同济大学 2009-2010 学年第二学期高等数学 B(下)期中试卷

一. 选择与填空题($6'\times 6=36'$)

1. xoy 平面上的曲线 $x^2-8x+y^2+5=0$，则

(1)绕 x 轴旋转所得曲面的方程为 $\underline{\quad x^2-8x+y^2+z^2+5=0\quad}$；

(2)绕 y 轴旋转所得曲面的方程为 $\underline{\quad x^2+z^2-8\sqrt{x^2+z^2}+y^2+5=0\quad}$.

2. 向量 $\vec{a}=(2,-2,1)$, $\vec{b}=(-3,4,0)$ 有相同的起点，则

(1) $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角 $\theta=$ $\underline{\quad \arccos\dfrac{-14}{15}\quad}$；

(2)与 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 都垂直的单位向量是 $\underline{\quad \pm\dfrac{1}{\sqrt{29}}(-4,-3,2)\quad}$.

3. 设函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微，$f_x(x_0,y_0)=A$, $f_y(x_0,y_0)=B$，则

(1) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+2h,y_0-h)-f(x_0,y_0)}{h}=\underline{\quad 2A-B\quad}$；

(2)若 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+2h,y_0-h)}{h}=3$，则 $f(x_0,y_0)=\underline{\quad 0\quad}$.

4. 曲线 $x=4t,\ y=t^2,\ z=\arctan\dfrac{t}{\sqrt{3}}$ 上,

(1)与平面 $\pi:3x-2y+1=0$ 平行的切线方程为 $\underline{\quad \dfrac{x-12}{4}=\dfrac{y-9}{6}=4\sqrt{3}(z-\dfrac{\pi}{3})\quad}$.

(2)与平面 $\pi:3x-2y+1=0$ 垂直的法平面方程为 $\underline{4(x-12)+6(y-9)+\dfrac{1}{4\sqrt{3}}(z-\dfrac{\pi}{3})=0}$

5. 设 D 是圆域 $x^2+y^2\le 1$，D' 是上半圆域 $x^2+y^2\le 2\ (y\ge 0)$，$I_1=\iint\limits_D e^{4-(x^2+y^2)^2}dxdy$；

$I_2=\iint\limits_D\dfrac{1}{1+(x^2+y^2)^2}dxdy$； $I_3=\iint\limits_{D'}e^{4-(x^2+y^2)^2}dxdy$； $I_4=\iint\limits_{D'}\dfrac{1}{1+(x^2+y^2)^2}dxdy$. 则

(1)四项积分中积分值大于 π 的是 $\underline{\quad I_1,\ I_3\quad}$；

(2)四项积分值从小到大排列次序为 $\underline{\quad I_4\le I_2\le I_3\le I_1\quad}$.

6. D 是由曲线 $y=\sqrt{3}x$，$y=\sqrt{8-x^2}$ 以及 x 轴所围第一象限部分的闭区域，$f(x)$ 是连续函数，则将 $\iint_D f(x^2+y^2)dxdy$ 化成

(1)先对 y 再对 x 的二次积分式为 $\underline{\int_0^{\sqrt{2}}dx\int_0^{\sqrt{3}x}f(x^2+y^2)dy+\int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}dx\int_0^{\sqrt{8-x^2}}f(x^2+y^2)dy}$

(1)极坐标形式下先对 ρ 再对 θ 的二次积分式为 $\underline{\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_0^{2\sqrt{2}}f(\rho^2)\rho d\rho}$

二. 解答题($9'\times 6=54'$)

7. 设 $A(1,0,1), B(4,1,2), C(2,-2,3)$ 是空间三角形的三个顶点，求该三角形的面积，以及该三点所在平面的方程. [$A=\frac{3}{2}\sqrt{10}$; $4x-5y-7z+3=0$]

8. 求空间圆 $\begin{cases}(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=34\\ 2x+y-2z-3=0\end{cases}$ 的面积. [$A=25\pi$]

9. 求函数 $f(x,y)=x^2\ln(2x-3y)$ 的全微分以及它的二阶偏导数 $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}$.

[$dz=[2x\ln(2x-3y)+\frac{2x^2}{2x-3y}]dx-\frac{3x^2}{2x-3y}dy$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{6(3y^2-x^2)}{(2x-3y)^2}$]

10. 求函数 $u=xy^2e^{2-z}$ 在点 $P_0(1,1,2)$ 处方向导数的最大值，并指出取得该最大方向导数的方向. [$gradf\Big|_{P_0}=(1,2,-1)\Rightarrow \max\frac{\partial f}{\partial l}=\sqrt{6};\vec{l}=(1,2,-1)$]

11. 求函数 $f(x,y,z)=x^3y^2z$ 的最大值，其中点 (x,y,z) 位于第一卦限的椭球面 $x^2+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{3}=1\,(x\ge 0,y\ge 0,z\ge 0)$ 上. [$f_{\max}(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{1}{6}$]

12. 计算二重积分 $\iint\limits_D 2yd\sigma$，D 是由直线 $5x+y=0, 2x+y=6$ 以及 x 轴所围成的有界闭区域. [$I=\int_0^{10}dy\int_{-\frac{y}{5}}^{\frac{6-y}{2}}2ydx=100$]

三. 解答题($10'$)

13. 计算二重积分 $\iint\limits_D |xy|d\sigma$，$D$ 是有界闭区域：$x^2+y^2\le 2x, |y|\le\sqrt{3}|x|$.

[$I=2\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho^3\cos\theta\sin\theta d\rho=\frac{21}{16}$]

同济大学 2010-2011 学年第二学期高等数学 B(下)期中试卷

一. 填空题($5'\times 5=25'$)

1. 已知向量 $\vec{a}=(2,-3,1),\ \vec{b}=(1,-2,3),\ \vec{c}=(2,1,2)$，则向量 $\vec{a}\times\vec{b}$ 在向量 $\vec{c}$ 上的投影

   $\mathrm{Prj}_{\vec{c}}(\vec{a}\times\vec{b})=$ ____-7____ .

2. 经过三点 $(3,1,0),\ (-1,-4,1)$ 以及 $(2,5,2)$ 的平面方程为 ____$2x-y+3z=5$____

3. 函数 $f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数，$f(1,1)=1,\ f_x(1,1)=2,\ f_y(1,1)=-3$，函数

   $\varphi(x,y)=f(f(x,y),f(x,y))$，则 $\left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{(1,1)}=$ ____-2____，$\left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_{(1,1)}=$ ____3____ .

4. 设 D 是由曲线 $y=x^2-3$ 与直线 $x+y+1=0$ 所围的有界闭区域，函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续，则将二重积分 $I=\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$ 化为先对 y 再对 x 的二次积分时，$I=$.

   ____$\int_{-2}^{1}dx\int_{x^2-3}^{-1-x}f(x,y)dy$____

5. 已知 $\vec{a},\vec{b}$ 是两个模都为 2 的向量，且它们的夹角为 $\dfrac{2\pi}{3}$，若 $\vec{c_1}=\vec{a}\times\vec{b},\ \vec{c_2}=(\vec{c_1}\times\vec{a})\times\vec{b}$，

   $,\cdots,\vec{c}_{n+1}=(\vec{c_n}\times\vec{a})\times\vec{b}\ \ (n=1,2,3,\cdots)$，则模 $|\vec{c}_n|=$ ____$2^n\sqrt{3}$____ .

二. $(9')$计算三重积分 $I=\iiint\limits_\Omega(z+1)dv$，其中 Ω 是由曲面 $x^2+2y^2-z^2=0$，xoy 平面以及平面 $z=2$ 所围成的有界闭区域.

$$[\int_0^2(z+1)dz\iint\limits_{x^2+2y^2\le z^2}dxdy=\frac{10\sqrt{2}}{3}\pi\ ]$$

三. $(10')$讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}2x\arctan\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\ne(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在原点 $(0,0)$ 的连续性，偏导数以及微分情况，若偏导数存在，则求出该点处的各偏导数，若可微，则写出该点处函数的全微分.

$$[\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0,\ z_x(0,0)=\pi,\ z_y(0,0)=0,\ dz=\pi dx\ ]$$

四. $(10')$设$z=z(x,y)$由方程$x^3y+\sin(y-z)=z$确定的函数, 求二阶偏导数$\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{P_0}$, 其中$P_0$为$y=z=1$所对应的点.

$$[z_x=\frac{3x^2y}{1+\cos(y-z)},z_y=\frac{x^3+\cos(y-z)}{1+\cos(y-z)}\Rightarrow\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{3}{2}]$$

五. $(10')$设函数$f(x,y,z)=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}$,其中$a>b>c>0$. 试在曲面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$上各点$(x,y,z)$处, 求$f(x,y,z)$沿向径$\vec{r}=(x,y,z)$方向的方向导数, 并求出它们的最大与最小值.

$$[\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{\max}=\frac{2}{c},\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{\min}=\frac{2}{a}]$$

六. $(10')$求积分$\iint\limits_D(x-y)^2dxdy$, D是有界闭域$|x|+|y|\le 1$.

$$[I=8\iint\limits_{D_1}x^2dxdy=8\int_0^1x^2dx\int_0^{1-x}dy=\frac{2}{3}]$$

七. $(10')$求二重积分$\iint\limits_D\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$, 其中$D$是由曲线$y=\sqrt{2x-x^2}$, 直线$y=x,x=2$所围成的位于$y\ge\sqrt{2x-x^2}$部分的有界闭区域.

$$[I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_{2\cos\theta}^{\frac{2}{\cos\theta}}d\rho=2\ln(1+\sqrt{2})-\sqrt{2}]$$

八. $(16')$一束激光(视为线束)由点$P(3,-5,2)$沿直线$\begin{cases}9x+2y=17\\ z=2\end{cases}$射向平面$x-y-3z+9=0$所在的镜面. (1)求反射光线所在的直线方程; (2)若一质点沿该光束的路径以常速度$v=1$运行, 试求该质点关于时间t的位置向量函数.

[(1)交点$(1,4,2)$, 对称点$(1,-3,8)$ $\Rightarrow\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y-4}{7}=\dfrac{z-2}{-6}$;

$$(2)\ \vec{r}(t)=\begin{cases}(3,-5,2)+\dfrac{t}{\sqrt{85}}(-2,9,0) & 0\le t\le\sqrt{85}\\ (1,4,2)+\dfrac{t-\sqrt{85}}{\sqrt{85}}(0,7,-6) & t>\sqrt{85}\end{cases}]$$

同济大学 2011-2012 学年第二学期高等数学 B(下)期中试卷

一. 选择与填空题($4'\times 6 = 24'$)

1. 以 $(1,-2,3),(2,0,5)$ 以及 $(-1,2,4)$ 为顶点的三角形面积为 $\underline{\dfrac{5\sqrt{5}}{2}}$.

2. 若曲面 Σ 的方程为 $z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$, 如果 Σ 关于平面 $z=-1$ 对称的曲面为 Σ_1, 则 Σ_1 的方程为 $\underline{-z-2=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}}$; 若再将 Σ_1 向着 x 轴正向平移 2 个单位得到曲面 Σ_2, 则 Σ_2 的方程为 $\underline{-z-2=\dfrac{(x-2)^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}}$.

3. $u=x^2y^3e^z$ 在 $(1,1,1)$ 点函数值增加最快且模长为1的方向为 $\underline{(\dfrac{2}{\sqrt{14}},\dfrac{3}{\sqrt{14}},\dfrac{1}{\sqrt{14}})}$; 该方向与 z 轴正向的夹角余弦为 $\underline{\dfrac{\sqrt{14}}{14}}$.

4. 若 D 是由抛物线 $y=x^2-2x-1$ 与直线 $y=x+3$ 所围成的有界闭区域, 则二重积分 $I=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ 分别化成先对 y 再对 x, 以及先对 x 再对 y 的二次积分式时, 积分

$I=\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\underline{\int_{-1}^{4}dx\int_{x^2-2x-1}^{x+3}fdy}$; 以及 $I=\underline{\int_{-2}^{2}dy\int_{1-\sqrt{y+2}}^{1+\sqrt{y+2}}fdx+\int_{2}^{7}dy\int_{y-3}^{1+\sqrt{y+2}}fdx}$.

5. 记条件 a 为函数 $z=f(x,y)$ 可微分; 条件 b 为函数 $z=f(x,y)$ 具有偏导数; 条件 c 为函数 $z=f(x,y)$ 连续; 条件 d 为函数 $z=f(x,y)$ 具有连续的偏导数. 则以下正确的关系为: [D]

$A: d\Leftrightarrow a, b\Rightarrow c$; $B: d\Rightarrow a, b\Rightarrow c$;

$C: a\Rightarrow d\Rightarrow b$ 以及 $a\Rightarrow b\Rightarrow c$; $D: d\Rightarrow a\Rightarrow b$ 以及 $d\Rightarrow a\Rightarrow c$.

6. 函数 $f(x)=\begin{cases}2, & 0\le x\le 2\\ 0, & x<0或x>2\end{cases}$, 若 D 是正方形的闭区域: $0\le x\le 2; 0\le y\le 2$, 则二重积分 $\iint\limits_D f(x+y)d\sigma$ 的计算值为: [C]

$A:1$; $B:2$; $C:4$; $D:8$.

二$(10')$.求曲线$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-3x=0 \\ 2x-2y+z-1=0 \end{cases}$在点$(1,1,1)$的切线与法平面方程，并求出坐标原点到该法平面的距离.

$$[\frac{x-1}{6}=\frac{y-1}{5}=\frac{z-1}{-2}; 6x+5y-2z=9; d=\frac{9}{\sqrt{65}}]$$

三$(10')$. $f(u,v)$具有二阶连续的偏导数. (1)如果函数$z=f(2x-3y,x-y^2)+x$在$(1,1)$点取得极值，试写出函数$f(u,v)$满足的必要条件; (2)求出函数$z(x,y)$的二阶偏导$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

$$[\begin{cases} 2f_1(-1,0)+f_2(-1,0)+1=0 \\ -3f_1(-1,0)-2f_2(-1,0)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_1(-1,0)=-2 \\ f_2(-1,0)=3 \end{cases}; \ z_{xy}=-6f_{11}-(4y+3)f_{12}-2yf_{22}]$$

四$(8')$.已知函数$u=u(x,y), v=v(x,y)$是由方程组$\begin{cases} x^2+y^2-uv=0 \\ xy^2-u^2+v^2=0 \end{cases}$确定的可导函数，试求偏导数$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x}$.

$$[\begin{cases} 2x=vu_x+uv_x \\ y^2=2uu_x-2vv_x \end{cases} \Rightarrow u_x=\frac{4xv+uy^2}{2(u^2+v^2)}, v_x=\frac{4xu-vy^2}{2(u^2+v^2)}]$$

五$(10')$. xoy平面上的一个动点从$(0,0)$点开始，始终沿着函数$f(x,y)=(x^2-2x+6)e^{x-2y}$的梯度方向运行，试求该动点的运行轨迹.

$$[gradf=(x^2+4)e^{x-2y}\vec{i}-2(x^2-2x+6)e^{x-2y}\vec{j}$$

$$\Rightarrow y'=\frac{-2(x^2-2x+6)}{x^2+4}, \ y(0)=0 \Rightarrow y=-2x+2\ln(x^2+4)-2\arctan\frac{x}{2}-2\ln 4]$$

六$(10')$.计算积分$\int_0^2 dx\int_{x^2}^4 xe^{y^2}dy$.

$$[I=\int_0^4 e^{y^2}dy\int_0^{\sqrt{y}} xdx=\frac{1}{4}(e^{16}-1)]$$

七$(10')$.计算二重积分$\iint\limits_D (x-y)^2 dxdy$，其中$D$是由$x^2+y^2\le 2y, x\ge 0$确定的闭区域.

$$[I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{2\sin\theta}(1-2\sin\theta\cos\theta)\rho^3 d\rho=\frac{3}{4}\pi-\frac{4}{3}]$$

八$(10')$.计算三重积分$\iiint\limits_\Omega z\sqrt{x^2+y^2}dv$，其中$\Omega$是由平面曲线$\begin{cases} z=x^2 \\ y=0 \end{cases}$绕$z$轴旋转所形成曲面与平面$z=1$所围成的立体.

$$[I=\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^1 \rho d\rho\int_{\rho^2}^1 z\rho dz=\frac{4}{21}\pi]$$

九$(8')$. $(x_1,y_1,z_1),\cdots,(x_n,y_n,z_n)$是空间$n$个点，证明：若平面$\pi$是使得该$n$个点到平面距离的平方和取得最小值的平面，则该平面必经过点$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，其中$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i, \bar{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i, \bar{z}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n z_i$.

同济大学 2012-2013 学年第二学期高等数学 B(下)期中试卷

一. 选择与填空题($4'\times 6=24'$)

1. 平行四边形 $ABCD$ 的对角向量 $\overline{AC}=(3,2,1)$, $\overline{BD}=(-1,1,2)$，则该平行四边形的面积为 $\underline{\dfrac{\sqrt{83}}{2}}$；对角线的夹角余弦为 $\underline{\dfrac{\sqrt{21}}{42}}$.

2. xoy 平面上的曲线 $y=e^x$ 绕 x 轴旋转一周所得曲面方程为 $\underline{\sqrt{y^2+z^2}=e^x}$；绕 y 轴旋转一周所得曲面方程为 $\underline{y=e^{\pm\sqrt{x^2+z^2}}}$.

3. 曲线 $x=2t^2,\ y=e^{t^2-1},\ z=\ln t$ 在 $t=1$ 所对应点的切线方程为 $\underline{\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{1}}$；在该点的法平面方程为 $\underline{4x+2y+z=10}$.

4. D 是由曲线 $y=\dfrac{1}{x}$，直线 $y=4x$，以及 $x=1$ 所围的有界闭区域，则二重积分 $I=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ 先对 y 再对 x 的二次积分式为 $I=\underline{\int_{\frac{1}{2}}^{1}dx\int_{\frac{1}{x}}^{4x}f(x,y)dy}$；先对 x 再对 y 的二次积分式为 $I=\underline{\int_1^2 dy\int_{\frac{1}{y}}^{1}f(x,y)dx+\int_2^4 dy\int_{\frac{y}{4}}^{1}f(x,y)dx}$.

5. 函数 $u=f(x,y,z)$ 在 (x_0,y_0,z_0) 点沿任意方向的方向导数存在是该函数在该点可微分的什么条件? [B]
A: 充分条件; B: 必要条件; C: 充分必要条件; D: 无关条件.

6., $I=\iint\limits_D (y-x+1)dxdy$，则当 D 是下面哪一个闭区域时，积分值最大. [D]

$A:(x-1)^2+(y-1)^2\le 1$; $B:(x-1)^2+(y+1)^2\le 1$;

$C:(x+1)^2+(y+1)^2\le 1$; $D:(x+1)^2+(y-1)^2\le 1$.

二. ($8'$) 求函数 $z=x^2-2xy+y^3$ 在平面上的极值，并说明能否取得最大和最小值.

[驻点 $(0,0)$ 非极值点; 驻点 $(\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3})$ 取得极小值 $-\dfrac{4}{27}$; 无最大和最小值]

三. ($10'$) 求曲面 $\ln(\dfrac{1+x^2}{2})+y^{2z}=4$ 在 $(1,2,1)$ 点的切平面以及法线方程，并分别计算点 $(1,-1,1)$ 到所求得的切平面与法线的距离.

$$[\bar{n}=(1,4,8\ln 2)\Rightarrow x+4y+8\ln 2z=9+8\ln 2,\ \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-1}{8\ln 2}$$

$$\Rightarrow d_1=\frac{12}{\sqrt{17+64\ln^2 2}},\ d_2=\frac{\left|\vec{n}\times(0,3,0)\right|}{\left|\vec{n}\right|}=\frac{\sqrt{9+(24\ln 2)^2}}{\sqrt{17+64\ln^2 2}}\ ]$$

四. (10') 函数 $z=(x^2+y^2)\arctan\dfrac{y}{x}$, (1)试求函数在 $(1,1)$ 点的全微分 dz;

(2)在任意 $x\neq 0$ 的点, 试求函数的二阶偏导数 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 以及 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

$$[(1)dz(1,1)=(\frac{\pi}{2}-1)dx+(\frac{\pi}{2}+1)dy;(2)\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2\arctan\frac{y}{x}+\frac{2xy}{x^2+y^2}\ ]$$

五. (10') 变量 x,y,u,v 满足方程组 $\begin{cases} x+y^2=u^3+v^2 \\ 3x^2-2y^3=2u-v^3 \end{cases}$, 在 $P_0(x,y,u,v)=(1,1,1,1)$ 点时,

(1)当方程组确定了函数组 $u=u(x,y),v=v(x,y)$ 时, 计算该点的偏导数 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{P_0}$;

(2)当方程组确定了函数组 $u=u(x,v),\ y=y(x,v)$ 时, 计算该点的偏导数 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{P_0}$.

$$[(1)\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{P_0}=\frac{15}{13};(2)\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{P_0}=\frac{9}{11}]$$

六. (8') 计算积分 $\int_0^1 dx\int_{2x}^2 y^2e^{y^2}dy$. $[I=\int_0^2 y^2e^{y^2}dy\int_0^{\frac{y}{2}}dx=\frac{3}{4}e^4+\frac{1}{4}]$

七. (10') 计算二重积分 $\iint\limits_{x^2+y^2\leq 2y}[(x-1)^2+y^2]dxdy$. $[I=\pi+\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2\sin\theta}\rho^3 d\rho=\frac{5\pi}{2}]$

八. (10') 计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}(x+1)dv$, 其中 Ω 是由平面 $x+2y+3z=6$, 以及三个坐标平面所围成的立体. $[I=\int_0^6(x+1)S(x)dx=\int_0^6(x+1)\frac{(6-x)^2}{12}dx=15]$

九. (10') $(x_1,y_1,z_1),\cdots,(x_n,y_n,z_n)$ 是空间 n 个点, 试在平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 上求出一点, 使得该点到已给 n 个点距离的平方和最小.

$$[L=\sum_{i=1}^{n}[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2]+\lambda(Ax+By+Cz+D),\ L_x=L_y=L_z=0\Rightarrow$$

$$x=\bar{x}-\frac{A(A\bar{x}+B\bar{y}+C\bar{z}+D)}{A^2+B^2+C^2},y=\bar{y}-\frac{B(A\bar{x}+B\bar{y}+C\bar{z}+D)}{A^2+B^2+C^2},z=\bar{z}-\frac{C(A\bar{x}+B\bar{y}+C\bar{z}+D)}{A^2+B^2+C^2}]$$

同济大学 2013-2014 学年第二学期高等数学 B(下)期中试卷

一. 选择与填空题($3'\times 10=30'$)

1. 三向量 $\vec{a}=(1,2,-3),\vec{b}=(2,-1,1),\vec{c}=(k,1,2k)$ 共面, 则常数 $k=$ $\underline{\quad -\dfrac{7}{11} \quad}$

2. 过三点 $(1,0,-1),(2,1,1),(-2,2,3)$ 的平面方程为 $\underline{\quad 2y-z-1=0 \quad}$

3. 函数 $z=x^3(y^{y\arcsin x}+1)$, 则偏导数 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(1,1)}=$ $\underline{\quad 12 \quad}$

4. 可微函数 $f(x,y)$ 在 $(2,0)$ 点的全微分为 $df(2,0)=2dx+3dy$,

   则极限 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2-h,3h)-f(2,0)}{h}=$ $\underline{\quad 7 \quad}$

5. D 是闭区域 $|x+y|\le 2,|x-y|\le 2$, 则积分 $\iint\limits_D (xe^{y^2}+y+2)dxdy=$ $\underline{\quad 16 \quad}$

6. xoy 平面上的曲线 $y=x^2+1$ 绕直线 $y=-1$ 旋转所得旋转曲面的方程为 [B]

   (A) $\sqrt{y^2+z^2}=x^2+1$;　　(B) $(y+1)^2+z^2=(x^2+2)^2$;

   (C) $y=x^2+z^2+1$;　　(D) $y=x^2+z^2+2$.

7. 函数 $f(x,y)$ 在某点沿任意方向的方向导数存在, 是该函数在该点可微的什么条件 [B]

   (A) 充分条件;　(B) 必要条件;　(C) 充分必要条件;　(D) 无关条件.

8. D 是圆形闭区域 $x^2+y^2\le 1$, 已知积分 $I_1=\iint\limits_D (x+y)dxdy,\ I_2=\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy,$

   $I_3=\iint\limits_D \ln\dfrac{1}{1+x^2+y^2}dxdy, I_4=\iint\limits_D (x^4+y^4)dxdy$, 则该四项积分的大小关系为 [A]

   (A) $I_2\ge I_4\ge I_1\ge I_3$; (B) $I_1\ge I_2\ge I_3\ge I_4$; (C) $I_4\ge I_2\ge I_3\ge I_1$; (D) $I_4\ge I_3\ge I_2\ge I_1$.

9. D 是由直线 $y=x, y=-x$ 以及 $y=1$ 所围成的三角形区域. 则将 $I=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ 化为极坐标形式的二次积分时, 下面正确的二次积分式是 [D]

   (A) $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$;　(B) $I=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{1}{\sin\theta}}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$;

   (C) $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}d\theta\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{\sin\theta}}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$;　(D) $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}d\theta\int_0^{\frac{1}{\sin\theta}}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$.

10. 如果交换 $I=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{2x} f(x,y)dy$ 的积分次序，则有 [B]

$(A)\ I=\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{\frac{y}{2}} f(x,y)dx$；　　$(B)\ I=\int_0^1 dy\int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_{\frac{y}{2}}^{1} f(x,y)dx$；

$(C)\ I=\int_0^2 dy\int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$；　　$(D)\ I=\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_0^{\frac{y}{2}} f(x,y)dx$.

二.$(10')$空间曲线 $L:\begin{cases} x^2+yz^3=2 \\ xe^{y^2-1}-z^2=0 \end{cases}$，(1)试求该曲线在 $(1,1,1)$ 点的切线与法平面方程，

(2)试求坐标原点到上述法平面的距离，以及该法平面与 x 轴的夹角. 【$\vec{n}=(-8,7,3)$】

三.$(10')$求 $f(x,y)=ye^{-(x^2+\frac{1}{2}y^2)}$ 的极值，并说明所求得的极值是极大还是极小值.

【极小值 $f(0,-1)=-e^{-\frac{1}{2}}$；极大值 $f(0,1)=e^{-\frac{1}{2}}$】

四.$(10')$试求由方程 $y+z^3-xz+e^{y-1}=2$ 所确定的函数 $z=z(x,y)$ 在 $(1,1,1)$ 点的全微分以

及二阶偏导数 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1,1)}$. 【$dz=\frac{1}{2}dx-dy;\ \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1,1)}=1$】

五.$(10')$计算二重积分 $\iint_D 2xdxdy$，其中 D 是由曲线 $y=2x^2-2x+1$ 以及 $y=x^2-x+3$ 所

围成的有界闭区域. 【$\int_{-1}^2 dx\int_{2x^2-2x+1}^{x^2-x+3} 2xdy=\frac{9}{2}$】

六.$(10')$计算积分 $\int_0^1 dx\int_x^{1+\sqrt{1-x^2}} x(x^2+y^2)dy$. 【$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{2\sin\theta}\cos\theta\cdot\rho^4 d\rho=\frac{14}{15}$】

七.$(10')$试分析：当球面半径 r 为何值时，(1)球面 $(x+2)^2+(y-3)^2+(z-5)^2=r^2$ 与球面

$(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=2$ 相交，相切或者无交点，(2)当两球面相切时，求出共切点处两

球面的切平面方程。 【$d=5\sqrt{2};\ 3x-4y-5z+3=0, 3x-4y-5z-17=0$】

八.$(10')$函数 $f(x,y,z)$ 具有连续的偏导数，$\vec{l}_1,\vec{l}_2,\vec{l}_3$ 是三个不共面的单位向量，如果已知在

(x_0,y_0,z_0) 点的方向导数 $\frac{\partial f}{\partial l_1}=k_1, \frac{\partial f}{\partial l_2}=k_2, \frac{\partial f}{\partial l_3}=k_3$. (1)试求函数 $f(x,y,z)$ 在该点沿方

向 $\vec{l}=\lambda_1\vec{l}_1+\lambda_2\vec{l}_2+\lambda_3\vec{l}_3$ 的方向导数；(2)如果 $\vec{l}_1,\vec{l}_2,\vec{l}_3$ 是三个两两正交的单位向量，求出函

数在该点方向导数的最大与最小值，并说明沿什么方向取得. 【$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{1}{|\vec{l}|}\vec{\lambda}\cdot\vec{k}$；$\pm|\vec{k}|$】

同济大学 2014-2015 学年第二学期高等数学 B(下)期中试卷

一. 填空选择题($4'\times 8=32'$)

1. 到定点 $(1,0,0)$ 与到平面 $x=-1$ 距离相等的点的轨迹方程为 $\underline{\quad 4x=y^2+z^2 \quad}$.

2. 过点 $(2,-1,1)$，并且与两平面 $\pi_1: x+2y-z+3=0; \pi_2: 2x-3z=0$ 都平行的直线的对称式方程为 $\underline{\quad \dfrac{x-2}{6}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{4} \quad}$.

3. $f(x,y)=(x^2+1)^{4\arctan y}$ 在 $(1,1)$ 点的全微分 $df(x,y)\big|_{(1,1)}=\underline{\quad 2^{\pi}\pi dx+2^{\pi+1}\ln 2dy \quad}$.

4. 交换积分次序，则积分 $\int_0^2 dx\int_{x^2}^{x+2} f(x,y)dy=\underline{\int_0^2 dy\int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx+\int_2^4 dy\int_{y-2}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx}$.

5. D 是由 $y=x,\ \ y=\sqrt{3}x$ 以及 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 为三条边所围成的闭区域. 则积分 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ 化为极坐标下的二次积分式，$I=\underline{\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta\int_0^{2\cos\theta} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho}$.

6. 函数 $f(x,y)$ 在某点连续是该函数在该点有偏导数的什么条件 [D]

(A) 充分条件; (B) 必要条件; (C) 充分必要条件; (D) 无关条件.

7. 已知 $f(x,y)$ 具有连续的偏导数，$f_y'(0,0)=-f_x'(0,0)>0$，则当 h 是充分小的正数时，四个数 $f(h,h), f(h,-h), f(-h,-h), f(-h,h)$ 的大小关系中确定正确的是 [C]

(A) $f(h,h)>f(-h,-h)$; (B) $f(-h,-h)>f(h,h)$;

(C) $f(-h,h)>f(h,-h)$; (D) $f(h,-h)>f(-h,h)$.

8. 积分 $I_k=\iint\limits_{D_k}(x-y)^3dxdy, k=1,2,3,4$，其中积分区域 $D_1:(x-1)^2+(y-1)^2\le 1$；
$D_2:(x+1)^2+(y-1)^2\le 1$；$D_3:(x+1)^2+(y+1)^2\le 1$；$D_4:(x-1)^2+(y+1)^2\le 1$.
则下列积分值大小关系中正确的是 [D]

(A) $I_1>0, I_2>0$; (B) $I_2>0, I_4<0$; (C) $I_2>0, I_3=0$; (D) $I_4>0, I_2<0$.

二.(8')变量 x,y,u,v 满足方程组 $\begin{cases} x+y^2=u^3+v^2 \\ 3x^2-2y^3=2u-v^3 \end{cases}$，在 $P_0(x,y,u,v)=(1,1,1,1)$ 点的小邻域内，方程组确定了函数：$u=u(x,v),\ y=y(x,v)$．计算偏导数 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{P_0}$，$\left.\dfrac{\partial y}{\partial x}\right|_{P_0}$

$[\ u_x|_{P_0}=\dfrac{9}{11},\ y_x|_{P_0}=\dfrac{8}{11}\ ]$

三.(10')求向量 $\vec{b}=(1,1,z)$，使得向量 $\vec{b}$ 与向量 $\vec{a}=(1,2,-3)$ 的夹角最小，并求出该夹角的最小值．

$[\ f(z)=\cos\theta=\dfrac{3-3z}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{2+z^2}},\ f_{\max}(-2)=\dfrac{3\sqrt{21}}{14},\ \theta_{\min}=\arccos\dfrac{3\sqrt{21}}{14}\ ]$

四.(10')对于平面 $\pi: x+y-4z=D$，球面 $\Sigma: x^2+y^2+z^2-2x+4z-4=0$．

(1)当常数 D 为何值时，平面 π 与球面 Σ 相交； $[\ |D-9|<9\sqrt{2}\ ]$

(2)当 D 为何值时平面截球面所得圆的半径是球面半径的 $\dfrac{1}{3}$． $[\ D=21,\ -3\ ]$

五.(10')求曲线 $\begin{cases} e^{z^2}+xy=2 \\ z=x^2-y^2 \end{cases}$ 在 $(1,1,0)$ 点的切线与法平面的方程，并求该法平面与 xoy 平面的夹角．

$[\ \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{4};\ x-y+4z=0;\ \theta=\arccos\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\ ]$

六.(10')方程 $x^2-3y+ze^{z-1}+1=0$ 在 $(1,1,1)$ 点的小邻域内确定了函数 $z=f(x,y)$．

(1)试求该函数在 $(1,1)$ 点处沿 $\vec{l}=(-3,4)$ 方向的方向导数； $[\ \nabla f=(-1,\dfrac{3}{2}),\ \dfrac{\partial f}{\partial l}=\dfrac{9}{5}\ ]$

(2)求函数 $z=f(x,y)$ 在 $(1,1)$ 点处方向导数的最大值,并指出取得该最大值的方向.$[\ \dfrac{\sqrt{13}}{2}\ ]$

七.(10')求曲面 $z=2x^2+y^2+1$ 与 $z=3x^2+2y^2-3$ 所围立体的体积

$[\ V=\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}(4-x^2-y^2)dxdy=8\pi\ ]$

八.(10')函数 $f(x,y)$ 具有二阶连续的偏导数，如果 $f(0,y)=f(x,0)=0$，并且 $\left|f''_{xy}(x,y)\right|\le A$．证明 $\left|\displaystyle\iint\limits_D f(x,y)dxdy\right|\le A$，其中 D 是矩形域：$0\le x\le 1;\ 0\le y\le 2$

$[\ f_x(x,0)=0,\ f(x,y)=f_x(\xi,y)x=f_{xy}(\xi,\eta)xy,\ \left|\displaystyle\iint\limits_D f(x,y)dxdy\right|\le A\iint\limits_D xydxdy=A\ ]$

同济大学 2015-2016 学年第二学期高等数学 B(下)期中试卷

一. 选择与填空题($3'\times 10 = 30'$)

1. 空间直线$\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周所得的曲面的方程为 $\underline{\quad x^2+y^2=5 \quad}$

2. 原点关于平面 Π 的对称点是 $(2,1,1)$，则平面 Π 的方程是 $\underline{\quad 2x+y+z=3 \quad}$

3. 函数 $f(x,y)$ 满足 $f_x(x,y)=x^2y+x,\ f_y(x,y)=\dfrac{x^3}{3}+y$，并且 $f(0,0)=0$，则

$f(x,y)=\underline{\quad \dfrac{1}{3}x^3y+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}y^2 \quad}$

4. 函数 $f(x,y)$ 有连续偏导数，并且 $f(x,x^3+x)=1,\ f_x(x,x^3+x)=x$，则

$f_y(x,x^3+x)=\underline{\quad -\dfrac{x}{3x^2+1} \quad}$

5. 函数 $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$ 在点 $(1,2,-2)$ 处的梯度为 $\underline{\quad \dfrac{2}{9}(1,2,-2) \quad}$

6. 设 $D=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\le 1\right\}$，$\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy=\dfrac{\pi}{2}$，则由曲面 $z=3x^2+y^2$ 和

$z=4-x^2-3y^2$ 所围立体的体积是 $\underline{\quad 2\pi \quad}$

7. 已知 $\vec{a},\vec{b}$ 均为非零向量，并且 $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$，则下列正确的是　　[C]

$(A)\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$；　$(B)\vec{a}-\vec{b}=\vec{0}$；　$(C)\vec{a}\cdot\vec{b}=0$；　$(D)\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$.

8. 极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{x^2+y^2}=$　　[D]

(A) 0；　(B) $\dfrac{1}{2}$；　(C) $\dfrac{1}{4}$；　(D) 不存在.

9. 函数 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{x+y}, & x+y\ne 0 \\ 0 & x+y=0 \end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处　　[B]

(A) 连续且偏导数存在;　(B) 不连续但偏导数存在;

(C) 连续但偏导数不存在;　(D) 不连续且偏导数不存在.

10. 极坐标下的二次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos\theta} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho$ 可以写成 [D]

$(A)\ \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y-y^2}} f(x,y)dx$; $(B)\ \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$;

$(C)\ \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$; $(D)\ \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x-x^2}} f(x,y)dy$.

二.$(10')$设函数 f 有连续导数，并且 $f'(0)=1$. $u=f(x+y+z)$，其中 $y=y(x)$ 由方程

$e^{xy}-y=0$ 确定，$z=z(x)$ 由方程 $\sin(xz)+z+1=0$ 确定. 求 $\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=0}$ 【3】

三.$(10')$设 $f(x,y)=\int_0^{xy} e^{-t^2}dt$，求 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

【$-2xy^3e^{-x^2y^2}; -2x^3ye^{-x^2y^2}; (1-2x^2y^2)e^{-x^2y^2}$】

四.$(10')$求空间曲线 $\begin{cases} x^2+2y^2+z^2=4 \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$ 在点 $(1,1,1)$ 处的切线方程.

【$\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{-1}$ 或 $\begin{cases} x+2y+z=4 \\ x+y-2=0 \end{cases}$】

五.$(10')$已知平面上两点 $A(4,0), B(0,3)$，在椭圆 $3x^2+4y^2=1$ 上求一点 C，使得 ΔABC

的面积 S 最大.. 【$C(-\frac{1}{\sqrt{7}}, -\frac{1}{\sqrt{7}}), S_{\max}=\frac{1}{2}(\sqrt{7}+12)$】

六.$(10')$设 $D=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\le 1, x\ge 0\right\}$，求 $I=\iint\limits_D \frac{1+xy}{x^2+y^2}dxdy$. 【$\frac{\pi}{2}\ln 2$】

七.$(10')$求 $I=\iint\limits_D |\sin(x-y)|dxdy$，其中 D 是由直线 $x+y=\frac{\pi}{2}$ 和两坐标轴所围的闭区域.

【$\frac{\pi}{2}-1$】

八.$(10')$设 $f(x)$ 是区域 $[a,b]$ 上的连续函数，并且 $f(x)>0$，

$D=\left\{(x,y)\middle| a\le x\le b, a\le y\le b\right\}$，证明: $\iint\limits_D e^{\frac{f(x)}{f(y)}}dxdy \ge e(b-a)^2$

【$\iint\limits_D e^{\frac{f(x)}{f(y)}}dxdy=\frac{1}{2}\iint\limits_D (e^{\frac{f(x)}{f(y)}}+e^{\frac{f(y)}{f(x)}})dxdy \ge e(b-a)^2$】

同济大学 2016-2017 学年第二学期高等数学 B(下)期中试卷

一. 填空选择题($3'\times 10=30'$)

1. 已知$\left|\vec{a}\right|=4,\left|\vec{b}\right|=3,(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\pi}{6}$, 以$\vec{a}+2\vec{b}$和$\vec{a}-3\vec{b}$为边的平行四边形的面积为 <u>30</u> .

2. 曲面$3x^2+y^2+z^2=16$上点$(-1,-2,3)$处的切平面与xOy面夹角的余弦为 <u>$\dfrac{3}{\sqrt{22}}$</u> .

3. 设$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处可微, $f_x(x_0,y_0)=A, f_y(x_0,y_0)=B$, 则

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+3h,y_0-2h)-f(x_0,y_0)}{h}=\underline{\quad 3A-2B \quad}.$$

4. 设函数$z=f(x,y)$在点$(1,1)$处可微, 且$f(1,1)=1, f_x(1,1)=2, f_y(1,1)=3$,

$\varphi(x,y)=f\left(x,f(x,x)\right)$, 则$\dfrac{d}{dx}\left(\varphi^3(x)\right)\Big|_{x=1}=$ <u>51</u> .

5. 已知二次积分$I=\int_{-2}^{1}dy\int_{y^2}^{4}f(x,y)dx$, 则交换积分次序后,

$$I=\underline{\int_0^1 dx\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}f(x,y)dy+\int_1^4 dx\int_{-\sqrt{x}}^{1}f(x,y)dy}.$$

6. 用二重积分写出由曲面$x^2+y^2=4, z=0, x+z=2$所围成的立体体积的计算公式:

$$\underline{\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}(2-x)dxdy}.$$

7. 函数$f(x,y)=1-x^2-y^2$在等值线(或等高线)$f(x,y)=-1$上的点$(1,1)$处, 沿此等值线(或等高线)在该点的切线方向$\vec{\tau}$的方向导数$\dfrac{\partial f}{\partial \tau}\Big|_{(1,1)}=$ [A]

(A) 0; (B) $2\sqrt{2}$; (C) $-2\sqrt{2}$; (D) $\pm 2\sqrt{2}$.

8. 二元函数$z=f(x,y)=\begin{cases}1, & xy=0\\ 0, & xy\ne 0\end{cases}$在点$(0,0)$处 [C]

(A) 连续且偏导数存在; (B) 连续但偏导数不存在;

(C) 不连续但偏导数存在; (D) 不连续且偏导数不存在.

9. 函数$f(x,y)=2x^2-xy+3y^2+5$在点$(0,0)$处 [B]

(A) 取得极大值; (B) 取得极小值; (C) 不取得极值; (D) 不能判定是否取得极值.

10. 设$D: x^2+y^2\le a^2 (a>0)$，则$\iint\limits_D [x(x^4+y^4)+\sqrt{x^2+y^2}]dxdy=$ [B]

$(A)\ \frac{1}{3}\pi a^3$； $(B)\ \frac{2}{3}\pi a^3$； $(C)\ \frac{1}{3}\pi a^3$； $(D)\ 0$.

二. $(10')$设平面Π与平面$5x-y+3z-2=0$垂直，且它们的交线在xoy平面上，求平面Π的方程. [$15x-3y-26z-6=0$]

三. $(10')$求过点$P(-1,0,4)$，且平行于平面$3x-4y+z=10$，又与直线$\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}$相交的直线方程. [$\frac{x+1}{16}=\frac{y}{19}=\frac{z-4}{28}$或$\begin{cases}10x-4y-3z+22=0\\ 3x-4y+z-1=0\end{cases}$]

四. $(10')$方程组$\begin{cases}\ln y-xz+1=0\\ yz-1=0\end{cases}$在$(1,1,1)$的某个邻域内确定两个具有连续导数的隐函数$y=y(x)$和$z=z(x)$，证明：存在$x=1$的一个邻域，使得曲线$y=y(x)$在此邻域内为凸弧. [$y''=-\frac{yz^2}{(1+xz)^3}=-\frac{1}{8}$]

五. $(10')$设$z=\frac{1}{f(x,xy)}$，其中f具有二阶连续导数，求$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

[$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{f_1'+yf_2'}{f^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2(f_1'+yf_2')^2}{f^3}-\frac{f_{11}''+2yf_{12}''+y^2f_{22}''}{f^2}$]

六. $(10')$计算$I=\iint\limits_D |\sin(x-y)|dxdy$，其中$D$：$0\le x\le y\le 2\pi$. [$4\pi$]

七. $(12')$如果空间一光滑曲线$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\ G(x,y,z)=0\end{cases}$是闭合的，且与$xOy$面不交，

(1)证明：该曲线上距离xoy面最远与最近的点处的切向量必平行于xoy面；

(2)求曲线$\begin{cases}2x^2+2y^2=z^2\\ x+y+2z=6\end{cases}$上距离$xoy$面最远与最近的点. [$(1,1,2),(-3,-3,6)$]

八. $(8')$已知可微函数$f(x,y,z)$满足$f_x(0,0,0)=f_y(0,0,0)=f_z(0,0,0)=1$，记点$(x,y,z)$的向径$\vec{l}=(x,y,z)$，$f(x,y,z)$在点$(0,0,0)$处沿向径方向的方向导数记为$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(0,0,0)}$，试求出满足条件$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(0,0,0)}\ge 1,\ x+y+z\le 1$的立体的体积. [$\frac{2\sqrt{3}}{27}\pi$]

同济大学 2017-2018 学年第二学期高等数学 B(下)期中试卷

一. 填空选择题($3'\times 10 = 30'$)

1. 点 $(2,3,-1)$ 到直线 $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{-3}=\dfrac{z-1}{3}$ 的距离为 $\underline{\qquad \sqrt{\dfrac{58}{11}} \qquad}$.

2. 设直线 $L_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{\lambda}, L_2: x+1=y-1=z$ 相交于一点，则 $\lambda=$ $\underline{\quad \dfrac{5}{4} \quad}$.

3. 设 $z=(x+e^{xy\sin(x+y)})^{x^2+y}$，则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,0)}=$ $\underline{\qquad 108(3\ln 3+1) \qquad}$.

4. 函数 $z=xy^2$ 在点 $(2,3)$ 处的梯度为 $\underline{\qquad (9,12) \qquad}$.

5. 设 $D=\left\{(x,y)\middle|(x-2)^2+y^2\le 1\right\}$，则 $\iint\limits_D (x+y^3\cos y)d\sigma=$ $\underline{\qquad 2\pi \qquad}$.

6. 已知二次积分 $I=\int_0^1 dx\int_x^{3-x} f(x,y)dy$，则交换积分次序后，

$$I=\underline{\quad \int_0^1 dy\int_0^y f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_0^1 f(x,y)dx+\int_2^3 dy\int_0^{3-y} f(x,y)dx \quad}.$$

7. 曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ x+y+2z=1 \end{cases}$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的切线方程为 $\underline{\quad \dfrac{x-1}{-5}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-1}{3} \quad}$.

8. 设 $\vec{c}=\vec{b}\times\vec{a}-\vec{b}$，则下列正确的是 [A]

(A) $\vec{a}\perp(\vec{b}+\vec{c})$；　(B) $\vec{a}\parallel(\vec{b}+\vec{c})$；　(C) $\vec{b}\perp\vec{c}$；　(D) $\vec{b}\parallel\vec{c}$.

9. 二元函数 $z=f(x,y)$ 在一点可微是该函数在此点可偏导的 [B]

(A) 充要条件;　(B) 充分条件;　(C) 必要条件;　(D) 无关条件.

10. 设 $z=z(x,y)$ 由方程 $z+x=yf(x^2-z^2)$ 确定，其中 f 有连续导数，则 $z\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$

[B]

(A) y；　(B) x；　(C) $yf(x^2-z^2)$；　(D) z .

二. $(10')$设$z=f(xy^2,\dfrac{x}{y})$，其中f具有二阶连续偏导数，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

[$z_x=y^2f_1'+\dfrac{1}{y}f_2', z_{xy}=2yf_1'-\dfrac{1}{y^2}f_2'+2xy^3f_{11}''+xf_{12}''-\dfrac{x}{y^3}f_{22}''$]

三. $(8')$设直线L过点$A(1,0,0), B(0,1,1)$，求直线L绕z轴旋转所得到的曲面方程.

[直线$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{-1}$，曲面方程$x^2+y^2-2z^2+2z=1$]

四. $(10')$在过点$(3,4,5)$的所有平面中，哪一个平面与三个坐标面在第一卦限内围成的立体体积最小.

[$\dfrac{x}{9}+\dfrac{y}{12}+\dfrac{z}{15}=1$或$20x+15y+12z=180$]

五. $(10')$设$D=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le 2, 0\le y\le 2\right\}$，求$\iint\limits_D |xy-1|d\sigma$.

[$\dfrac{3}{2}+2\ln 2$]

六. $(10')$设Ω是由$x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$所围成的闭区域，求$\iiint\limits_\Omega xdv$.

[$\dfrac{1}{24}$]

七. $(12')$设曲面$\Sigma:\dfrac{x^2}{2}+y^2+\dfrac{z^2}{4}=1$，平面$\Pi:2x+2y+z+5=0$.

(1)求曲面Σ平行于平面Π的切平面方程;

[$x+y+\dfrac{1}{2}z\pm 2=0$]

(2)求曲面Σ上的点到平面Π的最短距离.

[$\dfrac{1}{3}$]

八. $(10')$设$D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 1\right\}$，证明: $\dfrac{61}{165}\pi\le\iint\limits_D \sin\sqrt{(x^2+y^2)^3}d\sigma\le\dfrac{2}{5}\pi$.

[$I=2\pi\int_0^1\rho\sin\rho^3 d\rho,\quad \rho^3-\dfrac{1}{6}\rho^9\le\sin\rho^3\le\rho^3$]

同济大学2018-2019学年第二学期高等数学B(下)期中试卷

一. 填空选择题($4'\times 8=32'$)

1. 设 $A(1,1,1), B(2,3,4), C(3,4,2)$，三角形 ABC 的面积为 $\underline{\quad \frac{5\sqrt{3}}{2} \quad}$；

$\angle BAC=\underline{\quad \arccos\frac{11}{14} \quad}$.

2. yoz 面内曲线 $z=e^{y}$，绕 y 轴旋转所得旋转曲面方程为 $\underline{\quad \sqrt{x^2+z^2}=e^{y} \quad}$；

绕 z 轴旋转所得旋转曲面方程为 $\underline{\quad z=e^{\pm\sqrt{x^2+y^2}} \quad}$.

3. 已知函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(1,2)$ 处的全微分 $dz=2dx+3dy$，则极限

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+2h,2-3h)-f(1,2)}{h}=\underline{\quad -5 \quad}$.

4. 曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=14 \\ x+y+z=6 \end{cases}$ 在点 $(1,2,3)$ 处的法平面方程为 $\underline{\quad x-2y+z=0 \quad}$.

5. 函数 $u=\ln(1-x+2y+3z)$ 在点 $(1,1,1)$ 处方向导数的最大值为 $\underline{\quad \frac{\sqrt{14}}{5} \quad}$；

取得此最大值的方向的单位向量为 $\underline{\quad \frac{1}{\sqrt{14}}(-1,2,3) \quad}$

6. 交换 $I=\int_0^2 dy\int_{\sqrt{2y}}^{\sqrt{8-y^2}} f(x,y)dx$ 的积分次序，则

$I=\underline{\quad \int_0^2 dx\int_0^{\frac{x^2}{2}} f(x,y)dy+\int_2^{2\sqrt{2}} dx\int_0^{\sqrt{8-x^2}} f(x,y)dy \quad}$.

7. 设 $D=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\le 1\right\}$，积分 $I_1=\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$，$I_2=\iint\limits_D (x^3+y^3)dxdy$，

$I_3=\iint\limits_D (x^4+y^4)dxdy$，$I_4=\iint\limits_D \ln\dfrac{1}{2+x^2+y^2}dxdy$，将此四个积分按从小到大的顺序

排列为 $\underline{\quad I_4\le I_2\le I_3\le I_1 \quad}$.

8. 对于二元函数 $z=f(x,y)$，其在某点处可偏导是其在该点处连续的 $\underline{\quad D \quad}$；

其在某点处沿任何方向的方向导数存在是其在该点处可微的 $\underline{\quad B \quad}$.

(A) 充分不必要; (B) 必要不充分; (C) 充要; (D) 无关.

二. $(12')$已知两直线 $L_1:\dfrac{x-9}{4}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z}{1}$ 和 $L_2:\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y+7}{9}=\dfrac{z-2}{2}$. (1)证明这两条直线异面; (2)求这两异面直线之间的距离; (3)求这两异面直线的公垂线方程.

$[(1)[\overrightarrow{s_1},\overrightarrow{s_2},\overrightarrow{AB}]\neq 0;(2)d=7;(3)\begin{cases}16(x-9)+27(y+2)+17z=0\\58x+6(y+7)+31(z-2)=0\end{cases}]$

三. $(12')$设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2},x^2+y^2\neq 0\\ 0 \qquad\qquad x^2+y^2=0\end{cases}$, 讨论在点 $(0,0)$ 处

(1) $f(x,y)$ 是否连续? (2) $f(x,y)$ 的偏导数是否存在? (3) $f(x,y)$ 是否可微?

[(1)连续; (2) $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$; (3)不可微]

四. $(8')$求二元函数 $f(x,y)=x^2(2+y^2)+y\ln y$ 的极值. [极小值 $f(0,\dfrac{1}{e})=-\dfrac{1}{e}$]

五. $(8')$计算二重积分 $\iint\limits_D\dfrac{1}{(1+x^2+y^2)^2}d\sigma$, 其中 $D=\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$

$[\dfrac{1}{\sqrt{2}}\arctan\dfrac{1}{\sqrt{2}}]$

六. $(8')$设 Ω 是由 $x=0,y=0,z=0,x+y+3z=1$ 所围成的闭区域, 求 $\iiint\limits_\Omega xdv$. $[\dfrac{1}{72}]$

七. $(10')$设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F(x-y,z)=0$ 所确定, 其中 $F(u,v)$ 具有连续的二阶偏导数, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

$[\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_1'}{F_2'},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{(F_2')^2F_{11}''-2F_1'F_2'F_{12}''+(F_1')^2F_{22}''}{(F_2')^3}]$

八. $(10')$已知空间椭圆 $\Gamma:\begin{cases}x^2+2y^2+4z^2=8\\x+2y+2z=0\end{cases}$ 在 xoy 面内的投影曲线也是椭圆, 记为 L,

求(1) L 的方程; (2) L 的四个顶点坐标(就是椭圆上到中心点距离最大, 最小的点).

$[(1)x^2+3y^2+2xy=4;\ (2)(-1\pm\sqrt{2},1),(1\pm\sqrt{2},-1)]$