2009—2010 学年第二学期

课名：线性代数（2 学分）

一、填空与选择题(24 分)

1、 已知 m 阶方阵 A 与 n 阶方阵 B 的行列式值分别为 a,b，且 $ab\neq 0$，则 $\left|-3\begin{pmatrix} A^T & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}^{-1}\right| =$ ______ $(-3)^{(n+m)}\dfrac{b}{a}$ ____________.

解：化简后可得 $(-3)^{m+n}\dfrac{1}{\left|\begin{pmatrix} A^T & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}\right|}$

由拉普拉斯定理，分母为 $|A^T||B^{-1}|$，所以得到 $(-3)^{(n+m)}\dfrac{b}{a}$

2、 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$，其伴随矩阵为 A^*，则 $\left(A^*\right)^{-1} =$ ____ $\dfrac{1}{6}A$ ______.

解：先化简，由伴随矩阵的性质 $A^*=|A|A^{-1}$，$\left(A^*\right)^{-1}=(|A|A^{-1})^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A=\dfrac{1}{6}A$

3、 若 3 阶方阵 A 满足 $|A+E|=|A+2E|=|A-E|=0$，则 $|A^2-5A-3E|=$ ___ -231 ____________.

解：看到这种形式请立刻联想到特征值，$|A+E|=|A+2E|=|A-E|=0$

由这几个等式，我们可知 A 的三个特征值为-1，-2，1. 而 A 为 3 阶方阵，说明它只有 3 个特征值，现在，我们来看 $|A^2-5A-3E|$，我们假定 $A^2-5A-3E$=B，则根据特征多项式，我们可以分别把 **A** 的三个特征值带进去，得到 **B** 的三个特征值分别为

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1+5-3=3 \\ \lambda_2 = 4+10-3=11 \\ \lambda_3 = 1-5-3=-7 \end{cases}$$

在根据特征值之积等于方阵的行列式可知 $|A^2-5A-3E|=-231$

4、 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 R^3 空间的一组规范正交基，则 $\|2\alpha_1-\alpha_2+3\alpha_3\|=$ __ $\sqrt{14}$ __________.

解：本题要求的是 $2\alpha_1-\alpha_2+3\alpha_3$ 的范数，带入公式，由于 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 R^3 空间的一组规范正交基（正交基：列向量位单位向量，且每个列向量之间内积为 0），于是有

$$\sqrt{(2\alpha_1-\alpha_2+3\alpha_3)^T(2\alpha_1-\alpha_2+3\alpha_3)}=\sqrt{14}$$

5、 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3$，其中 $b>0$，已知 A 的全体特征

值之和为 1，全体特征值之积为-12，则$a=$_1__________，$b=$___2________.

解：二次型 A 所对应的矩阵是$\begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{bmatrix}$，因为它的行列式的值即使特征值的积，主对角线之和（又称为迹，用 **tr**（**A**）表示）既是特征值之和，得到 **a=1**，将 **a** 代入 **A**，求出行列式**=-12**，得到 **b=2**；

6、 设 A 为n阶非零方阵，且 A 中各行元素都对应成比例，又$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系，则$t=n-1$____________.

解：因为 A 中各行元素都对应成比例且 A 为n阶非零方阵，很明显

$R(A)=1, e.g.(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix})$，又由于$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系，

所以它的基础解系中有 t 个线性无关向量，则根据$n-r(A)=t$ ，可得$t=n-1$

7、 设$Q=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & t \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$，$P$ 为 3 阶非零方阵，且 $PQ=0$，则下面说法正确的是_____C____.

(A). $t=6$时 $R(P)=1$ (B). $t=6$时 $R(P)=2$

(C). $t\neq 6$时 $R(P)=1$ (D). $t\neq 6$时 $R(P)=2$

解：利用代入法，$PQ=0 \longrightarrow R(P)+R(Q)\leq n$，$t=6$时$R(\mathrm{Q})=1, \therefore R(P)\leq 2$

$t\neq 6$时$R(Q)=2, \therefore R(P)\leq 1$ ，因为 P 为 3 阶非零方阵，$\therefore R(P)=1$

8、 设$\alpha_1=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$，三条不同的直线$a_ix+b_iy+c_i=0$，$(i=1,2,3)$，

$a_i^2+b_i^2\neq 0$，则这三条直线交于一点的充要条件是_____D____________.

(A). $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关

(B). $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关

(C). $R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$

(D). $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，$\alpha_1,\alpha_2$线性无关

解：这题的意思是，要让这个线性方程有唯一解（只有唯一解才能让它们交于同一点）

即增广矩阵$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & -c_1 \\ a_2 & b_2 & -c_2 \\ a_3 & b_3 & -c_3 \end{pmatrix}$的秩应该为 2，且系数矩阵$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}$的秩也应该为 **2**

所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关, α_1,α_2 线性无关

二、(12 分) 设 n 阶方阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ b & 1 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & 1 \end{pmatrix}$，试求 A 的全体特征值. .

解：根据特征多项式定义 $|A-\lambda E|=0$，$\begin{vmatrix} 1-\lambda & b & \cdots & b \\ b & 1-\lambda & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & 1-\lambda \end{vmatrix}=0$，（小技巧，把每一列元素对应加到第一列上，在把第一列上的元素提出来就很容易得到特征值了）

解得：$\lambda=(n-1)b+1$，$\lambda=1-b(n-1$重)

三、(10 分) 设 4 阶方阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 7 \end{pmatrix}$，又 $(E+A)B=E-A$，求 $E+B$.

解： 这种题拿到就化简，$(E+A)B=E-A \longrightarrow (E+A)(E+B)=2E$

这时应该先算 $|(E+A)|\neq 0$，说明 $(E+A)$ 可逆，然后得到 $(E+B)=2E(E+A)^{-1}$

$$E+B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

四、(12 分) 已知线性方程组 $\begin{cases} (2-\lambda)x_1+2x_2-2x_3=1 \\ 2x_1+(5-\lambda)x_2-4x_3=2 \\ -2x_1-4x_2+(5-\lambda)x_3=-\lambda-1 \end{cases}$，试讨论参数 λ 为何值时，此方程组有唯一解、无解或有无穷多解.

解：这种题很好解，因为它的系数矩阵是方阵，所以，根据克莱姆法则，我们可以直接求它的系数行列式，并令其为 0，$\begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{bmatrix}$ 令它的行列式为 **0**，得到 $\lambda=1,1,10$，当

$\lambda=1$

当增广矩阵为$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -4 & 2 \\ -2 & -4 & 4 & -2 \end{bmatrix}$，利用初等变换，得到

1	**2**	**-2**	**0**
0	**0**	**0**	**1**
0	**0**	**0**	**0**

说明系数矩阵的秩和增广矩阵的秩不等，所以无解，把$\lambda=10$带进去，得到的是无穷解

所以$\lambda\neq 1$和10有唯一解

五、(12 分)设有如下两个向量组：向量组$(\mathrm{I}): \alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}, \alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\a+2\end{pmatrix}$，向量组

$(\mathrm{II}): \beta_1=\begin{pmatrix}1\\2\\a+3\end{pmatrix}, \beta_2=\begin{pmatrix}2\\1\\a+6\end{pmatrix}, \beta_3=\begin{pmatrix}2\\1\\a+4\end{pmatrix}$，问$a$取何值时两个向量组等价？$a$又为何值时两个向量组不等价？

解：先对 I 和 II 求行列式，可解得 I 的行列式为$a+1$，**II** 的行列式为 **6**,可知，它们要等价，则 **a** 必然不能等于**-1.**当 **a=-1**，**I** 和 **II** 的秩不等。当 **a** 不等于**-1** 时,它们等价。

不信的话，将 **I**，**II** 初等变换后是这个

[1, 0, 0, (a - 3)/(a + 1), (2*(a + 3))/(a + 1), (a^2 + 4*a - 5)/(a + 1)]
[0, 1, 0, (a - 1)/(a + 1), -(a - 1)/(a + 1), (3*a - 1)/(a + 1)]
[0, 0, 1, 2/(a + 1), -2/(a + 1), 4/(a + 1)]

六、(16 分)设A为 3 阶方阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为线性无关的 3 维列向量，且$A\alpha_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，

$A\alpha_2=2\alpha_2+\alpha_3$，$A\alpha_3=2\alpha_2+3\alpha_3$，

(1) 求方阵B，使得$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)B$，

(2) 求正交阵P，使得$P^{-1}BP$为对角阵，并求出此对角阵.

解：(1) 因为$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}1&0&0\\1&2&2\\1&1&3\end{bmatrix}$，所以 B=$\begin{bmatrix}1&0&0\\1&2&2\\1&1&3\end{bmatrix}$

(2) 要求对角阵，先得求 B 的特征值，根据特征多项式，可得 B 的特征值为 1(2 重)，4

当特征值为 1 时，$\begin{bmatrix}0&0&0\\1&1&2\\1&1&2\end{bmatrix}$,特征向量为$\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}$，当特征值为 **4** 时，特征向量为$\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$

根据施密特正交化，得到 p1= $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$，p2= $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}$，p3= $\frac{3}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix}-\frac{1}{10}\\\frac{1}{2}\\\frac{4}{5}\end{bmatrix}$，

（只有实对称阵不同特征值所对应的特征向量才保证天然正交，非实对称阵的特征向量只能保证其线性无关，没想到在这里犯错了- -。因为 **B** 不是实对称阵，所以在这里要对三个向量都使用施密特正交法。）

则正交矩阵 **P=[p1，p2，p3]**

七、(1)(7 分)已知 $\alpha_i=\left(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}\right)^T$，$(i=1,2,\cdots,r,\ r<n)$ 为 n 维实向量，且 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，又已知 $\beta=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$ 是线性方程组 $\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots a_{1n}x_n=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots a_{2n}x_n=0\\\qquad\vdots\\a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots a_{rn}x_n=0\end{cases}$ 的一个非零解，试证明向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta$ 线性无关.

(2) (7 分)设 α 为 n 维列向量，$\alpha^T\alpha=1$，方阵 $A=E-\alpha\alpha^T$，试证 $|A|=0$.

解：(1) 我怎么记得这道题是一道考研题- -。。。。。

假设存在一组 k，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r+k_m\beta=0\qquad(I)$$

已知 $\beta=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$ 是线性方程组 $\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots a_{1n}x_n=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots a_{2n}x_n=0\\\qquad\vdots\\a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots a_{rn}x_n=0\end{cases}$ 的一个非零解。

所以（α_1，α_2，。。α_r)$^{\mathrm{T}}\beta$=0，又因为 $\beta=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$ 是非零解。

所以，现在我们对 (I) 式左乘 β^{T}，并且等式两边同时取转置，因为 $\alpha_i\beta^{\mathrm{T}}$=0，所以可得 $k_m\beta^T\beta=$**0**，由内积的性质，当 β 非零时，$\beta^T\beta>0$,所以 $k_m=0$，既

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=0$，又因为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，我们可知所有 k 的值都应该为 0，既 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta$ 也满足线性无关。

（2）这道题其实很简单- -。。。。结果自己犯二想复杂了。。

$A=E-\alpha\alpha^T$，所以等式两边同时右乘 α，有 $A\alpha=\alpha-\alpha\alpha^T\alpha$=$\alpha$-$\alpha$=0*$\alpha$，由特征值与特征向量的关系，我们可得 A 的一个特征值为 0.在由特征值之积为该方阵对应的行列式的值可知，$|A|=0$