同济大学课程考核试卷（期中试卷）
2021—2022 学年第一学期

课号：122004　　　　课名：高等数学 AB(上)答案　　　　考试考查：

此卷选为：期中考试(√)、期终考试(　)、重修(　)试卷

专业＿＿＿＿＿＿学号＿＿＿＿＿＿姓名＿＿＿＿＿＿任课教师＿＿＿＿＿＿

题号	一（24 分）	二（35 分）	三（12 分）	四（12 分）	五（10 分）	六（7 分）	总分
得分							

（注意：本试卷共六大题，三大张，满分 100 分．考试时间为 100 分钟.解答题要求写出解题过程）

一、填空与选择题(每小题 3 分，共 24 分)

1. 函数 $f(x)=(x-1)\cos x-\sin x$ 在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值是＿＿$-\sin 1$＿＿.

2. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\ln(1-x)}\right]=$＿＿$\dfrac{1}{2}$＿＿.

3. 若 $x\to 0$ 时，$(1-\cos x)\arcsin x^2$ 是比 $x\ln(1+x^n)$ 高阶的无穷小，$x\ln(1+x^n)$ 是比 $e^{x^2}-1$ 高阶的无穷小，则正整数 $n=$＿＿2＿＿.

4. 设 $y=y(x)$ 是由方程 $2y+x=(x-y)\ln(x-y)$ 所确定的隐函数，则该函数的微分 $dy=$＿＿$\dfrac{\ln(x-y)}{3+\ln(x-y)}dx$＿＿.

5. 函数 $f(x)=e^{2x}$ 的带有佩亚诺余项的三阶麦克劳林公式是＿＿$e^{2x}=1+2x+2x^2+\dfrac{4}{3}x^3+o\left(x^3\right)$＿＿.

6. 设 $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续且满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2-x)-3}{2\sin x}=5$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线方程为＿＿$y=23-10x$＿＿.

7. 设数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 对任意的正整数 n 满足 $a_n\le b_n\le a_{n+1}$，则　　【 C 】

（A）数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 均收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$；

（B）数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 均发散，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty$；

（C）数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 具有相同的敛散性；

（D）数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 具有不同的敛散性.

8. 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内连续，在 $\mathring{U}(x_0)$ 内可导，则“极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$ 存在”是“ $f(x)$ 在 x_0 处可导”的　　【 A 】

（A）充分非必要条件；　　（B）必要非充分条件；
（C）充分必要条件；　　（D）既不充分也不必要条件.

二、计算下列各题(每小题 7 分，共 35 分)

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\sin(\sin x)}{x^3}$.

解：
$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos(\sin x)\cdot\cos x}{3x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(\sin x)}{3x^2}=\frac{1}{6}.$$

2. 设 $f(x)=\ln(x^2+2x-3)$，求 $f^{(n)}(2)$.

解：
$$f^{(n)}(x)=\left(\frac{2x+2}{x^2+2x-3}\right)^{(n-1)}=\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+3}\right)^{(n-1)}$$
$$=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x-1)^n}+\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+3)^n}$$

故
$$f^{(n)}(2)=(-1)^{n-1}(n-1)!\left(1+\frac{1}{5^n}\right).$$

3B. 证明：当$0<x<y<\frac{\pi}{2}$时，$\frac{\tan y}{\tan x}>\frac{y}{x}$.

证明：注意到$\frac{\tan y}{\tan x}>\frac{y}{x}\Leftrightarrow\frac{\tan y}{y}>\frac{\tan x}{x}$，故只需要证明$\frac{\tan x}{x}$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上严格单调增加即可,

而
$$\left(\frac{\tan x}{x}\right)'=\frac{x\sec^2 x-\tan x}{x^2}$$

记$g(x)=x\sec^2 x-\tan x$，由于$g(0)=0$, $g'(x)=2x\sec^2 x\tan x>0$,故在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上,$g(x)>0$.

于是在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上$\left(\frac{\tan x}{x}\right)'>0$, $\frac{\tan x}{x}$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上严格单调增加，得证.

3A. 判断函数$f(x)=\frac{x+2}{x+1}\sin\frac{1}{x}$在区间$\left(0,\frac{1}{2021}\right)$内是否一致连续？说明理由.

解： 非一致连续.

理由如下：取$x'_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$，$x''_n=\frac{1}{2n\pi-\frac{\pi}{2}}$（当$n$足够大时），则
$$\left|x'_n-x''_n\right|=\left|\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2n\pi-\frac{\pi}{2}}\right|=\frac{\pi}{4n^2\pi^2-\frac{\pi^2}{4}}\to 0$$

但是
$$\left|f\left(x'_n\right)-f\left(x''_n\right)\right|=\left|\frac{2(2n\pi+\frac{\pi}{2})+1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}+1}+\frac{2(2n\pi-\frac{\pi}{2})+1}{2n\pi-\frac{\pi}{2}+1}\right|\to 4$$

所以不是一致连续.

4. 溶液自深18cm顶直径12cm的正圆锥形漏斗中漏入一直径为10cm的圆柱形筒中. 开始时漏斗中盛满了溶液. 已知当溶液在漏斗中深为12cm时，其表面下降的速率为1cm/min，问此时圆柱形筒中溶液表面上升的速率为多少？

解：设在t时刻，溶液在漏斗中深为$x(t)$，溶液在圆柱形筒中深为$y(t)$，则有
$$\frac{1}{3}\pi\cdot 6^2\cdot 18-\frac{1}{3}\pi\cdot\left(\frac{x(t)}{3}\right)^2\cdot x(t)=\pi\cdot 5^2\cdot y(t)$$

两边对t求导得： $-\frac{1}{9}x^2(t)x'(t)=25y'(t)$，

当$x(t)=12$时，$x'(t)=-1$. 故$y'(t)=\frac{16}{25}$cm/min.

5. 求曲线$y=\ln(x^2+1)$的拐点以及凹凸区间.

解：$y=\ln(x^2+1)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$，$y'=\frac{2x}{x^2+1}$，$y''=\frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$，

当$x\in(-\infty,-1)$时，$y''<0$；$x\in(-1,1)$时，$y''>0$；$x\in(1,+\infty)$时，$y''<0$.

所以$(-1,\ln 2)$和$(1,\ln 2)$是拐点.

曲线在$(-\infty,-1]$上是凸的，在$[-1,1]$上是凹的，在$[1,+\infty)$上是凸的.

三、（本题12分）设$\begin{cases}x=t^2-t,\\ y^3+3ty+1=0\end{cases}$确定函数$y=f(x)$，求$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}$.

解： 当$t=0$ 时$x=0$，$y=-1$，故
$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}=-1,\quad\left.\frac{d^2x}{dt^2}\right|_{t=0}=2$$

另一方面，由$y^3+3ty+1=0$可得
$$3y^2\frac{dy}{dt}+3y+3t\frac{dy}{dt}=0,\quad 6y\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+3y^2\frac{d^2y}{dt^2}+6\frac{dy}{dt}+3t\frac{d^2y}{dt^2}=0,$$

所以
$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0}=1,\quad\left.\frac{d^2y}{dt^2}\right|_{t=0}=0,$$

从而
$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=\left.\frac{\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{dx}{dt}-\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}\right|_{t=0}=2.$$

四、(本题 12 分) 讨论方程 $x^4+ax+b=0$ 的实根个数，其中 a,b 是常数.

解： 记 $y=x^4+ax+b$，求导得 $y'=4x^3+a$

当 $x>\sqrt[3]{-\frac{a}{4}}$ 时，$y'>0$；当 $x<\sqrt[3]{-\frac{a}{4}}$ 时，$y'<0$。所以当 $x=\sqrt[3]{-\frac{a}{4}}$ 时，y 有最小值且

最小值为 $y\Big|_{x=\sqrt[3]{-\frac{a}{4}}}=\left(-\frac{a}{4}\right)^{\frac{4}{3}}+a\left(-\frac{a}{4}\right)^{\frac{1}{3}}+b$.

结合 $\lim\limits_{x\to-\infty}y=+\infty$ 以及 $\lim\limits_{x\to+\infty}y=+\infty$ 可得：

(1) 当 $\left(-\frac{a}{4}\right)^{\frac{4}{3}}+a\left(-\frac{a}{4}\right)^{\frac{1}{3}}+b=0$ 时，方程有唯一实根；

(2) 当 $\left(-\frac{a}{4}\right)^{\frac{4}{3}}+a\left(-\frac{a}{4}\right)^{\frac{1}{3}}+b>0$ 时，方程无实根；

(3) 当 $\left(-\frac{a}{4}\right)^{\frac{4}{3}}+a\left(-\frac{a}{4}\right)^{\frac{1}{3}}+b<0$ 时，方程有两个互异实根.

五、(本题 10 分) 设 $x_0>0$，$x_n=\frac{2(1+x_{n-1})}{2+x_{n-1}}$，$n=1,2,3,\cdots$. 证明 $\{x_n\}$ 极限存在并求此极限值.

证明：注意到对于一切的 n 恒有 $x_n=1+\frac{x_{n-1}}{2+x_{n-1}}>1$，以及 $x_n=2-\frac{2}{2+x_{n-1}}<2$，

因此数列 $\{x_n\}$ 有界.

$$x_{n+1}-x_n=\left(2-\frac{2}{2+x_n}\right)-\left(2-\frac{2}{2+x_{n-1}}\right)=2\cdot\left(\frac{1}{2+x_{n-1}}-\frac{1}{2+x_n}\right)=\frac{2(x_n-x_{n-1})}{(2+x_{n-1})(2+x_n)},$$

$$x_n-x_{n-1}=\frac{2(x_{n-1}-x_{n-2})}{(2+x_{n-2})(2+x_{n-1})},\ \cdots\cdots,\ x_2-x_1=\frac{2(x_1-x_0)}{(2+x_0)(2+x_1)},$$

于是 $x_{n+1}-x_n$ 与 x_1-x_0 同号，故当 $x_1\ge x_0$ 时，$\{x_n\}$ 单调递增；当 $x_1<x_0$ 时，$\{x_n\}$ 单调递减。即 $\{x_n\}$ 为单调有界数列，从而数列 $\{x_n\}$ 收敛.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则有 $a=\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2(1+x_{n-1})}{2+x_{n-1}}=\frac{2(1+a)}{2+a}$，

解之得 $a=\sqrt{2}$，即有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2}$.

六、(本题 7 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2021]$ 上连续，在 $(0,2021)$ 内可导且 $f'(x)\ne0$，$f(0)=0$，$f(2021)=2$. 证明：在开区间 $(0,2021)$ 内存在两个不同的点 ξ 和 η，使得 $f'(\eta)[f(\xi)+\xi f'(\xi)]=f'(\xi)[2021f'(\eta)-1]$.

证明：由介值定理：存在 $x_0\in(0,2021)$，使得 $f(x_0)=1$.

对函数 $f(x)$ 在 $[x_0,2021]$ 上利用拉格朗日定理，存在 $\eta\in(x_0,2021)$，使得

$$\frac{f(2021)-f(x_0)}{2021-x_0}=f'(\eta).\qquad (*)$$

另一方面，记 $g(x)=(x-x_0)f(x)$，$x\in(0,x_0)$，则有 $g(0)=g(x_0)=0$；由罗尔定理，存在 $\xi\in(0,x_0)$，使得 $g'(\xi)=0$，即为

$$f(\xi)+(\xi-x_0)f'(\xi)=0.\qquad (**)$$

结合(*)，(**)两式可得：开区间 $(0,2021)$ 上存在两个不同的点 ξ 和 η，使得 $f'(\eta)[f(\xi)+\xi f'(\xi)]=f'(\xi)[2021f'(\eta)-1]$.