微分方程 1

无论是自然科学领域还是社会科学领域，现象的变迁无处不在，微分方程正是模拟事物连续变化规律的一种数学语言. 所谓的微分方程就是函数及其导数所满足的关系式. 从这样的关系式里求解出函数的过程就是解微分方程. 本章主要介绍微分方程的基本概念和几种简单的微分方程的解法，希望读者从中理解利用微分方程模拟现象变迁的数学思想和方法.

1.1 微分方程的概念

1.1.1 微分方程建模

种群增长

一个种群里的个体总量 P 会随着时间而发生改变，如何预测其总量的变化? 直接的想法是，该种群在单位时间内增加的个体数量与当时的个体总量成正比

$$\Delta P \approx \lambda P \Delta t,$$

这里 λ 是比例常数. 当个体总量足够大时, 可以将 P 当作连续变量，进而上式可以转化为一阶微分方程

$$\frac{dP}{dt} = \lambda P. \tag{1.1}$$

该模型被称为 **Malthus 模型**. 容易发现，$P = Ce^{\lambda t}$ 是上述方程的解. 但是，若按此通解，种群将无限指数增长，这显然不符合客观事实. 为此，数学生物学家 Verhulst 引入了竞争因素. 他假定当个体总量较小时，因为资源充足，种群增长满足上述增长规律；但如果个体总量超过一个限值 M，个体间的竞争将导致总量下降. 符合这两个假设的一个简单模型是

$$\frac{dP}{dt} = \lambda P\left(1 - \frac{P}{M}\right). \tag{1.2}$$

这就是 **logistic 模型**，也称为 **logistic 方程**. 此模型被广泛应用于生物、医学、社会学等方面. 但是，要猜出该方程的通解绝非易事，我们将在第二节来介绍它的解法.

电感滤波器

信号输入端（电压源）、电感元件和信号输出端（负载）可以串联成一个简单的低通滤波器. 设负载的阻抗 R、电感的自感系数 L 是常数. 输入信号是交流电压 $E(t) = E_m \sin \omega t$, 其中振幅 E_m 和频率 f 是常数. 我们来研究负载端的输出电压. 回路电流记为 i，根据欧姆定律，负载的电压为 $U = iR$. 而变化的电流会使电感产生自感电动势 $\epsilon = -L\frac{di}{dt}$. 由于闭回路总电动势为零 $E - U + \epsilon = 0$, 电流需要满足方程

$$E_m \sin \omega t - iR - L\frac{di}{dt} = 0$$

即

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} \cdot i = \frac{E_m}{L} \sin \omega t.$$

共振现象

我们来考虑一维的弹性振动. 物体的弹性形变量记为 x，根据胡克定律, 它受到的应力与形变量成正比 $f = -kx$，这里 k 是弹性系数. 再由牛顿第二定律有

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx.$$

如果再对其施加一个周期性外力 $F \sin \omega t$, 则方程变为非齐次方程

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + F \sin \omega t$$

即

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda^2 x = \frac{F}{m} \sin \omega t.$$

此处 λ 称为物体的固有频率. 通过求解此方程，可以发现当外力频率接近或等于物体固有频率时，$x(t)$ 的振幅将会超过物体的弹性限度，这就是共振现象.

捕食模型

对于单个种群我们介绍过 Malthus 模型和 logistic 模型. 现在介绍一个猎物和捕食者模型. 假设猎物的数量是 $x(t)$，捕食者的数量是 $y(t)$. 它们互相的影响可以用 **Lotka-Volterra 方程**表述为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = kx - ayx \\ \frac{dy}{dt} = -ry + bxy \end{cases}. \tag{1.3}$$

第一个方程中的 k 是猎物的自然增长率. 而猎物被捕食的比例和猎物遭遇捕食者的机会成正比，而它们遭遇的可能是 xy，因此第一个方程还有个衰减项 $-axy$. 类似地，第二个方程的 r 是捕食者的自然死亡率, 而 b 是猎物提供给捕食者的增长因子. 这是一个微分方程组，它没有显示解. 我们可以从图形定性了解.

week16/day1/lecture40

1.1.2 微分方程的定义

常微分方程

设 $x(t)$ 是 t 的函数, 那么 $t, x, x', x'', \cdots, x^{(n)}$ 的一个关系式

$$F(t, x, x', x'', \cdots, x^{(n)}) = 0 \tag{1.4}$$

称为 x 的 n **阶微分方程**. 必须指出，在方程 (1.4) 中 $x^{(n)}$ 必须出现，并且我们所讨论的微分方程都能解出 $x^{(n)}$，使得 (1.4) 可写为

$$x^{(n)} = f(t, x, x', x'', \cdots, x^{(n-1)}), \tag{1.5}$$

其中函数 f 在所讨论的范围内连续.

如果函数 $\phi(x)$ 在自变量 x 的某个区间内恒成立

$$F(t, \phi(t), \phi'(t), \phi''(t), \cdots, \phi^{(n)}(t)) = 0,$$

则称函数 $\phi(t)$ 是微分方程 (1.4) 在该区间内的解. 如果解的表达式里面含有 n 个独立常数

$$\phi = \phi(t, C_1, \cdots, C_n),$$

则称其为**通解**. 微分方程某个特定的解一般称为**特解**.

给定**初始条件**[1] $x(t_0) = a_0, x'(t_0) = a_1, \cdots, x^{(n-1)}(t_0) = a_{n-1}$ 的微分方程问题

$$\begin{cases} x^{(n)} = f(t, x, x', x'', \cdots, x^{(n-1)}) \\ x(t_0) = a_0, x'(t_0) = a_1, \cdots, x^{(n-1)}(t_0) = a_{n-1} \end{cases}$$

称为**初值问题**，也称为 **Cauchy 问题**. 相应的解称为初值问题的解.

1: 初始条件也称为函数 y 的初值. 一个 n 阶方程需要给定 n 个初始条件以确定通解中的常数 $C_1, \cdots, C_n$.

最简单的微分方程是一阶方程

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x).$$

它的初值问题为

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = a_0. \end{cases}$$

常微分方程组

系统演化往往是多个因素相互影响的结果, 它们的演化规律往往是几个常微分方程联立而成的**常微分方程组**，比如 Lotka-Volterra 方程就是一个典型的例子.

一般地，设 $\boldsymbol{x}(t) = (x_1(t), \cdots, x_d(t))$ 是个向量值函数，它的一个常微分方程组可写为

$$\boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}', \cdots, \boldsymbol{x}^{(n)}) = 0,$$

其中 $\boldsymbol{F}$ 是向量值函数. 如果方程组里 $x_1(t), \cdots, x_d(t)$ 的最高阶导数的阶数分别为 $n_1, \cdots, n_d$，那么此**微分方程组的阶数**为 $n_1 + \cdots + n_d$. 比如

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + y = t \\ \frac{dy}{dt} + 2\frac{dx}{dt} = e^t \end{cases} \tag{1.6}$$

就是一个微分方程组. 它有两个未知函数，x 的最高阶导数是 2 阶，y 的最高阶导数是 1 阶，进而此方程组的是 3.

最简单也是最重要的常微分方程组是所有未知函数的最高阶导数都是 1 阶的方程组

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{x}).$$

通过引入新的函数，总可以将高阶微分方程化为上面这种形式. 比如，为了处理 n 阶微分方程

$$x^{(n)} = F(t, x, x', \cdots, x^{(n-1)}),$$

可以令 $x_1 = x, x_2 = x', \cdots, x_n = x^{(n-1)}$, 于是上述方程等价于方程组

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_3, \\ \cdots \\ \frac{dx_n}{dt} = F(t, x_1, \cdots, x_n). \end{cases}$$

比如，单摆运动方程 $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\theta$ 可化为方程组

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = \omega, \\ \frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{L}\sin\theta. \end{cases}$$

如果方程 $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ 的右端项与时间无关，则称其为**自治方程**或**动力系统**. 比如单摆运动的方程就是一个动力系统. 如果把动力系统的右端项想象为空间中的恒定速度场 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$, 那么方程

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$$

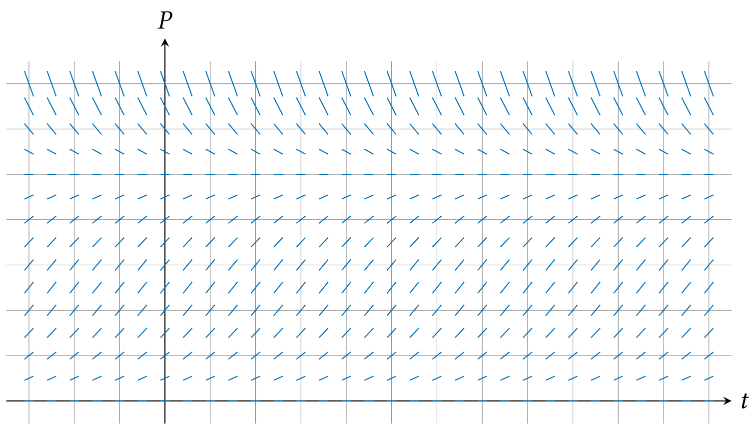
可以看作质点位移函数的微分方程.

积分曲线和轨线

积分曲线和轨线是理解微分方程的解的有力工具. 为了便于理解，我们先来考虑一阶方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

此处 y 是未知函数，x 是自变量. 如果 $y(x)$ 是此方程的一个解，则称它的图像 $y = y(x)$ 为方程的一条**积分曲线**. 一般而言，xy 平面上布满着方程的积分曲线. 为了绘制积分曲线，最直接的方法自然是求得方程的解析解；除此之外，我们还可以利用**斜率场**来大致勾画. 假设积分曲线 $y = y(x)$ 通过点 (x_0, y_0), 由方程可知，曲线在该点的斜率为 $f(x_0, y_0)$. 因此，若在 (x_0, y_0) 处画出一段斜率为 $f(x_0, y_0)$ 的直线段，则可以之近似代替积分曲线. 故而，如果在 xy 平面上选取密度合适、分部均匀的点列，再在这些点处画出相应斜率的直线段，那么它们就会形成一个线段场，我们称之为**斜率场**. 下图展示的是逻辑斯蒂方程的斜率场.



顺着斜率场的走势，绘制出与这些直线段相切的曲线，那么这些曲线几乎就是方程的积分曲线. 显然，直线段绘得越短越密，得到的曲线越接近积分曲线.

如果所求是初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

那么只需作一条过点 (x_0, y_0) 的积分曲线即可.

所以，从几何上而言，求解一阶微分方程就是寻找积分曲线的过程. 而所谓的初值问题，就是寻找一条通过指定点的积分曲线的问题. 而利用斜率场，即便我们无法给出微分方程的解析解，也可以绘制近似的积分曲线.

下面我们讨论方程组的情形. 考虑方程

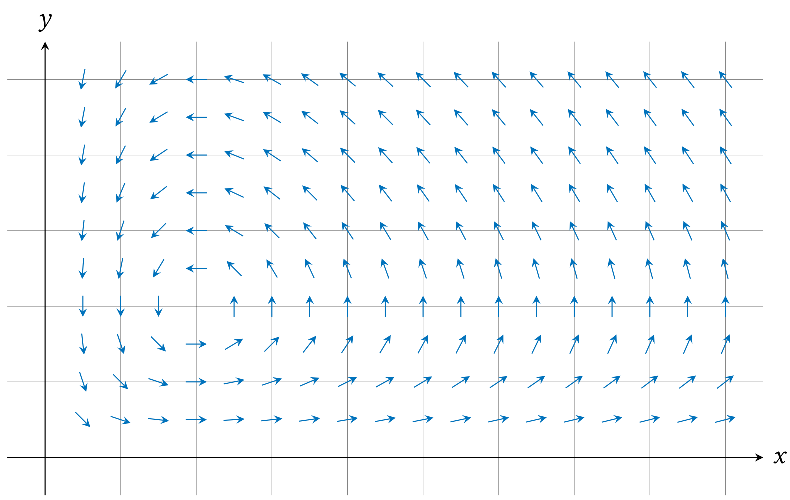
$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{x}).$$

它的解 $\boldsymbol{x}(t)$ 的图像是 $\mathbb{R}^{d+1}$ 中的一条曲线 $(t, \boldsymbol{x}(t))$，称为**积分曲线**. 由于维数较高，通常我们也把解 $\boldsymbol{x}(t)$ 看作 $\mathbb{R}^d$ 中的一条曲线，称之为方程的**轨线**. 如果方程是自治方程，则轨线是一种更为有效的手段. 下面就以自治方程为例作出说明.

假设 $\boldsymbol{x}(t)$ 是自治方程

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$$

的解，视其为某质点在 $\mathbb{R}^d$ 中的轨迹曲线. 如果 $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$, 则轨线在 $\boldsymbol{x}_0$ 点处的切向量 (质点在该点的速度) 为 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}_0)$. 仿照斜率场的做法，我们可以在 $\mathbb{R}^d$ 中作出一个向量场，称之为**方向场/速度场**，它指明了质点在该点的运动方向. 下图展示的是 Lotka-Volterra 方程的方向场.



顺着方向场可以近似作出轨线. 可以看出两个物种的数量围绕一个平衡点呈现周期性变化.

可见，积分曲线和轨线对于理解方程有很大帮助. 如果今后你遇到无法求解的方程，可以尝试绘制它的积分曲线和轨线.

1.2 初等积分法

上一节我们了解了微分方程的基本概念, 它可以用来模拟一些变化规律. 然而微分方程的求解通常是困难的, 在可求解的范围内, 主要使用的是积分的方法.

1.2.1 分离变量法

本节将介绍所谓的可分离变量微分方程, 至少我们可以用积分的方法得到它们的隐式解.

可分离变量微分方程是指形如

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \tag{2.1}$$

的一阶微分方程. 之所以称为可分离变量，显然是因为右侧的二元函数分离成了两个一元函数的乘积. 当 $g(y) \neq 0$ 时，可令 $h(y) = 1/g(y)$，进而方程可以表示为变量左右分离的形式

$$h(y)dy = f(x)dx.$$

当 h 和 f 是连续函数时, 两侧积分可得

$$\int h(y)dy = \int f(x)dx.$$

假如 H 和 F 分别是 h 和 f 的原函数, 则上式可以表示为

$$H(y) = F(x) + C. \tag{2.2}$$

这是一个关于 y 的隐函数方程, 它给出了原方程的解.[2] 一般地，如果微分方程的解以隐函数的方式表示，那么我们称其为**隐式解**.

2: 事实上，若函数 $y(x)$ 满足 (2.2), 则对其两边关于 x 求导数，利用链式法则有

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}H(y) &= \frac{d}{dx}(F(x)+C),\\ \frac{dH}{dy}\frac{dy}{dx} &= \frac{dF}{dx},\\ h(y)\frac{dy}{dx} &= f(x),\\ \frac{dy}{dx} &= f(x)g(y).\end{aligned}$$

因此, (2.2) 确定的隐函数 $y(x)$ 的确是方程 (2.1) 的解.

例 1.2.1 求解微分方程 $y' = 2xy$.

解. 这是一个可分离变量方程, 将其写为

$$\frac{1}{y}dy = 2xdx.$$

积分可得,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{y}dy &= \int 2xdx,\\ \ln|y| &= x^2 + \tilde{C},\\ y &= \pm e^{\tilde{C}}e^{x^2},\\ y &= Ce^{x^2},\end{aligned}$$

其中 $C = \pm e^{\tilde{C}}$. 因此所求微分方程的通解为 $y = Ce^{x^2}$. □

例 1.2.2 求解微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+y}$.

解. 乍一看这并非可分离变量方程. 下面我们用变量代换将其转化. 令 $z=x+y$, 则

$$\frac{dz}{dx}=1+\frac{dy}{dx}=1+\frac{1}{x+y}=1+\frac{1}{z}.$$

它可以分离变量为

$$\frac{z}{1+z}dz=dx.$$

积分可得 $z-\ln|1+z|=x+C$. 所以, 原方程的通解是 $y-\ln|1+x+y|=C$. □

例 1.2.3 (种群增长) 求解 logistic 方程 $\frac{dP}{dt}=\lambda P\left(1-\frac{P}{M}\right)$.

解. 它是可分离变量方程，将其表示为

$$\frac{dP}{P(1-\frac{P}{M})}=\lambda dt.$$

作部分分式分解

$$\left(\frac{1}{P}+\frac{1}{M-P}\right)dP=\lambda dt.$$

积分可得

$$\ln\left|\frac{P}{M-P}\right|=\lambda t+\tilde{C}$$

即

$$P(t)=\frac{M}{1+Ce^{-\lambda t}},$$

其中常数 $C=\pm e^{\tilde{C}}$ 可以通过初始条件 $P(0)$ 来确定. 如果 $P(0)>M$ 即 $C<0$, 则 $P(t)$ 单调减少趋于 M; 如果 $P(0)<M$, 则 $P(t)$ 单调增加趋于 M; 如果 $P(0)=M$, 则个体总量保持稳定. □

不少微分方程需要变换之后才是变量分离的，典型代表是**齐次方程**, 它的一般形式是

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{2.3}$$

此处 f 是个一元函数. 此方程的解法是变量代换，为此引入新的函数

$$u=\frac{y}{x}.$$

于是

$$y=ux,\quad \frac{dy}{dx}=x\frac{du}{dx}+u.$$

原先关于 y 的方程可转化为 u 的方程

$$x\frac{du}{dx}+u=f(u).$$

这是一个可分离变量方程, 它也可写为

$$\frac{du}{f(u)-u}=\frac{dx}{x}.$$

两边积分, 可得

$$\int\frac{du}{f(u)-u}=\ln|x|+C.$$

如果左端可以积出来, 那么我们就得到了 $u=u(x)$ 的隐式通解. 最终, 再将 u 写回 y/x, 便可得到齐次方程 (2.3) 的通解.

例 1.2.4 求解方程 $y'=\frac{y}{x}+\sec\frac{y}{x}$.

解. 令 $u=y/x$, 则 $y=xu$, $y'=xu'+u$. 从而原方程变为

$$xu'+u=u+\sec u$$

即

$$\cos u du=\frac{1}{x}dx.$$

积分得

$$\sin u=\ln|x|+C.$$

因此, 原方程的 (隐式) 通解为

$$\sin\frac{y}{x}=\ln|x|+C.$$

□

例 1.2.5 求解方程 $y^2dx+x^2dy=xydy$.[3]

解. 方程可以写为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{xy-x^2}=\frac{(\frac{y}{x})^2}{\frac{y}{x}-1}.$$

在变换 $u=y/x$ 下，方程化为

$$x\frac{du}{dx}+u=\frac{u^2}{u-1}.$$

分离变量为

$$\left(1-\frac{1}{u}\right)du=\frac{1}{x}dx.$$

积分可得

$$u-\ln|u|=\ln|x|+C.$$

代回 $u=y/x$ 得

$$\frac{y}{x}=\ln|y|+C.$$

下面我们把 y 看作自变量、x 看作未知函数，再来解一遍此方程. 先将方程写为

$$\frac{dx}{dy}=\frac{xy-x^2}{y^2}=\frac{x}{y}-\left(\frac{x}{y}\right)^2.$$

它同样是齐次方程. 令 $v=x/y$, 则 $x=vy$, $\frac{dx}{dy}=y\frac{dv}{dy}+v$. 方程化为

$$y\frac{dv}{dy}+v=v-v^2$$

3: 这是一阶微分方程的**对称形式**. 一般而言, 一阶微分方程总可以表示为 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$. 在这种对称形式下, 既可以认为自变量是 x、未知函数是 y，也可以认为自变量是 y、未知函数是 x. 本质上我们要求解的是变量 x 和 y 的关系. 因此, 可以将它的解写为 $y=y(x)$，也可以写为 $x=x(y)$，当然也可以表示为隐函数 $F(x,y)=0$ 的形式.

即

$$-\frac{dv}{v^2}=\frac{dy}{y}.$$

最终，积分得

$$\frac{y}{x}=\frac{1}{v}=\ln|y|+C.$$

这与之前得到的通解是一致的. □

例 1.2.6 求解方程 $(2x+y-4)dx+(x+y-1)dy=0$.

解. 这并不是齐次方程，但如果能消去 -4 和 -1 两个常数项，它就能变为一个齐次方程. 这一点能够通过平移来实现. 作变量代换

$$x=X+x_0,\quad y=Y+y_0.$$

代入原方程, 可得

$$(2X+Y+2x_0+y_0-4)dX+(X+Y+x_0+y_0-1)dY=0.$$

只要使

$$\begin{cases}2x_0+y_0-4=0,\\ x_0+y_0-1=0.\end{cases}$$

解得 $(x_0,y_0)=(3,-2)$. 因此，用变换

$$x=X+3,\quad y=Y-2,$$

方程可化为

$$\frac{dY}{dX}=-\frac{2X+Y}{X+Y}=-\frac{2+\frac{Y}{X}}{1+\frac{Y}{X}}.$$

它是齐次方程, 利用标准方法可得原方程的通解为 $2x^2+2xy+y^2-8x-2y=C$. □

week16/day2/lecture41

例 1.2.7 Lotka-Volterra 方程模拟了两个物种的数量演变，其方程为

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=kx-axy,\\ \frac{dy}{dt}=-ry+bxy\end{cases}$$

其中 k,r,a,b 为正常数. 在 $x>0,y>0$ 时分析它的轨线.

解. 容易观察到方程组的一个特解 $x=\frac{r}{b},y=\frac{k}{a}$，它是生态系统的平衡状态. 一般地，将方程组中两个方程相除，可得变量分离型方程

$$\frac{-r+bx}{x}dx=\frac{k-ay}{y}dy.$$

积分就可解得轨线的隐式方程

$$F(x,y):=bx+ay-r\ln x-k\ln y=C.$$

下面分析这些轨线的分布. 注意到 F 的唯一驻点恰好是系统的平衡状态. 此外, 易见

$$\nabla^2 F = \begin{pmatrix} \frac{r}{x^2} & \\ & \frac{k}{y^2} \end{pmatrix} > 0,$$

因此 F 是凸函数，进而驻点是 F 的唯一的最小值点. 再注意到

$$\lim_{x\to 0^+} F(x,y) = +\infty, \quad \lim_{y\to 0^+} F(x,y) = +\infty, \quad \lim_{x^2+y^2\to+\infty} F(x,y) = +\infty,$$

可知等高线 $F(x,y)=C$ 有界. 从奇点出发做射线，根据严格凸性，该射线上有且仅有一个点满足 $F(x,y)=C$. 又根据隐函数定理，在奇点之外的等高线局部存在且光滑. 因此，等高线是围绕奇点的闭曲线. 换言之, 该系统是周期的. □

1.2.2 路径积分法

如果将一阶微分方程写成

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \tag{2.1}$$

那么左端项容易让人联想到函数的全微分. 如果它的左端恰好是某个函数 $u=u(x,y)$ 的全微分

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = u_x(x,y)dx + u_y(x,y)dy = du(x,y),$$

我们就称方程 (2.1) 为**全微分方程**, 此时它就是

$$du(x,y) = 0. \tag{2.2}$$

显然, 如果 $y(x)$ 是方程 (2.1) 的解, 那么 $\frac{d}{dx}u(x,y(x)) = u_x + u_y y' = P + Qy' = 0$, 从而 $y(x)$ 满足隐函数方程 $u(x,y)=C$. 反之, 如果 $y(x)$ 是 $u(x,y)=C$ 确定的隐函数, 那么 $P+Qy' = u_x + u_y y' = \frac{d}{dx}u(x,y(x)) = 0$.

全微分方程 (2.2) 的隐式通解为

$$u(x,y) = C.$$

几何上，全微分方程的积分曲线就是**势函数** u 的等值线.

根据平面上的原函数存在定理，当 P 和 Q 在单连通区域 G 内具有一阶连续偏导数时，方程 (2.1) 是全微分方程的充要条件是 $P_y = Q_x$. 此时, 函数 u 可以通过曲线积分的方法求得.

全微分方程 $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ 的解法 (单连通区域)

1. 验证可积性条件 $P_y = Q_x$.
2. 选定起点 (x_0, y_0), 选择适当路径计算曲线积分

$$u(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

3. 得到隐式通解 $u(x,y) = C$.

例 1.2.8 验证 $(5x^4+3xy^2-y^3)dx+(3x^2y-3xy^2+y^2)dy=0$ 是全微分方程, 并求解.

解. 记 $P=5x^4+3xy^2-y^3, Q=3x^2y-3xy^2+y^2$. 易见，在整个平面上恒成立

$$P_y=6xy-3y^2=Q_x.$$

所以原方程是整个平面上的全微分方程. 不妨取原点为起点, 用 $(0,0)\to(0,y)\to(x,y)$ 的折线来计算函数 u

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\int_0^x P(x,y)dx+\int_0^y Q(0,y)dy\\&=\int_0^x(5x^4+3xy^2-y^3)dx+\int_0^y y^2dy\\&=x^5+\frac{3}{2}x^2y^2-y^3x+\frac{1}{3}y^3.\end{aligned}$$

故而, 方程的通解为

$$x^5+\frac{3}{2}x^2y^2-y^3x+\frac{1}{3}y^3=C.$$

□

很多情况下, $Pdx+Qdy=0$ 并非是全微分方程, 比如 $xy^2dx-x^2ydy=0$. 但是，我们仍然可以通过乘以一个积分因子 $\mu(x,y)$，使之成为全微分方程. 对于前例，取 $\mu=\frac{1}{x^2y^2}$，可使

$$\mu(xy^2dx-x^2ydy)=\frac{1}{x}dx-\frac{1}{y}dy=d(\ln|x|-\ln|y|)$$

成为全微分.

1.2.3 高阶方程降阶法

本节我们来讨论二阶及二阶以上的微分方程，它们统称为**高阶微分方程**. 对于高阶方程，基本的做法是降阶，通过逐次积分得到原方程的解. 我们主要介绍三种类型 $y^{(n)}=f(x)$，$y''=f(x,y')$，$y''=f(y,y')$.

不显含低阶项的高阶方程 $y^{(n)}=f(x)$. 此类方程的解法是逐次积分. 比如 $y'''=e^{2x}+x$, 做一次积分可得

$$y''=\int(e^{2x}+x)dx=\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{2}x^2+C_1.$$

再次积分

$$y'=\int(\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{2}x^2+C_1)dx=\frac{1}{4}e^{2x}+\frac{1}{6}x^3+C_1x+C_2.$$

最终

$$y=\int(\frac{1}{4}e^{2x}+\frac{1}{6}x^3+C_1x+C_2)dx=\frac{1}{8}e^{2x}+\frac{1}{24}x^4+\frac{C_1}{2}x^2+C_2x+C_3.$$

一般地, 此类 n 阶方程只需直接积分 n 次.

不显含 y 的二阶方程 $y'' = f(x, y')$. 显然，它是关于 y' 的一阶方程. 不妨令 $p(x) = y'(x)$, 则方程变为

$$p' = f(x, p).$$

如果我们可以从中求得通解 $p = p(x, C_1)$，那么原方程的通解为

$$y = \int y' dx = \int p(x, C_1) dx + C_2.$$

不显含 x 的二阶方程 $y'' = f(y, y')$. 仿照上一种方程，如果令 $y' = p$，则方程变为

$$p' = f(y, p).$$

它含有两个未知函数，似乎不是我们能解决的. 但是它的特点是不明显含有自变量 x, 因此不妨把 p 看成 y 的函数 $p = p(y)$. 妙处在于，通过链式法则可将 p' 转化为关于 y 的导数

$$p' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}p.$$

于是 p 的方程可写为

$$p\frac{dp}{dy} = f(y, p).$$

它是以 y 为自变量、以 p 为未知函数的一阶方程. 如果可以得到通解

$$p = p(y, C_1),$$

那么 y 的方程等价于

$$\frac{dy}{dx} = p(y, C_1).$$

这是可分离变量方程, 通解为

$$\int \frac{dy}{p(y, C_1)} = x + C_2.$$

例 1.2.9 求解微分方程 $(1 + x^2)y'' = 2xy'$.

解. 它是不显含 y 的二阶方程. 令 $p(x) = y'$, 方程变为

$$p' = \frac{2x}{1 + x^2}p.$$

它是可分离变量方程, 有

$$\int \frac{dp}{p} = \int \frac{2x}{1 + x^2}dx.$$

因此

$$\ln|p| = \ln\left(1 + x^2\right) + C$$

即

$$y' = p = C_1(1 + x^2).$$

所以 y 的通解为

$$y = C_1\left(x + \frac{1}{3}x^3\right) + C_2.$$

□

例 1.2.10 求解初值问题 $yy'' - (y')^2 = 0, y(0) = 2, y'(0) = 1.$

解. 它不显含 x. 令 $p(y) = y'$, 则 $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}p$, 方程变为

$$yp\frac{dp}{dy} = p^2.$$

它是可分离变量方程. 解得

$$p = C_1 y.$$

代入初值 $y'(0) = p(y(0)) = C_1 y(0)$, 可得 $C_1 = \frac{1}{2}$. 于是

$$y' = p = \frac{1}{2}y.$$

解得

$$y = C_2 e^{\frac{1}{2}x}.$$

再次利用初值 $y(0) = 2$, 得 $C_2 = 2$. 因此所求初值问题的特解为 $y = 2e^{\frac{1}{2}x}$.

□

例 1.2.11 (悬链线) 悬链线是指一条两端固定的均匀、柔软的链条在重力作用下自然下垂形成的曲线. 伽利略曾推测悬链线是抛物线, 首位得到悬链线正确方程的是约翰·伯努利. 试求悬链线的解析表达式.

解. 简单起见, 假设链条的左右端点等高, 并且分别固定在 x 轴上的两个点 $L(-d, 0)$ 和 $R(d, 0)$. 再假设悬链线的最低点位于 y 轴上的点 $B(0, -h)$.

假设曲线方程为 $y = y(x)$, 下面我们对 $[0, x]$ 这一曲线段 C 做受力分析. 曲线段 C 它受到三个力: 左端点 B 处水平向左的力 H, 右端点 A 处斜率为 $y'(x)$ 的斜向上的力 T, 以及垂直向下的重力 G. 如果链条线密度是 ρ, 那么重力的大小为

悬链线图

$$G = \rho g \int_0^x \sqrt{1 + (y')^2}\,dx.$$

设 A 点处的切线倾角为 θ, 则 A 点的力 T 与另两个力的关系是

$$T\cos\theta = H, \quad T\sin\theta = G.$$

注意到, 当点 A 变动时, B 处的力 H 是不变的. 于是, 通过关系

$$\tan\theta = \frac{G}{H}$$

可以得到方程

$$y' = \frac{\rho g}{H}\int_0^x \sqrt{1+(y')^2}dx.$$

此方程既有微分也有积分，一般称为**积分微分方程**. 对其求导, 得 y 的二阶方程

$$y'' = \frac{\rho g}{H}\sqrt{1+(y')^2}.$$

它既不显含 x 也不显含 y, 下面按照不显含 y 型来求解. 令 $p(x) = y'(x)$, 则

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{\rho g}{H}dx.$$

因此

$$\operatorname{arsinh} p = \frac{\rho g}{H}x + C_1.$$

注意到 $p(0) = y'(0) = 0$, 所以 $C_1 = 0$ 且

$$p(x) = \sinh\left(\frac{\rho g}{H}x\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{\rho g}{H}x} - e^{-\frac{\rho g}{H}x}\right).$$

进而

$$y(x) = \int p(x)dx = \frac{H}{\rho g}\cdot\cosh\left(\frac{\rho g}{H}x\right) + C_2.$$

我们利用右端点 $R(d,0)$ 来确定 C_2. 事实上, 根据 $y(d) = 0$, 可知

$$y(x) = \frac{H}{\rho g}\cdot\left[\cosh\left(\frac{\rho g}{H}x\right) - \cosh\left(\frac{\rho g}{H}d\right)\right].$$

目前 H 仍然未知，可以通过悬链线的长度 l 来确定. 根据弧长公式有

$$\frac{l}{2} = \int_0^d \sqrt{1+p^2}dx = \int_0^d \cosh\left(\frac{\rho g}{H}x\right)dx = \frac{H}{\rho g}\cdot\sinh\left(\frac{\rho g}{H}d\right).$$

记 $\lambda = \frac{\rho g}{H}$, 则 λ 由 l 和 d 完全确定

$$\frac{l}{2} = \frac{\sinh(\lambda d)}{\lambda}.$$

进而悬链线的方程也完全确定

$$y(x) = \frac{1}{\lambda}\cdot[\cosh(\lambda x) - \cosh(\lambda d)].$$

可见，等高悬链线的方程仅与其长度 l 和跨度 $2d$ 有关, 与密度和重力加速度均无关. □

week16/day3/lecture42

1.3 线性微分方程

线性微分方程是指方程中的未知函数及各阶导数只有一次项. 一个 n **阶线性方程**的标准形式为

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x). \tag{3.1}$$

右端的 f 称为**非齐次项**，若它恒等于零，则称方程是**齐次的**，否则称为**非齐次的**. 函数 $a_1(x), \cdots, a_n(x)$ 称为**系数**，如果它们都是常数，那么

称方程为**常系数线性微分方程**，否则称为**变系数线性微分方程**.

1.3.1 解的结构

为了记号简洁，我们引入微分算子的记号. 将求导运算记为 D，k 阶求导记为 D^k. 进而，我们可以引入 **n 阶线性微分算子**

$$L = D^n + a_1(x)D^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(x)D + a_n(x), \tag{3.2}$$

它的阶数记作 $\operatorname{ord} L$. 算子 L 作用在 n 阶可微的函数 y 上得到

$$L(y) = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y.$$

于是，方程 (3.1) 可以简写为

$$L(y) = f. \tag{3.3}$$

为了讨论方便，我们总假定 $a_j(x), f(x)$ 是开区间 I 上连续函数. 从而，$L : C^n(I) \to C(I)$ 是定义良好的映射. 注意到

$$L(c_1y_1 + c_2y_2) = c_1L(y_1) + c_2L(y_2),$$

其中 $y_1, y_2 \in C^n(I), c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. 故 $L : C^n(I) \to C(I)$ 是线性映射，据此可得线性方程的叠加原理.

线性方程叠加原理

- 若 $(y_k)_{k=1}^K$ 是线性方程 $L(y) = 0$ 的 K 个解，$(c_k)_{k=1}^K$ 是 K 个常数，则 $\sum_{k=1}^K c_ky_k$ 也是 $L(y) = 0$ 的解.
- 若 $(y_k)_{k=1}^K$ 是线性方程 $L(y) = f$ 的 K 个解，$(c_k)_{k=1}^K$ 是 K 个满足 $\sum_{k=1}^K c_k = 1$ 的常数，则 $\sum_{k=1}^K c_ky_k$ 也是 $L(y) = f$ 的解.
- 若 y_0 是 $L(y) = 0$ 的解，y_* 是 $L(y) = f$ 的解，则 $y = y_0 + y_*$ 是 $L(y) = f$ 的解.

根据叠加原理可知求解 $L(y) = f$ 的过程可以分成两部分：一是求出 $L(y) = 0$ 的通解；二是求出 $L(y) = f$ 的一个特解.

下面的定理指出了齐次线性方程的解空间是有限维的.

齐次线性方程解的结构

方程 $L(y) = 0$ 的解构成一个 $n = \operatorname{ord} L$ 维线性空间, 即 $\dim\ker L = \operatorname{ord} L$. 进而, 若 $y_1, \cdots, y_n$ 是 $L(y) = 0$ 的一组线性无关的解, 则 $L(y) = 0$ 的解集为

$$\ker L = \left\{ \sum_{k=1}^n c_ky_k \middle| c_k \in \mathbb{R} \right\}.$$

证明. 根据 §6 的存在唯一性定理，给定初值 $y(x_0) = c_1, y'(x_0) = c_2, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = c_n$, 方程 $L(y) = 0$ 存在唯一的解. 取一组解 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ 使得 $\xi_k^{(j-1)}(x_0) = \delta_k^j$. 易见 $y = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_n\xi_n$ 是初值问题的解. 因此齐次方程的任何一个解都可以用 (ξ_k) 来线性表示. 下面说明它们线性无关. 事实上，若 $\sum_{k=1}^n \lambda_k\xi_k = 0$，在 x_0 点求 $j-1$ 阶导数可得 $c_j = 0$，所以 (ξ_k) 线性无关，进而是 $\ker L$ 的一组基. □

此定理虽未给出齐次方程的解法，但大大缩小了我们的求解范围，根据此定理，为了求解齐次方程，只要找 n 个线性无关的解即可.

非齐次线性方程解的结构定理

设 $y_1, \cdots, y_n$ 是齐次方程 $L(y) = 0$ 解空间的一组基，y_* 是非齐次方程 $L(y) = f(x)$ 的一个特解，则 $L(y) = f$ 的解集为

$$L^{-1}(f) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} c_k y_k + y_* | c_k \in \mathbb{R} \right\}.$$

证明. 首先，根据叠加原理 $y = \sum c_k y_k + y_*$ 确实是非齐次方程的解.

反之，如果 y 满足 $L(y) = f$，则 $L(y - y_*) = 0$. 根据齐次方程解的结构，必然存在 (c_k) 使得 $y - y_* = \sum c_k y_k$. □

该结构定理通常也陈述为

非齐次通解 = 齐次通解 + 非齐次特解.

下面我们来讨论具体的解法. 对于一阶方程，我们有直接的通解公式；对于高阶方程，我们基本只能处理常系数的情形.

1.3.2 一阶线性微分方程

一阶线性微分方程的一般形式是

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x). \tag{3.4}$$

本节主要介绍它的两种解法, 一种是**积分因子法**，另一种是**常数变易法**.

积分因子法

设 $I(x)$ 是 $P(x)$ 的一个原函数, 那么方程 (3.4) 左端乘以 $e^{I(x)}$ 之后可以转化为某个函数的导数

$$e^{I(x)} \left(\frac{dy}{dx} + P(x)y \right) = \frac{d}{dx} \left(e^{I(x)} y \right).$$

也就是说，左端乘以 $e^{I(x)}$ 之后可以直接积分. 故而 $e^{I(x)}$ 也被称为**积分因子**. 这样，原方程可以转化为

$$\frac{d}{dx} \left(e^{I(x)} y \right) = e^{I(x)} Q(x). \tag{3.5}$$

积分可得

$$e^{I(x)} y = \int e^{I(x)} Q(x) dx + C.$$

此处我们特意将不定积分的常数 C 明确写出，以表明一阶微分方程的通解应当包含一个任意常数. 因此, 这里的 $\int e^{I(x)} Q(x) dx$ 也可以理解为

$e^{I(x)}Q(x)$ 的某个特定的原函数. 通常也直接用 $\int P(x)dx$ 来表示所选取的原函数 $I(x)$.

一阶线性方程 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$ 的通解公式

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx+C\right).$$

例 1.3.1 用积分因子法求解 $y'-\frac{1}{x}y=x^2e^x$.

解. 选取 $-\frac{1}{x}$ 的原函数 $I(x)=-\ln x$, 则积分因子为 $e^{I(x)}=e^{-\ln x}=\frac{1}{x}$. 于是方程变为

$$\frac{y'}{x}-\frac{y}{x^2}=xe^x$$

即

$$\left(\frac{y}{x}\right)'=xe^x.$$

积分可得

$$\frac{y}{x}=xe^x-e^x+C.$$

故而通解为

$$y=x^2e^x-xe^x+Cx.$$

□

常数变易法

我们将分两步来解一阶线性非齐次方程 (3.4). 第一步是解相应的齐次线性方程

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0.$$

它是可分离变量方程，于是

$$\frac{1}{y}dy=-P(x)dx,$$
$$y=\pm e^{\tilde{C}}e^{-\int P(x)dx}=Ce^{-\int P(x)dx}.$$

下面进行第二步，这一步是常数变易法的关键所在. 其灵感在于，既然齐次方程与非齐次方程有类似结构，那么相应的解也应当有类似的结构. 不妨将齐次方程通解里的常数 C 变易为函数 $c(x)$，进而考察函数 $y=c(x)e^{-\int P(x)dx}$ 满足非齐次方程的条件. 此时

$$\frac{dy}{dx}=\left(\frac{dc}{dx}-P(x)c\right)e^{-\int P(x)dx}.$$

代入方程 (3.4) 可得

$$\frac{dc}{dx}\cdot e^{-\int P(x)dx}=Q(x).$$

由此解得

$$c(x)=\int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx+C.$$

于是，我们再次得到了非齐次方程的通解公式

$$y = c(x)e^{-\int P(x)dx} = \left(\int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx + C\right)e^{-\int P(x)dx}.$$

可以看到常数变易法中的 $c(x)$ 其实就是积分因子法里的 $e^{I(x)}y$. 所以两种方法的本质是一致的，但是常数变易法提供了一条由齐次方程到非齐次方程的可行路径.

例 1.3.2 求解方程 $y' + \frac{1}{x}y = y^2 \ln x$.

解. 它含有 y 的二次项，因而不是线性方程. 但我们可以将它转化为线性方程. 事实上, 两端除以 y^2 后, 有

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{xy} = \ln x.$$

进一步可写为

$$-\left(\frac{1}{y}\right)' + \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y} = \ln x.$$

如果令 $z = 1/y$, 则方程转化为关于 z 的一阶线性方程

$$z' - \frac{1}{x}\cdot z = -\ln x.$$

其通解为

$$z = -\frac{1}{2}(\ln x)^2 x + Cx.$$

再将 $z = 1/y$ 代回，得到原方程通解

$$1 = \left[C - \frac{1}{2}(\ln x)^2\right]xy.$$

注意，上述通解漏了 $y = 0$ 这个解. 这是因为我们做除法的时候默认了 $y \neq 0$. □

当非齐次项为 y 的幂次时，上述方法同样适用. 这一类方程称为 Bernoulli 方程.

Bernoulli 方程 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$ 的解法 $(n \neq 0, 1)$

1. 方程两端除以 y^n, 得
$$\frac{1}{y^n}\frac{dy}{dx} + \frac{P(x)}{y^{n-1}} = Q(x).$$
2. 作代换 $z = 1/y^{n-1}$, 方程化为一阶线性方程
$$\frac{dz}{dx} + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x).$$
3. 求出 z 的通解, 再代回 $z = 1/y^{n-1}$.

通过变换将方程转化为已知形式是常用的方法，在可分离变量方程中我们也曾采用这种方法，下面再举两例说明.

例 1.3.3 将方程 $y' \cos y + e^x \sin y = x^2$ 化为一阶线性方程.

解. 令 $z = \sin y$, 原方程化为 $z' + e^x z = x^2$. □

例 1.3.4 将方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+y^2}$ 化为一阶线性方程.

解. 考虑反函数即可 $\frac{dx}{dy} = x + y^2$. □

例 1.3.5 (电感滤波器) 通过求解电感滤波器的电流方程 $E_m \sin \omega t - iR - L\frac{di}{dt} = 0$, 分析负载端的输出电压.

解. 将方程改写为
$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} \cdot i = \frac{E_m}{L} \sin \omega t.$$
直接应用一阶线性方程的通解公式, 可得
$$i(t) = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin(\omega t - \phi) + Ce^{-\frac{R}{L}t},$$
其中 $\phi = \arctan(\omega L/R)$. 如果在 $t = 0$ 时刻接通电路, 则 $i(0) = 0$, 从而可确定常数 $C = \frac{\omega L E_m}{R^2 + (\omega L)^2}$. 进而
$$i(t) = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin(\omega t - \phi) + \frac{\omega L E_m}{R^2 + (\omega L)^2} e^{-\frac{R}{L}t}.$$
第一项是稳态电流，它的周期和输入信号的周期相同，相位落后 ϕ. 第二项是暂态电流，它逐渐衰减而趋于零. 进而, 负载端的输出电压为
$$U(t) = \frac{RE_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin(\omega t - \phi) + \frac{\omega L R E_m}{R^2 + (\omega L)^2} e^{-\frac{R}{L}t}.$$
暂态部分能快速衰减为零, 所以输出电压主要由稳态部分决定. 从而, 我们有
$$\frac{\text{输出电压振幅}}{\text{输入电压振幅}} \approx \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}.$$
因此, 如果输入的是高频信号 (ω 较大)，则输出信号比较微弱; 如果输入的是低频信号 (ω 较小)，则输出信号强度变化不大. 换言之，高频信号被大幅削减，而低频信号能有效通过. □

1.3.3 常系数线性微分方程

现在我们介绍高阶线性微分方程. 与一阶方程不同，高阶线性方程是很困难的问题，许多高阶线性方程并没有初等解. 但是，如果高阶微分方程的系数都是常数，那么我们仍可以通过初等积分的方法进行求解. 此类方程便是所谓的**常系数线性微分方程**，它们的一般形式为

$$L(y) = y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} y' + p_n y = f(x) \tag{3.1}$$

其中 $p_1, \cdots, p_n$ 是常数.

齐次方程

我们以二阶方程为例展开介绍，最后给出一般 n 阶方程的结论. 设二阶常系数齐次方程为

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{3.2}$$

其中 p, q 是常数. 若将方程写成微分算子的形式，则有

$$L(y) = (D^2 + pD + q)y = 0.$$

此形式指引我们对 $D^2 + pD + q$ 进行因式分解. 为此，我们引入**特征方程**

$$r^2 + pr + q = 0.$$

该特征方程的两个根记为 r_1, r_2. 为了便于理解，**暂且假设两个根都是实数**. 于是，方程 (3.2) 变为

$$L(y) = (D - r_1)(D - r_2)y = 0. \tag{3.3}$$

它可以分解为两个一阶线性方程

$$(D - r_1)g = 0, \quad (D - r_2)y = g.$$

由第一个方程直接可得

$$g(x) = C_1 e^{r_1 x}.$$

于是 y 的方程 $(D - r_2)y = g$ 变为

$$y' - r_2 y = Ce^{r_1 x}. \tag{3.4}$$

它等价于

$$[e^{-r_2 x} y]' = Ce^{(r_1 - r_2)x}.$$

为了继续求解，我们需要讨论 r_1, r_2 是否相等.

- **两根不等**. 此时，(3.4) 的解为

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}.$$

- **两根相等**. 此时，(3.4) 的解为

$$y = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}.$$

这样，通过分解微分算子，我们把二阶方程降阶为两个一阶方程，最后得到了通解. 注意，上述通解形式与齐次线性方程解的结构定理是吻合的，因为此时解空间是 2 维的.

下面讨论特征方程有一对共轭复根的情形. 记这对共轭复根为 $r_1 = a + bi, r_2 = a - bi$, 其中 $b > 0$. 如果允许函数取复值，则类似实的情形，我们可得方程的通解为

$$y = C_1 e^{(a+bi)x} + C_2 e^{(a-bi)x}.$$

下面只需要将其表示为实的情形即可. 根据 Euler 公式，两个基解可以写为

$$y_1 = e^{(a+bi)x} = e^{ax}(\cos bx + i \sin bx),$$

$$y_2 = e^{(a-bi)x} = e^{ax}(\cos bx - i\sin bx).$$

利用叠加原理,

$$\hat{y}_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = e^{ax}\cos bx,$$

$$\hat{y}_2 = \frac{1}{2i}(y_1 - y_2) = e^{ax}\sin bx$$

也是齐次方程的解，并且 $\hat{y}_1/\hat{y}_2 = \cot bx$ 不是常数，所以它们线性无关. 故而，齐次方程的通解形式可以写为

$$y = C_1 e^{ax}\cos bx + C_2 e^{ax}\sin bx \tag{3.5}$$

其中 C_1, C_2 是任意常数.

二阶常系数齐次线性方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的求解过程

1. 列出特征方程 $r^2 + pr + q = 0$.
2. 求出特征方程的根 r_1, r_2.
3. 根据两个根的情况，写出齐次方程的通解.
   - 两个单重实根 r_1, r_2： $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
   - 一个二重实根 $r_{1,2} = r$： $y = (C_1 + C_2 x)e^{rx}$
   - 一对共轭复根 $a \pm bi$： $y = (C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)e^{ax}$

例 1.3.6 求解 $y'' - 3y' = 0$.

解. 该方程的特征方程为 $r^2 - 3r = 0$. 两个特征根为 $r_1 = 0, r_2 = 3$. 因此通解为 $y = C_1 e^{0x} + C_2 e^{3x} = C_1 + C_2 e^{3x}$. □

例 1.3.7 求解 $y'' - 4y' + 4y = 0$.

解. 它的特征方程为 $r^2 - 4r + 4 = 0$. 特征根为一个二重根 $r_1 = r_2 = 2$. 因此通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^{2x}$. □

例 1.3.8 求解 $y'' - 4y' + 13y = 0$.

解. 特征方程为 $r^2 - 4r + 13 = 0$. 特征根为一对共轭复根 $r_{1,2} = 2 \pm 3i$. 因此通解为 $y = C_1 e^{2x}\cos 3x + C_2 e^{2x}\sin 3x$. □

与二阶方程类似，n 阶常系数线性方程也可用前述方法求解. 记 n 阶常系数线性齐次方程

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}y' + p_n y = 0$$

的**特征方程**为

$$r^n + p_1 r^{n-1} + \cdots + p_{n-1}r + p_n = 0.$$

根据代数基本定理，它在复数范围内有 n 个根 $r_1, r_2, \cdots, r_n$. 进而方程可以写为

$$L(y) = (D - r_1)(D - r_2)\cdots(D - r_n)y = 0. \tag{3.6}$$

仿照二阶的方法可以逐次求解之. 最终的通解形式是这样的，各个不同的特征根对应了微分方程通解里的特定项，每个单根对应其中 1 项，每个 k 重根对应其中 k 项. 下表给出了每个根对应的通解里的项.

特征方程的根	齐次方程通解中对应的项	项数
一个单重实根 r	Ce^{rx}	1
一个 k 重实根 r	$(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})e^{rx}$	k
一对单重复根 $a\pm bi$	$e^{ax}(C\cos bx+D\sin bx)$	2
一对 k 重复根 $a\pm bi$	$e^{ax}\Big((C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})\cos bx$ $+(D_1+D_2x+\cdots+D_kx^{k-1})\sin bx\Big)$	$2k$
n 个根	通解 = 本列所有项求和	n

例 1.3.9 求解 $y^{(4)}-4y^{(3)}+5y^{(2)}=0$.

解. 特征方程为 $r^4-4r^3+5r^2=0$. 特征根为 $r_{1,2}=0, r_{3,4}=2\pm i$. 因此通解为

$$\begin{aligned} y &= e^{0x}(C_1+C_2x)+e^{2x}(C_3\cos x+C_4\sin x) \\ &= C_1+C_2x+C_3e^{2x}\cos x+C_4e^{2x}\sin x. \end{aligned}$$

□

例 1.3.10 求解 $y^{(4)}+y=0$.

解. 特征方程为 $r^4+1=0$. 特征根为 $r_{1,2}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1\pm i), r_{3,4}=-\frac{1}{\sqrt{2}}(1\pm i)$.[4] 因此通解为

$$y=e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(C_1\cos\frac{x}{\sqrt{2}}+C_2\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(C_3\cos\frac{x}{\sqrt{2}}+C_4\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right).$$

□

4: 此特征方程的求解可用下面的因式分解

$$r^4+1=(r^2+\sqrt{2}r+1)(r^2-\sqrt{2}r+1).$$

也可用欧拉公式

$$r^4=-1=e^{(2k+1)\pi i},\ k\in\mathbb{Z}.$$

$$\begin{aligned} r &= e^{\frac{2k+1}{4}\pi i} \\ &= e^{\frac{1}{4}\pi i}, e^{\frac{3}{4}\pi i}, e^{\frac{5}{4}\pi i}, e^{\frac{7}{4}\pi i}. \end{aligned}$$

最后需要指出，上述方法实际上存在较大的局限性. 三次、四次方程的求根公式本就鲜为人知，而五次及以上的一般方程更是不存在代数求根公式. 因此，这种方法最具实用价值的场景恐怕仅限于二阶方程.

非齐次方程

现在我们介绍非齐次方程

$$y''+py'+qy=f(x) \tag{3.1}$$

的通解，其中 p,q 是常数.

此处同样可以用算子法进行求解. 先把方程写为

$$L(D)y=(D-r_1)(D-r_2)y=f. \tag{3.2}$$

再把它分解为两个方程

$$(D-r_1)g=f,\ (D-r_2)y=g.$$

逐次求解即可.

例 1.3.11 利用算子法求解 $y''-2y'+y=e^x$.

解. 写为 $(D-1)^2y=e^x$. 令 $(D-1)y=g$. 先求解

$$(D-1)g=e^x.$$

利用积分因子有 $(e^{-x}g)'=1$，所以 $g=e^x(x+C_1)$. 然后再求解

$$(D-1)y=g=e^x(x+C_1).$$

再次利用积分因子得 $(e^{-x}y)'=x+C_1$, 因此 y 的通解为

$$y=e^x\left(\frac{1}{2}x^2+C_1x+C_2\right)=C_1xe^x+C_2e^x+\frac{1}{2}x^2e^x.$$

□

下面再介绍一种解法. 由于我们已经知道齐次方程的通解，那么根据解的结构定理，如果想要得到非齐次方程的通解，其实只需要找到非齐次方程的一个特解即可. 而在很多情况下，猜测一个特解的形式并不是什么难事. 先看几个简单的例子.

- 方程 $y''-2y'-3y=2$. 如果特解是常数 $y_*=C$, 代入可得 $C=-\frac{2}{3}$.
- 方程 $y''-2y'-3y=2x$. 可以想到取特解 y_* 为多项式是可行的. 注意到方程左端的最高次出现在第三项 $-3y$，它应与右端的次数相同. 而右端是一次函数，因此可以尝试 $y_*=Ax+B$ 作为特解. 代入方程有 $-2A-3Ax-3B=2x$，得 $A=-\frac{2}{3}, B=\frac{4}{9}$. 所以可取特解 $y_*=-\frac{2}{3}x+\frac{4}{9}$.
- 方程 $y''-2y'-3y=e^{2x}$. 有理由猜测特解形如 $y_*=Ce^{2x}$. 事实上，将其代入方程可得 $(4C-4C-3C)e^{2x}=e^{2x}$，因此 $C=-\frac{1}{3}$，从而得到特解 $y_*=-\frac{1}{3}e^{2x}$.

上述几个例子展示了猜测特解的核心思想：根据非齐次项 f 的形式，猜测特解的形式，继而代入微分方程求出待定系数. 因此，这一方法也称为**待定系数法**，它能在特定情况下快速得到特解，进而根据解的结构定理得到通解.

此法可行的关键之处在于 y_* 与 f 具有类似的形式. 换言之，这种特殊形式的 y_* 或 f 在求导或积分之后能保持形式上的不变性. 下面我们介绍两种常见的非齐次项.

I. **多项式与指数函数相乘型**
   $f(x)=P(x)e^{\lambda x}$.
   其中 $P(x)$ 是多项式, λ 是常数.
II. **多项式与指数函数和三角函数相乘型**
   $f(x)=P(x)e^{\alpha x}\cos\beta x+Q(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$.
   其中 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 均为多项式, α 和 β 是常数. 本质上它是 I 中 $\lambda=\alpha+\beta i$ 为复数的情形，我们会在后文中说明这一点.

显然，上述两种形式的函数在求导和积分之后还能保持相应的形式, 因此我们有理由猜测特解也可能具有这种形式. 下面分别介绍这两种类型对应的特解的求法.

类型 I. 多项式与指数函数相乘型

设 $f(x)=P(x)e^{\lambda x}$，设特解形如 $y_*=R(x)e^{\lambda x}$，其中 $R(x)$ 是个待定的多项式. 于是

$$\begin{aligned} y_* &= Re^{\lambda x}, \\ y_*' &= (R'+\lambda R)e^{\lambda x}, \\ y_*'' &= (R''+2\lambda R'+\lambda^2 R)e^{\lambda x}, \\ y_*''+py_*'+qy_* &= \Big(R''+(2\lambda+p)R'+(\lambda^2+\lambda p+q)R\Big)e^{\lambda x}. \end{aligned}$$

因此，$y_*=R(x)e^{\lambda x}$ 满足非齐次线性方程 $y''+py'+qy=P(x)e^{\lambda x}$ 的充要条件是

$$R''(x)+(2\lambda+p)R'(x)+(\lambda^2+\lambda p+q)R(x)=P(x). \tag{3.3}$$

下面根据 λ 是否是特征方程的根的不同情况，来讨论多项式 R 的形式.

- 如果 λ 不是特征根，则 $\lambda^2+\lambda p+q\neq 0$, 进而 (3.3) 式左端多项式的最高幂次在第三项 R. 所以，应当取 R 为次数与 P 相同的多项式. 然后代入 (3.3)，比较两侧 x 各次幂的系数，就可确定 R 的各项系数.
- 如果 λ 是单重特征根，则 $\lambda^2+\lambda p+q=0$ 但 $2\lambda+p\neq 0$. 于是 (3.3) 左端的最高幂次出现在 R'，因此 R 应当比 P 高一次. 注意此时 (3.3) 仅含 R 的导数，所以 R 的常数项不起作用，不妨取 $R(x)=xQ(x)$，其中 Q 是一个次数与 P 相同的多项式. 代入 (3.3), 就可以确定 Q 的各项系数.
- 如果 λ 是二重特征根，则 $\lambda^2+\lambda p+q=2\lambda+p=0$，方程 (3.3) 变为 $R''=P$. 可取 $R(x)=x^2Q(x)$，其中 Q 的次数与 P 相同. 当然也可以直接对 $R''=P$ 积分两次得到 R.

方程 $y''+py'+qy=P(x)e^{\lambda x}$ 的特解形式

1. 待定一个与 $P(x)$ 次数相同的多项式 $Q(x)$.
2. 按以下三种情况列出特解.
   - 若 λ 不是特征方程的根，令 $y_*=Q(x)e^{\lambda x}$.
   - 若 λ 是特征方程的单重根，令 $y_*=xQ(x)e^{\lambda x}$.
   - 若 λ 是特征方程的二重根，令 $y_*=x^2Q(x)e^{\lambda x}$.
3. 将特解 y_* 代入方程，确定 $Q(x)$ 的各个系数.

上述推理过程同样适用于一般的 n 阶线性微分方程. 我们直接叙述下面的结果，有兴趣的读者可自行验证.

方程 $y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}y'+p_ny=P(x)e^{\lambda x}$ 的特解形式

待定一个与 $P(x)$ 次数相同的多项式 $Q(x)$，按不同情况列特出解并确定 $Q(x)$.

- 若 λ 不是特征方程的根，令 $y_*=Q(x)e^{\lambda x}$.
- 若 λ 是特征方程的 k 重根，令 $y_*=x^kQ(x)e^{\lambda x}$.

例 1.3.12 求方程 $y'' - 2y' - 3y = 2x + 3$ 的一个特解.

解. 特征方程为 $r^2 - 2r - 3 = 0$，非齐次项为 $f(x) = (3x+1)e^{0x}$. 显然, $\lambda = 0$ 不是特征方程的根, 因此假设特解形如

$$y_* = (Ax+B)e^{0x} = Ax + B.$$

将其代入方程得

$$-2A - 3Ax - 3B = 2x + 3.$$

比较两侧一次项和常数项的系数，得

$$-3A = 2, \quad -2A - 3B = 3.$$

因此 $A = -\frac{2}{3}, B = -\frac{5}{9}$, $y_* = -\frac{2}{3}x - \frac{5}{9}$. □

例 1.3.13 求方程 $y'' - 5y' + 6y = 2xe^{3x}$ 的通解.

解. 特征方程为 $r^2 - 5r + 6 = 0$，$r_1 = 2, r_2 = 3$. 所以相应齐次方程的通解为

$$\bar{y} = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}.$$

下面来求非齐次方程的特解. 因为 $\lambda = 3$ 是特征方程的单重根, 所以取特解

$$y_* = x(Ax+B)e^{3x}.$$

将其代入方程得

$$2Ax + 2A + B = 2x.$$

比较各次幂的系数，得

$$2A = 2, \quad 2A + B = 0.$$

因此 $A = 1, B = -2$, 特解 $y_* = x(x-2)e^{3x}$. 进而通解为

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + (x^2 - 2x)e^{3x}.$$

□

类型 II. 多项式与指数函数和三角函数相乘型

设非齐次项为 $f(x) = P(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$. 我们把它转化为类型 I. 记 $\lambda = \alpha + \beta i$，其共轭为 $\bar{\lambda} = \alpha - \beta i$. 根据欧拉公式，有

$$e^{\lambda x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x), e^{\bar{\lambda}x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x).$$

进而

$$e^{\alpha x}\cos\beta x = \frac{1}{2}(e^{\lambda x} + e^{\bar{\lambda}x}),\ e^{\alpha x}\sin\beta x = \frac{1}{2i}(e^{\lambda x} - e^{\bar{\lambda}x}).$$

于是，非齐次项可表示为

$$f(x) = \frac{P - Qi}{2}e^{\lambda x} + \frac{P + Qi}{2}e^{\bar{\lambda}x}.$$

根据非齐次方程的叠加原理，方程

$$y'' + py' + qy = f = \frac{P - Qi}{2}e^{\lambda x} + \frac{P + Qi}{2}e^{\bar{\lambda}x} \tag{3.4}$$

的特解可以由方程

$$y'' + py' + qy = \frac{P - Qi}{2}e^{\lambda x} \tag{3.5}$$

和

$$y'' + py' + qy = \frac{P + Qi}{2}e^{\bar{\lambda}x} \tag{3.6}$$

的特解叠加而成. 而方程 (3.5) 和 (3.6) 的非齐次项都是类型 I，通过完全相同的分析，我们不妨假设 (3.5) 的特解为

$$z_* = x^k R(x) e^{\lambda x}.$$

这里的 k 是 $\lambda = \alpha + \beta i$ 作为特征方程 $L(r) = r^2 + pr + q = 0$ 根的重数[5]，而 R 的次数等于 $P - Qi$ 的次数. 因为 P, Q 都是实多项式，所以 $P - Qi$ 的次数等于 P 和 Q 的次数里相对高的那一个.

5: 若 λ 不是特征方程的根，则 $k = 0$.

注意到方程 (3.5) 和 (3.6) 恰好互为共轭, 因此 (3.6) 的特解可以取为 (3.5) 的特解的共轭

$$\overline{z_*} = \overline{x^k R(x) e^{\lambda x}} = x^k \overline{R(x)} e^{\bar{\lambda}x}.$$

进而, 方程 (3.4) 有特解

$$y_* = z_* + \overline{z_*} = x^k \left(R(x) e^{\lambda x} + \overline{R(x)} e^{\bar{\lambda}x} \right).$$

将其表示为实的形式，可写为

$$y_* = x^k \left(R_c(x) e^{\alpha x} \cos \beta x + R_s(x) e^{\alpha x} \sin \beta x \right),$$

其中 R_c, R_s 都是多项式. 需要注意的是，即便 P, Q 有一项为零，相应的特解 y_* 也要同时列出两项.

方程 $y'' + py' + qy = e^{\alpha x}\left(P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x\right)$ 的特解形式

设 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 的最高次数为 m，待定两个次数为 m 的多项式 $R_c(x)$ 和 $R_s(x)$，根据不同情况列出特解并求之.

- 若 $\alpha + \beta i$ 不是特征方程的根，令特解为

$$y_* = e^{\alpha x}\left(R_c(x)\cos\beta x + R_s(x)\sin\beta x\right).$$

- 若 $\alpha + \beta i$ 是特征方程的根[6]，令特解为

$$y_* = x e^{\alpha x}\left(R_c(x)\cos\beta x + R_s(x)\sin\beta x\right).$$

6: 实系数二次方程的复根最多一重, 因此只需要乘 x 的一次方. 对于 n 阶方程, 复根的重数 k 可能超过 1, 此时要乘以 x^k.

一般 n 阶方程的结论不再列出，读者可以自行梳理.

例 1.3.14 求方程 $y'' + 4y = 3x\cos x$ 的一个特解.

解. 特征方程为 $r^2 + 4 = 0, r_{1,2} = \pm 2i$. 因为非齐次项为 $f(x) = 3xe^{0x}\cos x$,

而 $\lambda = 0 + i$ 不是特征方程的根, 可取特解形如

$$y_* = (Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x.$$

将其代入方程得

$$(3Ax + 3B + 2C)\cos x + (3Cx - 2A + 3D)\sin x = 3x\cos x + 0\sin x.$$

令两端 $\cos x$ 和 $\sin x$ 的系数对应相等,

$$3Ax + 3B + 2C = 3x,\quad 3Cx - 2A + 3D = 0.$$

于是 $C = 0, B = 0, A = 1, D = \frac{2}{3}$. 所以特解 $y_* = x\cos x + \frac{2}{3}\sin x$. □

例 1.3.15 求方程 $y'' + 4y = 3x(1 + \cos x)$ 的通解.

解. 特征方程的根为 $r_{1,2} = \pm 2i$, 所以相应的齐次方程的通解为

$$\bar{y} = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x.$$

下面来求非齐次方程的特解. 注意到非齐次项可以写为 $f(x) = 3x + 3x\cos x$, 这是类型 I 和类型 II 的叠加. 根据叠加原理, 只要将 $y'' + 4y = 3x$ 和 $y'' + 4y = 3x\cos x$ 的特解叠加即可. 后者的特解已由前例求得; 前者的特解可设为 $Ax + B$, 代入可得 $A = \frac{4}{3}, B = 0$. 所以原方程的特解为 $y_* = \frac{4}{3}x + x\cos x + \frac{2}{3}\sin x$, 进而通解为 $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{4}{3}x + x\cos x + \frac{2}{3}\sin x$. □

例 1.3.16 (共振现象) 物体的弹性形变量记为 x, k 是弹性系数. 对其施加一个周期性外力 $F\sin\omega t$, 则形变满足方程 $m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + F\sin\omega t$. 讨论形变规律.

Proof. 记物体固有频率为 $\lambda = \sqrt{k/m}$, 则

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda^2 x = \frac{F}{m}\sin\omega t.$$

(1) 若外力频率 ω 与物体固有频率 $\lambda = \sqrt{k/m}$ 不一致, 则 ωi 不是特征方程的根, 特解形如 $x_* = A\sin\omega t + B\cos\omega t$. 代入可得 $x_* = \frac{F}{m(\lambda^2 - \omega^2)}\sin\omega t$, 进而通解为

$$x(t) = C_1\cos\lambda t + C_2\sin\lambda t + \frac{F}{m(\lambda^2 - \omega^2)}\sin\omega t.$$

当 ω 很接近 λ 时, 形变量 $x(t)$ 会很大, 以至于超出弹性限度.

(2) 当外力频率与物体固有频率相同时, $\omega i = \lambda i$ 是特征方程单重根, 特解为 $x_* = t(A\sin\lambda t + B\cos\lambda t)$. 代入可得 $x_* = -\frac{F}{2m\lambda}t\cos\lambda t$. 因此通解为

$$x(t) = C_1\cos\lambda t + C_2\sin\lambda t - \frac{F}{2m\lambda}t\cos\lambda t.$$

此时形变量 $x(t)$ 无界.

因此，当外力频率接近或等于物体的固有频率时，形变会非常大，这就是共振现象. □

欧拉方程

一般来说，变系数线性微分方程是不容易求解的. 但是有些特殊的变系数线性微分方程可通过变量代换化为常系数线性微分方程，**欧拉方程**就是其中的一种，它的一般形式为

$$(x^n D^n + p_1 x^{n-1} D^{n-1} + \cdots + p_{n-1} x D + p_n) y = f(x), \tag{3.7}$$

其中 $p_1, \cdots, p_n$ 都是常数. 所用的变量代换[7]是 $x = e^t, t = \ln x$. 下面我们来推导它们的导数关系. 记 $\frac{d}{dt} = D_t$，易得一阶导数关系

$$Dy = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = e^{-t}\frac{dy}{dt} = e^{-t} D_t y.$$

等价地，有 $D = e^{-t} D_t$. 进而可得二阶导数公式

$$\begin{aligned} D^2 y = D(Dy) &= e^{-t} D_t\Big(e^{-t} D_t y\Big) \\ &= e^{-t}\Big(-e^{-t} D_t y + e^{-t} D_t^2 y\Big) \\ &= e^{-2t}\Big(-D_t y + D_t^2 y\Big) = e^{-2t} D_t(D_t - 1) y. \end{aligned}$$

依次类推可得

$$D^k y = e^{-kt} D_t (D_t - 1) \cdots (D_t - k + 1) y.$$

把 $e^{-kt} = x^{-k}$ 代入，可得

$$x^k D^k y = D_t (D_t - 1) \cdots (D_t - k + 1) y. \tag{3.8}$$

利用上述关系，可将欧拉方程 (3.7) 转化为常系数线性方程.

例 1.3.17 求解欧拉方程 $x^3 y''' + x^2 y'' - 4xy' = 3x^2$.

解. 令 $x = e^t, t = \ln x$，则

$$\begin{aligned} xy' &= D_t y \\ x^2 y'' &= D_t (D_t - 1) y = (D_t^2 - D_t) y \\ x^3 y''' &= D_t (D_t - 1)(D_t - 2) y = (D_t^3 - 3D_t^2 + 2D_t) y. \end{aligned}$$

因此方程变为

$$(D_t^3 - 2D_t^2 - 3D_t) y = 3e^{2t}.$$

这是三阶线性非齐次方程, 特征方程为 $r^3 - 2r^2 - 3r = 0$，$r_1 = 0, r_2 = 3, r_3 = -1$. 所以齐次方程的通解为

$$\bar{y} = C_1 + C_2 e^{3t} + C_3 e^{-t}.$$

7: 我们仅考虑 $x > 0$ 的情况，$x < 0$ 的情形与之类似.

又它的非齐次项为类型 I，可设特解 $y_* = Ae^{2t}$，解得 $A = -\frac{1}{2}$. 于是通解为

$$y = C_1 + C_2e^{3t} + C_3e^{-t} - \frac{1}{2}e^{2t}.$$

所以原欧拉方程的通解为[8]

$$y = C_1 + C_2x^3 + \frac{C_3}{x} - \frac{1}{2}x^2.$$

8: 虽然求解过程是在 $x > 0$ 下进行的，但容易验证此解也适合 $x < 0$ 的情形.

□

1.3.4 常数变易法 *

我们曾经利用常数变易法求解非齐次方程 $y' + P(x)y = Q(x)$. 该想法也可应用到求解二阶线性微分方程. 设齐次方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

的通解为

$$\bar{y} = C_1y(x) + C_2y_2(x).$$

秉承常数变易的思想，假设

$$y = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) \tag{3.1}$$

是非齐次方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

的解. 我们的目标是确定未知函数 $c_1(x)$ 和 $c_2(x)$. 对 y 的表达式逐次求导，有

$$\begin{aligned} y &= c_1y_1 + c_2y_2 \\ y' &= (c_1'y_1 + c_2'y_2) + (c_1y_1' + c_2y_2') \\ y'' &= (c_1'y_1 + c_2'y_2)' + (c_1y_1' + c_2y_2')'. \end{aligned}$$

则 c_1 和 c_2 需要满足

$$\begin{aligned} f = y'' + py' + qy = {} & (c_1'y_1 + c_2'y_2)' + (c_1y_1' + c_2y_2')' \\ & + p(c_1'y_1 + c_2'y_2) + p(c_1y_1' + c_2y_2') \\ & + q(c_1y_1 + c_2y_2). \end{aligned} \tag{3.2}$$

由于两个未知函数 c_1, c_2 只需满足上述一个关系式，所以可规定它们再满足一个关系式. 根据上面的表达式，我们提供两个策略.

策略 A. 为了使最后的方程式关于 c_1, c_2 的导数尽可能低阶，根据 y' 的表达式，我们增加限制

$$c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0. \tag{3.3}$$

于是，c_1, c_2 需要满足的方程 (3.2) 变为

$$\begin{aligned} f &= (c_1y_1' + c_2y_2')' + p(c_1y_1' + c_2y_2') + q(c_1y_1 + c_2y_2) \\ &= (c_1'y_1' + c_2'y_2') + c_1(y_1'' + py_1' + qy_1) + c_2(y_2'' + py_2' + qy_2). \end{aligned}$$

注意到 y_1, y_2 是齐次方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的解, 所以

$$f = c_1' y_1' + c_2' y_2'.$$

故而，待定函数 $c_1(x)$ 和 $c_2(x)$ 需满足

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0, \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' = f. \end{cases} \tag{3.4}$$

解得

$$c_1' = -\frac{y_2 f}{W}, \quad c_2' = \frac{y_1 f}{W}.$$

其中 W 是函数组 y_1, y_2 的**朗斯基 (Wronski) 行列式**[9]

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}.$$

于是

$$c_1 = -\int \frac{y_2 f}{W} dx, \quad c_2 = \int \frac{y_1 f}{W} dx.$$

这样，我们得到了非齐次方程的一个特解

$$y_* = -y_1 \int \frac{y_2 f}{W} dx + y_2 \int \frac{y_1 f}{W} dx. \tag{3.5}$$

进而，非齐次方程的通解为

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 - y_1 \int \frac{y_2 f}{W} dx + y_2 \int \frac{y_1 f}{W} dx. \tag{3.6}$$

策略 B. 既然两个待定函数仅需满足一个关系式，索性假设 $c_2(x) = 0$. 此时，$y = c_1(x) y_1(x)$，并且 c_1 需满足

$$\begin{aligned} f &= (c_1' y_1 + c_1 y_1')' + p(c_1' y_1 + c_1 y_1') + q(c_1 y_1) \\ &= c_1'' y_1 + c_1'(2y_1' + p y_1) + c_1(y_1'' + p y_1' + q y_1). \end{aligned}$$

因为 y_1 是齐次方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的非零解，所以 c_1 的方程为

$$c_1'' + \left(\frac{2y_1'}{y_1} + p\right) c_1' = \frac{f}{y_1}. \tag{3.7}$$

这是关于 c_1' 的一阶线性方程，可求得通解

$$c_1'(x) = \phi(x, C_0).$$

进而

$$c_1(x) = \int \phi(x, C_0) dx + C_1.$$

于是非齐次方程的解是

$$y = y_1 \int \phi(x, C_0) dx + C_1 y_1.$$

相对于策略 A 而言，策略 B 的优缺点都是明显的. 它的优点是只需要知道齐次方程的一个解即可，缺点是需要连续做两次积分. 显然，策略 B 也适用于求解齐次方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的通解.[10]

9: 当 y_1, y_2 线性无关且处处非零时, 它们的朗斯基行列式必不恒为零. 事实上, 若 $W = 0$, 则 $y_1'/y_1 = y_2'/y_2$. 两端积分可得 $\ln|y_1| = \ln|y_2| + C$，进而 y_1/y_2 是常值函数，与线性无关矛盾. 但是，如果 y_1, y_2 有零点, 上述结论并不成立. Peano 给过一个反例：$y_1 = x^2, y_2 = |x|x$. 它们在原点的邻域上线性无关，但是它们的 Wronski 行列式恒为零.

10: 当 $f = 0$ 时，关于 c_1 的方程 (3.7) 变为

$$c_1'' + (\frac{2y_1'}{y_1} + p) c_1' = 0.$$

它的通解为

$$c_1(x) = C_1 + C_2 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx} dx.$$

由此可知齐次方程的通解为

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx} dx.$$

等价的，由齐次方程的一个解 y_1 可以得到另一个解

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx} dx.$$

这个公式称为 **Liouville 公式**.

例 1.3.18 已知齐次方程 $(x-1)y''-xy'+y=0$ 的通解为 $\bar{y}=C_1x+C_2e^x$. 试求非齐次方程 $(x-1)y''-xy'+y=(x-1)^2$ 的通解.

解. 我们采用策略 A. 将方程写为标准形式

$$y''-\frac{x}{x-1}y'+\frac{1}{x-1}y=x-1.$$

设 $y=c_1(x)x+c_2(x)e^x$，使之满足

$$\begin{cases} c_1'x+c_2'e^x=0, \\ c_1'+c_2'e^x=x-1. \end{cases} \tag{3.8}$$

得 $c_1'=-1, c_2'=xe^{-x}$. 于是

$$c_1=-x+C_1,\quad c_2=-xe^{-x}-e^{-x}+C_2.$$

因此非齐次方程的通解为 $y=C_1x+C_2e^x-x^2-x-1$. □

例 1.3.19 已知 $y''-2y+y=0$ 的一个特解 $y_1=e^x$. 试求非齐次方程 $y''-2y+y=\frac{e^x}{x}$ 的通解.

解. 鉴于只有一个解，我们采用策略 B. 设 $y=c_1(x)e^x$, 则

$$\frac{e^x}{x}=y''-2y+y=c_1''e^x.$$

因此

$$c_1'=\ln|x|+C_0,\quad c_1=x\ln|x|-x+C_0x+C_2.$$

所以非齐次方程的通解可以写为 $y=C_1xe^x+C_2e^x+xe^x\ln|x|$, 这里 $C_1=C_0-1$. □

1.4 微分方程组 *

对于微分方程组，我们并没有太多的方法获得解析解. 如果微分方程组里的每一个方程都是常系数线性微分方程，那么我们可以通过利用高阶线性方程来求解. 这种方程组称为**常系数线性微分方程组**.

一般地，含有 m 的未知函数 $x_1,\cdots,x_m$ 的常系数线性微分方程组可以写做

$$\sum_{j=1}^{m}a_{ij}(D)x_j=f_i(t),\quad i=1,2,\cdots,m. \tag{4.1}$$

这里每个 $a_{ij}(D)$ 都是 D 的多项式. 我们可以通过消元法将其转化为各个未知函数独立的线性方程. 比如，对于方程

$$\begin{cases} D^2x-(D-1)y=t, \\ 2Dx+Dy=e^t. \end{cases} \tag{4.2}$$

为了消去 y，第一个方程作用 D、第二个方程作用 $(D-1)$，有

$$\begin{cases} D(D^2x-(D-1)y)=D^3x-D(D-1)y=Dt=1, \\ (D-1)(2Dx+Dy)=2(D-1)Dx+(D-1)Dy=(D-1)e^t=0. \end{cases}$$

两式相加可得

$$D^3x+2D^2x-2Dx=1.$$

类似地，第一个方程乘以 2、第二个方程作用 D，再两式相减可得

$$D^2y+2Dy-2y=e^t-2t.$$

这样，方程组 (1.6) 变为了

$$\begin{cases} D^3x+2D^2x-2Dx=1, \\ D^2y+2Dy-2y=e^t-2t. \end{cases} \tag{4.3}$$

方程组 (4.3) 的两个方程都是常系数线性方程，我们可以求得它们的通解，进而可以得到 (1.6) 的解. 必须指出，(4.3) 是对 (1.6) 求了若干次导数而得，因此它们并不等价. 所以，需要将 (4.3) 的通解代入 (1.6) 以确定多余的常数. 如果是初值问题，那么也可直接用初值来确定常数.

1.5 级数法与数值法 *

大部分方程并没有初等形式的解，或者求解很困难，此时常常采用级数或数值的方法. 本节简单介绍幂级数法和 Euler 折线法

幂级数法

对于一般的方程，幂级数法仍然比较复杂，我们仅讨论线性方程，它只涉及幂级数的加法和乘法. 考虑线性方程

$$x^{(n)}+a_{n-1}(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_1(t)x'+a_0(t)=b(t).$$

如果 $a_j(t),b(t)$ 在 (t_0-R,t_0+R) 上可展开为 $(t-t_0)$ 的幂级数，则可猜测方程有幂级数解

$$x=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(t-t_0)^n.$$

将其带入方程，一般可得系数 (c_n) 的递推公式. 如果通过分析系数可得幂级数的收敛半径，则可获得收敛域内的解.

例 1.5.1 求解齐次 Airy 方程 $y''=xy$.

解. 设 $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$. 比较系数，可得

$$c_2=0,$$

$$c_{n+2}=\frac{c_{n-1}}{(n+2)(n+1)}.$$

因此

$$
\begin{aligned}
c_{3k+0} &= \frac{c_{3(k-1)}}{(3k)(3k-1)} \\
c_{3k+1} &= \frac{c_{3(k-1)+1}}{(3k+1)(3k)} \\
c_{3k+2} &= 0.
\end{aligned}
$$

用比值法，易知

$$y = \sum_k c_{3k} x^{3k} + \sum_k c_{3k+1} x^{3k+1}$$

的收敛半径是无穷大，从而 $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ 在 $\mathbb{R}$ 上收敛. □

例 1.5.2 求解 Bessel 方程 $x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0$.

解. 容易发现,若设 $y = \sum c_n x^n$,则 y 必然为零. 我们假设 $y = x^\rho \sum c_n x^n = x^\rho u(x)$，代入可得

$$x^2u'' + (2\rho + 1)xu' + (\rho^2 - \frac{1}{4} + x^2)u = 0.$$

取 $\rho = -\frac{1}{2}$，可得

$$u'' + u = 0.$$

因此，方程有通解

$$y = \frac{C_1 \cos x}{\sqrt{x}} + \frac{C_2 \sin x}{\sqrt{x}}.$$

□

幂级数法也可应用于非线性方程，但递推公式一般非常复杂，不易进一步处理.

Euler 折线法

鉴于大部分方程无法得到解析解，讨论它们的数值解是及其必要的. 我们考虑下面的初值问题

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

根据一阶微分方程的几何意义，上述方程的解是一条过 (x_0, y_0) 的积分曲线，该曲线在 (x, y) 点处的切线斜率为 $f(x, y)$. Euler 折线法就是用折线来逼近这条积分曲线.

考虑该初值问题在区间 $[x_0, x_*]$ 上的解. 将区间 n 等分

$$x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = x_*, \quad h = x_j - x_{j-1} = \frac{1}{n}(x_* - x_0).$$

当 n 足够大时，在小区间 $[x_0, x_1]$ 上的积分曲线段可以用 (x_0, y_0) 处的切线段近似替代. 此切线段的右端点为

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)h.$$

继而，再以 (x_1, y_1) 为起点，作过该点的积分曲线的切线段，它在 $x = x_2$ 处的端点纵坐标为

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)h.$$

依次类推，可得点列 $(x_j, y_j)(0 \le j \le n)$，它们满足迭代关系

$$\boxed{y_{j+1} = y_j + f(x_j, y_j)h, \quad x_j = x_0 + jh.}$$

这样，我们可以得到方程解的数值近似

$$y(x_j) \approx x_j, \quad 1 \le j \le n.$$

如果将 (x_j, y_j) 用线段逐个相连，就得到一条近似积分曲线的折线.

上述方法同样适用于方程组的情形. 假如要求解方程组

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0.$$

可使用以下迭代公式

$$\boxed{\boldsymbol{x}_{j+1} = \boldsymbol{x}_j + \boldsymbol{f}(t_j, \boldsymbol{x}_j)h, \quad t_j = t_0 + jh.}$$

继而用近似

$$\boldsymbol{x}(t_j) \approx \boldsymbol{x}_j, \quad 1 \le j \le n.$$

如果用线段依次连接 $\boldsymbol{x}_j$，得到的折线可以看作方程解的轨线的近似.

此处不再举具体的例子，读者可以随意举例并用计算机编程计算之.

1.6 存在唯一性 *

Picard 存在唯一性定理

设 $f(t, x)$ 在 $R = [t_0 - \tau, t_0 + \tau] \times [x_0 - \xi, x_0 + \xi]$ 上连续，且满足 $|f(t, x') - f(t, x'')| \le L|x' - x''|$. 则初值问题

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

在 $t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ 上存在唯一解，其中 ϵ 满足 $\epsilon < \tau, \xi / \sup|f|, 1/L$.

证明. 在区间 $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ 上考虑迭代函数列

$$x_0(t) = x_0, \quad x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(t, x_n(t))dt \ \ (n \ge 0).$$

注意到

$$\|x_{n+1} - x_0\| \le \epsilon \cdot \sup|f|,$$

因此，当 $\epsilon < \xi / \sup|f|$，迭代函数列 x_n 的值域均落在 $[x_0 - \xi, x_0 + \xi]$ 中，进而上述迭代的定义良好.

根据 Lipschitz 性，易见

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq L\epsilon\|x_n - x_{n-1}\|.$$

因此，当 $\epsilon < 1/L$ 时，该迭代函数列是压缩列，根据一致收敛的柯西原理，它们一致收敛于一连续函数 $x_\infty(t)$. 从而，极限函数满足

$$x_\infty(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(t, x_\infty(t))dt.$$

这表明 x_∞ 可微，且 $x_\infty'(t) = f(t, x_\infty(t))$. 此外，显然有 $x_\infty(t_0) = x_0$. 因此 x_∞ 是初值问题在区间 $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ 上的解.

下面说明唯一性. 设 $x(t), y(t)$ 都是初值问题的解, 则

$$\|x - y\| \leq L\epsilon\|x - y\|,$$

由于 $L\epsilon < 1$, 所以 $\|x - y\| = 0$. □

Picard 定理可以自然的推广到向量值函数的情形.

Picard 存在唯一性定理

设 $f(t, \boldsymbol{x})$ 在 $R = [t_0 - \tau, t_0 + \tau] \times U[\boldsymbol{x}_0, \xi]$ 上连续，且满足 $|f(t, \boldsymbol{x}') - f(t, \boldsymbol{x}'')| \leq L|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}''|$. 则初值问题

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$$

在 $t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ 上存在唯一解, 其中 ϵ 满足 $\epsilon < \tau, \xi/\sup|\boldsymbol{f}|, 1/L$.

利用向量值函数的形式，我们可以证明高阶方程的存在唯一性. 考虑 n 阶方程

$$x^{(n)}(t) = f(t, x, x', x'', \cdots, x^{(n-1)}).$$

记

$$\boldsymbol{x}(t) = (x_0(t), x_1(t), \cdots, x_{n-1}(t)),$$

则前述 n 阶方程等价于

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{x})$$

其中

$$\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) = (x_1, \cdots, x_{n-1}, F(t, x_0, x_1, \cdots, x_{n-1})).$$

若 $|f(t, \boldsymbol{x}) - f(t, \boldsymbol{y})| \leq L|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$, 则

$$|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y})| \leq (L + 1)|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|.$$

这意味着，初值问题

$$\begin{cases} x^{(n)}(t) = f(t, x, x', x'', \cdots, x^{(n-1)}), \\ x(t_0) = c_0, x'(t_0) = c_1, \cdots, x^{(n-1)}(t_0) = c_{n-1} \end{cases}$$

局部存在唯一的解. 随着初值 $\boldsymbol{c} = (c_0, c_1, \cdots, c_{n-1})$ 变动，方程的解也随之变动. 因此,一个 n 阶方程的解通常依赖于 n 个参数 $\boldsymbol{C} = (C_0, C_1, \cdots, C_{n-1})$, 即

$$x(t) = \phi(t, C_0, C_1, \cdots, C_{n-1}).$$

为了保证上述表述中 $C_0, C_1, \cdots, C_{n-1}$ 是独立的，只要确保

$$J = \frac{\partial(\phi, \partial_t\phi, \cdots, \partial_t^{n-1}\phi)}{\partial(C_0, C_1, \cdots, C_{n-1})} \neq 0.$$

事实上，若 $J \neq 0$，则可由

$$\begin{cases} x'(t) = \phi(t, C_0, C_1, \cdots, C_{n-1}) \\ x''(t) = \partial_t\phi(t, C_0, C_1, \cdots, C_{n-1}) \\ \cdots \\ x^{(n-1)}(t) = \partial_t^{n-1}\phi(t, C_0, C_1, \cdots, C_{n-1}) \end{cases}$$

在 $t = t_0$ 处解得

$$\begin{cases} C_0 = C_0(c_0, c_1, \cdots, c_{n-1}) \\ C_1 = C_1(c_0, c_1, \cdots, c_{n-1}) \\ \cdots \\ C_{n-1} = C_{n-1}(c_0, c_1, \cdots, c_{n-1}) \end{cases}$$

这意味着给定 $\boldsymbol{c}$，存在唯一 $\boldsymbol{C}$，因此 $\boldsymbol{C}$ 也是解集的参数化.

因此，一般情况下，若含有 n 个常数的函数族 $x(t) = \phi(t, C_0, C_1, \cdots, C_{n-1})$ 是某个 n 阶方程的解，并且 $J \neq 0$，则称其为该微分方程的**通解**.

需要指出，**通解未必是所有的解!** 比如考虑

$$[x'(t)]^2 + x^2(t) - 1 = 0.$$

易知 $x(t) = \sin(t + C)$ 是通解，但这个通解不包含解 $x(t) \equiv \pm 1$. 事实上，该方程在 $(0, \pm 1)$ 处并没有存在唯一性，因为 $x(t) = \pm 1, x(t) = \pm\cos t$.

解的延伸

设 $f(t, x)$ 在开区域 G 上连续，则 $x' = f(t, x)$ 的任意一条积分曲线均可延伸到 G 的边界.

证明概要. 设某个解 $x(t)$ 的最大右行存在区间为 I，则 I 不可能是闭区间 $[t_0, T]$. 这是因为 $(T, x(T))$ 仍然在 G 内，故以之为初值仍有局部右行解，这与 I 是最大右行区间矛盾.

- 若 $I = [t_0, +\infty)$，则积分曲线延伸至无限远;
- 若 $I = [t_0, T)$，下面说明积分曲线不会含于 G 的某个紧子集上. 若不然，f 在该紧子集上有界，进而

  $$|x(t) - x(s)| \leq \sup |f| \cdot |t - s|,$$

  进而 $\lim_{t \to T^-} x(t) = X$ 存在，且 $(T, X) \in G$，继而以之为初值，解可继续向右延伸.

类似可得左行区间的延伸性. □

线性方程

设 A, B 是 (α, β) 上的连续函数，则方程

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t)$$

的任一解的最大存在区间均为 (α,β).

证明. 根据解的延伸定理，最大区间上的解会趋近边界. 注意到此时的区域是 $G=(\alpha,\beta)\times\mathbb{R}^n$, 因此只要说明解 $\boldsymbol{x}(t)$ 内闭有界，那么它只能在 $t\to\alpha+,\beta-$ 时趋于边界，即最大存在区间均为 (α,β).

下面仅讨论右行解的有界性. 设 $\boldsymbol{x}(t)$ 在 $t\in[t_0,T](T<\beta)$ 上有意义. 设在 $t\in[t_0,T]$ 上成立 $|\boldsymbol{A}(t)|\le A,|\boldsymbol{b}(t)|\le B$, 则

$$|x(t)|\le|x_0|+\int_{t_0}^{t}(A|x(t)|+B)dt\le K+A\int_{t_0}^{t}|x(t)|dt,$$

其中 $K=|x_0|+B\cdot(T-t_0)$. 设 $\phi(t)=\int_{t_0}^{t}|x(t)|dt$，则

$$\phi'(t)\le K+A\phi(t)$$

即

$$(e^{-At}\phi)'\le Ke^{-At}.$$

因此

$$\phi(t)\le\frac{K}{A}(e^{A(t-t_0)}-1).$$

从而

$$|x(t)|\le K+A\phi(t)\le Ke^{A(t-t_0)}.$$

所以，在 β 时刻之前，解是有限的，积分曲线不可能趋于边界. □