同济大学课程考核试卷(A 卷)
2009—2010 学年第一学期

课名：**线性代数（2 学分）**　　　　考试考查：**考查**

（注意：本试卷共七大题，三大张，满分 100 分. 考试时间为 100 分钟.要求写出解题过程，否则不予计分）

一、填空与选择题(5-9 小题均为单选题)(27 分)

1、 设 3 阶方阵 $A=(\alpha,\gamma_2,\gamma_3)$，$B=(\beta,\gamma_2,\gamma_3)$，其中 $\alpha,\beta,\gamma_2,\gamma_3$ 都是 3 维列向量，已知 $|A|=2,|B|=\frac{1}{2}$，则 $|A+B|=$ __10________________.

解：$A+B=(\alpha,\gamma_2,\gamma_3)+(\beta,\gamma_2,\gamma_3)=(\alpha+\beta,2\gamma_2,3\gamma_3)$

$$|A+B|=|(\alpha+\beta,2\gamma_2,2\gamma_3)|=4|(\alpha+\beta,\ \gamma_2,\ \gamma_3)|=4|(\alpha,\ \gamma_2,\ \gamma_3)|+4|(\beta,\ \gamma_2,\ \gamma_3)|$$
$$=4|A|+4|B|$$
$$=10$$

2、已知 A，B 为 3 阶方阵，且 $R(B)=2$，$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&a&6\\3&6&9\end{pmatrix}$，若 $AB=0$，则 $a=$ ____4_______.

解：这里会用到矩阵的秩的一个重要性质 $AB=0$，$A_{m\times n}$ 时可推出 $R(A)+R(B)\le n$

$\because R(B)=2,\therefore R(A)\le 1$，因为 A 中一个 1 阶子式不为 0，$\therefore R(A)=1$，对 **A** 随意选取一个二阶子式，令其为 **0**，得到 $a=4$

3、 已知 3 阶方阵 A 的特征值分别为 1，-1，2，设矩阵 $B=A^5-3A^3$，则 $|B|=$ ___-32___________.

解：根据特征值多项式方程，我们先求出 B 的三个对应特征值，分别为：

$$\begin{cases}\lambda_1=1-3=-2\\ \lambda_2=-1+3=2\\ \lambda_3=2^5-3*2^3=8\end{cases}$$
，在根据 B 的特征值之积等于其对应行列式的值，解得 $|B|=-32$

4、 已知向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\3\\a\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\a+2\\-2\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$，若 β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，则 a 的取值为__-1___________.

解：这种题刻可选择初等变换法：

化简得：

[(a + 1), 0, 0, (a + 2)]
[0, (a + 1), 0, -1]
[0, 0, (a + 1), 1]，这时什么讨论 a 是否为-1，若 a=-1，则增广矩阵和系数矩阵秩不等，固不能线性表示（初等变换的时候最好别轻易的除掉某个字母未知数，除非你肯定它是非零的）

5、 设行列式 $D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 1 & 1 & 1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，且 M_{ij} 和 A_{ij} 分别为 D_1 中元素 a_{ij} 的余子式和代数余子式，则 $D_2=$ __A_____________.

$(A).\ \sum_{j=1}^{3} A_{2j}$　$(B).\ \sum_{j=1}^{3} M_{2j}$　$(C).\ -\sum_{j=1}^{3} A_{2j}$　$(D).\ -\sum_{j=1}^{3} M_{2j}$

解：请自行查看代数余字式的定义和相关性质--（偷个懒）

6. 以下结论中正确的是____C_________.

(A). 若方阵 A 的行列式 $|A|=0$，则 $A=0$.

(B). 若 $A^2=0$，则 $A=0$.

(C). 若 A 为对称阵，则 A^2 也是对称阵.

(D). 对任意的同阶方阵 A，B 有 $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$.

解：A. 反例：$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

B. 反例：幂零矩阵（就是幂乘后为 0 的矩阵，具体内容自行百度，当然，其他某些矩阵也可作为 B 的反例）

C. $A=A^T,(AA)^T=(A^TA^T)=(A^T)^2$

D．这个等式成立的条件是 AB 为可交换阵

7、 设 n 阶方阵 A 与 B 等价，则____B________.

$(A).\ |A|=|B|$　　(B). 若 $|A|\neq 0$，则 $|B|\neq 0$

$(C).\ |A|\neq|B|$　　$(D).\ |A|=-|B|$

解：你得先清楚什么是等价，这里，A，B 为同型等价，所以它们的秩相同（秩相同不一定等价哦，因为它们不一定同型，如果同型，则这个可作为充要条件），但他们的秩和行列式无直接关系（除了奇异阵的那种）。所以，假如 A 满秩，可知 B 也满秩，所以他们行列式都不为 0

8、 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times m$，则线性方程组 $ABx=0$ ______D_________.

(A). 当 $n>m$ 时仅有零解　　(B). 当 $n>m$ 时必有非零解

(C). 当 $m>n$ 时仅有零解　　(D). 当 $m>n$ 时必有非零解

解：$R((AB)_{m\times m})\leq\min\{R(A),\ R(B)\}$，所以本题有 $R((AB)_{m\times m})\leq\min\{m,\ n\}$

当$n<m$,原式有$R((AB)_{m\times m})<n<m$，所以可知AB非满秩，所以它的行列式为 0，固

$ABx=0$必然有非零解

9、 下列参数取值中，__B________组能使得矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ a+b & 5 & 0\\ -1 & 0 & c\end{pmatrix}$成为正定矩阵.

(A). $a=1,b=2,c=1$ (B). $a=-1,b=3,c=8$

(C). $a=3,b=-1,c=2$ (D). $a=1,b=1,c=-1$

解：证明矩阵是正定阵有三种方法，1.正定阵的定义，2.矩阵的特征值法，3.顺序主子式法

假如 A 是正定阵，那么 A 行列式大于 0，于是有$5c-2c(a+b)-5>0$,利用排除法，得 B 正确.

二、(8 分)当a,b满足什么条件时，行列式$D=\begin{vmatrix}0 & 1 & 2 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & a & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & b & 0\\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1\end{vmatrix}=0$.

解：这种题直接按照第一列展开就好了，

我算得$a=1,b=\frac{3}{2}$

三、(12 分)已知线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1\\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=c\\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3\\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=d\end{cases}$，试问参数$c,d$取何值时线性方程组无解？取何值时有解？若有解，求出其通解.

解：当遇到这种系数矩阵不是方阵的，就只好老老实实进行初等变换的。

变换后的结果为 c=0,d=2 时，方程组有无穷解，c 不等于 0 或者 d 不等于 2，无解；

通解：$k_1\begin{bmatrix}1\\ -2\\ 1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}1\\ -2\\ 0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}5\\ -6\\ 0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2\\ 3\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$

四、(14 分)设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+x_3^2+2ax_1x_3+2bx_2x_3$，经正交变换后化为标准形$f=y_2^2+2y_3^2$，求参数$a,b$的值，并求出该正交变换$x=Qy$.

解：（1）标准矩阵型为$\begin{bmatrix}1&1&a\\1&1&b\\a&b&1\end{bmatrix}$，因为化为标准型后对应的矩阵为$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$，因为这两个矩阵相似，所以他们对应特征值相同,所以矩阵对应的行列式也相同，解得 a=b。求第一个矩阵的行列式得$\lambda(\lambda^2-3\lambda+2-2a)=0$，将$\lambda=1$带入，得到 a=0，b=0.

（2）将$\lambda=0,1,2$带入特征多项式，解得 p1=$\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$, p2=$\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$, p3=$\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$

因为实对称阵对应的特征值都不同，所以 3 个 p 向量必定正交，

单位化得到 q1=$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$，q2=$\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$，q3=$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$，所以 **Q=[q1，q2，q3]**

五、(12 分)设 A 为四阶方阵，$B=\begin{pmatrix}1&2&-3&-2\\0&1&2&-3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&1&2&0\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$，且

$(2E-C^{-1}B)A^T=C^{-1}$ 求 A.

解：老题了。。。。。拿到化简，

$(2E-C^{-1}B)A^T=C^{-1}\xrightarrow{E=C^{-1}C}C^{-1}(2C-B)A^T=C^{-1}$，现在先算算$(2C-B)$，算出来不 $\xrightarrow{\text{左乘}C}(2C-B)A^T=E$

为 **0**，所以$A^T=(2C-B)^{-1}$，最后在算 **A**，得$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\1&-2&1&0\\0&1&-2&1\end{pmatrix}$

六、(17 分)设η为n元非齐次线性方程组$Ax=b$的一个解，$\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$为对应齐次线性方程组$Ax=0$的一个基础解系，

(1)判断向量组$\eta,\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$的线性相关性，并给出理由.

(2)证明向量组$\eta,\eta+\xi_1,\cdots,\eta+\xi_{n-r}$线性无关.

(3)设$Ax=b$的全体解向量构成的向量组为G，试证：$R(G)=n-r+1$

解：（1）一看到这种和线性相关有关的题，用定义。

$\eta,\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$线性无关

假设在数域里存在一组 k

使得 $k_0\eta+k_1\xi_1+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}=0$，等式两边左乘 A，得到 $k_0A\eta=k_0b=0$，所以可得 $k_0=0$

又因为 $\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$ 为对应齐次线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系，

所以 $\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性无关，最后，可推出 $k_i=0,\quad (i=0,1,2\ldots n-r)$

所以 $\eta,\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性无关。

（2）方法类似于（1）

（3）根据其次形式解的性质，齐次时候的解的秩 **R（V）=n-R（A）=n-r**

在根据非齐次的解释由其次的通解和非齐次的一个特解组成的。所以得到 **R（G）=n-r+1.**

七、(10分) 设 A 为三阶方阵，α_1，α_2，α_3 为线性无关的三维列向量，已知 $A\alpha_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，

$A\alpha_2=2\alpha_2+\alpha_3$，$A\alpha_3=2\alpha_2+3\alpha_3$，设矩阵 $P=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)$，

(1) 求 B，使得 $AP=PB$，(2) 求 A 的特征值.

解：

（1）因为 α_1，α_2，α_3 为线性无关的三维列向量，所以 P 矩阵可逆，且

$$A(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)\begin{bmatrix}1&0&0\\1&2&2\\1&1&3\end{bmatrix}，很明显，B=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&2&2\\1&1&3\end{bmatrix}$$

（2）

因为 $A(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)\begin{bmatrix}1&0&0\\1&2&2\\1&1&3\end{bmatrix}$，于是有 $B=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&2&2\\1&1&3\end{bmatrix}$ 与 **A** 相似。由相似性质可知，**A** 与 **B** 拥有相同的特征值，解出 **B** 的特征值为 **4,1,1**。所以 **A** 的特征值为 **4，1，1**