同济大学《微积分》（上）测验试卷一

2023—2024 学年第一学期

年级_______专业_________学号____________姓名__________得分______________

（ **注意： 解答题要求写出解题过程** ）

一．填空题（每题 6 分，共 30 分）

1. 当 $x\to 0$ 时，无穷小 $\alpha=\dfrac{x^2-\sin x^2}{\ln\left(1+x^2\right)},\beta=\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-x^4},\gamma=x-\arctan x$，从低阶到高阶的排列顺序为________________.（β,γ,α）

2 曲线 $y=\dfrac{x}{x-2}-\ln\left(3+2\mathrm{e}^x\right)$ 的斜渐近线方程是__________________.（$y=x+1+\ln 2$）

3. 极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\arctan x}{x}\right)^{1/x^2}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$______________________________.（$\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$）

4. 设 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{x}, & x>0,\\ a, & x=0,\\ \dfrac{\mathrm{e}^{bx}-1}{\ln(1-2x)}, & x<0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a+b=$_______________.（-2）

5. 设 $f(x)$ 仅在点 $x=a$ 处不连续，$g(x)$ 仅在点 $x=b(a\neq b)$ 处不连续，则函数 $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$【B】.

A. 一定连续　　B 一定不连续　　C 有一个间断点　　D 有两个间断点

二、 解答题（每题 12 分，共 60 分）

6. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x\cos x\cos 2x}{x^3}$.

解　因 $\sin x\cos x\cos 2x=\dfrac{1}{4}\sin 4x$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x\cos x\cos 2x}{x^3}=\frac{1}{4}\cdot\frac{4^3}{6}=\frac{8}{3}$$

7. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}}{n}\right)^{1/x}$.

解　因 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{kx}-1}{x}=k$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}}{n}\right)^{1/x}$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\left(1-\frac{\mathrm{e}^x-1+\mathrm{e}^{2x}-1+\cdots+\mathrm{e}^{nx}-1}{n}\right)^{n/\left(\mathrm{e}^x-1+\mathrm{e}^{2x}-1+\cdots+\mathrm{e}^{nx}-1\right)}\right]^{\frac{\mathrm{e}^x-1+\mathrm{e}^{2x}-1+\cdots+\mathrm{e}^{nx}-1}{nx}}$$

$$=\mathrm{e}^{\frac{n+1}{2}}.$$

8. 设 $x_1=\sqrt{6},x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}\left(n\geq 1\right)$，证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求此极限.

解　因 $x_1=\sqrt{6}>2$，若 $x_n>2$，则 $x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}>2$，所以 $x_n>2\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$，

又：易得 $\{x_n\}$ 单减，所以极限存在，记 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，可得 $a=2$.

9. 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$，求 $f(x)$ 的间断点并判定其类型.

解　$f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}=\mathrm{e}^{\frac{x}{\sin x}}$，所以 $x=0$ 为第一类可去间断点，

$x=k\pi(k\neq 0)$ 为第二类间断点.

三、证明题（共 10 分）

1. ⑴叙述闭区间上连续函数的零点定理㈩

⑵证明方程 $x\mathrm{e}^x=2$ 在区间 $(0,1)$ 上有唯一解.