据连续函数介值性，存在 $\xi \in [a,b]$ 使得 $f(\xi) = \mathrm{ave}_w f$. 因此，若仅需证明闭区间上存在 ξ，则由此即得.

下面说明事实上可以在开区间上取得. 若不存在，根据连续性，不妨假设 (a,b) 上恒有 $f > \mathrm{ave}_w f$. 根据连续性，在 $[a,b]$ 上有 $f \ge \mathrm{ave}_w f$. 于是，由

$$\int_a^b (f(x) - \mathrm{ave}_w f)w(x)dx = 0$$

可知

$$(f(x) - \mathrm{ave}_w f)w(x) \equiv 0.$$

因为 w 连续且不恒为零，所以存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $w(\xi) \ne 0$，进而 $f(\xi) = \mathrm{ave}_w f$. □

例 1.5.3 设 f 是 $[0,1]$ 上的连续函数, 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}dx = \frac{\pi}{2}f(0).$$

证明概要. 待定恰当的 $\delta_n \in (0,1)$，考虑

$$\int_0^1 \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}dx = \int_0^{\delta_n} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}dx + \int_{\delta_n}^1 \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}dx.$$

对第一项使用中值定理，可知存在 $\xi_n \in [0, \delta_n]$ 使得

$$\int_0^{\delta_n} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}dx = f(\xi_n)\int_0^{\delta_n} \frac{n}{1+n^2x^2}dx = f(\xi_n)\arctan(n\delta_n).$$

如果 $\delta_n \to 0$ 且 $n\delta_n \to \infty$，则第一项趋于 $\frac{\pi}{2}f(0)$. 这意味着我们需要证明第二项趋于零. 由于 f 连续，不妨假设 $|f| \le M$，则第二项有估计

$$\left|\int_{\delta_n}^1 \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}dx\right| \le \int_{\delta_n}^1 \frac{Mn}{1+n^2x^2}dx \le \frac{Mn}{1+n^2\delta_n^2}.$$

如果 $n\delta_n^2 \to \infty$，则第二项趋于零. 因此，只要取 $\delta_n = 1/\sqrt[3]{n}$ 即可. □

泰勒公式的积分型余项

之前介绍过泰勒公式的皮亚诺余项和拉格朗日余项，现在介绍积分型余项. 以原点为例，若 f 足够光滑，利用分部积分法可得

$$\begin{aligned}
f(x) - f(0) &= \int_0^x f'(t)dt = \int_0^x f'(t)d(t-x) \\
&= f'(0)x + \int_0^x (x-t)f''(t)dt \\
&= f'(0)x - \frac{1}{2}\int_0^x f''(t)d(t-x)^2 \\
&= f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 f'''(t)dt \\
&= \cdots \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}f^{(k)}(0)x^k + \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt.
\end{aligned}$$

因此，容易的得到下述定理.

积分型余项的泰勒公式

设 $f \in C^{n+1}(U(a))$, 则对任意 $x \in U(a)$ 有

$$f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}f^{(k)}(a)(x-a)^k + \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt.$$

由此，利用积分中值定理可得泰勒公式的**柯西余项**

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n(x-a).$$

若用加权型的积分中值定理，则可得拉格朗日余项

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)\int_a^x (x-t)^n dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

积分第二中值定理

积分第二中值定理

设 f 在 $[a,b]$ 上可积，g 在 $[a,b]$ 上单调，则存在 $\xi \in [a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^{\xi} f(x)dx + g(b)\int_{\xi}^b f(x)dx.$$

证明. 先来证明一个简单版本：f 连续，g 连续可微且 $g' \geq 0$. 此时，记 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, 利用分部积分得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b g(x)F'(x)dx = g(x)F(x)|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)dx.$$

根据积分第一中值定理，存在 $\xi \in (a,b)$ 使得

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)dx &= g(x)F(x)|_a^b - F(\xi)\int_a^b g'(x)dx \\ &= g(b)\int_a^b f(x)dx - \int_a^{\xi} f(x)dx \cdot \big(g(b) - g(a)\big) \\ &= g(a)\int_a^{\xi} f(x)dx + g(b)\int_{\xi}^b f(x)dx.\end{aligned}$$

因此，在函数光滑性较好时，积分第二中值定理的关键是分部积分.

当函数光滑性较弱时，需要使用一种离散的分部积分法——**Abel 变换**. 下面我们就在定理的较弱条件下来证明.

不妨假设 g 单调递增，且 $g(a) < g(b)$. 对 $[a,b]$ 作 n 等分，得分割 $T_n : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. 有

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)dx &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)g(x)dx \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)[g(x) - g(x_i)]dx + \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)g(x_i)dx.\end{aligned}$$

由于 f 可积，可设 $|f| \leq M$，则第一项可以控制为

$$\left|\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)[g(x) - g(x_i)]dx\right| \leq M\Omega(g, T_n).$$

由于 g 也可积，因此当 $n \to \infty$ 时 $\Omega(g, T_n) \to 0$，进而第一项是无穷小量.

对于第二项，有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)g(x_i)dx &= \sum_{i=1}^{n} g(x_i)[F(x_i)-F(x_{i-1})]\\ &= \sum_{i=1}^{n} g(x_i)F(x_i) - \sum_{i=1}^{n} g(x_i)F(x_{i-1})\\ &= \sum_{i=0}^{n} g(x_i)F(x_i) - \sum_{i=0}^{n-1} g(x_{i+1})F(x_i)\\ &= g(x_n)F(x_n) - \sum_{i=0}^{n-1}[g(x_{i+1})-g(x_i)]F(x_i).\end{aligned}$$

上述右侧的恒等变换就是所谓的 Abel 变换.

因此，有

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = o(1) + g(b)F(b) - \sum_{i=0}^{n-1}[g(x_{i+1})-g(x_i)]F(x_i). \qquad (*)$$

注意到 g 的单调性，有

$$(g(b)-g(a))\min F \le \sum_{i=0}^{n-1}[g(x_{i+1})-g(x_i)]F(x_i) \le (g(b)-g(a))\max F.$$

于是，在 $(*)$ 式中令 $n\to\infty$ 可得

$$(g(a)-g(b))\max F \le \int_a^b f(x)g(x)dx - g(b)F(b) \le (g(a)-g(b))\min F.$$

从而，由 F 的连续性以及连续函数介值性可知，存在 $\xi\in[a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx - g(b)F(b) = (g(a)-g(b))F(\xi),$$

即

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)F(\xi) + g(b)\big(F(b)-F(\xi)\big).$$

再将 $F(x)$ 表示为积分即可. □

积分第二中值定理（广义）

设 f 在 $[a,b]$ 上可积, g 在 $[a,b]$ 上单调. 设 $U\ge\sup_{(a,b)} g$, $L\le\inf_{(a,b)} g$, 证明:

- 若 g 单调递增，则存在 $\xi\in[a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = L\int_a^\xi f(x)dx + U\int_\xi^b f(x)dx.$$

- 若 g 单调递减，则存在 $\xi \in [a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = U\int_a^{\xi} f(x)dx + L\int_{\xi}^b f(x)dx.$$

证明. 此处仅证第一条. 考虑函数

$$\bar{g}(x) = \begin{cases} L, & x = a, \\ g(x), & a < x < b, \\ U, & x = b. \end{cases}$$

易见 $\bar{g}$ 仍然单调递增，且

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b f(x)\bar{g}(x)dx.$$

根据第二中值定理可得结论. □

例 1.5.4 设 f 在 $[a,b]$ 上可积，g 在 $[a,b]$ 上单调且 $g \geq 0$. 证明:

- 若 g 单调递增，则存在 $\xi \in [a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(b)\int_{\xi}^b f(x)dx.$$

- 若 g 单调递减，则存在 $\xi \in [a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^{\xi} f(x)dx.$$

证明. 在广义的积分第二中值定理中，取 $L = 0$ 即可. □

例 1.5.5 设 $\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$, 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{Si}(x)$ 存在.

证明. 用 Cauchy 收敛原理证明. 对于任意 $\epsilon > 0$，取 $M = \frac{4}{\epsilon}$，则当 $x'' > x' > M$ 时，成立

$$\begin{aligned} |\mathrm{Si}(x'') - \mathrm{Si}(x')| &= \left|\int_{x'}^{x''} \frac{\sin t}{t}dt\right| \\ &= \left|\frac{1}{x'}\int_{x'}^{\xi} \sin t dt + \frac{1}{x''}\int_{\xi}^{x''} \sin t dt\right| \\ &\leq \frac{2}{x'} + \frac{2}{x''} < \frac{4}{M} = \epsilon. \end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{Si}(x)$ 存在. □

1.6 Newton-Cotes 公式

虽然牛顿莱布尼茨公式在理论上解决了积分的计算问题，但是一来求解反导数未必快捷、二来函数未必有初等原函数，因此实践中往往采用数值积分的方法，牛顿柯特斯方法就是插值法计算积分的代表.

牛顿柯特斯方法的本质是用多项式代替函数，进而得到积分的近似值. 如果使用零次多项式（即常数），那就是**矩形法**；如果使用的是一次多项式，则称为**梯形法**；如果使用二次多项式，则是**抛物线法/辛普森 (Simpson) 法**. 一般地，可以用拉格朗日插值多项式来近似函数.

拉格朗日插值

设函数 f 在 $[a,b]$ 上 $n+1$ 阶连续可微，而 $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$ 是一组节点. 那么，对于任一 $x \in [a,b]$，存在 $\xi \in (a,b)$ 使得

$$f(x) - L_n(x,f) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

其中 $L_n(x,f)$ 是**拉格朗日插值多项式**

$$L_n(x,f) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_n)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}.$$

证明. 显然，$L_n(x_j,f) = f(x_j)$. 记 $g(x) = f(x) - L_n(x,f)$，则 $g(x_0) = g(x_1) = \cdots = g(x_n) = 0$.

如果 x 是其中一个节点，则需要证明的等式两端均为零，自然成立. 如果 x 不是节点，则对于此固定的 x，令常数 K 满足

$$g(x) = \frac{K}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n).$$

考虑函数

$$h(t) = g(t) - \frac{K}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n).$$

易知，$x, x_0, \cdots, x_n$ 均为其零点. 根据罗尔定理，存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $h^{(n+1)}(\xi) = 0$ 即

$$g^{(n+1)}(\xi) = K.$$

由于 L_n 是 n 次多项式，因此 $K = g^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi)$. □

如果将区间等分，那么根据拉格朗日插值多项式，容易得到函数的积分近似.

牛顿柯特斯公式

设函数 f 在 $[a,b]$ 上 $n+1$ 阶连续可微，而 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$ 是一组等分节点. 那么

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\sum_{j=0}^{n} c_j^n f(x_j) + \epsilon_n$$

其中 $\{c_j^n\}$ 是**柯特斯系数**

$$c_j^n = \frac{1}{n}\frac{(-1)^{n-j}}{j!(n-j)!}\int_0^n \prod_{\substack{0\le k\le n\\ k\ne j}}(t-k)dt$$

且误差项

$$|\epsilon_n| \le \frac{(b-a)^{n+2}}{(n+1)!}\max|f^{(n+1)}|.$$

证明. 方便起见，记

$$w_j(x) = (x-x_0)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_n),$$

则拉格朗日插值多项式可表示为

$$\int_a^b L_n(x,f)dx = \int_a^b \sum_{j=0}^n f(x_j)\cdot\frac{w_j(x)}{w_j(x_j)}dx = \sum_{j=0}^n f(x_j)\cdot\int_a^b w_j(x_j)dx.$$

利用换元法，易得

$$\begin{aligned}\int_a^b w_j(x)dx &= \int_a^b \prod_{\substack{0\le k\le n\\ k\ne j}}\left(x-a-\frac{k(b-a)}{n}\right)dx\\ &= \left(\frac{b-a}{n}\right)^{n+1}\int_0^n \prod_{\substack{0\le k\le n\\ k\ne j}}(t-k)dt.\end{aligned}$$

再注意到

$$\begin{aligned}w_j(x_j) &= \prod_{k\ne j}\left(x_j-a-\frac{k(b-a)}{n}\right)\\ &= \left(\frac{b-a}{n}\right)^n\prod_{\substack{0\le k\le n\\ k\ne j}}(j-k) = \left(\frac{b-a}{n}\right)^n\cdot(-1)^{n-j}j!(n-j)!.\end{aligned}$$

因此，

$$\int_a^b L_n(x,f)dx = (b-a)\sum_{j=0}^n c_j^n f(x_j).$$

利用积分的绝对值不等式，容易得到误差估计. □

上面的误差估计较为粗糙. 低阶时可以结合积分中值定理得到更好的估计.

矩形法/梯形法的误差估计

设函数 f 在 $[a,b]$ 上 $n+1$ 阶连续可微，则对于等分节点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n\le b$，存在 $\xi\in[a,b]$ 使得

- 矩形法 $(n=0)$

$$\epsilon_0 = \frac{(b-a)^2}{2}\cdot f'(\xi).$$

▸ 梯形法 ($n=1$)

$$\epsilon_1 = -\frac{(b-a)^3}{12}\cdot f''(\xi).$$

证明. 对于矩形法，有

$$\epsilon_1 = \int_a^b f'(\xi)(x-a)dx.$$

注意到

$$\min f'\cdot\frac{(b-a)^2}{2}\le \epsilon_1\le \max f'\cdot\frac{(b-a)^2}{2},$$

可知存在 ξ 使得 $\epsilon_0 = f'(\xi)\cdot\frac{(b-a)^2}{2}$. 梯形法是类似的，注意到 $(x-a)(x-b)\le 0$，此时有

$$\frac{\max f''}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)dx \le \epsilon_2 \le \frac{\min f''}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)dx.$$

积分即得. □

矩形法可以改进为**中点(矩形)法**,其效果甚至比梯形法更好.

中点法

设函数 f 在 $[a,b]$ 上二阶连续可微，而 $x_{\frac{1}{2}}$ 是 $[a,b]$ 的中点，则存在 $\xi\in[a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(x_{\frac{1}{2}}) + \frac{(b-a)^3}{24}\cdot f''(\xi).$$

证明. 利用泰勒公式，有

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \int_a^b \left(f(x_{\frac{1}{2}}) + f'(x_{\frac{1}{2}})(x-x_{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2}f''(\eta)(x-x_{\frac{1}{2}})^2\right)dx\\ &= (b-a)f(x_{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2}\int_a^b f''(\eta)(x-x_{\frac{1}{2}})^2dx.\end{aligned}$$

易见

$$\min f''\cdot\frac{(b-a)^3}{24}\le\int_a^b f''(\eta)(x-x_{\frac{1}{2}})^2dx\le \max f''\cdot\frac{(b-a)^3}{24}.$$

利用介值性即得. □

辛普森法的误差估计

设函数 f 在 $[a,b]$ 上 4 阶连续可微，则对于等分节点 $a=x_0<x_1<x_2=b$，存在 $\xi\in[a,b]$ 使得辛普森法的误差为

$$\epsilon_2 = -\frac{(b-a)^5}{2880}\cdot f^{(4)}(\xi).$$

证明. 对于辛普森法，其余项原本为

$$\epsilon_2 = \frac{1}{6}\int_a^b f'''(\eta)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)dx.$$

由于

$$\int_a^b (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)dx = 0,$$

因此，对任一常数 λ

$$\epsilon_2 = \frac{1}{6}\int_a^b (f'''(\eta)-\lambda)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)dx.$$

如果取 $\lambda = f'''(x_1)$，可知辛普森法的余项可以用 $f^{(4)}$ 和 $(b-a)^5$ 估计.

为了得到更好的估计，取常数 λ 使得函数

$$g(t) = f(t) - L_2(t,f) - \lambda(t-x_0)(t-x_1)(t-x_2).$$

满足 $g'(x_1) = 0$. 于是 $g(x_0) = g(x_1) = g(x_2) = g'(x_1) = 0$. 对于固定的 x，取常数 K，使得

$$g(x) = K(x-x_0)(x-x_1)^2(x-x_2).$$

则函数

$$h(t) = g(t) - K(t-x_0)(t-x_1)^2(t-x_2)$$

满足

$$h(x_0) = h(x_1) = h(x_2) = h(x) = h'(x_1) = 0.$$

不妨假设定点 x 不是节点，则对 $h(x_0) = h(x_1) = h(x_2) = h(x) = 0$ 应用罗尔定理，存在 ξ_1,ξ_2,ξ_3 使得 h 在三点导数为零. 注意到 ξ_1,ξ_2,ξ_3 都不等于 x_1，所以有

$$h'(\xi_1) = h'(\xi_2) = h'(\xi_3) = h'(x_1) = 0.$$

再次使用罗尔定理，可知，存在 ξ 使得

$$0 = h^{(4)}(\xi) = f^{(4)}(\eta) - K\cdot 4!.$$

因此

$$\epsilon_2 = \frac{1}{4!}\int_a^b f^{(4)}(\eta)(x-x_0)(x-x_1)^2(x-x_2)dx.$$

注意到 $(x-x_0)(x-x_1)^2(x-x_2)$ 保号，仿照梯形法，可得辛普森法的误差估计. □

一般地，如果 $n = 2m$ 是偶数，则牛顿柯特斯公式的误差可由 $(b-a)^{n+3}f^{(n+2)}$ 控制. 下面就是柯特斯法 $(n=4)$ 的误差估计，证明留给读者.

柯特斯法的误差估计

设函数 f 在 $[a,b]$ 上 6 阶连续可微，则对于等分节点 $a = x_0 < x_1 <$

$x_2 < x_3 < x_4 = b$，存在 $\xi \in [a,b]$ 使得科特斯法的误差为

$$\epsilon_4 = -\frac{(b-a)^7}{1935360} \cdot f^{(6)}(\xi).$$

在此指出，当 $n \geq 8$ 时，柯特斯系数出现负值，导致不稳定. 通常的做法是先将 $[a,b]$ 等分为 N 个小区间 $\{[a_p, b_p]\}$，然后在每个小区间上应用 n 阶 (n 较小) 的牛顿柯特斯公式，这种策略称为**复合数值积分**.

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{p=1}^{N} \int_{a_p}^{b_p} f(x)dx = \frac{(b-a)}{N} \sum_{p=1}^{N} \sum_{j=0}^{n} c_j^n f(x_{p,j}) + \sum_{p=1}^{N} \epsilon_{p,n}.$$

比如 $n = 1$ 时，利用 $c_0^1 = c_1^1 = 1/2$，可得**复合梯形公式**

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{N}\left(\frac{1}{2}f(x_0) + \sum_{j=1}^{N-1} f(x_j) + \frac{1}{2}f(x_N)\right) - \frac{(b-a)^3}{12N^2} f''(\xi).$$

比如 $n = 2$ 时，利用 $c_0^2 = 1/6, c_1^2 = 4/6, c_2^2 = 1/6$，可得**复合辛普森公式**

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{N}\left(\frac{1}{6}f(x_0) + \frac{4}{6}\sum_{j=1}^{N-1} f(x_{j-\frac{1}{2}}) + \frac{2}{6}\sum_{j=1}^{N-1} f(x_j) + \frac{1}{6}f(x_N)\right) - \frac{(b-a)^5}{2880N^4} f^{(4)}(\xi).$$

利用复合辛普森法计算

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

可以得到圆周率 π 的近似值. 记 $f(x) = 1/(1+x^2)$，则

$$f^{(4)}(x) = \frac{24(5x^4 - 10x^2 + 1)}{(1+x^2)^5}.$$

可以证明 $|f^{(4)}| \leq 24$，则用辛普森法计算圆周率的误差为

$$|4\epsilon_n| \leq \frac{4 \cdot 24}{2880N^4} = \frac{1}{30N^4}.$$

因此取 $N = 2$ 就可以使误差小于 0.0021，事实上此时圆周率的近似值为 3.141568.