同济大学课程考核试卷（A 卷）
2011—2012 学年第一学期

命题教师签名：　　　　　　　　审核教师签名：

课号：122010　课名：线性代数 B　考试考查：考试

此卷选为：期中考试( )、期终考试(√)、重考( )试卷

年级_____专业___________________学号__________姓名____________任课教师____________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

（注意：本试卷共八大题，三大张，满分 100 分．考试时间为 120 分钟。除第一大题直接填写结果外，其余各大题均要求写出解题过程，否则不予计分）

一、填空选择题（每小题 3 分，共 30 分）

1、设三阶矩阵 $A=(\alpha,\beta,\gamma)$，$B=(\alpha+\beta+\gamma,\alpha+3\beta+4\gamma,\alpha+9\beta+16\gamma)$．若 $|A|=3$，则

$|B|=$ ___18___．

2、全体 3 阶实对称阵在矩阵的加法和数乘下构成的线性空间的维数为___6___．

3、已知三阶矩阵 A 满足 $|A-E|=|A-2E|=|A-3E|=0$，则 $|A+E|=$ ___24___．

4、二次型 $f=-x^2-y^2-z^2+axy$ 是负定二次型, 则 a 的取值范围是 ___$(-2,2)$___．

5、设 A, B 均为 2 阶矩阵，A^*,B^* 分别为 A, B 的伴随矩阵．若 $|A|=2,|B|=3$，则分块矩阵 $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为（　B　）

（A）$\begin{pmatrix} 2A^* & O \\ O & 3B^* \end{pmatrix}$．　（B）$\begin{pmatrix} 3A^* & O \\ O & 2B^* \end{pmatrix}$．　（C）$\begin{pmatrix} O & 3A^* \\ 2B^* & O \end{pmatrix}$

6、设 A 为 n 阶非零矩阵，E 为 n 阶单位矩阵．若 $A^2+2A=O$，则下列说法正确的是（　A　）

（A）矩阵 $E-A$ 必可逆　（B）矩阵 $A+2E$ 必可逆　（C）矩阵 A 必可逆

$\boxed{7、}$ 已知非零矩阵 A,B 满足 $AB=O$，则下列说法正确的是（　C　）

（A）矩阵 A 的行向量组一定线性无关
（B）矩阵 B 的行向量组一定线性无关
（C）矩阵 B 的行向量组一定线性相关

8、已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关, 则向量组（　A　）

（A）$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 线性无关　（B）$\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$ 线性无关

（C）$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 线性无关

$\boxed{9、}$ 设 n 阶矩阵 A 的伴随矩阵 $A^*\neq 0$，若 ξ_1,ξ_2 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的互不相等的解，则对应的齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解空间的维数为（　A　）

（A）1　（B）2　（C）3

10、设 T 是线性空间 V 中的线性变换，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$ 是 V 中的元素，则下列说法正确的是（　B　）

（A）若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$ 线性无关，则 $T(\alpha_1),T(\alpha_2),\cdots,T(\alpha_s)$ 也线性无关

（B）若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$ 线性相关，则 $T(\alpha_1),T(\alpha_2),\cdots,T(\alpha_s)$ 也线性相关

（C）若 $T(\alpha_1),T(\alpha_2),\cdots,T(\alpha_s)$ 线性相关，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$ 也线性相关

二、（10 分）设 $AB+A+B=O$，其中 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，求矩阵 B．

解：方法一：(A+E)(B+E)=E.

$$(B+E)=(A+E)^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

方法二：$B=-(A+E)^{-1}A$

$$(A+E,A)=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

三、（10 分）设 3 阶对称阵 A 的 3 个特征值为 1，2，2．求：$A^{102}-3A^{101}+2A^{100}$.

解： 因 A 为对称阵，故 A 相似于对角阵 $\Lambda=\text{diag}\,(1,2,2)$

$$A=P\Lambda P^{-1}$$

记 $\varphi(x)=x^{102}-3x^{101}+2x^{100}=x^{100}(x-1)(x-2)$，

$\varphi(\Lambda)=\text{diag}(\varphi(1),\varphi(2),\varphi(2))=O$，

$\varphi(A)=P\varphi(\Lambda)P^{-1}=O$.

四、（10 分）设 A 为 2 阶矩阵，α_1,α_2 为线性无关的 2 维列向量，$A\alpha_1=0, A\alpha_2=2\alpha_1+\alpha_2$，求 A 的全部特征值.

解法一：因 $A\alpha_1=0,$ 所以 0 A 的一个特征值,

因 $A(2\alpha_1+\alpha_2)=2\alpha_1+\alpha_2$, 所以 2 A 的一个特征值,

因 A 为 2 阶矩阵，故 0 和 1 是 A 的全部特征值.

解法二：记 $P=(\alpha_1,\alpha_2)$，$AP=P\begin{pmatrix}0&2\\0&1\end{pmatrix}$，

因 α_1,α_2 为线性无关, 因此 P 为可逆矩阵，

有 $A=P\begin{pmatrix}0&2\\0&1\end{pmatrix}P^{-1}$，

矩阵 $\begin{pmatrix}0&2\\0&1\end{pmatrix}$ 的特征值为 0，1，故矩阵 A 的全部特征值是 0，1 .

五、（12 分）设二次型设二次型 $f=-2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$.

（1） 写出二次型 f 的矩阵；

（2） 求一个正交变换 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$, 把 f 化为标准形.

解：(1) 写出二次型 f 的矩阵的矩阵为：

$$A=\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}.$$

(2) 特征多项式是 $|A-\lambda E|=-(\lambda-1)^2(\lambda+2)$，

特征值是 $\lambda_1=-2,\lambda_2=\lambda_3=1$.

特征值-2 对应的特征向量是 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$,

特征值 1 对应的特征向量是 $\xi_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\xi_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$,

正交化，单位化 $p_1=\frac{1}{\sqrt3}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, p_2=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, p_3=\frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$.

正交变换为 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&\frac{-1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{-1}{\sqrt3}&0&\frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$，标准形为 $f=-2y_1^2+y_2^2+y_3^2$

六、（12 分）设 $P[x]_3$ 是次数不超过 3 的全体多项式构成的线性空间．对于任意 $f(x)\in P[x]_3$，变换 T 定义为：

$$T(f(x))=f(x+1)-f(x).$$

（1）证明变换 T 是 $P[x]_3$ 中的线性变换；

（2）求线性变换 T 在 $P[x]_3$ 的下述基下的矩阵：

$$f_0(x)=1,\ f_1(x)=x,\ f_2(x)=x^2,\ f_3(x)=x^3.$$

（1）证： 对任意 $f(x),g(x)\in P[x]_3,k\in\mathbb{R}$，可知

$$\begin{aligned}T(f(x)+g(x))&=f(x+1)+g(x+1)-f(x)-g(x)\\&=T(f(x))+T(g(x))\end{aligned}$$

$$T(kf(x))=kf(x+1)-kf(x)=kT(f(x))$$

从而 T 是 $P[x]_3$ 中的线性变换

（2） $T(f_0(x))=T(1)=1-1=0$

$T(f_1(x))=T(x)=(x+1)-x=1=f_0(x)$

$T(f_2(x))=T((x+1)^2-x^2)=2x+1=f_0(x)+2f_1(x)$

$T(f_3(x))=(x+1)^3-x^3=3x^2+3x+1=f_0(x)+3f_1(x)+3f_2(x)$

线性变换 T 在基 f_0,f_1,f_2,f_3 下的矩阵为：

$$\begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&0&2&3\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

七、（8 分） 设 2 阶方阵 A=$\begin{pmatrix}1&2\\0&a\end{pmatrix}$.

试证：A 可相似于对角阵的充分必要条件是 $a\neq1$.

证： 充分性： 若 $a\neq1$，则 A 有 2 个不同的特征值，从而 A 可相似于对角阵.

必要性：（证法一）用反证法， 若 $a=1$，则 A 的 2 个特征值为 1，1.
而 R(A-E)=1，故 A 的线性无关特征向量的个数为 2- R(A-E)=1.
于是 A 不能相似于对角阵， 矛盾，故 $a\neq1$

（证法二）用反证法， 若 $a=1$，则 A 的 2 个特征值为 1，1.
由于 A 可相似于对角阵，则 A 将相似于单位矩阵，
从而 A 将等于单位矩阵，矛盾，故 $a\neq1$.

八、（8 分）设 $m\times n$ 矩阵 C 为行满秩，即 $R(C)=m$，试证：

（1） 对任意 m 维列向量 d，线性方程组 $Cy=d$ 总有解；

（2） 设 $(m+1)\times n$ 矩阵 $A=\begin{pmatrix}C\\ \alpha\end{pmatrix}$， $m+1$ 维列向量 $b=(0,0,\ldots,0,1)^T$，则线性方程组

$Ax=b$ 有解的充分必要条件是 $R(A)=m+1$.

证：（1） $m=R(C)\le R(C,d)\le m$，故 $R(C)=R(C,d)$，从而 $Cy=d$ 总有解。

（2）证法一：因 $R(C)=m$，故 C 中有 m 阶非 0 子式.从而(A,b)中有 m+1 阶非 0 子式，故 R(A,b)=m+1.

故 $Ax=b$ 有解的充分必要条件是 $R(A)=m+1$.

证法二：充分性：由第（I）小题.
必要性（反证法）：若不然，则 A 的行向量组线性相关。但 C 的行向量组线性无关，故 α 可由 C 的行向量组线性表出，即 α 减去 C 的行向量组的某个线性组合等于 0.
将增广矩阵(A,b)的末行减去前 m 行的同样系数的线性组合，将得到最后一行为(0,0,⋯,0,1)，

故 线性方程组 $Ax=b$ 无解.