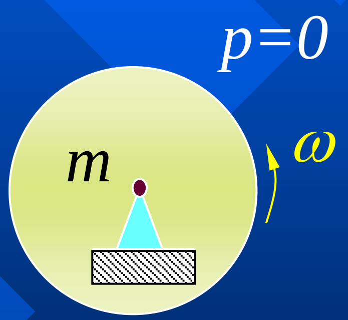
回顾：

质点系动力学：研究质点系**整体**运动特征量（动量、动量矩和动能）的**变化**与作用**力**间的关系。

主要内容

- 质点系的动量定理
- 质点系的动量矩定理
- 质点系的动能定理



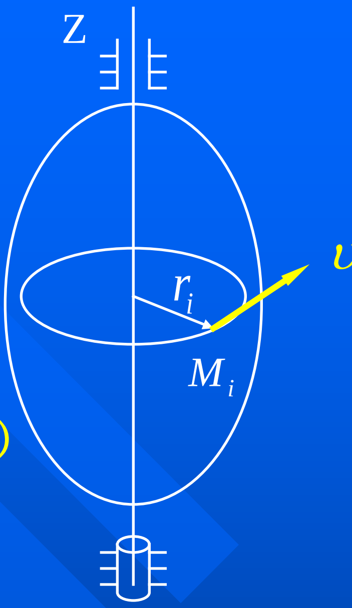
第十一章　动量矩定理

§ 11-1 转动惯量

$$\boxed{J_z = \sum m_i r_i^2}$$

若刚体的质量是连续分布，则 $\boxed{J_z = \int_m r^2 dm}$

（连续体）



转动刚体内所有各点的质量与该质点到转轴距离的平方的乘积之和定义为刚体对于转轴的转动惯量。

J_z为一恒正标量，其大小决定于轴的位置和刚体的质量分布，而与刚体的运动状态无关。刚体的转动惯量必须标明是对什么轴的，否则没有意义。

转动惯量是表征刚体动力学的一个重要物理量，刚体的转动惯量是刚体对某轴转动惯性大小的度量，它的大小表现了刚体转动状态改变的难易程度。单位为 $kg \cdot m^2$ 。

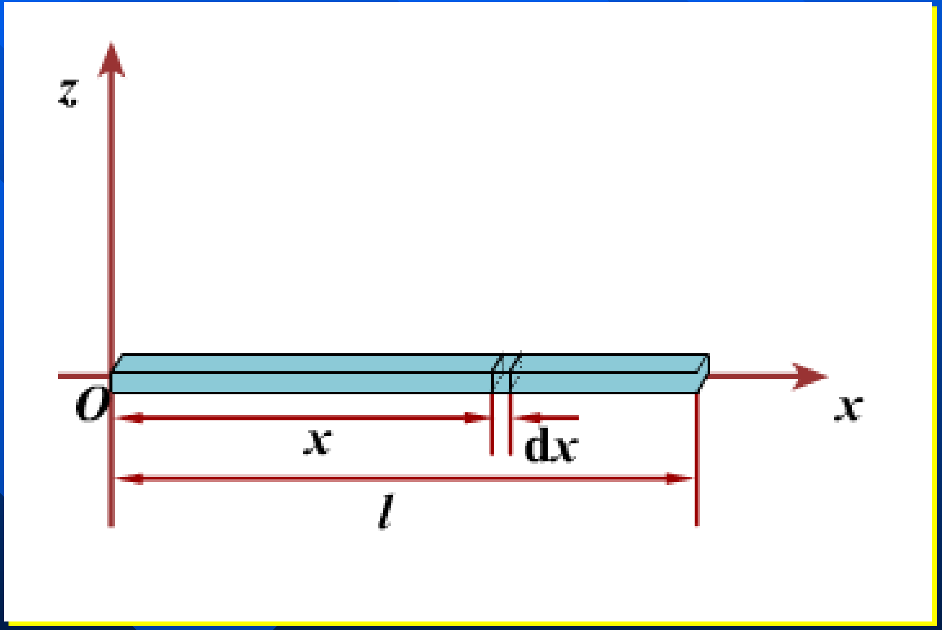
一、简单形状物体的转动惯量计算

1.均质细直杆对一端的转动惯量 J_z

匀质细直杆长为**l**,质量为**m**。

$$dm = \frac{m}{l} \cdot dx = \rho_l \cdot dx$$

$$J_z = \int_m r^2 dm = \int_0^l \rho_l x^2 \mathrm{d}x = \frac{\rho_l l^3}{3}$$



由 $m = \rho_l l$，得

$$J_z = \frac{1}{3} m l^2$$

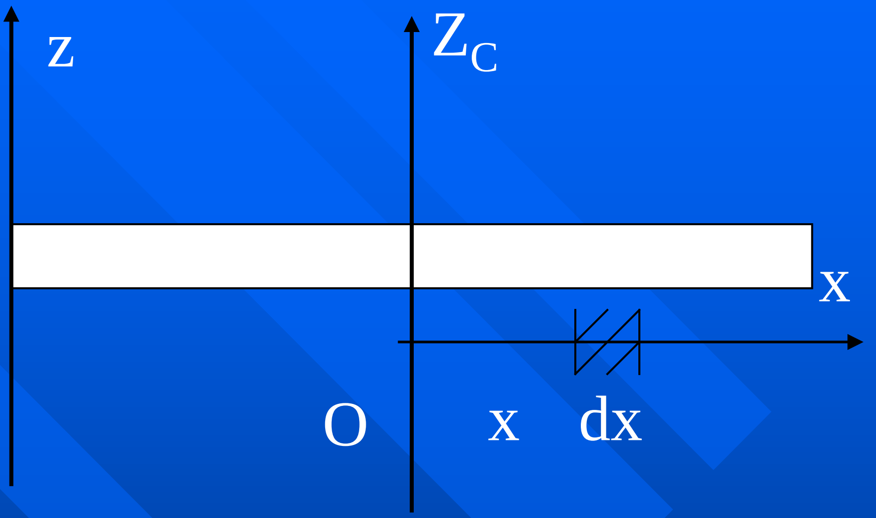
2. 均质细直杆对C轴（质心轴）的转动惯量 J_{z_C}

$$\mathrm{dm} = \frac{\mathrm{m}}{l} \cdot \mathrm{dx}$$

$$J_{z_C} = \int_M r^2 dm$$

$$J_{z_C} = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{m}{l} x^2 dx$$

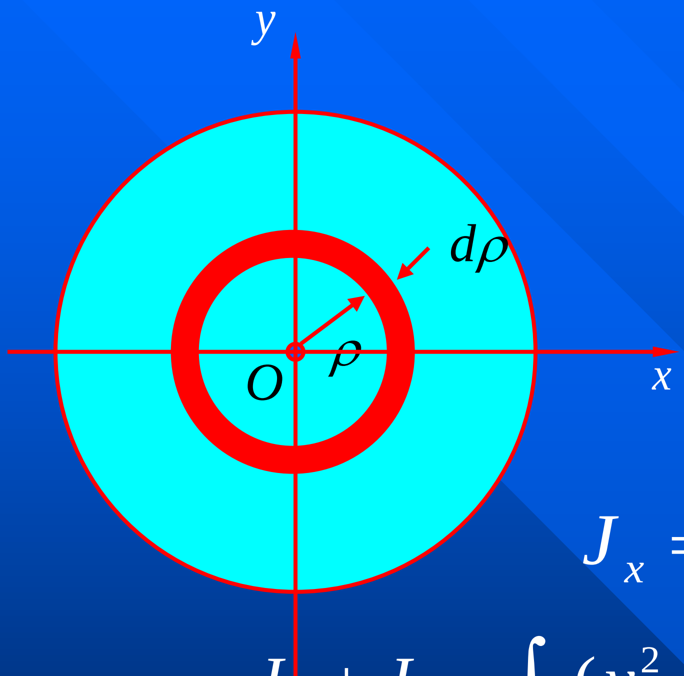
$$\boxed{J_{z_C} = \frac{1}{12} m l^2}$$



显然，刚体的转动惯量与转轴的位置有关，刚体的转动惯量必须标明是对什么轴的。

3. 均质圆盘半径为R，质量为m。

1）对Z 轴(O点)的转动惯量J_O；2）对 x 轴的转动惯量 J_x 。



$$dJ_O = \rho^2 \cdot \frac{m}{\pi R^2} 2\pi\rho\, d\rho$$

$$J_O = \int_0^R \rho^2 \cdot \frac{m}{\pi R^2} 2\pi\rho\, d\rho = \frac{mR^2}{2}$$

$$J_x = \int_A y^2 \cdot \frac{m}{\pi R^2} dA, \quad J_y = \int_A x^2 \cdot \frac{m}{\pi R^2} dA,$$

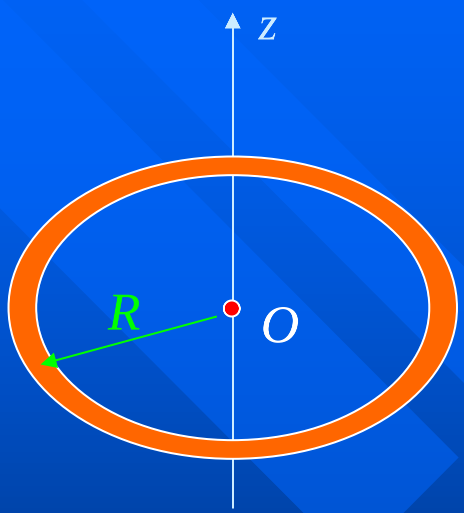
$$J_x + J_y = \int_A (y^2 + x^2) \cdot \frac{m}{\pi R^2} dA = J_O \qquad J_x = J_y = J_O / 2$$

$$\therefore \quad J_x = J_y = \frac{mR^2}{4}$$

均质圆柱对其中心轴的转动惯量表达式与均质圆盘相同。

4. 均质薄圆环对其中心轴的转动惯量

$$J_z=\sum m_i r_i^2=\sum m_i\cdot R^2=mR^2$$



以上4种常用的转动惯量需记忆，其余可推导或查表。

显然，各种不同均质物体对其中性轴的转动惯量的具体计算式不相同。

二、回转半径

由$\rho_z = \sqrt{\dfrac{J_z}{m}}$所定义的长度$\rho_z$ 称为刚体对 z 轴（一般是刚体的质心轴）的回转半径。

$$\boxed{J_z = m\rho_z^{\ 2}}$$

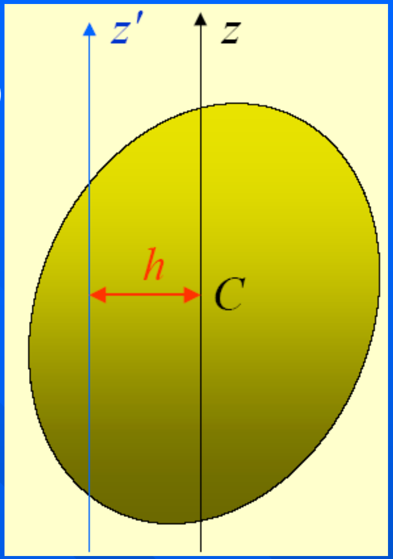
对于均质刚体,ρ_z 仅与几何形状有关，与密度无关。对于几何形状相同而材料不同（密度不同）的均质刚体，其回转半径是相同的。

物理意义： 如果保持刚体对某轴的转动惯量不变，而将其质量集中于一个质点，则该质点到转轴的距离就是刚体对该轴的回转半径。

在机械工程设计手册中，可以查阅到简单几何形状或已标准化的零件的转动惯量和回转半径。几种常见均质刚体对质心轴的 ρ_z 如下：

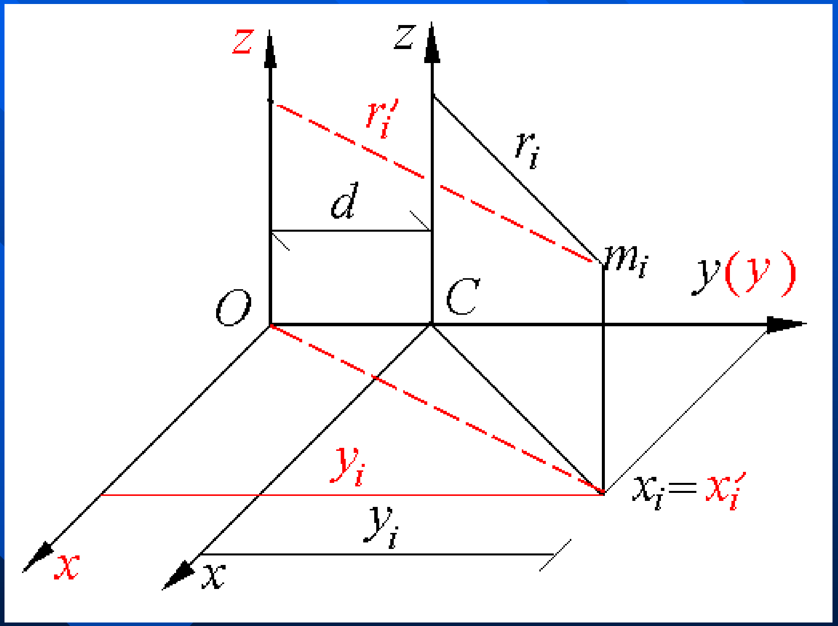
细直杆 $\rho_z = \dfrac{\sqrt{3}}{3} l$ 均质圆环 $\rho_z = R$ 均质圆板 $\rho_z = \dfrac{\sqrt{2}}{2} R$

三、转动惯量的平行移轴定理（平行移轴公式）



由转动惯量的计算公式可知，同一刚体对不同轴的转动惯量一般不相同。**转动惯量的平行轴定理给出了刚体对通过质心的轴的转动惯量和与该轴平行的轴的转动惯量之间的关系。**

$$\boxed{J_z = J_{zC} + md^2}$$



刚体对某轴的转动惯量等于刚体对通过质心且与该轴平行的轴的转动惯量，加上刚体的质量与两轴间距离的平方之乘积。

刚体对通过质心轴的转动惯量具有最小值。

计算转动惯量的组合法

当物体由几个规则几何形状的物体组成时，可先计算每一部分(物体)的转动惯量, 然后再加起来就是整个物体的转动惯量。 若物体有空心部分, 要把此部分的转动惯量视为负值来处理。

📖例题

动量矩定理

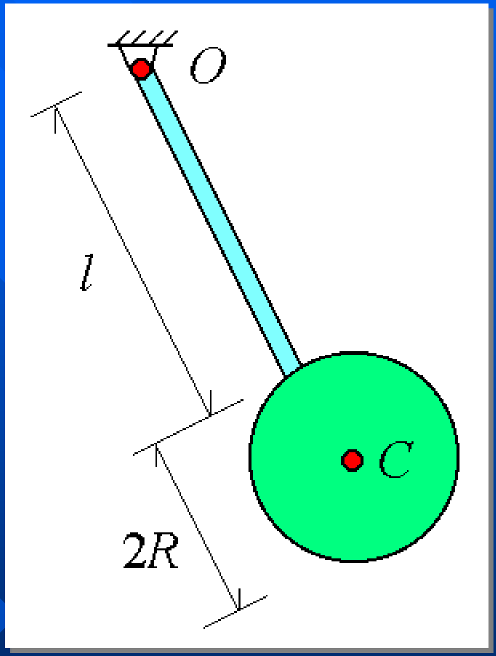
例 题

钟摆：

均质直杆m_1，l；

均质圆盘：m_2，R。

求 J_O。



解：

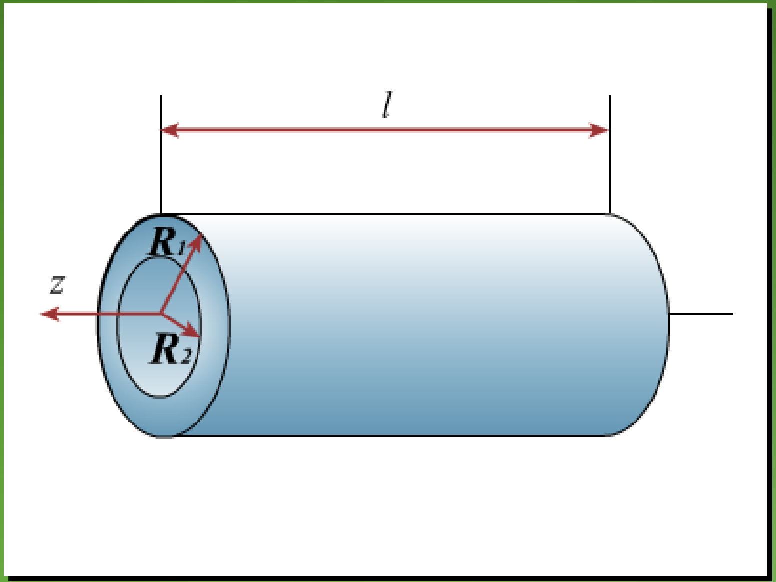
$$J_O = J_{O杆} + J_{O盘} = \frac{1}{3}m_1 l^2 + \frac{1}{2}m_2 R^2 + m_2 (l+R)^2$$

$$= \frac{1}{3}m_1 l^2 + \frac{1}{2}m_2 (3R^2 + 2l^2 + 4lR)$$

例题：已知： m, R_1, R_2 求 J_z。

解：$J_z = J_1 - J_2$

$$= \frac{1}{2} m_1 R_1^2 - \frac{1}{2} m_2 R_2^2$$



其中 $m_1 = \rho\pi R_1^2 l \quad m_2 = \rho\pi R_2^2 l$

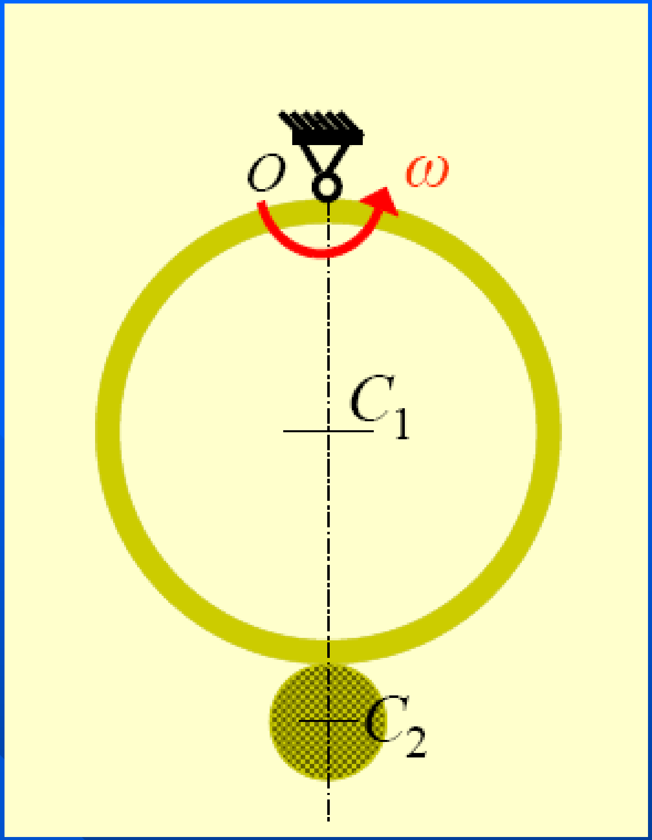
$$J_z = \frac{1}{2} \rho\pi l (R_1^4 - R_2^4)$$

$$= \frac{1}{2} \rho\pi l (R_1^2 - R_2^2)(R_1^2 + R_2^2)$$

由 $\rho\pi l (R_1^2 - R_2^2) = m$ ，得

$$J_z = \frac{1}{2} m (R_1^2 + R_2^2)$$

例 质量为m的均质细圆环与相同质量的均质圆盘固结，已知圆环半径是圆盘半径r的4倍，求组合体对轴O的转动惯量。



解： 设圆环对O轴的转动惯量为J_{O1}

圆盘对O轴的转动惯量为J_{O2}

组合体对O轴的转动惯量J_O:

$$J_O = J_{O1} + J_{O2}$$

$$J_{O1} = J_{C1} + m(4r)^2 = m(4r)^2 + m(4r)^2 = 32mr^2$$

$$J_{O2} = J_{C2} + m(8r+r)^2 = \frac{1}{2}mr^2 + m(8r+r)^2 = 81.5mr^2$$

$$J_O = 113.5mr^2$$

§ 11-2 动量矩

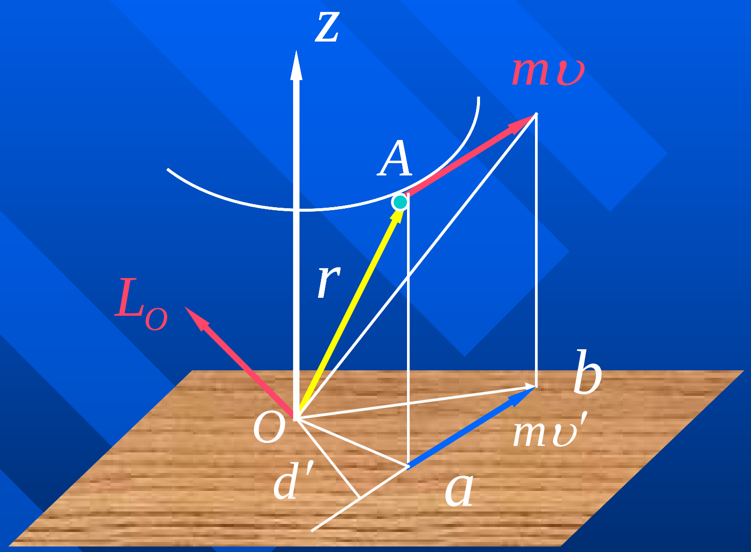
一、质点的动量矩

设质点A的动量为 $m\upsilon$ ，对定点的矢径为r。

定义：质点动量$m\upsilon$ 对O点的矩

$$\vec{L}_O = \vec{M}_O(\mathrm{m}\vec{\upsilon}) = \vec{r} \times \mathrm{m}\vec{\upsilon}$$

$$\vec{L}_o(m\vec{v}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{vmatrix}$$



与静力学中力对点之矩的定义类似，$\vec{L}_o(m\vec{v})$称为质点A对O点的动量矩。它被定义成矢量，方位垂直矢径和动量所决定的平面，指向按右手螺旋法则确定。

类似于力对点之矩和力对通过该点的轴之矩的关系，可得质点动量对通过O点的坐标轴（定轴）之矩为：

$$L_x(m\vec{v}) = [\vec{L}_O(m\vec{v})]_x$$

$$L_y(m\vec{v}) = [\vec{L}_O(m\vec{v})]_y$$

$$L_z(m\vec{v}) = [\vec{L}_O(m\vec{v})]_z$$

其中，$L_x(m\vec{v})$，$L_y(m\vec{v})$，$L_z(m\vec{v})$ 称为质点对定轴的动量矩。

二、质点系的动量矩

定义：
$$\begin{aligned}\vec{L}_O &= \vec{r}_1 \times \mathrm{m}_1\vec{\upsilon}_1 + \vec{r}_2 \times \mathrm{m}_2\vec{\upsilon}_2 + \cdots + \vec{r}_n \times \mathrm{m}_n\vec{\upsilon}_n \\ &= \sum \vec{r}_i \times \mathrm{m}_i\vec{\upsilon}_i \\ &= \sum \vec{M}_O(\mathrm{m}\vec{\upsilon}_i)\end{aligned}$$

$$L_z = \sum L_z(m_i\vec{v}_i)$$

类似地有，质点系对某点O的动量矩矢量在通过该点的某根轴（z轴）上的投影等于质点系对该轴的动量矩。即

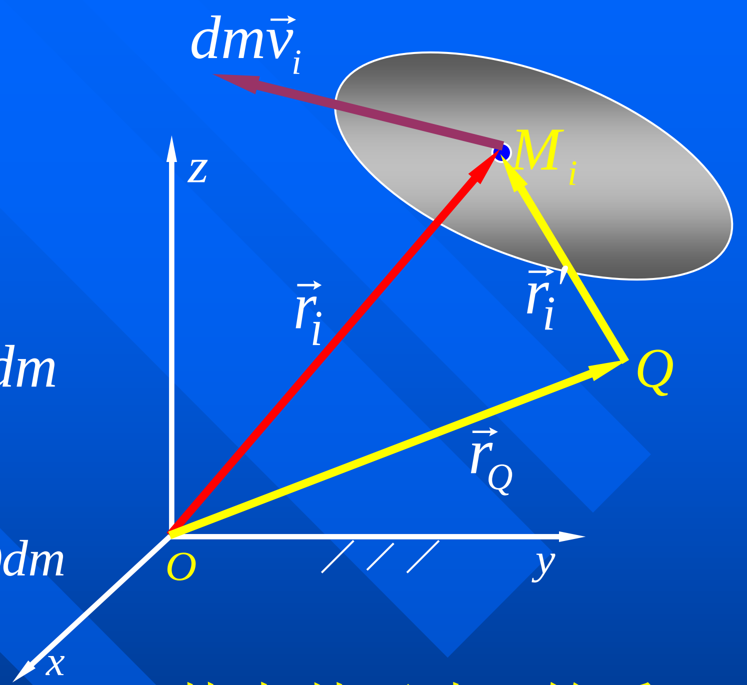
$$[\vec{L}_O]_z = L_z$$

三、 质点系相对于定点O的动量矩与对质心C点动量矩的关系

$$\vec{r}_i = \vec{r}_Q + \vec{r}_i^{\,'}$$

Q为一任意动点

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d\vec{r}_Q}{dt} + \frac{d\vec{r}_i^{\,'}}{dt} \qquad \vec{v}_i = \vec{v}_Q + \frac{d\vec{r}_i^{\,'}}{dt}$$



$$\vec{L}_O = \int(\vec{r}_i \times \vec{v}_i)dm = \int(\vec{r}_Q + \vec{r}_i^{\,'})\times(\vec{v}_Q + \frac{d\vec{r}_i^{\,'}}{dt})dm$$

$$= \int \vec{r}_Q \times (\vec{v}_Q + \frac{d\vec{r}_i^{\,'}}{dt})dm + \int(\vec{r}_i^{\,'} \times \vec{v}_Q)dm + \int(\vec{r}_i^{\,'} \times \frac{d\vec{r}_i^{\,'}}{dt})dm$$

$$= \int(\vec{r}_Q \times \vec{v}_i)dm + \int(\vec{r}_i^{\,'} \times \vec{v}_Q)dm + \int(\vec{r}_i^{\,'} \times \frac{d\vec{r}_i^{\,'}}{dt})dm$$

$$= \vec{r}_Q \times \int \vec{v}_i dm + \int \vec{r}_i^{\,'} dm \times \vec{v}_Q + \int(\vec{r}_i^{\,'} \times \frac{d\vec{r}_i^{\,'}}{dt})dm$$

$$= \vec{r}_Q \times \vec{p} + m(\vec{r}_{QC} \times \vec{v}_Q) + \vec{L}_Q'$$

其中基于点Q的质心计算公式

$$\vec{r}_{QC} = \frac{\int \vec{r}_i^{\,'} dm}{m}$$

$$\int \vec{r}_i^{\,'} dm = m\vec{r}_{QC}$$

$$\vec{L}_Q' = \vec{L}_O - \vec{r}_Q \times \vec{p} - m(\vec{r}_{QC} \times \vec{v}_Q)$$

$$\vec{L}'_Q = \vec{L}_O - \vec{r}_Q \times \vec{p} - m(\vec{r}_{QC} \times \vec{v}_Q)$$

讨论：

1、*Q*点与质点系的质心*C*点重合： $\vec{r}_{QC} = 0$

$$\vec{L}_O = \vec{L}'_C + \vec{r}_C \times \vec{p}$$

质点系对任一定点0的动量矩，等于质点系相对于质心的动量矩与质点系的动量对0点之矩的矢量和

2、当Q为定点： $\vec{v}_Q = 0$

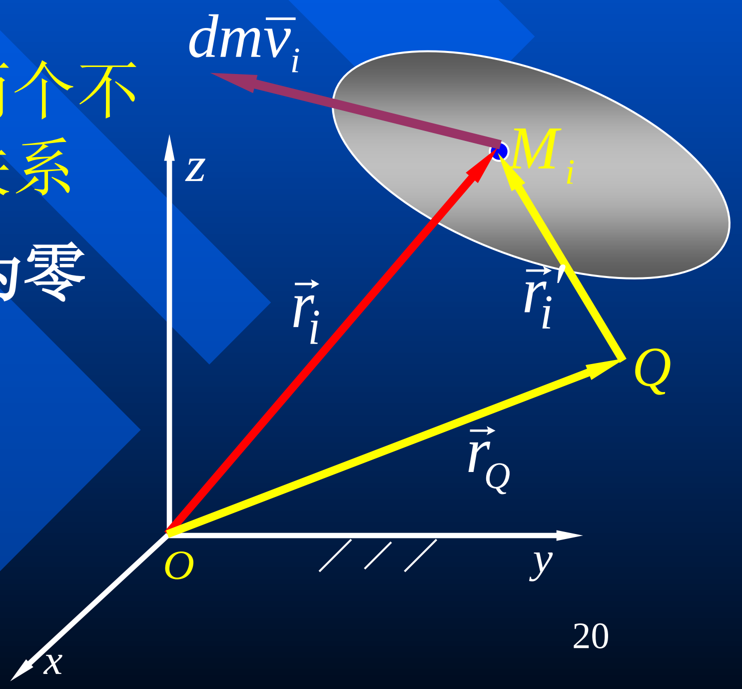
$\vec{L}'_Q = \vec{L}_O - \vec{r}_Q \times \vec{p}$ ——质点系对于两个不同定点的动量矩关系

3、当*Q*为定点与质心*C*重合：质心速度为零

$\vec{p} = m\vec{v}_c = 0 \quad \vec{v}_Q = 0 \qquad \vec{L}_O = \vec{L}'_C$

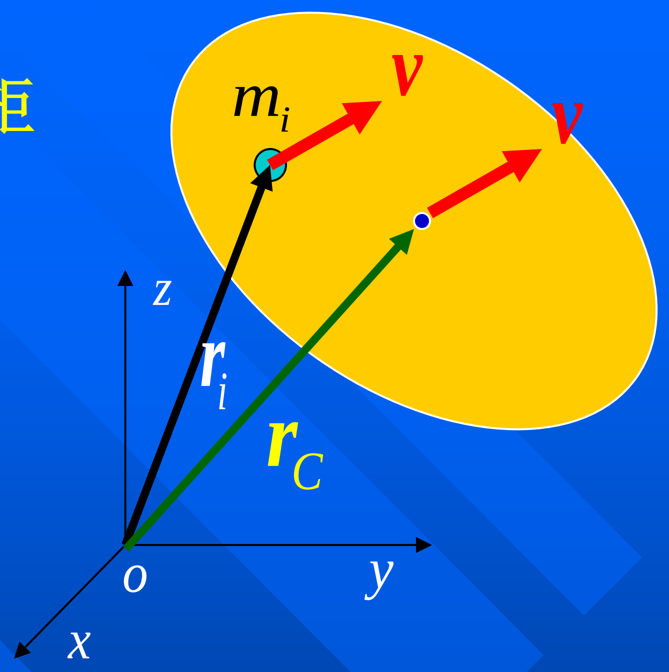
4、当 $\vec{r}_{QC} // \vec{v}_Q$ 时： $\vec{r}_{QC} \times \vec{v}_Q = 0$

$$\vec{L}'_Q = \vec{L}_O - \vec{r}_Q \times \vec{p}$$



四、刚体的动量矩

1.平动(平移) 刚体的动量对定点O之矩



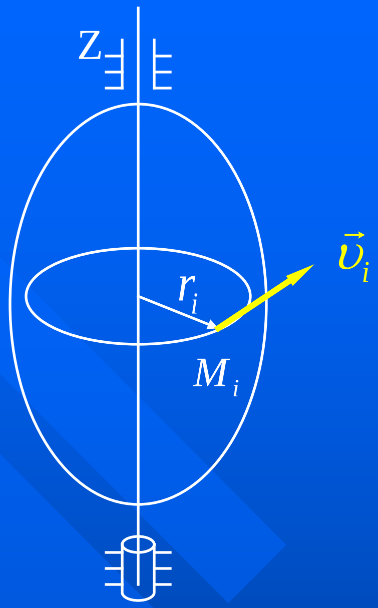
$$\vec{\mathbf{L}}_{\mathbf{o}} = \sum_{i=1}^{n}(\vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{i}} \times m_i \vec{\mathbf{v}}) = \sum_{i=1}^{n}(m_i \vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{i}}) \times \vec{\mathbf{v}}$$

$$= m\vec{\mathbf{r}}_C \times \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{C}} \times m\vec{\mathbf{v}}$$

对平动（平移）刚体，可将全部质量集中于质心，作为一个质点计算其动量矩。

2. 定轴转动刚体对转轴的动量矩

$$L_z=\sum M_z(m_i\upsilon_i)=\sum(m_i\upsilon_i)r_i$$
$$=\sum m_i\omega r_i^2=(\sum m_i r_i^2)\omega$$

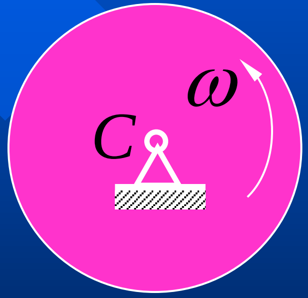


$J_z=\sum m_i r_i^2$ ——刚体对z轴的转动惯量

因此

$$\boxed{L_z=J_z\omega}$$

（代数量，在平面上逆时针为正，顺时针为负）



上式表明，定轴转动刚体对转轴的动量矩等于刚体对该轴的转动惯量与转动角速度之积。转动惯量与角速度同符号。

3. 平面运动刚体对定轴的动量矩

从运动学原理可知，若取质心为基点，刚体平面运动可分解为随质心的平移（平动）和绕质心的转动这两种运动的合成。

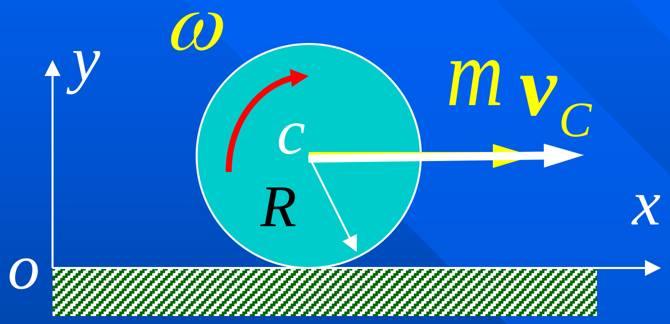
设刚体相对于质心（轴）转动的动量矩为$J_c\omega$；而刚体随质心平动时，动量为 $m\vec{v}_c$，其相对于定轴（O轴）的动量矩为 $M_o(m\vec{v}_c)$ 故作平面运动刚体对任一定轴（O轴）的动量矩为以上两者的合成： $L_o = J_c\omega + M_o(m\vec{v}_c)$

回顾：质点系对任一固定参考点O的动量矩，等于质点系相对于质心C的动量矩与质点系的动量对O点之矩的矢量和。

$$\vec{L}_O = \vec{L}_C + \vec{r}_C \times \vec{p}$$

$$L_{Oz} = L_{Cz} + \left[\vec{r}_C \times \vec{p}\right]_z = J_{Cz}\omega + M_z(m\vec{v}_C)$$

例：半径为R，质量为m车轮视为均质圆盘，在地面上滚动，其质心的速度为v_C，角速度为 ω。求圆盘对O点的动量矩。



解：刚体作平面运动。

$$L_o = -Rmv_c - J_C\omega$$

$$L_o = -Rmv_c - \frac{1}{2}mR^2\omega$$

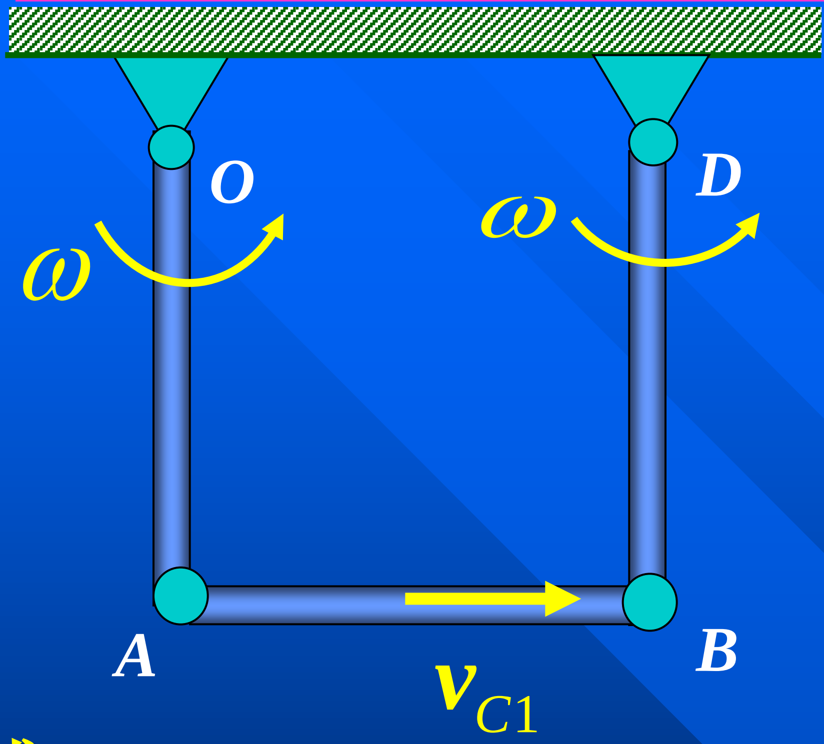
$$(J_C = \frac{1}{2}mR^2)$$

$$v_c = \omega R$$

（逆时针为正）

$$\boxed{L_o = J_c\omega + M_o(m\vec{v}_c)}$$

例：求系统在此瞬时对O轴的动量矩。设各杆长为L，质量为m



解：分别计算每个刚体对O轴的动量矩

$$L_o(OA) = J_O\omega = \frac{1}{3}mL^2\omega$$

$$L_o(AB) = mv_{C1}L = mL^2\omega$$

$$L_o(BD) = J_D\omega + 0 = \frac{1}{3}mL^2\omega$$

或：

$$L_o(BD) = J_{C_2}\omega + mv_{C_2}\cdot\frac{L}{2} = \frac{1}{12}mL^2\omega + m\cdot\frac{1}{2}L\omega\cdot\frac{L}{2} = \frac{1}{3}mL^2\omega$$

$$L_o = L_o(OA) + L_o(AB) + L_o(BD) = \frac{5}{3}mL^2\omega$$

$$\vec{L}'_Q = \vec{L}_O - \vec{r}_Q \times \vec{p}$$

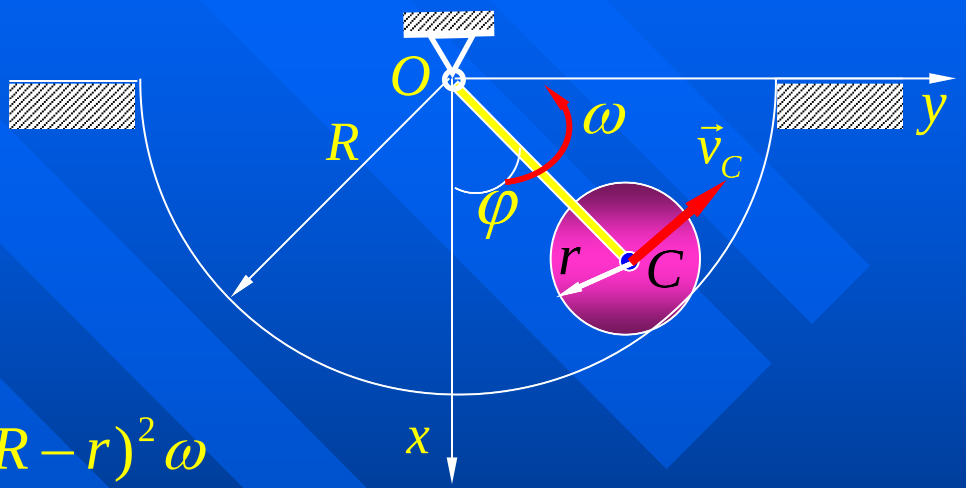
$$\vec{L}_O = \vec{L}_D + \vec{r}_D \times \vec{p}$$

——质点系对于两个不同定点的动量矩关系

例： 已知半径为*r*的均质轮，在半径为*R*的固定凹面上只滚不滑，轮重*W*，均质杆*OC*重*P*，杆长*l*，在图示瞬时杆*OC*的角速度为ω ，求系统在该瞬时对*O*点的动量矩

解：

$$(L_O)_{OC} = J_O\omega = \frac{1}{3}\frac{p}{g}l^2\cdot\omega$$



（逆时针为正）

$$(L_O)_C = -J_C\omega_C + \frac{W}{g}v_C(R-r)$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{W}{g}r^2\frac{(R-r)\omega}{r} + \frac{W}{g}(R-r)^2\omega$$

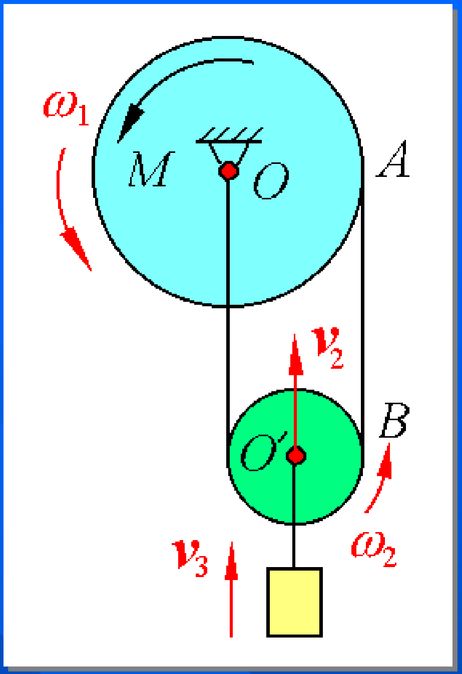
$$= \frac{W}{2g}(R-r)(2R-3r)\omega$$

$$L_O = (L_O)_{OC} + (L_O)_C = \frac{p}{3g}l^2\omega + \frac{W}{2g}(R-r)(2R-3r)\omega$$

[例] 滑轮A：m_1，R_1，$R_1=2R_2$，J_1

滑轮B：m_2，R_2，J_2；物体C：m_3，v_3

求系统对O轴的动量矩。



解: $L_O = L_{OA} + L_{OB} + L_{OC}$

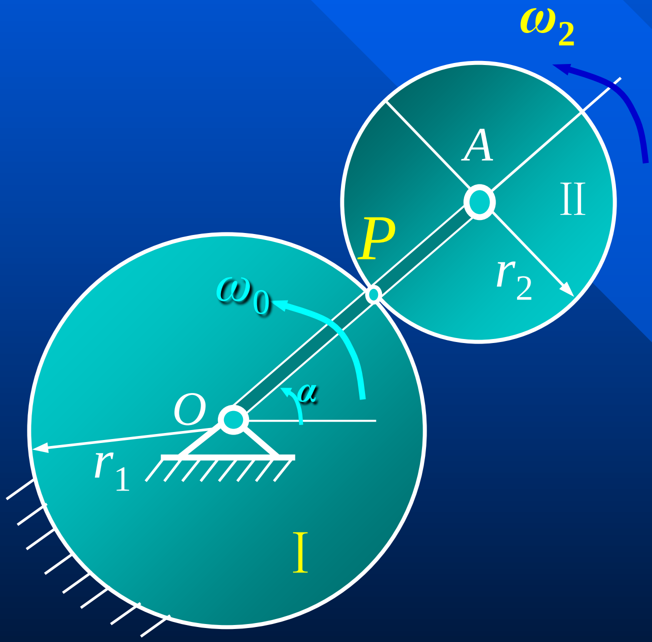
$$= J_1\omega_1 + (J_2\omega_2 + m_2 v_2 R_2) + m_3 v_3 R_2$$

$$v_3 = v_2 = \frac{1}{2} v_1$$

$$\omega_2 = \frac{v_2}{R_2} \qquad \omega_1 = \frac{v_1}{R_1}$$

$$L_O = \left(\frac{J_1}{R_2^{\ 2}} + \frac{J_2}{R_2^{\ 2}} + m_2 + m_3\right) R_2 v_3$$

行星齿轮机构在水平面内运动。质量为m_1的均质曲柄**OA**带动行星齿轮II在固定齿轮I上纯滚动。齿轮II的质量为m_2，半径为r_2。定齿轮I的半径为r_1。求轮II相对于自身质心轴的动量矩以及对轴O的动量矩。



解:

$$v_A = (r_1 + r_2)\cdot\omega_O = r_2\omega_2$$

$$\omega_2 = \frac{r_1 + r_2}{r_2}\omega_0$$

$$L_A = J_A\omega_2 = J_A\frac{r_1 + r_2}{r_2}\omega_0$$

根据

$$\boxed{L_o = J_c\omega + M_o(m\vec{v}_c)}$$

$$L_O = M_O(mv_A) + L_A$$

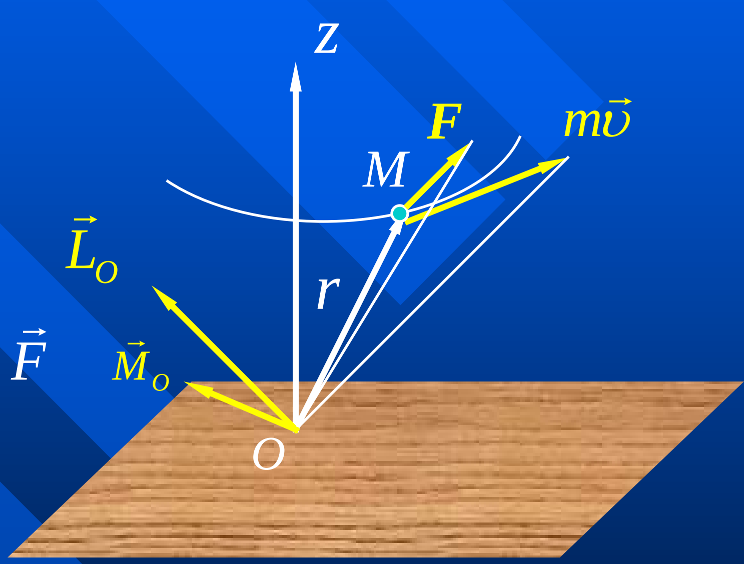
得 $$L_O = (r_1 + r_2)\cdot m_2 v_A + J_A\omega_2$$

§ 11-3 动量矩定理

质点对定点O的动量矩定理

设质点M在力F的作用下，对定点O的动量矩为

$$\vec{L}_O = \vec{M}_O(\mathrm{m}\vec{\upsilon}) = \vec{r}\times\mathrm{m}\vec{\upsilon}$$



将上式两边对时间t求导数：

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r}\times\mathrm{m}\vec{\upsilon}) = \vec{\upsilon}\times\mathrm{m}\vec{\upsilon} + \vec{r}\times\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{m}\vec{\upsilon}) = \vec{r}\times\vec{F}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t} = \vec{M}_O(\vec{F})}$$

——质点对定点O的动量矩定理

质点系对定点O的动量矩定理

设质点系由n个质点组成，其中第i个质点对定点O的动量矩为 $\vec{L}_{Oi}$

质点所受的外力对O的矩为$\vec{M}_{Oi}$，

质点所受的内力对O点的矩为$\vec{M}^{*}_{Oi}$。

对每个质点应用动量矩定理

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_{Oi}}{\mathrm{d}t} = \vec{M}_{Oi} + \vec{M}^{*}_{Oi} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

将以上n个方程相加，得

$$\sum \frac{\mathrm{d}\vec{L}_{Oi}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum \vec{L}_{Oi}\right) = \sum \vec{M}_{Oi} + \sum \vec{M}^{*}_{Oi}$$

$$\sum \frac{\mathrm{d}\vec{L}_{Oi}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sum \vec{L}_{Oi}) = \sum \vec{M}_{Oi} + \sum \vec{M}^{*}_{Oi}$$

由于内力的主矩恒等于零 $\sum \vec{M}^{*}_{Oi} = 0$

则有

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \sum \vec{M}_{Oi}}$$

——质点系对定点O的动量矩定理

质点系对任一定点的动量矩对时间的导数，等于作用于质点系的所有外力对于同一点之矩的矢量和。

投影形式：

$$\frac{dL_x}{dt} = \Sigma M^{e}_{xi} \qquad \frac{dL_y}{dt} = \Sigma M^{e}_{yi} \qquad \frac{dL_z}{dt} = \Sigma M^{e}_{zi}$$

质点系对任一定轴的动量矩对时间的导数，等于作用于质点系的所有外力对于同一轴之矩的代数和。

讨 论

（1）若恒有 $\sum \vec{M}_{Oi} = 0$, 有 $\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t} = 0$ ，即

$$\vec{L}_O = \sum \vec{M}_O(\mathrm{m}\vec{\upsilon}_i) = \text{常矢量}$$

（2）若恒有 $\sum M_{xi} = 0$, 则有 $\dfrac{\mathrm{d}L_x}{\mathrm{d}t} = 0$ ，即

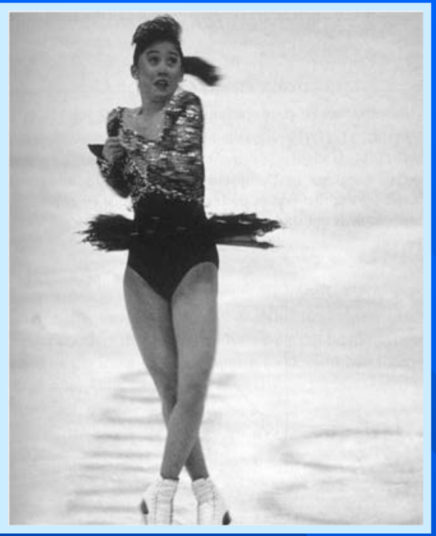
$$L_x = \sum M_x(m\upsilon_i) = \text{常量}$$

——质点系动量矩守恒定理

如果作用在质点系上所有外力对某一定点（定轴）之矩的矢量和（代数和）恒为零, 则该质点系对该点（该轴）的动量矩保持不变。

质点系的内力矩不能改变质点系的动量矩

如：花样滑冰、芭蕾舞等



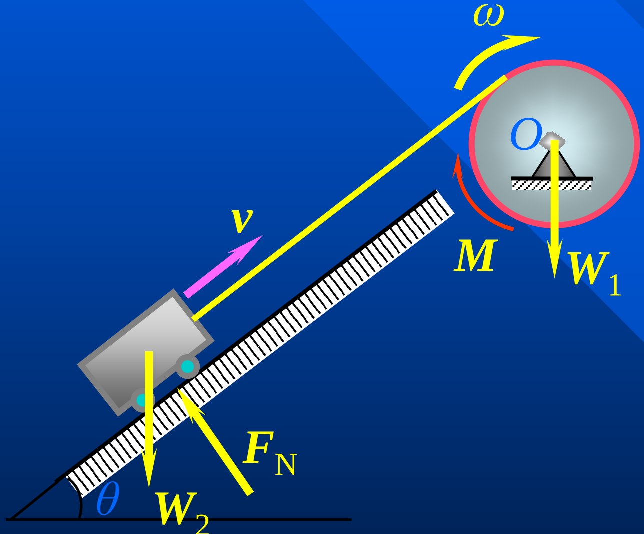
芭蕾舞演员伸臂抬腿旋转，收回臂、腿时将会使旋转速度更快，因为对z轴动量矩守恒。

$$\omega_1 J_1 = \omega_2 J_2$$

$$J_2 < J_1, \qquad \omega_2 > \omega_1$$

📖例题

动量矩定理



高炉运送矿石用的卷扬机如图所示。已知鼓轮的半径为R，质量为m_1，轮绕O轴转动。小车和矿石总质量为m_2。作用在鼓轮上的力偶矩为M，鼓轮对转轴的转动惯量为J，轨道的倾角为θ。设绳的质量和各处摩擦均忽略不计，求小车的加速度a。

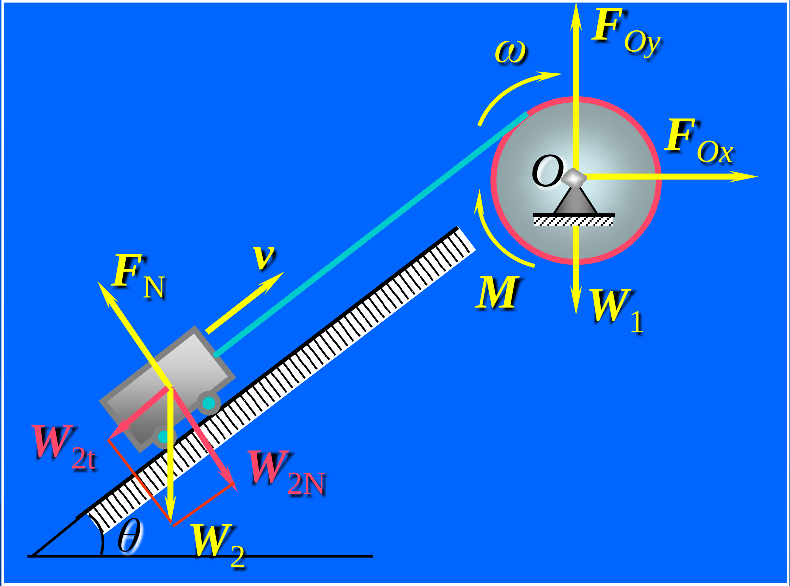
例题

动量矩定理

例 题

解： 取小车与鼓轮组成质点系，视小车为质点。以逆时针为正，此质点系对O轴的动量矩为

$$L_O = -(J\omega + m_2 vR)$$



受力分析：

力偶M，重力W_1和W_2，轴承O的约束力F_{Ox}和F_{Oy}，轨道对小车的约束力F_N。

W_1，F_{Ox}，F_{Oy}对O轴力矩为零。

将W_2沿轨道及其垂直方向分解为W_{2t}和W_{2N}，W_{2N}与F_N相抵消。

而 $W_{2t} = P_2 \sin\theta = m_2 g \sin\theta$，则系统外力对$O$轴的矩为

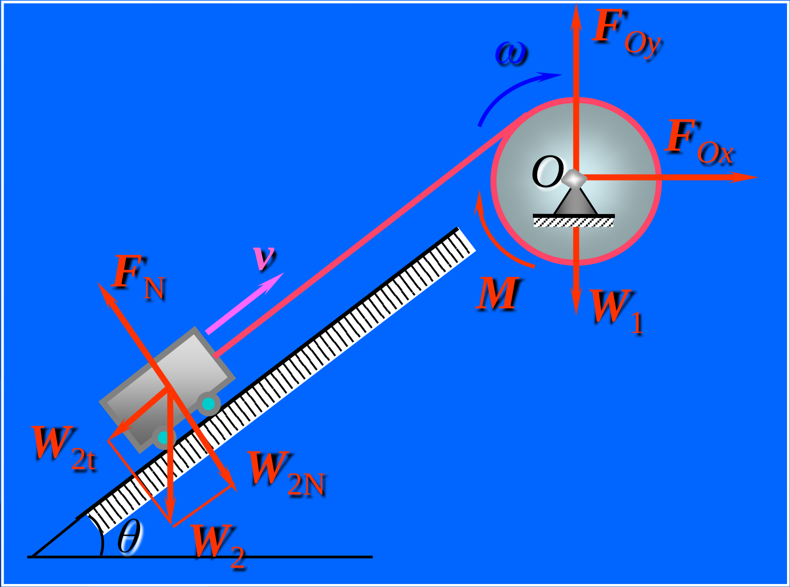
$$M_o^{(e)} = -M + m_2 g \sin\theta \cdot R$$

例题

动量矩定理

例 题

由质点系对O轴的动量矩定理，有



$$\frac{dL_{Oz}}{dt} = M_{Oz}$$

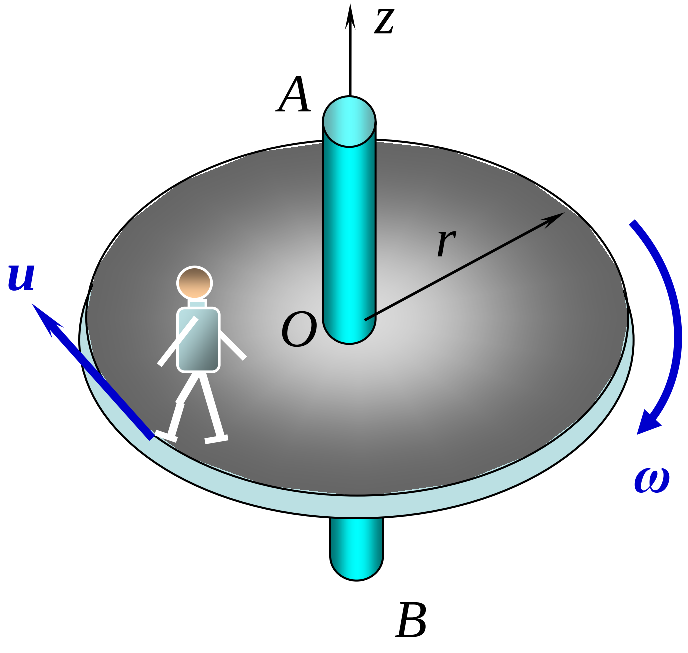
$$\frac{d}{dt}\left[J\omega + m_2 vR\right] = M - m_2 g\sin\theta \cdot R$$

因 $\omega = \dfrac{v}{R}, \dfrac{dv}{dt} = a$，于是解得

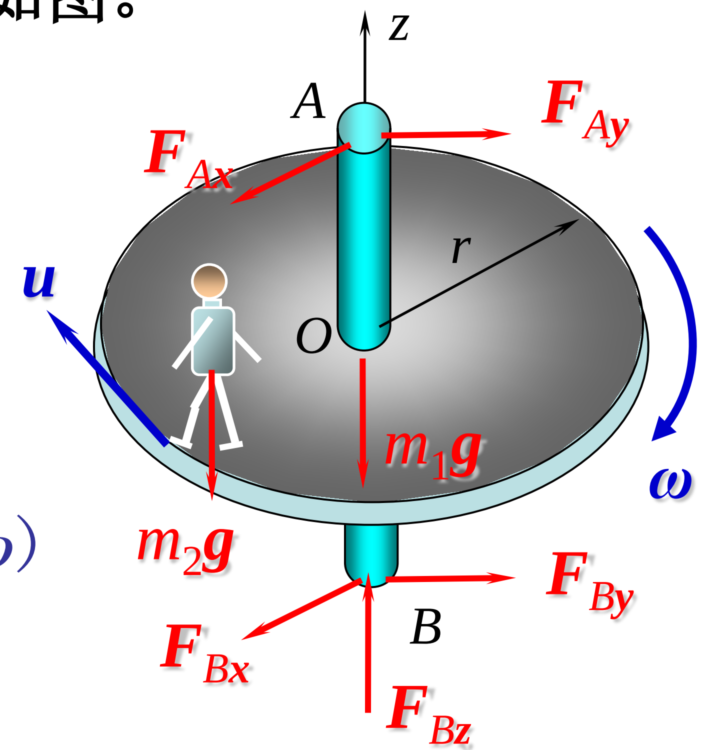
$$a = \frac{MR - m_2 gR^2\sin\theta}{J + m_2R^2}$$

若 $M > m_2 g\sin\theta \cdot R$，则 $a > 0$，小车的加速度沿斜坡向上。

例题 如图所示，在静止的水平匀质圆盘上，一人沿盘边缘由静止开始相对盘以速度$\boldsymbol{u}$行走，设人质量为m_2，盘的质量为m_1，盘半径r。求盘的角速度。



解：以人和盘为研究对象，画受力图如图。



$$L_z = -J_z\omega - m_2 v \cdot r$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r \,, \quad v = r\omega + u$$

$$L_z = -J_z\omega - m_2 r(r\omega + u)$$

$$L_z = -\frac{1}{2} m_1 r^2 \omega - (m_2 r u + m_2 r^2 \omega)$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = \sum M_z(\boldsymbol{F}_i^{(e)})}$$

$\sum M_z(\mathrm{F}_i^{(e)}) = 0$ ，$\boldsymbol{L_z}$=C（常数）初始静止 $\boldsymbol{L_{z0}}$=0

$$-\frac{1}{2} m_1 r^2 \omega - (m_2 r u + m_2 r^2 \omega) = 0$$

$$\omega = -\frac{2m_2}{2m_2 + m_1} \cdot \frac{u}{r}$$

（逆时针）

§ 11-4 刚体定轴转动的微分方程

将定轴转动刚体对z轴的动量矩 $L_z = J_z\omega$， 代入动量矩定理

$$\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = \sum M_{zi}$$

得

$$\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(J_z\omega) = J_z\alpha$$

因此有

$$\boxed{J_z\alpha = \sum M_{zi}}$$

——刚体定轴转动的微分方程

或

$$\boxed{J_z\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = \sum M_{zi}}$$

$$J_z\alpha = \sum M_{zi}$$

理解转动惯量的物理意义：当外力矩不变时，J_z越大，则α越小，即刚体的转动惯量越大，其保持原有运动状态的惯性也越大。因此，就像质量是质点运动的惯性量度一样，刚体的转动惯量是刚体转动时惯性的量度。

2）．若$\sum M_{zi}$=常量，则α=常量，刚体作匀角速度转动。

将$J_z\alpha = \sum M_{zi}$与 $m\vec{a} = \vec{F}$ 比较，刚体的转动惯量 J_z是刚体转动惯性的度量。

解决两类问题：

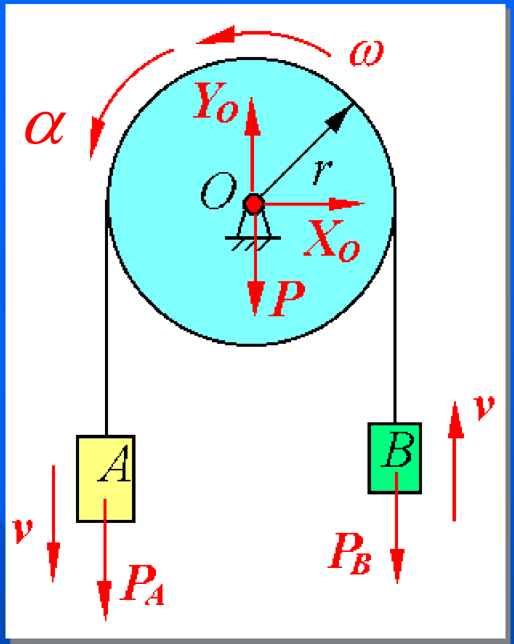
✶已知作用在刚体的外力矩，求刚体的转动规律。

✸已知刚体的转动规律，求作用于刚体的外力（矩）。

但不能求出轴承处的约束反力，需用质心运动定理求解。

[例3] 已知: $P_A > P_B$； P ； r 。求 α 。

$$J_O\alpha = (P_A - P_B)r \quad ?$$



解: 取整个系统为研究对象,

受力分析如图示。 运动分析: $v = r\omega$

$$M_O^{(e)} = P_A r - P_B r = (P_A - P_B)r$$

$$L_O = \frac{P_A}{g} v\cdot r + \frac{P_B}{g} v\cdot r + J_O\omega$$

将 $J_O = \frac{1}{2}\frac{P}{g}r^2$ 代入, 得 $L_O = \frac{\omega r^2}{g}(P_A + P_B + \frac{P}{2})$

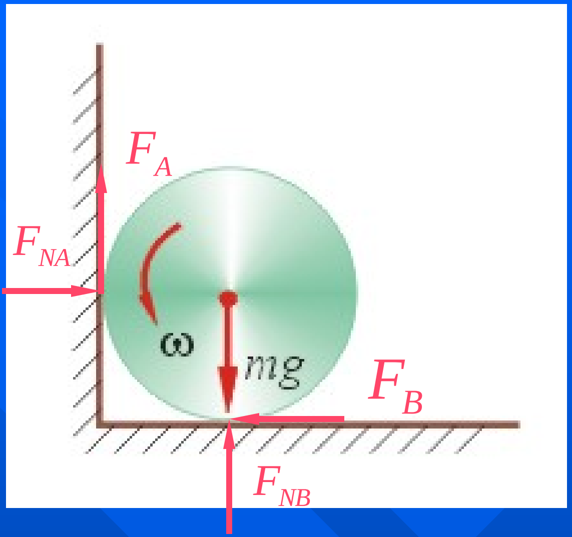
由动量矩定理: $\frac{d}{dt}[\frac{\omega r^2}{g}(P_A + P_B + \frac{P}{2})] = (P_A - P_B)r$

$$\therefore \alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{g}{r}\cdot\frac{P_A - P_B}{P_A + P_B + P/2} = \frac{(P_A - P_B)r}{\frac{P_A}{g}r^2 + \frac{P_B}{g}r^2 + J_O}$$

例

均质圆柱半径为r，质量为m，置该圆柱于墙角，初时角速度ω_0，由于摩擦阻力，使转动减速，摩擦因数 f

求：使圆柱停止所需的时间。



解： 受力分析

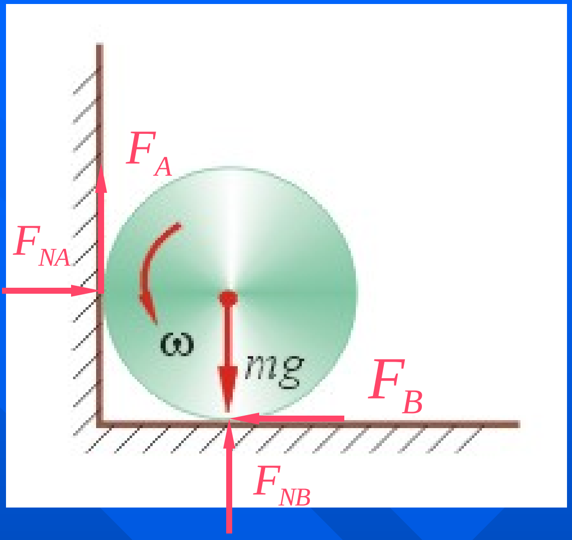
运动分析：绕质心转动，质心不动。

应用刚体定轴转动的微分方程

$$J\alpha = \sum M_{zi}$$

$$\frac{1}{2}mr^2\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -F_A r - F_B r \qquad (1)$$

补充方程，应用质心运动定理



$$ma_c = \Sigma F \qquad \begin{cases} m\ddot{x}_c = \Sigma F_x \\ m\ddot{y}_c = \Sigma F_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = F_{NA} - F_B & (2) \\ 0 = F_{NB} + F_A - mg & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_A = F_{NA} \cdot f & (4) \\ F_B = F_{NB} \cdot f & (5) \end{cases}$$

方程（2）～（5）中 未知量 F_A, F_B, F_{NA}, F_{NB}

解得 $F_A = \dfrac{mgf^2}{1+f^2}$， $F_B = \dfrac{mg\ f}{1+f^2}$ 代入（1）式

解得 $$F_A=\frac{mgf^2}{1+f^2},\quad F_B=\frac{mg\ f}{1+f^2}$$ 代入（1）式

得
$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=-\frac{2gf(1+f)}{r(1+f^2)}$$

积分
$$\int_{\omega_0}^{0}\mathrm{d}\omega=-\frac{2gf'(1+f)}{r(1+f^2)}\int_0^t\mathrm{d}t$$

$$t=\frac{(1+f^2)r\omega_0}{2gf(1+f)}$$

如果需进一步要求解圆柱到运动停止一共转过的圈数n，则可作如下变换：

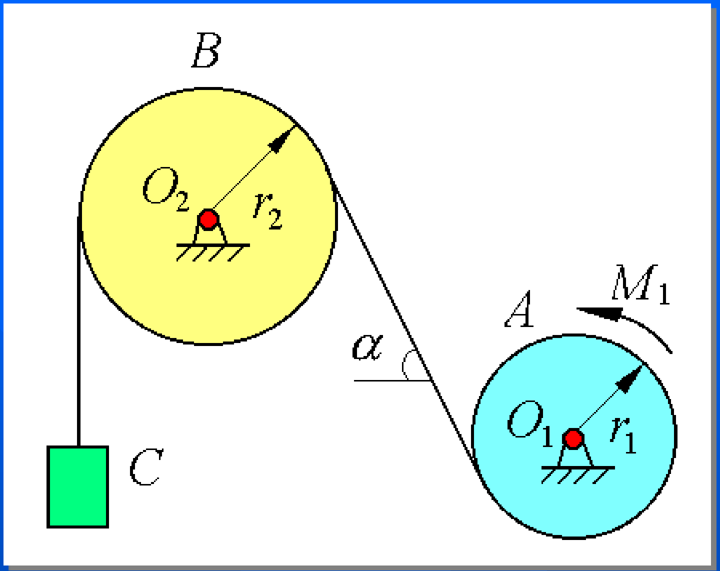
$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=-\frac{2gf(1+f)}{r(1+f^2)}\qquad\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\varphi}\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\varphi}\cdot\omega$$

$$\omega\mathrm{d}\omega=-\frac{2gf(1+f)}{r(1+f^2)}\mathrm{d}\varphi\qquad\int_0^{\varphi_m}-\frac{2gf(1+f)}{r(1+f^2)}\mathrm{d}\varphi=\int_{\omega_o}^{0}\omega\mathrm{d}\omega$$

$$n=\frac{\varphi_m}{2\pi}$$

[例] 提升装置中，轮A、B的重量分别为P_1、P_2，半径分别为r_1、r_2，可视为均质圆盘；物体C的重量为P_3；轮A上作用常力偶M_1。

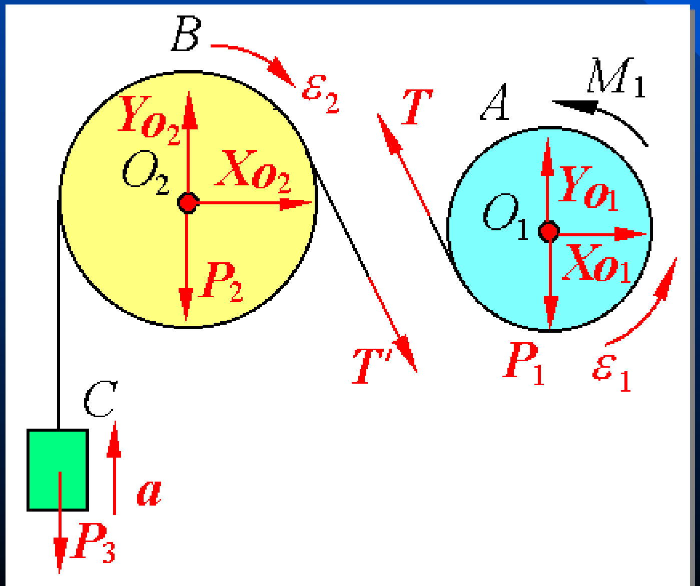
求 物体C上升的加速度。



解: 取轮A为研究对象，根据定轴转动微分方程 $\frac{1}{2}\frac{P_1}{g}r_1^2\cdot\varepsilon_1 = M_1 - Tr_1$ (1)

取轮B连同物体C为研究对象，根据质点系对定轴的动量矩定理

$$\frac{d}{dt}[-(\frac{1}{2}\frac{P_2}{g}r_2^2\cdot\omega_2+\frac{P_3}{g}vr_2)] = P_3 r_2 - T'r_2 \quad (2)$$



运动学补充方程 $r_2\omega_2=v,\ r_2\varepsilon_2=a=r_1\varepsilon_1$

化简(2) 得: $\frac{P_2+2P_3}{2g}a=T'-P_3$

化简(1) 得: $\frac{P_1}{2g}a=\frac{M_1}{r_1}-T$

$$\therefore a=\frac{M_1/r_1-P_3}{P_1+P_2+2P_3}\cdot 2g$$

例

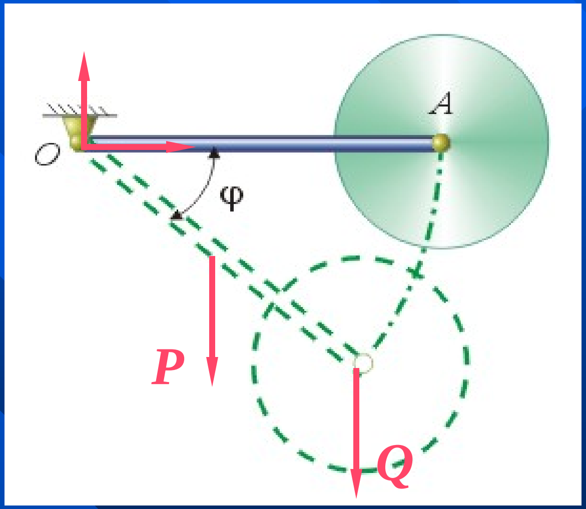
已知杆OA长为l，重为P。可绕过O点的水平轴在铅直面内转动，杆的A端用铰链铰接一半径为R、重为Q的均质圆盘，若初瞬时OA杆处于水平位置，系统静止。略去各处摩擦，求OA杆转到任意位置（用φ角表示）时的角速度ω及角加速度α。

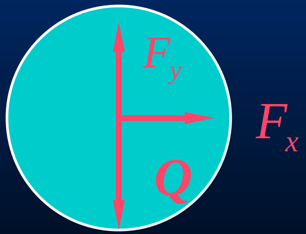
解：

- 受力分析
  - 运动分析

取圆轮为研究对象，受力如图，$J_A\alpha=0$

因此，$\omega=\omega_0=0$，在杆下摆过程中，圆盘作平移





- 求OA杆的角加速度α

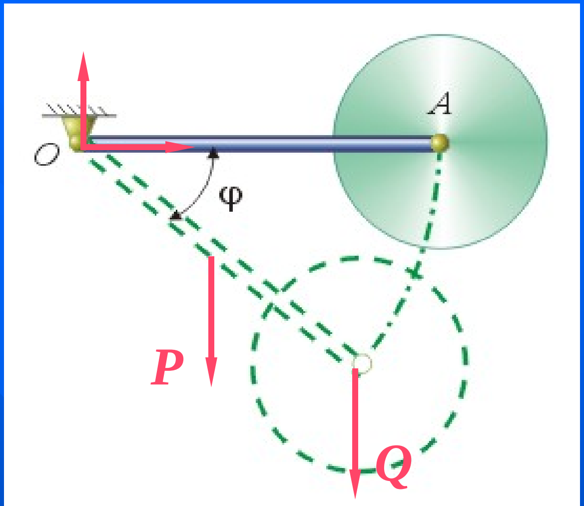
研究整体, 对O点应用动量矩定理

$$\frac{\mathrm{d}L_O}{\mathrm{d}t}=\sum M_{Oi}$$

$$L_0=-\left(\frac{P}{3g}l^2\omega+\frac{Q}{g}l^2\omega\right)=-\frac{P+3Q}{3g}l^2\omega$$

$$\sum M_{Oi}=-\left(P\frac{l}{2}\cos\varphi+Ql\cos\varphi\right)$$

$$\frac{P+3Q}{3g}l^2\alpha=\frac{P+2Q}{2}l\cos\varphi$$



分析系统对O点的动量矩

$$L_0=-(J_O\omega+m_A v_A l)$$

$$v_A=l\omega$$

由上式解出 $$\alpha=\frac{P+2Q}{P+3Q}\frac{3g}{2l}\cos\varphi$$

- 求OA杆的角速度ω

$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{P+2Q}{P+3Q}\frac{3g}{2l}\cos\varphi$$

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\varphi}\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\varphi}\cdot\omega$$

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{P+2Q}{P+3Q}\frac{3g}{2l}\cos\varphi$$

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\varphi}=\frac{P+2Q}{P+3Q}\frac{3g}{2l}\cos\varphi$$

分离变量

$$\omega\mathrm{d}\omega=\frac{P+2Q}{P+3Q}\frac{3g}{2l}\cos\varphi\mathrm{d}\varphi$$

积分

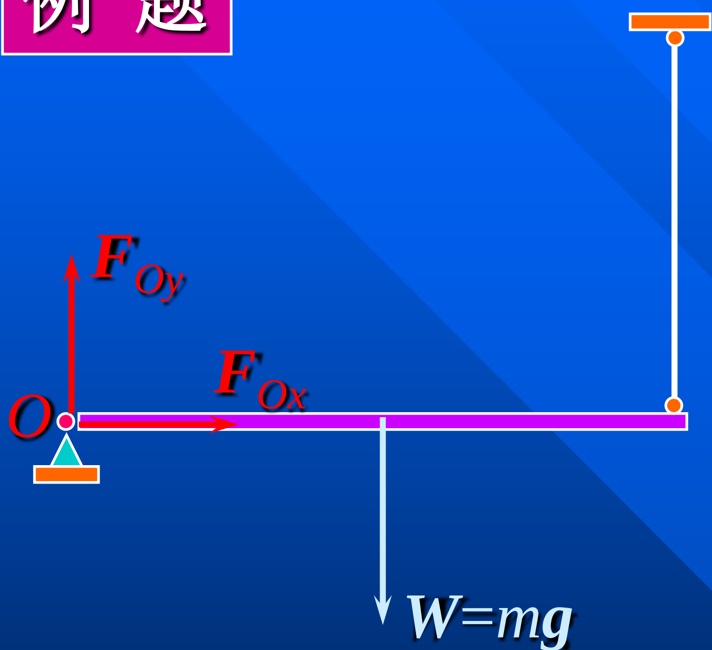
$$\int_0^{\omega}\omega\mathrm{d}\omega=\int_0^{\varphi}\frac{P+2Q}{P+3Q}\frac{3g}{2l}\cos\varphi\mathrm{d}\varphi$$

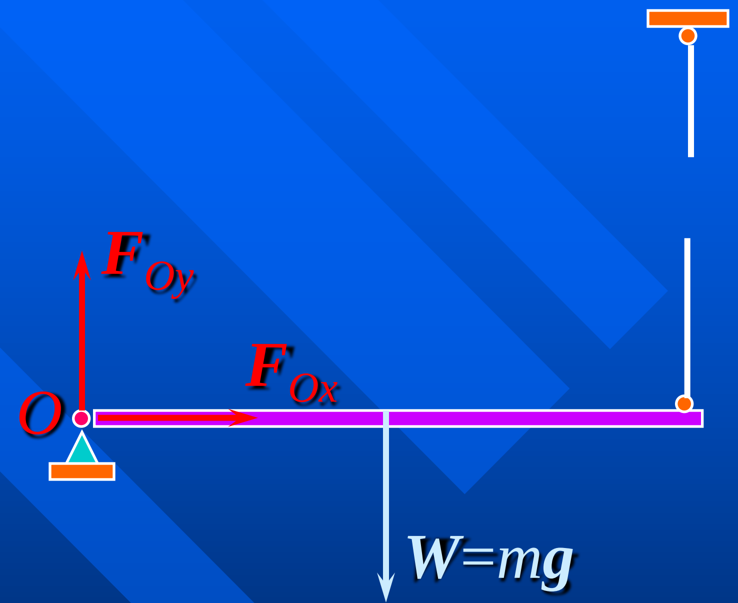
得

$$\omega=\sqrt{3\frac{P+2Q}{P+3Q}\frac{g}{l}\sin\varphi}$$

关于突然解除约束问题（一）

例 题



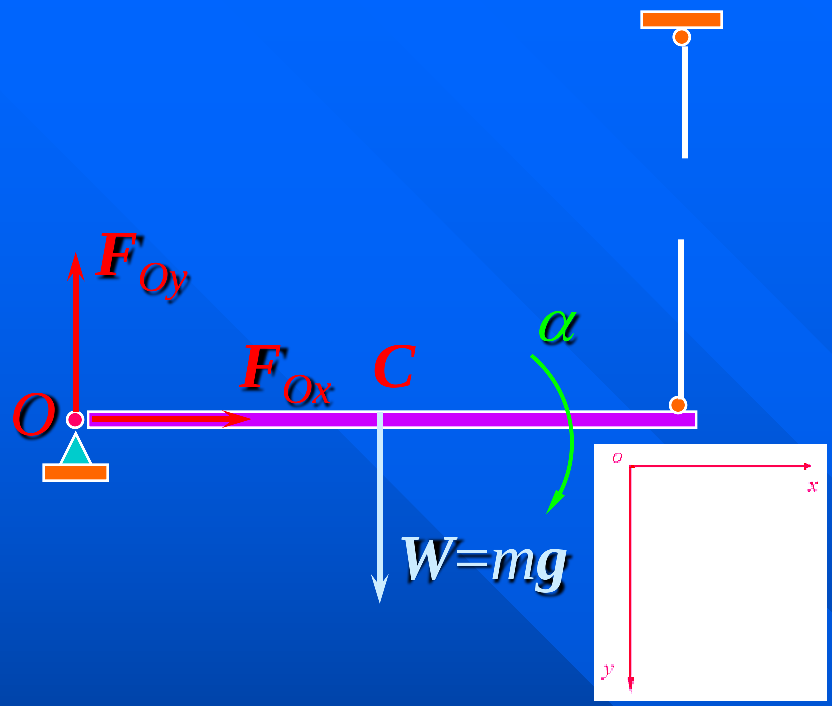


解除约束前：

$F_{Ox}=0$，$F_{Oy}=mg/2$

突然解除约束瞬时：

$F_{Ox}=?$,$F_{Oy}=?$



突然解除约束瞬时，杆OA将绕O轴转动，不再是静力学问题。这时，$\omega=0$，$\alpha\neq 0$。需要先求出α，再确定约束力。

应用定轴转动微分方程

$$-\frac{1}{3}ml^2\alpha=-mg\times\frac{l}{2},\quad \alpha=\frac{3g}{2l}$$

应用质心运动定理

$$\sum F_x=F_{Ox}=ma_{cx}=-ma_c^n=m\times\frac{l}{2}\omega^2=0$$

$$\sum F_y=mg-F_{Oy}=ma_{cy}=ma_c^\tau=m\times\frac{l}{2}\alpha$$

$$F_{Ox}=0$$

$$F_{Oy}=mg-m\times\frac{l}{2}\alpha=\frac{mg}{4}$$

总结：

1、此题为动量矩定理与动量定理（质心运动定理）综合运用的题目

2、先用动量矩定理求出运动，即：α ；

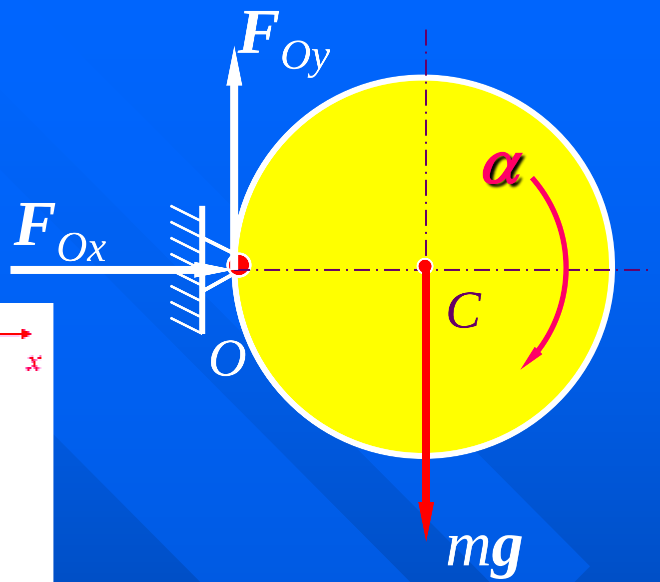
由运动学求各杆质心的加速度。

3、用质心运动定理求约束力.

例 题

已知：m，R 。

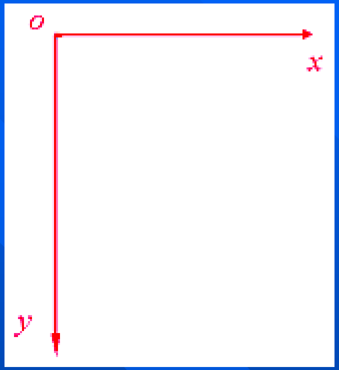
求：O 处约束反力。



解：取圆轮为研究对象，由定轴转动微分方程：

$$J_O \alpha = mgR$$

$$J_O = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2$$



解得：$$\boxed{\alpha = \frac{2g}{3R}}$$

$$\omega = 0 \Rightarrow a_C^n = \omega^2 R = 0,\ a_C^\tau = R\alpha = \frac{2}{3}g$$

$$a_{Cx} = -a_C^n = 0,\ a_{Cy} = a_C^\tau = \frac{2}{3}g$$

由质心运动定理

$$\sum F_x^{(e)} = F_{Ox} = ma_{Cx}$$

$$\sum F_y^{(e)} = mg - F_{Oy} = ma_{Cy}$$

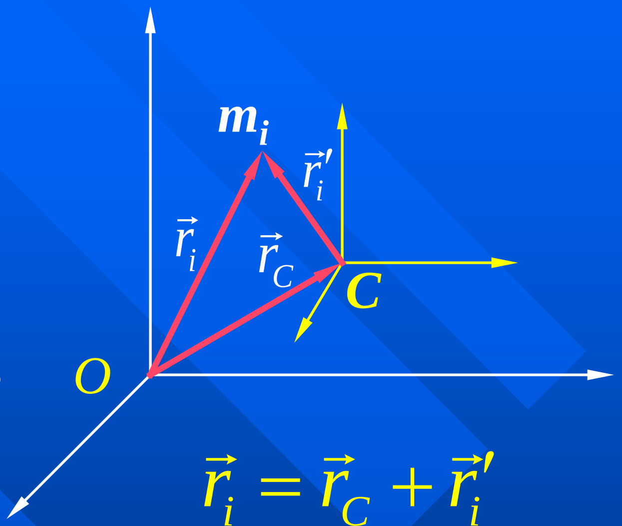
$$\boxed{F_{Ox} = 0,\quad F_{Oy} = \frac{1}{3}mg}$$

§ 11-5 质点系相对质心的动量矩定理

回顾：设O为定点，C为质点系的质心。

$$\boxed{\vec{L}_O = \vec{r}_C \times m\vec{v}_C + \vec{L}_C}$$

——对定点的动量矩与对质心的动量矩之间的关系。



$$\vec{r}_i = \vec{r}_C + \vec{r}_i'$$

回顾：质点系对任一固定参考点O的动量矩，等于质点系相对于质心C的动量矩与质点系的动量对O点之矩的矢量和。

由质点系对定点的动量矩定理

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt}=\frac{d}{dt}(\vec{r}_C\times m\vec{\upsilon}_C+\vec{L}_C)=\sum\vec{r}_i\times\vec{F}_i=\sum(\vec{r}_C+\vec{r}_i')\times\vec{F}_i$$

$$\frac{d\vec{r}_C}{dt}\times m\vec{v}_C+\vec{r}_C\times\frac{d}{dt}m\vec{v}_C+\frac{d\vec{L}_C}{dt}=\underline{\sum\vec{r}_C\times\vec{F}_i}+\sum\vec{r}'_i\times\vec{F}_i$$

$$\vec{\upsilon}_C\times m\vec{\upsilon}_C=0$$

$$\underline{\vec{r}_C\times\sum\vec{F}_i}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_C}{dt}=\sum\vec{r}_i'\times\vec{F}_i=\sum\vec{\boldsymbol{M}}_C(\vec{\boldsymbol{F}}_i^{(e)})}$$

——质点系相对质心的动量矩定理

$$\frac{d\vec{L}_C}{dt}=\sum\vec{M}_C(\vec{F}_i^{(e)})$$

质点系相对于质心(平移系)的动量矩对时间的导数，等于作用于质点系的外力对质心的主矩，这就是质点系相对于质心(平移系)的动量矩定理。

投影到随同C点平移的坐标轴上:

$$\frac{\mathrm{d}L_{cx'}}{\mathrm{d}t}=\sum M_{cx'}(\vec{F}_i)\qquad \frac{\mathrm{d}L_{cy'}}{\mathrm{d}t}=\sum M_{cy'}(F_i)\qquad \frac{\mathrm{d}L_{cz'}}{\mathrm{d}t}=\sum M_{cz'}(\vec{F}_i)$$

注意：*质点系相对于质心的动量矩定理*与*质点系相对于定点的动量矩定理*的区别。

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t}=\sum\vec{M}_O(\vec{F}_i^{(e)})$$

——质点系相对于定点的动量矩定理

质点系相对于质心和定点的动量矩定理，具有完全相似的数学形式，而对于质心以外的其它动点，一般并不存在这种简单的关系。

$$\frac{d\vec{\boldsymbol{L}}_C}{dt}=\sum\vec{\boldsymbol{M}}_C(\vec{\boldsymbol{F}}_i^{(e)})$$

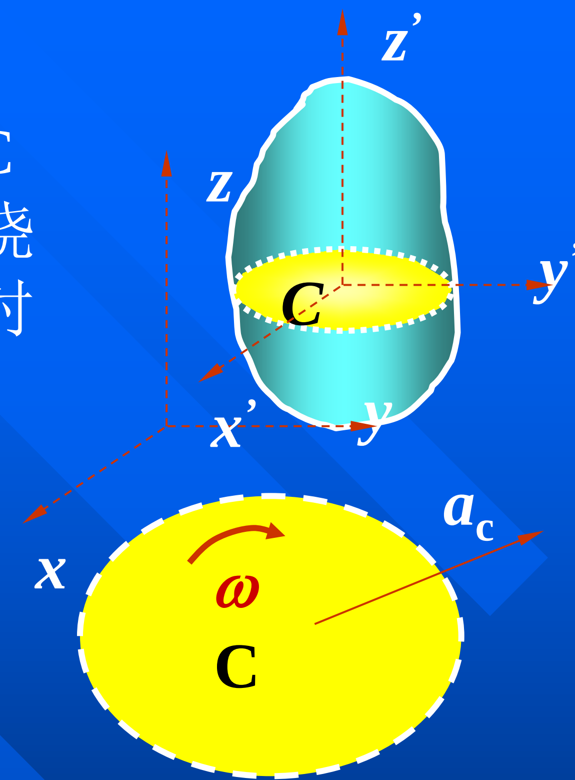
守衡定理:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_c}{\mathrm{d}t}=\sum\vec{r}_i{}'\times\vec{F}_i=\sum\vec{M}_c(\vec{F}_i)=0 \qquad \vec{L}_c=\vec{c}$$

$$\frac{\mathrm{d}L_{cz'}}{\mathrm{d}t}=\sum M_{cz'}(\vec{F}_i)=0 \qquad L_{cz'}=c$$

§ 11-6 刚体平面运动微分方程

对于作平面运动的刚体，取质心C为基点，运动可分为随质心的平动和绕质心的转动。应用质心运动定理和相对质心的动量矩定理，得



$$\begin{cases} M\vec{a}_c = \sum \vec{F}_i \\ \dfrac{\mathrm{d}\vec{L}_c}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{M}_c(\vec{F}_i) \end{cases}$$

$$ma_{Cx} = \Sigma F_{xi} \qquad ma_{Cy} = \Sigma F_{yi}$$

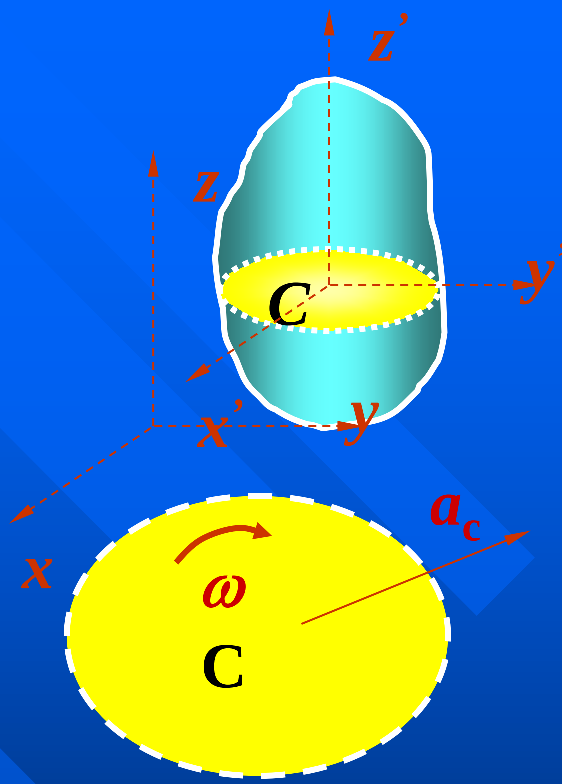
$$\frac{dL_C}{dt} = \sum M_c(\vec{F}_i) \qquad L_C = J_C\omega$$

刚体平面运动可简化为一个平面图形在其自身平面内的运动。设其质心C在该平面图形内。

其中，J_C为刚体通过质心且垂直运动平面的轴的转动惯量。

$$J_C\alpha = J_C\ddot{\varphi} = \sum M_c(\vec{F}_i)$$

$$\begin{cases} ma_{Cx} = m\ddot{x}_C = \Sigma F_{xi} \\ ma_{Cy} = m\ddot{y}_C = \Sigma F_{yi} \\ J_C\alpha = J_C\ddot{\varphi} = \Sigma M_{Ci} \end{cases}$$



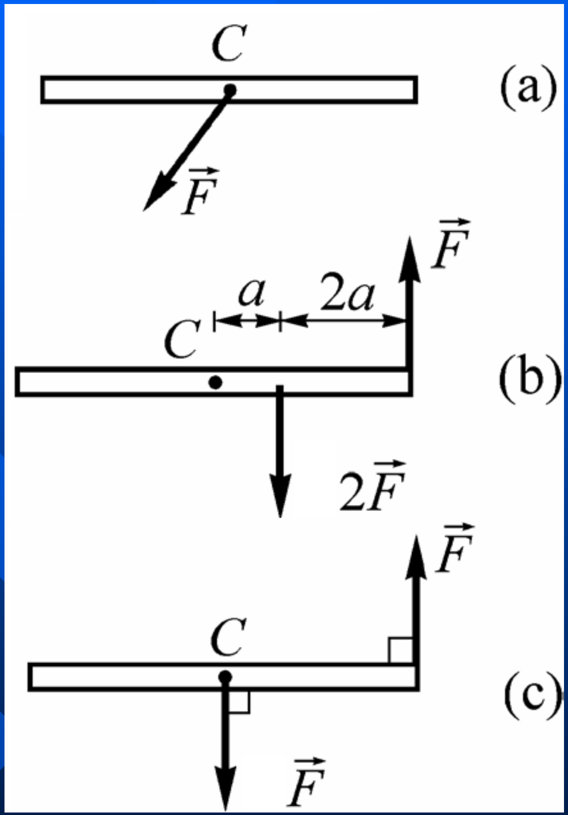
刚体平面运动的微分方程

其中，J_C为刚体通过质心且垂直运动平面的轴的转动惯量。

尽管该方程在本教材中仅研究刚体平面运动，事实上，建立该方程所蕴含的概念对于刚体及质点系的任何运动都适用。例如刚体系统的空间运动（空间飞行器等的运动）都可以看成随质心的平动和绕质心的转动二者合成的结果，其中前者可用质心运动定理求解，后者可用相对于质心的动量矩定理求解。

$$
\begin{cases}
ma_{Cx} = m\ddot{x}_C = \Sigma F_{xi} \\
ma_{Cy} = m\ddot{y}_C = \Sigma F_{yi} \\
J_C \alpha = J_C \ddot{\varphi} = \Sigma M_{Ci}
\end{cases}
$$

一均质杆置于光滑水平面上，*C*为其中点，初始静止，在图示各受力情况下，图（a）杆作____________；图（b）杆作____________；图（c）杆作____________。



图（a）杆作<u>平移</u>；

图（b）杆作<u>平面运动</u>；

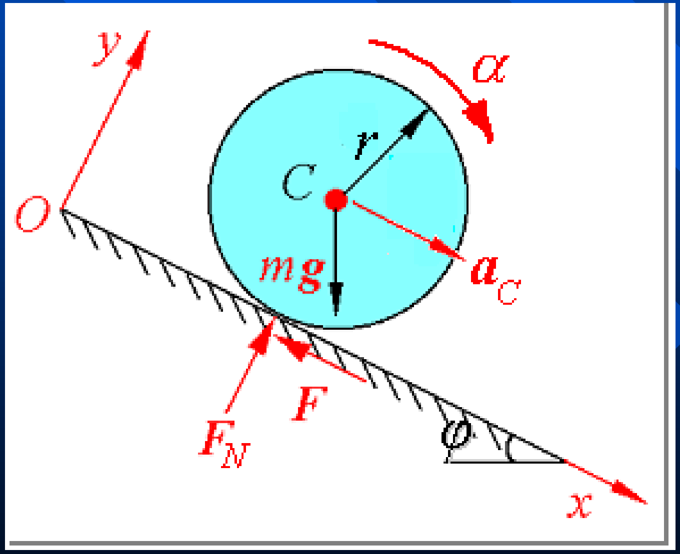
图（c）杆作<u>定轴转动</u>。

例题

动量矩定理

例 题

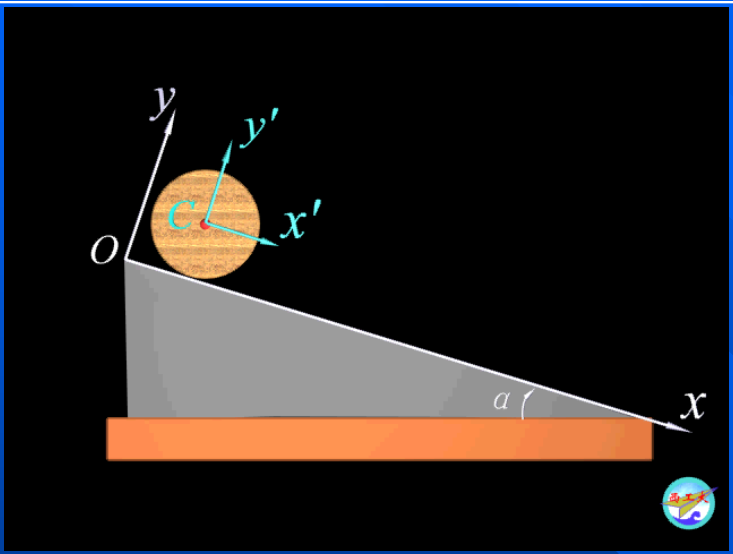
匀质圆柱的质量是m，半径是r，从静止开始沿倾角是φ的固定斜面向下滚动而不滑动，斜面与圆柱的静摩擦系数是f_s。试求圆柱质心C的加速度，以及保证圆柱滚动而不滑动的条件。



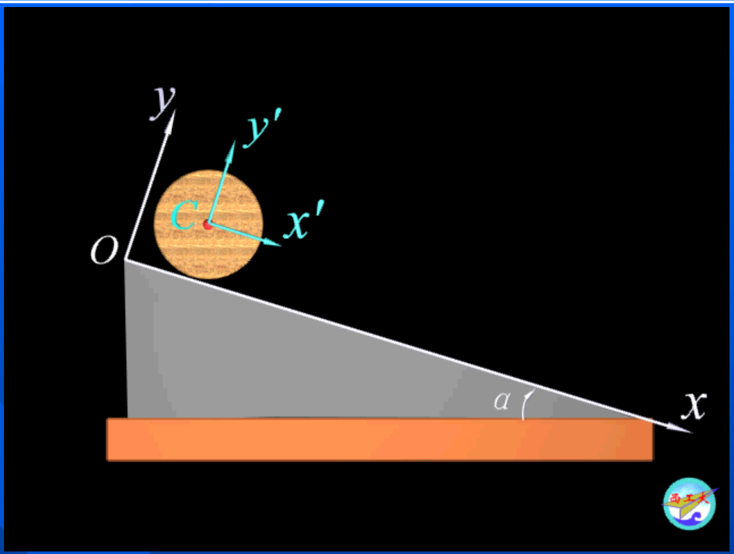
📖例题

动量矩定理

例 题



平移



纯滚动

例题

动量矩定理

例 题

解: 圆柱在图示力作用下由静止开始作平面运动。令它的铅直对称面重合于坐标平面 Oxy，轴 x 沿斜面向下，则有

$$\begin{cases} ma_{Cx} = \Sigma F_{xi} \\ ma_{Cy} = \Sigma F_{yi} \\ J_C\alpha = \Sigma M_{Ci} \end{cases}$$

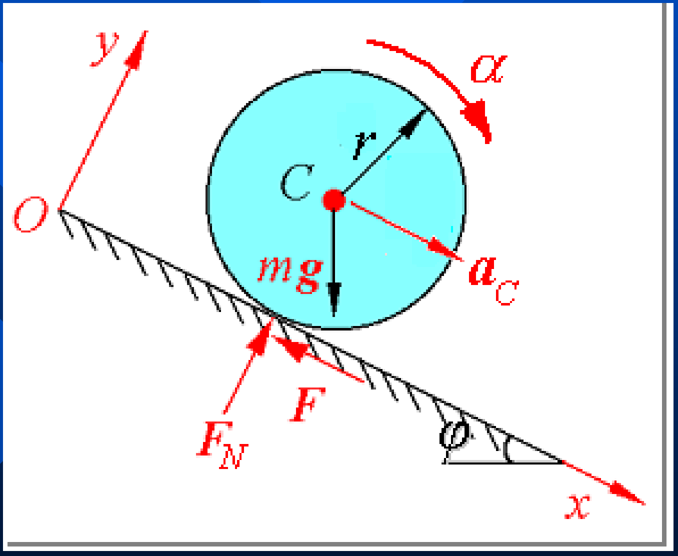
$$a_{Cx} = a_C, a_{Cy} = 0$$

圆柱平面运动的三个微分方程可写成

$$ma_C = mg\sin\varphi - F \quad \text{(a)}$$

$$0 = F_N - mg\cos\varphi \quad \text{(b)}$$

$$-J_C\alpha = -Fr \quad \text{(c)}$$



由于圆柱只滚动而不滑动，故有运动学关系

$$a_C = r\alpha \quad \text{(d)}$$

例题

动量矩定理

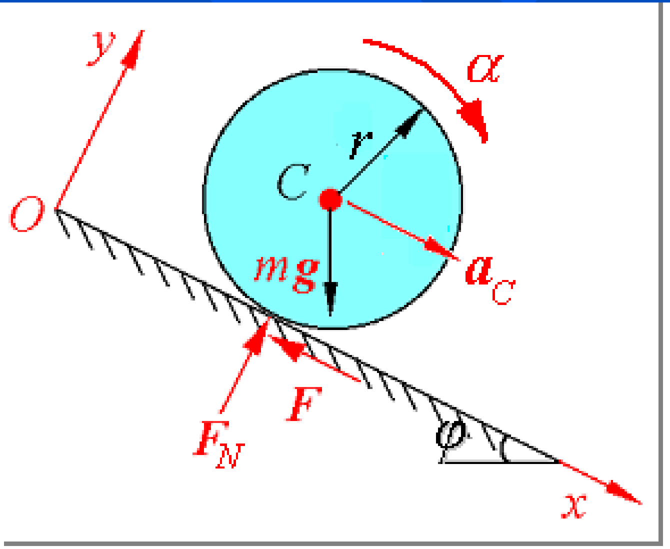
例 题

联立求解以上四个方程，并考虑到 $J_C = mr^2/2$，就得到

$$a_C = 2g\sin\varphi / 3,\quad F_N = mg\cos\varphi,\quad F = mg\sin\varphi / 3$$

当圆柱只滚不滑时，静滑动摩擦力必须满足 $F \le f_s F_N$，代入求出的 F，和 F_N，则得

$$\frac{1}{3} mg\sin\varphi \le f_s mg\cos\varphi$$



从而求得圆柱滚动而不滑动的条件

$$\tan\varphi \le 3 f_s$$

注意:

研究刚体平面运动的动力学问题，往往要建立补充方程，找出质心运动与刚体转动之间的联系。

$$\begin{cases} M\vec{a}_c = \sum \vec{F}_i \\ J_C\alpha = J_C\ddot{\varphi} = \Sigma M_{Ci} \end{cases}$$

§ 11-6 平面运动刚体对瞬心轴的动量矩定理

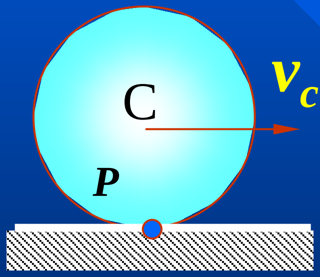
对于作平面运动刚体，在某些特殊情况下，例如***当瞬心与质心距离保持是常数时，或瞬心处的加速度方向恒指向质心时***，可以建立对于该瞬心的动量矩定理。

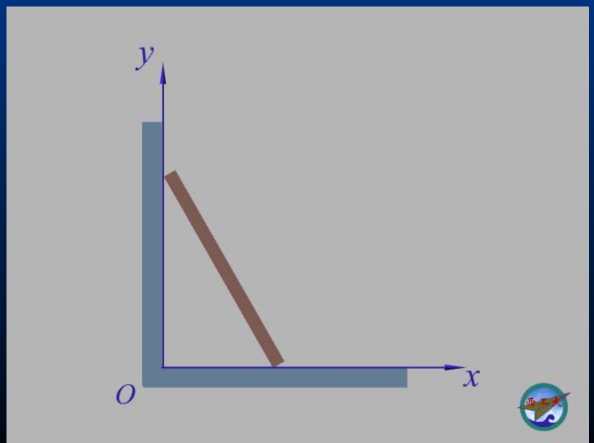
$$\frac{\mathrm{d}L_P}{\mathrm{d}t}=\sum M_P(\vec{F}_i) \qquad J_P\alpha=\sum M_P(\vec{F}_i) \longrightarrow J_C\alpha=\Sigma M_{Ci}$$

其中，J_P为为刚体通过瞬心且垂直运动平面的轴的转动惯量。

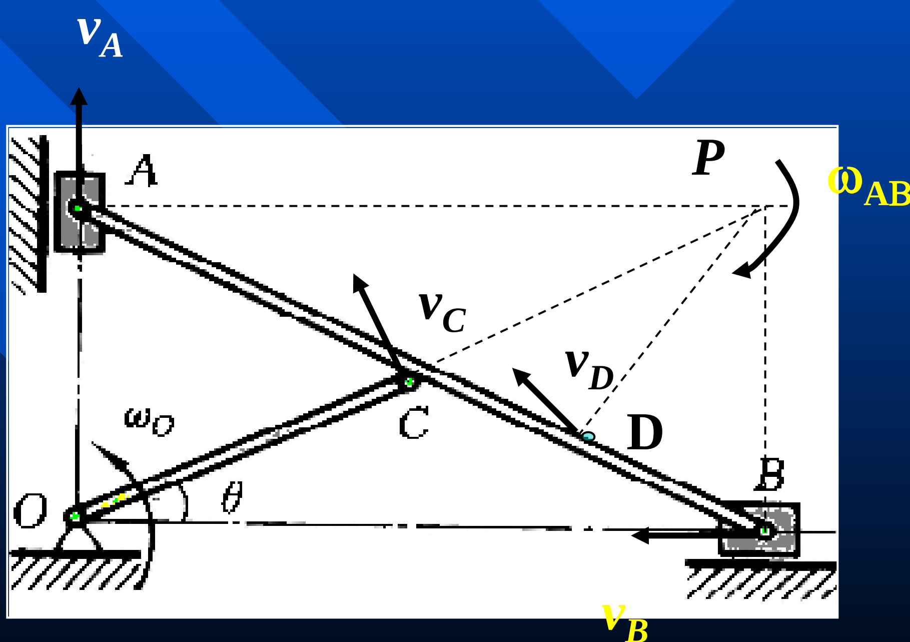
如:

例:

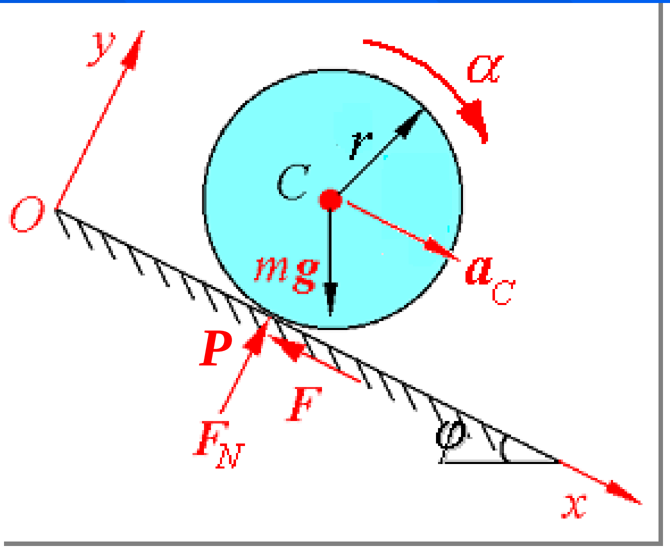




例:



匀质圆柱的质量是m，半径是r，从静止开始沿倾角是φ的固定斜面向下滚动而不滑动，斜面与圆柱的静摩擦系数是f_s。试求圆柱质心C的加速度。



$$J_P\alpha=\sum M_P(F_i^{(e)})=mgr\sin\phi$$

$$J_P=J_C+mr^2=\frac{3}{2}mr^2$$

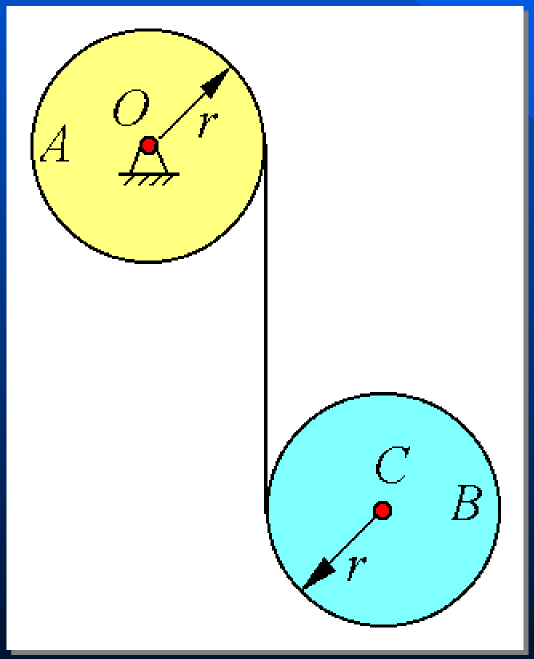
$$\alpha=\frac{2g\sin\phi}{3r}$$

$$a_C=r\ \alpha=\frac{2g\sin\phi}{3}$$

[例3]　均质圆柱体*A*和*B*的重量均为*P*，半径均为*r*，一绳缠在绕定轴*O*转动的圆柱*A*上，绳的另一端绕在圆柱*B*上，绳重不计且不可伸长，不计轴*O*处摩擦。

求：1 、 圆柱*B*下落时质心的加速度。

2、 若在圆柱体*A*上作用一逆时针转向的转矩*M*，试问在什么条件下圆柱*B*的质心将上升。



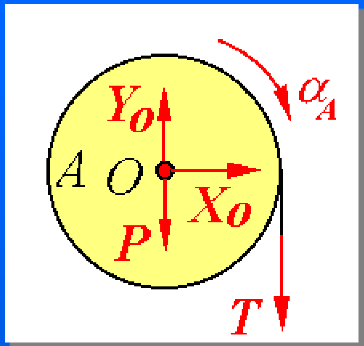
分析：

1、A 圆柱作定轴转动

用刚体定轴转动微分方程求解

2、B 圆柱作平面转动

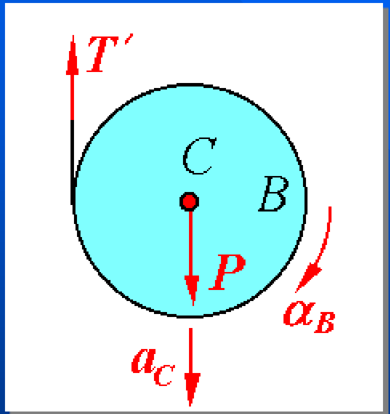
用刚体平面运动微分方程求解



解：一、圆柱 A：

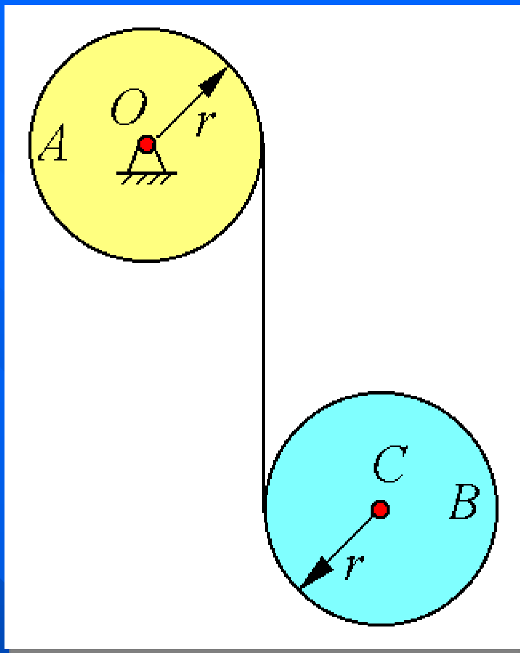
$$-\frac{1}{2}\frac{P}{g}r^2\alpha_A=-Tr \qquad (1)$$

二、圆柱B：



$$\frac{P}{g}a_C = P - T' \qquad (2)$$

$$-\frac{1}{2}\frac{P}{g}r^2\alpha_B=-T'r \qquad (3)$$



运动学补充方程： $a_C=r\alpha_A+r\alpha_B$ (4)

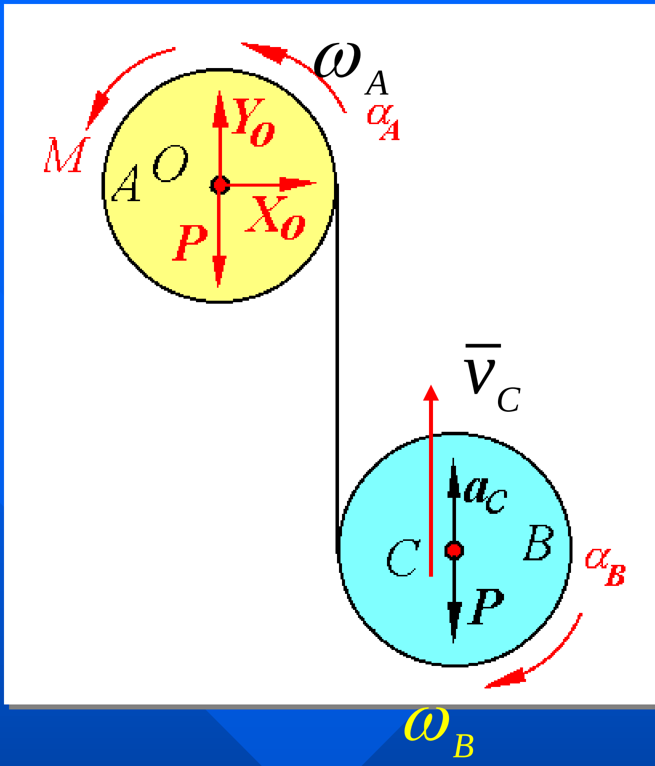
由1、3式得：$\alpha_A=\alpha_B$

代入3、4式得： $\alpha_A=\alpha_B=\dfrac{2g}{5r}$， $a_C=\dfrac{4}{5}g$

当$M=0$ 时，$a_C=-\dfrac{4}{5}g$

三、研究对象:整个系统（对O点的动量矩）

$$L_O = J_A \cdot \omega_A + M_A(mv_C) + J_B \cdot \omega_B = \frac{P}{2g} r^2 \cdot \omega_A + \frac{P}{g} v_C \cdot 2r - \frac{P}{2g} r^2 \omega_B$$



对O点的力矩： $M_O^{(e)} = M - P \cdot 2r$

由动量矩定理：$dL_O / dt = M_O^{(e)}$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{P}{2g} r^2 \cdot \omega_A + \frac{P}{g} v_C \cdot 2r - \frac{P}{2g} r^2 \omega_B\right) = M - 2P \cdot r$$

$$\therefore \quad \frac{P}{2g} r^2 \alpha_A + \frac{P}{g} \cdot 2r a_c - \frac{P}{2g} r^2 \alpha_B = \frac{P}{g} \cdot 2r a_c + \frac{P}{2g} r^2 (\alpha_A - \alpha_B) = M - 2P \cdot r \quad (*)$$

补充运动学关系式: $a_C = r\alpha_A - r\alpha_B = r(\alpha_A - \alpha_B)$ 代入*式，得

$$\frac{P}{2g} r \cdot a_C + \frac{P}{g} \cdot 2r \cdot a_C = M - 2P \cdot r \quad ; \qquad a_C = \frac{2(M - 2P \cdot r)}{5P \cdot r} g$$

当$M > 2Pr$ 时， $a_C > 0$ ，圆柱B的质心将上升。

注意：

研究刚体平面运动的动力学问题，一般要建立补充方程，找出质心运动与刚体转动之间的联系。

应用动量矩定理列方程时，要特别注意正负号的规定的一致性。

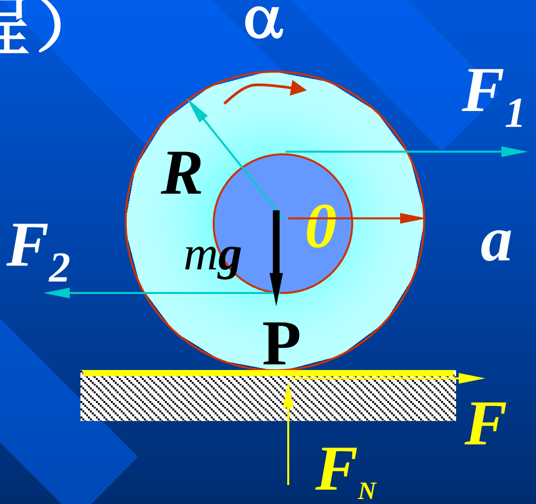
$$\begin{cases} ma_{Cx} = \Sigma F_{xi} \\ ma_{Cy} = \Sigma F_{yi} \\ J_C \alpha = \Sigma M_{Ci} \end{cases}$$

例　图示均匀鼓轮大半径为R，对质心的转动惯量为J_0，放粗糙的地面上，在半径为r 的轴柱上绕着绳索，索的拉力为F_1，F_2。求：轮的角加速度、静摩擦力。

解:　**[0]:**　$$-J_0\alpha = -(F_1 r + F_2 r - FR)$$

[x]:　$$-F_2 + F_1 + F = ma$$

运动学关系: $a = \alpha R$（运动学补充方程）



[或]:　$$-J_P\alpha = -F_1(r+R) + F_2(R-r)$$

$$J_P = J_0 + \frac{P}{g}R^2$$

得:

$$\alpha = \frac{F_1(r+R) - F_2(R-r)}{PR^2 + J_0 g}g$$

$$F = \frac{\left[\left(F_1 + F_2\right)\cdot r - J_0\alpha\right]}{R}$$

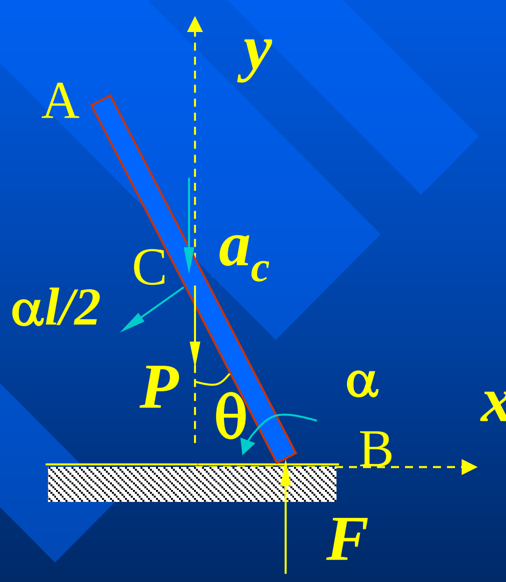
例　一根筷子AB在光滑地面上，开始时手拿着如图示位置，然后松手, 求：筷子此时的角加速度和地面的正压力。

解:　　条件: 2. $a_{cx}=0$(水平方向质心运动守恒)　1. $t=0,\ \omega=0$

a_c沿铅垂线方向　　$\vec{a}_C=\vec{a}_B+\vec{a}_{CB}^{\tau}+\underline{\vec{a}_{CB}^{n}}$　（以B点为基点）

运动学补充方程　　$-a_C=\underline{a_{By}}-\alpha\dfrac{l}{2}\sin\theta$

$$\underline{a_C=\alpha\frac{l}{2}\sin\theta}$$



$[c]$:　　$J_c\alpha=F\dfrac{l}{2}\sin\theta$　　$J_c=m\dfrac{l^2}{12}$

$[y]$:　　$-ma_C=F-mg$

$$\alpha=\frac{g\sin\theta}{\frac{l}{2}(\sin^2\theta+\frac{1}{3})},\qquad F=\frac{1}{3(\sin^2\theta+\frac{1}{3})}P,$$

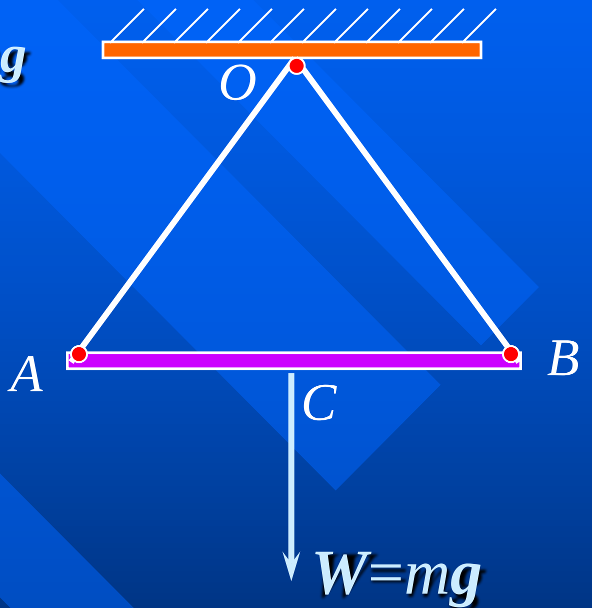
$\vec{a}_C=\vec{a}_B+\vec{a}_{CB}^{\tau}$

♉ 关于突然解除约束问题（二）

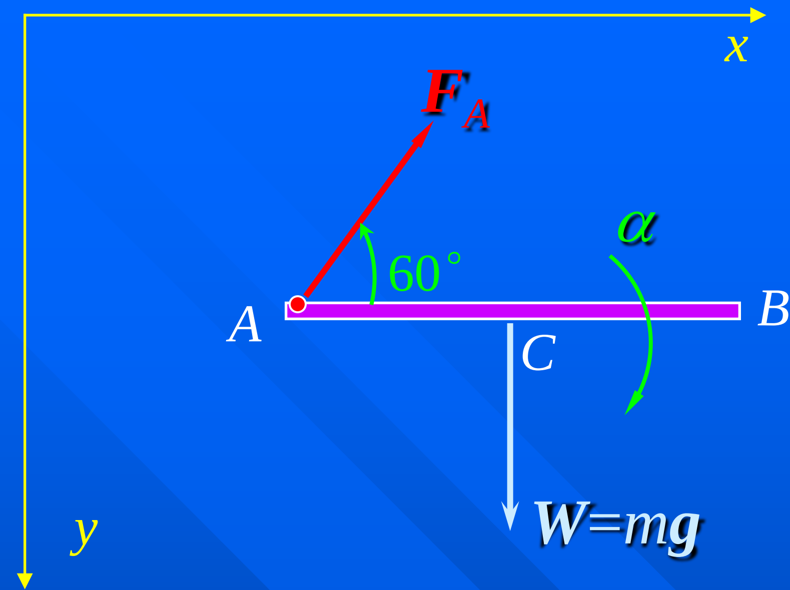
例 题

已知：$OA=OB=AB=l$，mg

求：剪断OB 绳瞬时，OA绳的张力。



解：取AB 杆为研究对象



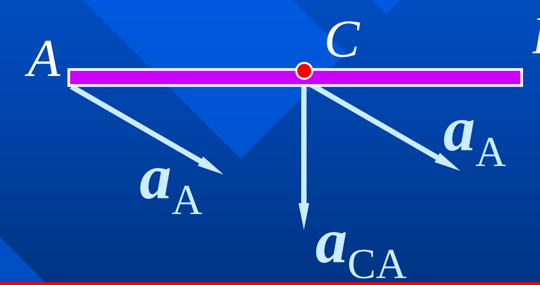
应用平面运动微分方程

$$\sum F_x^{(e)} = F_A \cos 60^\circ = ma_{Cx}$$

$$\sum F_y^{(e)} = mg - F_A \sin 60^\circ = ma_{cy}$$

$$-J_C\alpha = -\frac{1}{12}ml^2\alpha = -F_A \sin 60^\circ \frac{l}{2}$$

应用平面运动加速度分析，取 A 为基点。



$$\vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{a}_{CA}^{\tau} + \vec{a}_{CA}^{n}$$

该瞬时A点加速度为什么垂直OA？

$$a_{CA}^n = 0, \quad a_{CA}^{\tau} = \frac{l}{2}\alpha$$

为什么？

$$a_{cx} = a_A \cos 30^\circ, \quad a_{Cy} = a_A \sin 30^\circ + \frac{l}{2}\alpha$$

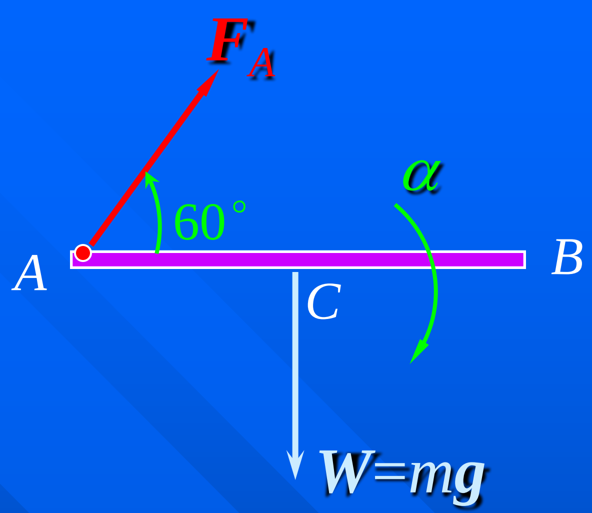
$$\sum F_x^{(e)} = F_A \cos 60^\circ = m a_{Cx}$$

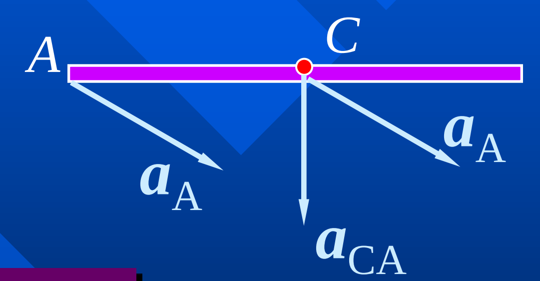
$$\sum F_y^{(e)} = mg - F_A \sin 60^\circ = m a_{cy}$$

$$J_C \alpha = \frac{1}{12} m l^2 \alpha = F_A \sin 60^\circ \frac{l}{2}$$

$$a_{cx} = a_A \cos 30^\circ,$$

$$a_{Cy} = a_A \sin 30^\circ + \frac{l}{2}\alpha$$





解得:

$$F_A = \frac{2\sqrt{3}}{13} mg, \alpha = \frac{18g}{13l}, a_A = \frac{2}{13} g.$$

突然解除约束问题的特点

- *系统的自由度一般会增加;*
- *解除约束的前、后瞬时，速度与角速度连续，加速度与角加速度将发生突变。*

1. 均质杆长l,质量为m,地面光滑, $\varphi = 45°$,求绳断瞬间地面的反力。