同济大学课程考核试卷
2009 — 2010 学年第一学期

命题教师签名：　　　　　　　　　审核教师签名：

课号：　　　　　　课名：线性代数　　　　　　考试考查：

此卷选为：期中考试( )、期终考试( )、重考( )试卷

年级______专业____________________学号__________姓名____________任课教师___________

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

（注意：本试卷共七大题，三大张，满分 100 分．考试时间为　　分钟。要求写出解题过程，否则不予计分）

一、填空题（每空 3 分，共 24 分）

1、设 α_1、α_2、α_3 均为 3 维列向量，已知矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，

$B=\left(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\ 3\alpha_1+9\alpha_2+27\alpha_3, 2\alpha_1+4\alpha_2+8\alpha_3\right)$，且 $|A|=1$，那么 $|B|=$____-12____。

2. 设分块矩阵 $C=\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$，$A,B$ 均为方阵，则下列命题中正确的个数为____4____。

(A)．若 A,B 均可逆，则 C 也可逆.　　(B)．若 A,B 均为对称阵，则 C 也为对称阵.

(C)．若 A,B 均为正交阵，则 C 也为正交阵.　　(D)．若 A,B 均可对角化，则 C 也可对角化.

3、设 $D=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 9 & 1 \end{vmatrix}$，则 D 的第一列上所有元素的代数余子式之和为____0____。

4、设向量组(I)：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 可由向量组(II)：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示，则____D____成立。(注：此题单选)

(A)．当 $r<s$ 时，向量组（II）必线性相关　　(B)．当 $r>s$ 时，向量组（II）必线性相关

(C)．当 $r<s$ 时，向量组（I）必线性相关　　(D)．当 $r>s$ 时，向量组（I）必线性相关

5、已知方阵 A 满足 $2A^2+3A=O$，则 $\left(A+E\right)^{-1}=$ ____$2A+E$____。

6、当矩阵 A 满足下面条件中的____A, B, C____时，推理“若 $AB=O$，则 $B=O$”可成立。(注：此题可多选)

(A)．A 可逆　(B)．A 为列满秩（即 A 的秩等于 A 的列数）　(C)．A 的列向量组线性无关　(D)．$A\neq O$

7、设矩阵 A,B 分别为 3 维线性空间 V 中的线性变换 T 在某两组基下的矩阵，已知 $1,-2$ 为 A 的特征值，B 的所有对角元的和为 5，则矩阵 B 的全部特征值为____1, -2, 6____。

8、设 J_n 是所有元素均为 1 的 n 阶方阵（$n\geq 2$），则 J_n 的互不相同的特征值的个数为__2__。

二、（10 分）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

矩阵 P，X 满足 $PA=B$，$PX=C$．求矩阵 X．

解：$P=BA^{-1}$，$X=P^{-1}C=AB^{-1}C$，

$$B^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix},$$

$$P=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -1 & 9 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

三、（10分）设线性方程组 $\begin{cases} x_1-3x_2-x_3=0 \\ x_1-4x_2-ax_3=b \\ 2x_1-x_2+3x_3=5 \end{cases}$，问当参数 a,b 取何值时，

(1)．此方程组无解?

(2)．此方程组有唯一解?

(3)．此方程组有无穷多解?

解：设 A 为该方程组的系数矩阵，B 为此方程组增广矩阵。

$$B=\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & -a & b \\ 2 & -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & b \\ 0 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3\leftrightarrow r_2 \\ r_3+r_2}]{\frac{1}{5}r_3}\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2\text{-}a & 1+b \end{pmatrix}$$

由此可知：

(1)．当 $a=2,\quad b\neq 1$ 时，$R(A)=2, R(B)=3,\ R(A)\neq R(B)$，此方程组无解。

(2)．当 $a\neq 2,$ 时，$R(A)=3=$ 未知量个数，此方程组有唯一解。

(3)．当 $a=2,\quad b=1$ 时，$R(A)=R(B)=2<3$，此方程组有无穷多解。

四、（10分）设A 为4阶方阵，4维列向量$b\neq 0$，$R(A)=2$。若p_1,p_2,p_3,p_4都是非齐次方程组$Ax=b$的解向量，且满足

$$p_1+p_2=\begin{pmatrix}2\\2\\0\\4\end{pmatrix},\quad p_2+p_3=\begin{pmatrix}3\\0\\1\\2\end{pmatrix},\quad p_3+p_4=\begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$

(1).（6分）求齐次方程组$Ax=0$的一个基础解系。
(2).（4分）求$Ax=b$的通解。
解：

(1). p_1,p_2,p_3,p_4都是非齐次方程组$Ax=b$的解向量知

$$\xi_1=p_1-p_3=(p_1+p_2)-(p_2+p_3)=\begin{pmatrix}2\\2\\0\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\0\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\\2\end{pmatrix},$$

$$\xi_2=p_2-p_4=(p_2+p_3)-(p_3+p_4)=\begin{pmatrix}3\\0\\1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

为$Ax=0$的两个线性无关的解向量，由A为4阶矩阵，$R(A)=2$知ξ_1,ξ_2构成$Ax=0$的基础解系。

(2). 由$A\frac{1}{2}(p_1+p_2)=\frac{1}{2}\left(Ap_1+Ap_2\right)=b$知$\eta=\frac{1}{2}(p_1+p_2)=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix}$为该非齐次方程的一个解， 从而

$Ax=b$的通解为$x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\eta$，其中k_1,k_2为任意常数。

五、（16分）将二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+6x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+8x_2x_3$ 用正交变换化为标准型。

解：此二次型的对称阵为 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&4&4\\2&4&6\end{pmatrix}$

由$\left|A-\lambda E\right|=-\lambda(\lambda-10)(\lambda-1)$解得$A$的三个特征值为1，0， 10

解方程组$\left(A-E\right)x=0$求得$\lambda=1$的一个特征向量为$\xi_1=\left(2,4,5\right)^T$，单位化得$p_1=\left(\frac{2\sqrt5}{15},\frac{4\sqrt5}{15},\frac{\sqrt5}{3}\right)^T$

解方程组$Ax=0$求得$\lambda=0$的一个特征向量为$\xi_2=\left(-2,1,0\right)^T$，单位化得$p_2=\left(-\frac{2\sqrt5}{5},\frac{\sqrt5}{5},0\right)^T$

解方程组$\left(A-10E\right)x=0$求得$\lambda=10$的一个特征向量为$\xi_3=\left(1,2,-2\right)^T$，单位化得$p_3=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)^T$

取正交变换$x=Py$， 其中$P=\left(p_1,p_2,p_3\right)=\frac{\sqrt5}{15}\begin{pmatrix}2&4&5\\-6&3&0\\\sqrt5&2\sqrt5&-2\sqrt5\end{pmatrix}$，把此二次型化成标准型

$f=y_1^2+10y_3^2$

六、（14 分）设V 为所有 2 阶方阵在矩阵的加法和数乘下构成的线性空间。定义V 上的变换T 如下：对任意 $X\in V$，$T\left(X\right)=AX-X^TA$，其中 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$，$X^T$ 表示 X 的转置矩阵.

(1).（6 分）证明T 是V 上的一个线性变换；

(2).（8 分） 求T 在V 的基 $E_{11}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, E_{12}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, E_{21}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, E_{22}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$下的矩阵。

解：

(1). 对任意V 中的两个矩阵 B,C， 任意实数k 有：

$$\begin{aligned}T(B+C)&=A(B+C)-(B+C)^TA=AB+AC-(B^T+C^T)A=AB+AC-B^TA-C^TA\\&=\left(AB-B^TA\right)+\left(AC-C^TA\right)=T(B)+T(C)\end{aligned}$$

$$T(kB)=A(kB)-(kB)^TA=kAB-kB^TA=kT(B)$$

故T 是V 上的一个线性变换。

(2). $T(E_{11})=\begin{pmatrix}0 & -2\\ -2 & 0\end{pmatrix}=-2E_{12}-2E_{21}$，　$T(E_{12})=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -4\end{pmatrix}=E_{12}-E_{21}-4E_{22}$

$T(E_{21})=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=4E_{11}-E_{12}+E_{21}$，　$T(E_{22})=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}=2E_{12}+2E_{21}$

从而T 在这组基下的矩阵为$\begin{pmatrix}0 & 0 & 4 & 0\\ -2 & 1 & -1 & 2\\ -2 & -1 & 1 & 2\\ 0 & -4 & 0 & 0\end{pmatrix}$。

七、(1).（8 分）已知向量组 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 线性无关, 向量组 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 满足：$\begin{cases}b_1=a_1+a_2\\ b_2=a_2+a_3\\ \quad\vdots\\ b_{n-1}=a_{n-1}+a_n\\ b_n=a_n+a_1\end{cases}$，

分别讨论当 $n=4$ 和 $n=5$ 时，向量组 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是否线性相关？

(2).（8 分）设 λ_1,λ_2 为方阵 A 的两个不同的特征值， α_1,α_2 为 A 相应于 λ_1 的两个线性无关的特征向量，α_3,α_4 为 A 相应于 λ_2 的两个线性无关的特征向量，证明向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关。

（1）解：由 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 由 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的线性表出关系式可知 $B=AK$，其中

$$A=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n\end{pmatrix},\quad K=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & 0 & & 0\\ 0 & 1 & 1 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix},$$

设 $x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$，则由 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 线性无关知 $Bx=AKx=0$ 当且仅当 $Kx=0$。

从而当$\left|K\right|=1+(-1)^{n+1}=0$时，即 n 为偶数时， $Kx=0$ 有非零解， $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 的线性相关。

当$\left|K\right|=1+(-1)^{n+1}\neq 0$时，即 n 为奇数时， $Kx=0$ 只有零解， $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 的线性无关。

所以当 $n=4$ 时， $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 的线性相关。当 $n=5$ 时， $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 的线性无关。

（2）． 证：设 k_1，k_2，k_3，k_4 使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4\alpha_4=0$，再设 $\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$， $\beta=k_3\alpha_3+k_4\alpha_4$.

由 α_1,α_2 为 A 相应于 λ_1 的两个线性无关的特征向量， α_3,α_4 为 A 相应于 λ_2 的两个线性无关的特征向量可知

$0=A0=A(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4\alpha_4)=k_1\lambda_1\alpha_1+k_2\lambda_1\alpha_2+k_3\lambda_2\alpha_3+k_4\lambda_2\alpha_4=\lambda_1\alpha+\lambda_2\beta=0$, 从而

$\lambda_1\alpha=-\lambda_1\beta=-\lambda_2\beta$，由 λ_1,λ_2 为方阵 A 的两个不同的特征值可得 $\beta=0$，由 $\alpha+\beta=0$ 有 $\beta=0$．由 α_1,α_2 线性无关， α_3,α_4 线性无关可知 k_1，k_2，k_3，k_4 均为 0，所以向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关。