线性代数（3 学时）期终试卷 A 卷解答

2006 年 1 月 9 日

专业________________ 学号________________ 姓名________________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

一、(24 分) 填空题:

1．已知 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$ 是三维列向量，设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_2)$，$|\boldsymbol{A}|=2$，$|\boldsymbol{B}|=3$，则

$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|+|2\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{B}|=$ ___-79___。

2．设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶实对称阵，则下列命题不正确的是___(C)___。

(A) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 是实对称阵　　(B) $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 是实对称阵

(C) $\boldsymbol{AB}$ 是实对称阵　　(D) $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$ 是实对称阵

3．设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，$|\boldsymbol{A}|=a\neq 0$，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，当 $k=$ ___$\dfrac{1}{2a+3}$___ 时，$k\boldsymbol{A}$ 是 $2\boldsymbol{A}^*+3\boldsymbol{A}^{-1}$ 的逆矩阵（这里 $2\boldsymbol{A}^*+3\boldsymbol{A}^{-1}$ 可逆）。

4．$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & -2 \\ 1 & 1 & x & 1 \end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A})=2$，则 $x=$ ___1、-2___。

5．n 维向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3\ (n>3)$ 线性无关的充要条件是___(D)___。

(A) $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 中任意两个向量线性无关　　(B) $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 全是非零向量

(C) 存在 n 维向量 $\boldsymbol{b}$，使得 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{b}$ 线性相关

(D) $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 中任何一个向量都不能由其余两个向量线性表示

6．设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵，则___(B)___。

(A) $m>n$ 时，必有 $|\boldsymbol{AB}|\neq 0$　　(B) $m>n$ 时，必有 $|\boldsymbol{AB}|=0$

(C) $n>m$ 时，必有 $|\boldsymbol{AB}|\neq 0$　　(D) $n>m$ 时，必有 $|\boldsymbol{AB}|=0$

7．3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 0、4、9，$\boldsymbol{E}$ 是 3 阶单位矩阵，则 $|\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}|=$ ___−18___。

8．矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & \lambda \\ 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$ 为正定矩阵，则 λ 的取值范围是 ___$-\sqrt{3}<\lambda<\sqrt{3}$___。

二、(6 分) 求方程 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 2 & x & 0 \\ 0 & x & 3 & 0 \\ x & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}=0$ 的根。

$4\begin{vmatrix} 2 & x \\ x & 3 \end{vmatrix}-x^2\begin{vmatrix} 2 & x \\ x & 3 \end{vmatrix}=0$　　2 分

$(4-x^2)(6-x^2)=0$　　2 分

$x_1=-2,x_2=2,x_3=-\sqrt{6},x_4=\sqrt{6}$　　2 分

三、(10 分) 求一个 2 次多项式 $f(x)$，满足 $f(1)=1$，$f(-1)=9$，$f(2)=3$。

设 $f(x)=ax^2+bx+c$ 则 $\begin{cases} a+b+c=1 \\ a-b+c=9 \\ 4a+2b+c=3 \end{cases}$　　2 分

即 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$　　2 分

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$　　4 分

$f(x)=2x^2-4x+3$　　2 分

四、（10分）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 为齐次线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系，$\begin{cases}\beta_1=k\alpha_1+l\alpha_2\\ \beta_2=k\alpha_2+l\alpha_3\\ \cdots\\ \beta_s=k\alpha_s+l\alpha_1\end{cases}$，$k,l$ 为实常数，问 k,l 满足什么关系时，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 也是 $Ax=0$ 的一个基础解系。

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\begin{pmatrix}k&0&\cdots&0&l\\ l&k&\cdots&0&0\\ 0&l&\cdots&0&0\\ \vdots&\vdots&\cdots&\vdots&\vdots\\ 0&0&\cdots&l&k\end{pmatrix}_{s\times s}$$ 2分

因 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 均为齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系

故 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 均线性无关 2分

则矩阵 $\begin{pmatrix}k&0&\cdots&0&l\\ l&k&\cdots&0&0\\ 0&l&\cdots&0&0\\ \vdots&\vdots&\cdots&\vdots&\vdots\\ 0&0&\cdots&l&k\end{pmatrix}_{s\times s}$ 的秩为 s，从而 $\begin{vmatrix}k&0&\cdots&0&l\\ l&k&\cdots&0&0\\ 0&l&\cdots&0&0\\ \vdots&\vdots&\cdots&\vdots&\vdots\\ 0&0&\cdots&l&k\end{vmatrix}\neq 0$ 4分

按第一行展开 $k\cdot\begin{vmatrix}k&0&\cdots&0&0\\ l&k&\cdots&0&0\\ \vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\ 0&0&\cdots&l&k\end{vmatrix}_{(s-1)\times(s-1)}+(-1)^{s+1}l\begin{vmatrix}l&k&\cdots&0\\ 0&l&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ 0&0&\cdots&l\end{vmatrix}_{(s-1)\times(s-1)}$

$=k^s+(-1)^{s+1}l^s$

即 $k^s+(-1)^{s+1}l^s\neq 0$ 2分

五、（12分）已知 $\begin{pmatrix}1&3\\2&4\\1&1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1&2\\a&1\\0&b\end{pmatrix}$，求 a,b，使得 X 存在，并求矩阵 X。

$$\begin{pmatrix}1&3&1&2\\2&4&a&1\\1&1&0&b\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&3&1&2\\0&-2&a-2&-3\\0&0&1-a&b+1\end{pmatrix}$$ 2分

当 $a=1,b=-1$ 时，X 存在， 2分

$$\begin{pmatrix}1&3&1&2\\0&-2&a-2&-3\\0&0&1-a&b+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&1&2\\0&-2&-1&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&\frac12&-\frac52\\0&1&\frac12&\frac32\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$ 2分

$$X=\frac12\begin{pmatrix}1&-5\\1&3\end{pmatrix}$$ 4分

六、（16分）求一个正交变换 $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}$，将二次曲面方程：

$$x^2+3y^2+z^2+2xy+2xz+2yz=4$$

化为标准形方程，并问该二次曲面是什么类型的曲面？

$$f=x^2+3y^2+z^2+2xy+2xz+2yz=(x,y,z)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&3&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$ 1分

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&3&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&1&1\\1&3-\lambda&1\\1&1&1-\lambda\end{vmatrix}=0,$$ 3分

$\lambda_1=1,\lambda_2=4,\lambda_3=0$

$\lambda_1=1$ 对应特征向量为 $p_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ 2分

$\lambda_2=4$ 对应特征向量为 $p_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ 2分

$\lambda_3=0$ 对应特征向量为 $p_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ 2分

正交变换 $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt2}\\ -\frac{1}{\sqrt3}&\frac{2}{\sqrt6}&0\\ \frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt6}&-\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}$ 可使该二次曲面化为 4分

$u^2+4v^2=4$ 或 $\frac{u^2}{4}+v^2=1$

该二次曲面是椭圆柱面 2分

七、（10分）设 $\mathscr{A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2\\-x_1\end{pmatrix}$，$\mathscr{B}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\-x_2\end{pmatrix}$，

1. 证明：$\mathscr{A}$，$\mathscr{B}$ 是向量空间 $\boldsymbol{R}^2=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\middle| x_1,x_2\in \boldsymbol{R}\right\}$ 的两个线性变换；

2. 若线性变换的加法 $\mathscr{A}+\mathscr{B}$ 定义为 $(\mathscr{A}+\mathscr{B})\boldsymbol{a}=\mathscr{A}\boldsymbol{a}+\mathscr{B}\boldsymbol{a}$，乘法 $\mathscr{AB}$ 定义为 $(\mathscr{AB})\boldsymbol{a}=\mathscr{A}(\mathscr{B}\boldsymbol{a})$

$\boldsymbol{a}\in \boldsymbol{R}^2$，求 $\mathscr{A}+\mathscr{B}$，$\mathscr{AB}$ 在 $\boldsymbol{R}^2$ 标准基下的矩阵表达式；

$$\mathscr{A}\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right)=\mathscr{A}\begin{pmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2+y_2\\-x_1-y_1\end{pmatrix}\in \boldsymbol{R}^2$$

$$\mathscr{A}\left(k\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right)=\mathscr{A}\begin{pmatrix}kx_1\\kx_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}kx_2\\-kx_1\end{pmatrix}\in \boldsymbol{R}^2 \qquad 2分$$

所以 $\mathscr{A}$ 是向量空间 $\boldsymbol{R}^2$ 的线性变换

$$\mathscr{B}\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right)=\mathscr{B}\begin{pmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+y_1\\-x_2-y_2\end{pmatrix}\in \boldsymbol{R}^2$$

$$\mathscr{B}\left(k\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right)=\mathscr{B}\begin{pmatrix}kx_1\\kx_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}kx_1\\-kx_2\end{pmatrix}\in \boldsymbol{R}^2 \qquad 2分$$

所以 $\mathscr{B}$ 是向量空间 $\boldsymbol{R}^2$ 的线性变换

$$(\mathscr{A}+\mathscr{B})(e_1,e_2)=(e_1,e_2)\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix} \qquad 3分$$

$$(\mathscr{AB})(e_1,e_2)=(e_1,e_2)\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix} \qquad 3分$$

八、（12分）判别下列命题是否正确，正确的需要证明，错误的需要给出一个反例。

1. 若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$。

正确 2分

$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^2$， 2分

$\boldsymbol{BA}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^2$， 2分

所以 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$

2. $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，对任意 n 维列向量 $\boldsymbol{x}$，均有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$。

错误 2分

反例：$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ 或其它反对称阵 4分