数项级数 1

早在古希腊时期，级数的观念就已为人所知. 亚里士多德认识到几何级数能够求和，阿基米德更是通过几何级数计算了抛物弓形的面积. 一般而言，无限项的求和式就称为级数. 如果每一项均为常数，则称为常数项级数；如果每一项是向量，则称为向量值级数; 如果每一项是函数，则称为函数项级数. 本章主要介绍常数项级数，最后简单介绍向量值级数，函数项级数留给下一章.

1.1 数项级数的概念

级数的观念其实早已深入人心，因为实数的十进制小数表示就是一种标准的级数语言. 比如圆周率 π 的小数表示 $3.1415926\cdots$ 本质上是

$$\frac{3}{10^0}+\frac{1}{10^1}+\frac{4}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\frac{5}{10^4}+\frac{9}{10^5}+\frac{2}{10^6}+\frac{6}{10^7}+\cdots.$$

像这样无限个数的和式就称为 **(常) 数项级数**.

数项级数

给定数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$，无限和式 $a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$ 称为**数项级数**，通常记作 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，即

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots.$$

和式中的第 n 项 a_n 叫做级数的**通项（一般项）**.[1]

1: 级数的起始项未必标为 $n=1$，比如 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 也是常见的. 一般地，任给整数 k，和式 $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ 也是普遍的级数形式.

注意，级数指的是“和式”，并不是这个“和式的值（和）”. 为了理解级数的和，我们再来看一下圆周率 π 的小数表示. 从小数的出发点来说，π 是下面数列的极限

$$3,\ 3.1,\ 3.14,\ 3.141,\ 3.1415,\ 3.14159,\ 3.141592,\ 3.1415926,\ \cdots.$$

也就是说，π 是级数前 N 项之和构成的数列的极限. 一般地，数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的**前 N 项和**记作

$$s_N=\sum_{n=1}^{N} a_n = a_1+a_2+\cdots+a_N,$$

称之为级数的**部分和**. 数列 (s_N) 称为级数的**部分和数列**.

级数的和（柯西和）

级数的和就是它的部分和数列的极限，记作

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} s_N = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n.$$

- 如果部分和数列 $\{s_N\}$ 收敛于 s，则称**级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的和**为 s，记作 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$. 此时称 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **收敛**.
- 如果部分和数列 (s_N) 发散，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **发散**. 此时级数的和不存在.

根据上述定义，研究级数就是研究数列的极限. 事实上，反之亦然. 比如为了讨论数列 (u_n) 的极限，可以令

$$a_1 = u_1, a_2 = u_2 - u_1, \cdots, a_{n+1} = u_{n+1} - u_n, \cdots.$$

从而，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和数列 (s_N) 就是 (u_N). 也就是说，数列 (u_n) 的敛散性就是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的敛散性. 并且，在收敛的情况下，数列 (u_n) 的极限就是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的和. 可以说，无穷级数与数列极限是相伴而生的，它们是同一本质的不同表象.

例 1.1.1 形如 $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ 的级数叫做**几何级数（等比级数）**，其中 $a \neq 0$. 试讨论几何级数的敛散性以及它的和.

解. 此处首项 $n = 0$. 即便如此，我们仍然记部分和 $s_N = \sum_{n=0}^{N} aq^n$.

(1) $q \neq 1$. 此时 $s_N = \frac{a(1-q^{N+1})}{1-q}$. 当 $|q| < 1$ 时，$s_N \to \frac{a}{1-q}$；当 $|q| > 1$ 时，$s_N \to \infty$；当 $q = -1$ 时，$s_N = \frac{1-(-1)^{N+1}}{2} a$ 振荡发散.

(2) $q = 1$. 此时 $s_N = (N+1)a \to \infty$，级数发散.

综上，当 $|q| < 1$ 时级数收敛于 $a/(1-q)$，其他情形均发散. □

例 1.1.2 讨论 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ 的敛散性.

解. 通项可以裂项为

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

因此部分和

$$s_N = a_1 + a_2 + \cdots + a_N = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} = 1 - \frac{1}{N+1}.$$

显然 $s_N \to 1$. 所以，原级数收敛且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$. □

前两个例子中，我们先求出部分和数列，然后分析其极限的存在性，进而判断级数的敛散性. 这种方法可以称为直接法. 直接法的缺点是需要得到部分和的解析表达式，对于大部分级数而言这是难以实现的. 所以，为了避免直接计算部分和，我们也会用级数的性质来判断敛散性，下面陈述几条简单的性质.

通项的极限

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $a_n \to 0$. 等价地，如果通项不是无穷小量，那么级数必然发散.

证明. 设 $\lim_{n\to\infty} s_n = s$. 那么

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0.$$

□

例 1.1.3 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^{-n}$ 的敛散性.

解. 因为通项 $(1+\frac{1}{n})^{-n} \to 1/e$，不趋向于零，所以级数发散. □

级数的线性性

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 均收敛，则

- $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ 收敛且 $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n$，这里 λ 是常数.
- $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ 收敛且 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

证明. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和为 A_N，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 的部分和为 B_N. 再设 $A_N \to A, B_N \to B$. 根据数列极限的线性性, 对任意常数 λ 和 μ, 有 $\lambda A_N + \mu B_N \to \lambda A + \mu B$. 于是

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ 的部分和就是 λA_N，进而极限为 λA.
(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ 的部分和为 $A_N \pm B_N$，极限为 $A \pm B$.

可以推得, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n), \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 中只要有两个收敛, 那么第三个也收敛. □

级数敛散的尾部性

给定整数 k，级数 $\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$ 称为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的**尾部**. 级数收敛等价于它的一个尾部收敛，也等价于它的每个尾部均收敛. 特别地，在级数中去掉、加上或者改变有限项，不会改变级数的收敛性.

证明. 考虑部分和，可知

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{k} a_n + \sum_{n=k+1}^{N} a_n.$$

因为 $\sum_{n=1}^{k} a_n$ 与 N 无关，是常数，所以 $N \to \infty$ 时 $\sum_{n=1}^{N} a_n$ 与 $\sum_{n=k+1}^{N} a_n$ 同敛散，即 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛等价于 $\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$ 收敛.

所以，考虑级数敛散性时，不必考虑前面的有限项. 进而，去掉、加上或者改变有限项，不会改变级数的收敛性. □

余项

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则把尾部 $\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$ 的和称为原级数的**余项**，记作 r_N. 那么，$r_N \to 0$.

证明. 根据上一条性质，余项级数收敛. 进而，由 $r_N = s - s_N$ 可得 $\lim_{N\to\infty} r_N = s - \lim_{N\to\infty} s_N = 0$. □

级数的结合律

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则对此级数的项任意加括号后所成的新级数

$$(a_1 + \cdots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + \cdots + a_{n_2}) + \cdots + (a_{n_{k-1}+1} + \cdots + a_{n_k}) + \cdots$$

仍然收敛，并且和不变.

证明. 原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和数列记作 (s_N). 那么，加括号之后的级数的部分和数列为 $s_{n_1}, s_{n_2}, \cdots, s_{n_k}, \cdots$，它是原级数部分和数列 (s_N) 的子列. 根据子列的性质可知 (s_{n_k}) 与 (s_N) 收敛到同一个极限. □

例 1.1.4 设数列 $\{a_n\}$ 的第一项是 1，接着两项都是 $1/2$，再后续三项都是 $1/3$，依此类推. 试问 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是否收敛.

解. 显然，部分和 $s_1 = 1, s_3 = 2, s_6 = 3, \cdots, s_{n(n+1)/2} = n$. 也就是说，把相等的通项结合在一起，得到的新级数发散，故原级数发散. □

但是，加括号之后的级数收敛并不意味着原级数收敛. 比如级数

$$(1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots + (1-1) + \cdots$$

显然收敛，但是级数

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + 1 - 1 + \cdots$$

的通项不趋于零，它发散.

1.2 数项级数的基本审敛法

大部分级数无法通过计算部分和的方式判断敛散性，我们需要通过其它手段来处理. 注意到级数和数列本质上相同，所以数列极限的审敛法可以自然地表述成级数.

Cauchy 收敛原理

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充要条件是：对于任意给定的正数 $\epsilon > 0$，存在正整数 N，当 $n \geq N$ 时，对任意的正整数 p 成立

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \epsilon.$$

证明. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛等价于它的部分和数列 $\{s_n\}$ 收敛. 根据数列收敛的 Cauchyt 原理可知，$\{s_n\}$ 收敛的充要条件是：对于任意给定的正数 $\epsilon > 0$，存在正整数 N，当 $n \geq N$ 时，对任意的正整数 p 成立 $|s_n - s_{n+p}| < \epsilon$，即 $|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \epsilon$. □

例 1.2.1 已知 $a_n \leq b_n \leq c_n (n \geq 1)$，并且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 都收敛，证明：$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 也收敛.

解. 任意给定正数 $\epsilon > 0$. 因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，所以存在 N_1，当 $n \geq N_1$ 时，对任意的 p 成立

$$-\epsilon < a_{n+1} + \cdots + a_{n+p} < \epsilon.$$

同样地，由 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛可知，存在 N_2，当 $n \geq N_2$ 时，对任意的 p 成立

$$-\epsilon < c_{n+1} + \cdots + c_{n+p} < \epsilon.$$

从而，当 $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ 时，对任意的 p 成立

$$-\epsilon < a_{n+1} + \cdots + a_{n+p} \leq b_{n+1} + \cdots + b_{n+p} \leq c_{n+1} + \cdots + c_{n+p} < \epsilon.$$

也就是说，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 也满足柯西条件，因此它收敛. □

单调有界收敛原理也是判断数列收敛的常用方法. 为了将其引入级数理论，我们需要假设所讨论的级数的通项保号，即恒有 $a_n \geq 0$ 或恒有 $a_n \leq 0$, 此时我们称 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为**保号级数**.

单调有界收敛原理

保号级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充要条件是它的部分和数列 (s_n) 有界.

值得指出，乘以 -1 不改变级数敛散性，所以总可以假设保号级数是**非负项级数**，即恒有 $a_n \geq 0$；同样，剔除 0 项也不改变级数的敛散性，所以总可以假定所讨论的保号级数是**正项级数**，即恒有 $a_n > 0$. 因此，通常所说的单调有界收敛原理可能指的是正项级数.

例 1.2.2 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 的敛散性.

解. 这是正项级数. 由于

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^2} \leq 1 + \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n(n-1)} \leq 2,$$

故级数收敛. □

若级数并不保号，则称其为**一般项级数**. 在单调收敛原理的加持下，对于一般项级数，除了 Cauchy 原理之外，经常采用的一个判别法是绝对收敛法.

绝对收敛法

若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的绝对值级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛，那么 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛. 此时称 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **绝对收敛**.

证明. 注意到

$$\left|\sum_{k=1}^{p} a_{n+k}\right| \le \sum_{k=1}^{p} |a_{n+k}|.$$

应用 Cauchy 原理可得. □

例 1.2.3 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ 的敛散性.

解. 因为通项满足 $|a_n| \le \frac{1}{n^2}$，根据前例可知 $\sum_{n=1}^{N} |a_n| \le 2$，故 $\sum |a_n|$ 收敛，所以原级数绝对收敛. □

条件收敛

若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，但 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散，则称 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **条件收敛**.

例 1.2.4 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛. 记 $a_n^+ = \max\{a_n, 0\}, a_n^- = \min\{a_n, 0\}$，证明：$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = +\infty, \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = -\infty$.

解. 我们用反证法. 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 收敛，由于 $a_n = a_n^+ + a_n^-$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 也收敛. 再根据 $|a_n| = a_n^+ - a_n^-$，可知 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛，与题设矛盾. 因此 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 发散，又因为这是正项级数，它必然发散到正无穷. 类似可证 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = -\infty$. □

级数与反常积分密切相关，下述积分判别法是一种重要的观点.

Week 1/ Lecture 1=90min

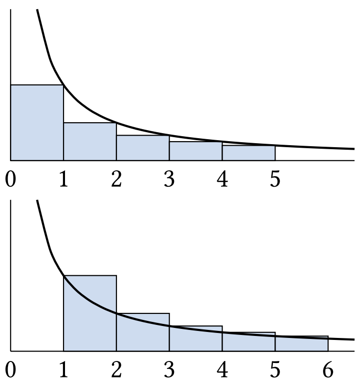

图 1.1. 级数和积分的互相控制.

积分判别法

设 $f(x)$ 是定义在 $[1, +\infty)$ 上的单调递减的非负函数，那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛的充要条件是反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 收敛.

证明. 注意函数单调，所以局部可积. 如果 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，那么

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} f(n) &\le f(1) + \sum_{n=2}^{N} \int_{n-1}^{n} f(x)dx \\ &= f(1) + \int_1^N f(x)dx \le f(1) + \int_1^{+\infty} f(x)dx.\end{aligned}$$

因此正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 的部分和有界，所以收敛.

反之，若 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛，则对任意 $A \geq 1$ 有

$$\begin{aligned}\int_1^A f(x)dx &\leq \int_1^{[A]+1} f(x)dx \\ &\leq f(1)+f(2)+\cdots+f([A]) \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n).\end{aligned}$$

所以反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 收敛. □

例 1.2.5 给定常数 p, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 叫做 p **级数**. 特别地, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 叫做**调和级数**. 证明：p 级数收敛的充要条件是 $p > 1$.

证明. 令 $f(x) = x^{-p}$，则 $f(x)$ 是 $[1, +\infty)$ 上的单调递减的连续正函数. 根据积分判别法，p 级数收敛等价于是 $\int_1^{+\infty} x^{-p} dx$ 收敛，而这又等价于 $p > 1$. □

例 1.2.6 判定级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ 和 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ 的敛散性.

证明. 由于 $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$ 发散，$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx$ 收敛，根据积分判别法可知 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ 发散和 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ 收敛. □

最后，注意到级数敛散的尾部性，很多判别法的前提条件只要从某一项开始成立即可. 比如保号级数的单调有界原理，其实只要从某一项开始保号即可；再比如，积分判别法中的函数也只需要在无穷远的某个邻域上单调递减且非负. 这一观点同样适用于之后出现的各种审敛法，届时不再赘述.

1.3 比较判别法

判断非负项级数敛散（或绝对收敛性）的核心是其估计部分和的大小. 最容易想到的方法是控制级数的通项进而控制级数的部分和，这就是所谓的比较判别法.

比较判别法

设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都是非负项级数，并且 $a_n \leq b_n (n \geq 1)$. 那么

- 若 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
- 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散.

证明. 因为第二条是第一条的逆否命题，我们只需证明第一条. 分别记 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 的部分和为 A_n 和 B_n. 由 $a_n \leq b_n$，易知 $A_n \leq B_n$. 而 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，所以 $\{B_n\}$ 有界，进而 $\{A_n\}$ 有界. □

比较判别法是处理非负项级数最常用的审敛法. 为此，我们需要选取适当的**基准级数**用来做比较. 通常选取的基准级数是等比级数 $\sum q^n$ 和 p 级数 $\sum 1/n^p$.

例 1.3.1 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ 的敛散性.

证明. 两者都是正项级数，我们用比较判别法来对其进行放缩. 注意到

$$0\le\frac{2+(-1)^n}{2^n}\le\frac{3}{2^n},$$

而 $\sum\frac{3}{2^n}$ 收敛，故第一个级数收敛.

对于第二个级数，注意到存在 N, 当 $n\ge N$ 时，成立

$$\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\ge\frac{1}{2\sqrt{n}},$$

而 $\sum\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散，所以第二个级数的尾部 $\sum_{n=N}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ 发散，故第二个级数发散. □

把级数敛散的尾部特性推演到极致，就可以得到比较判别法的极限形式.

比较判别法的极限形式

设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 都是正项级数，且存在广义极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=l\in[0,+\infty].$$

- 若 $0<l<+\infty$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 敛散性相同;
- 若 $l=0$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛蕴涵 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛;
- 若 $l=+\infty$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散蕴涵 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

证明. 我们用保号性把极限转化为尾部级数的逐项比较.

- 当 $0<l<+\infty$ 时，存在 N，当 $n\ge N$ 时，成立 $\frac{1}{2}l\le\frac{a_n}{b_n}\le 2l$，即

  $$\frac{1}{2}l\cdot b_n\le a_n\le 2l\cdot b_n.$$

  那么，从 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 的收敛性可得 $\sum_{n=1}^{\infty}2lb_n$ 的收敛性，进而可得 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的收敛性. 反之，若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}lb_n$ 收敛，即 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛.
- 当 $l=0$ 时，存在 N，当 $n\ge N$ 时，成立 $\frac{a_n}{b_n}\le 1$，即 $a_n\le b_n$. 那么，由 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛可得 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.
- 当 $l=+\infty$ 时，存在 N，当 $n\ge N$ 时，成立 $\frac{a_n}{b_n}\ge 1$，即 $a_n\ge b_n$. 此时，若 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

本质上，这是比较两个级数的通项作为无穷小量的阶. 如果它们是同阶无穷小，那么级数的敛散性一致. □

比较判别法的极限形式常常用 p-级数来做基准级数，其核心是估计通项作为无穷小的量阶，因此之前介绍的等价无穷小和泰勒公式在此有很大的作用.

例 1.3.2 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}(\sin\frac{1}{n}-\frac{1}{n})$ 的敛散性.

证明. 第一个级数是正项级数，且 $\sin\frac{1}{n}\sim\frac{1}{n}$. 由于调和级数 $\sum\frac{1}{n}$ 发散，所以此级数发散.

第二个级数是负项级数，但乘以 -1 不改变级数的敛散性，故可当作正项级数处理. 根据泰勒公式 $\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$，易知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}}=-\frac{1}{6}.$$

而 $\sum\frac{1}{n^3}$ 收敛，故此级数收敛. □

例 1.3.3 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1)$ 的敛散性.

证明. 通项 $a_n=\sqrt[n]{n}-1\geq 0$. 我们来分析它的量阶. 利用 $e^x=1+x+o(x)$ 可知

$$a_n=e^{\frac{1}{n}\ln n}-1=1+\frac{\ln n}{n}+o\left(\frac{\ln n}{n}\right)-1=\frac{\ln n}{n}+o\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

因此 $a_n\sim\frac{\ln n}{n}$，从而 $\sum a_n$ 与 $\sum\frac{\ln n}{n}$ 的敛散性一致. 但是当 $n\geq 3$ 时 $\frac{\ln n}{n}\geq\frac{1}{n}$，所以 $\sum\frac{\ln n}{n}$ 发散，进而 $\sum a_n$ 发散. □

上述示例中 Taylor 公式扮演了重要作用. 然而，不少情况下直接估计通项的量阶并不容易，此时常采用**比值法**和**根值法**. 比如，我们猜测级数 $\sum a_n$ 比较接近一个等比级数，但很难得到公比的大小. 那就可以假设 $a_n\approx q^n$，然后通过 $q\approx a_{n+1}/a_n$ 或 $q\approx\sqrt[n]{a_n}$ 来估计公比.

d' Alembert 比值法

假设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 通项的比值存在广义极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l\in[0,+\infty].$$

- 若 $l<1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛；
- 若 $l>1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散；
- 若 $l=1$，则比值法失效.

Cauchy 根值法

假设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 通项的根值存在广义极限

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l\in[0,+\infty].$$

- 若 $l<1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛；
- 若 $l>1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散；
- 若 $l=1$，则根值法失效.

证明. 两种判别法的证明是类似的. 我们以比值法的收敛情形以及根值法的发散情形为例做出证明.

比值法的收敛情形 此时 $l<1$. 根据极限的保号性，不妨假设当 $n\ge N$ 时成立 $a_{n+1}/a_n\le q$, 其中 $q=(l+1)/2<1$. 于是

$$a_{N+1}\le a_N q,\ a_{N+2}\le a_{N+1}q\le a_N q^2,\cdots,a_{N+k}\le a_N q^k,\cdots.$$

因为几何级数 $\sum_{k=1}^{\infty}a_Nq^k$ 收敛, 根据比较判别法可知 $\sum_{k=1}^{\infty}a_{N+k}$ 收敛，进而 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

根值法的发散情形 此时，不妨假设当 $n\ge N$ 时成立 $\sqrt[n]{a_n}\ge r$, 这里 $r=(l+1)/2>1$. 于是，$a_n\ge r^n$. 而几何级数 $\sum_{n=N}^{\infty}r^n$ 发散, 根据比较判别法可知 $\sum_{n=N}^{\infty}a_n$ 发散，从而 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

下面说明 $l=1$ 时两种方法均失效. 设 $a_n=1/n^p$，那么

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^p}{(n+1)^p}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+1/n)^p}=1,$$
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}\right)^p=\lim_{n\to\infty}e^{p\ln n/n}=1.$$

也就是说，无论 p 取何值，p 级数通项的比值和根值的极限都是 1. 然而，既有收敛的 p 级数也有发散的 p 级数，因此 $l=1$ 时比值法和根值法均失效. □

例 1.3.4 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$ 的敛散性.

解. 对于含阶乘的通项，比值法相对合适.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}=\frac{1}{4}.$$

极限小于 1，根据比值判别法，级数收敛. □

例 1.3.5 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2+\frac{1}{n})^n}$ 的敛散性.

解. 通项含 n 次方，我们用根值法.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{2+\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}.$$

极限小于 1，根据根值判别法，级数收敛. 本题也可以用比值法，留作练习. □

例 1.3.6 根据正数 x 的取值，讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n n!}{n^n}$ 的敛散性.

解. 本题既有阶乘也有次方，相对而言用比值法较为方便.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x(n+1)}{(n+1)(1+\frac{1}{n})^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{x}{e}.$$

因此，当 $x > e$ 时级数发散，当 $x < e$ 时级数收敛. 当 $x = e$ 时，我们不能用比值法. 但是，因为 $(1+1/n)^n < e$，所以当 $x = e$ 时成立

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n} > 1.$$

所以，此时通项严格递增，必然不收敛于零，进而级数发散. □

有意思的是，虽然 d'Alembert 比值法对于 p 级数无效，但它仍然蕴含了通项的衰减信息. 假如 $a_n \approx 1/n^p$, 可得

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \approx \frac{n^p}{(n+1)^p} = (1-\frac{1}{n+1})^p = 1 - \frac{p}{n+1} + o(\frac{1}{n}).$$

这意味着

$$p \approx n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right).$$

因此，只要对比值作出更精细的分析，我们仍可以将比值法推广至基准为 p 级数的情形.

Raabe 比值判别法

假设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的通项成立

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = r \in [0, +\infty].$$

- 若 $r > 1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
- 若 $r < 1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散;
- 若 $r = 1$，则 Raabe 比值法失效.

证明. 对于 $r > 1$ 的情形. 取 $p \in (1, r)$, 根据极限保序性，则存在 N，当 $n \geq N$ 时成立

$$n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \geq p > 1,$$

即

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 - \frac{p}{n}.$$

从而, 当 $n \geq N$ 时，有

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdots \frac{a_{N+1}}{a_N} \cdot a_N \\ &\leq \left(1 - \frac{p}{n}\right)\left(1 - \frac{p}{n-1}\right) \cdots \left(1 - \frac{p}{N}\right) a_N \\ &= e^{\ln\left(1-\frac{p}{N}\right) + \ln\left(1-\frac{p}{N+1}\right) + \cdots + \ln\left(1-\frac{p}{n}\right)} a_N \\ &\leq e^{-\frac{p}{N} - \frac{p}{N+1} - \cdots - \frac{p}{n}} a_N \leq e^{-p(\ln(n+1) - \ln N)} a_N = \frac{N^p a_N}{(n+1)^p}. \end{aligned}$$

注意到 $p > 1$，所以 $\sum 1/n^p$ 收敛，进而 $\sum a_n$ 收敛.

当 $r < 1$ 时，做法类似，不再赘述.[2] 对于 $r = 1$ 的情形，只要考虑 $\sum 1/[n(\ln n)^p]$ 即可. □

2: 可以利用不等式

$$\ln(1-x) \geq -x - x^2 (0 < x < 1/2).$$

例 1.3.7 判断 $\sum \frac{n^n}{e^n n!}$ 的敛散性.

解. 注意到

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(1+\frac{1}{n})^n}{e} \to 1,$$

d'Alembert 比值法失效. 进一步分析，可得

Week1/ Lecture 2

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e - \frac{e}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

故而

$$n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \frac{n[e-(1+\frac{1}{n})^n]}{e} = \frac{1}{2} + o(1),$$

根据 Raabe 比值法可知原级数发散.[3] □

3: 本例似乎表明

$$\frac{n^n}{e^n n!} \approx \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

事实上，Stirling 公式表明

$$\frac{n^n}{e^n n!} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}.$$

1.4 分部求和法

现在我们来处理乘积型级数 $\sum a_n b_n$ 的敛散性. 根据 Cauchy 原理，需要估计

$$a_N b_N + \cdots + a_M b_M.$$

记 $B_{N,k} = b_N + \cdots + b_k$, 令 $B_{N,N-1} = 0$, 则

$$\begin{aligned}\sum_{k=N}^{M} a_k b_k = \sum_{k=N}^{M} a_k (B_{N,k} - B_{N,k-1}) &= \sum_{k=N}^{M} a_k B_{N,k} - \sum_{k=N-1}^{M-1} a_{k+1} B_{N,k} \\ &= a_M B_{N,M} - \sum_{k=N}^{M-1} (a_{k+1} - a_k) B_{N,k}\end{aligned}$$

若记 $\Delta a_k = a_k - a_{k-1}, \Delta B_{N,k} = B_{N,k} - B_{N,k-1}$, 则上述公式可写为

Abel 求和公式

$$\sum_{k=N}^{M} a_k \Delta B_{N,k} = a_k B_{N,k}\Big|_{k=N-1}^{M} - \sum_{k=N}^{M-1} B_{N,k} \Delta a_{k+1}.$$

此公式非常类似定积分中的分部积分公式，事实上它就是**离散的分布积分公式**.

Abel-Dirichlet 判别法

若级数 $\sum a_n b_n$ 满足下列条件之一, 则其收敛.

- **Abel 判别法**. 数列 (a_n) 单调有界, 级数 $\sum b_n$ 收敛.
- **Dirichlet 判别法** . 数列 (a_n) 单调趋于 0, 级数 $\sum b_n$ 的部分和有界.

证明. 不妨假设 (a_n) 单调递增，则

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=N}^{M} a_k b_k\right| &\le |a_M B_{N,M}| + \sum_{k=N}^{M-1} |B_{N,k}|(a_{k+1}-a_k)\\ &\le |a_M B_{N,M}| + \max_{k=N}^{M-1} |B_{N,k}| \sum_{k=N}^{M-1}(a_{k+1}-a_k)\\ &= |a_M B_{N,M}| + (a_M - a_N)\max_{k=N}^{M-1} |B_{N,k}|.\end{aligned}$$

在定理条件下，当 $M > N$ 充分大时，上式能充分小. □

例 1.4.1 考察 $\sum \frac{1}{n^p}\sin nx$ 和 $\sum \frac{1}{n^p}\cos nx$ 的收敛性，其中 $p > 0, 0 < x < 2\pi$.

解. 注意到

$$\sum_{n=0}^{N}\cos nx + i\sum_{n=0}^{N}\sin nx = \sum_{n=0}^{N} e^{inx} = \frac{1-e^{i(N+1)x}}{1-e^{ix}}.$$

因此 $\sum \cos nx$ 和 $\sum \sin nx$ 的部分和数列 (关于 n) 均有界，而 $1/n^p$ 显然单调趋于零，故根据 Dirichlet 判别法，两者均收敛.

进一步，根据 $\frac{1}{n^p}|\sin nx| \ge \frac{1}{2n^p} - \frac{\cos 2nx}{2n^p}$, 还可以判断绝对收敛或条件收敛，留给读者. □

例 1.4.2 设 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n$ 收敛，证明：$\sum_{k=n}^{\infty} a_k = o(\frac{1}{n})$.

证明. 记 $b_n = na_n$, 则 $a_n = b_n/n$, 根据 AD 判别法知 $\sum a_n$ 收敛. 记 $r_n = \sum_{k=n}^{\infty} b_k$, 有

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{m} a_n = \sum_{k=n}^{m}\frac{b_k}{k} = \sum_{k=n}^{m}\frac{r_k - r_{k+1}}{k} &= \sum_{k=n-1}^{m-1}\frac{r_{k+1}}{k+1} - \sum_{k=n}^{m}\frac{r_{k+1}}{k}\\ &= \sum_{k=n}^{m-1}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}\right)r_{k+1} + \frac{r_n}{n} - \frac{r_{m+1}}{m}.\end{aligned}$$

注意到 $r_n \to 0$，有

$$\sum_{k=n}^{\infty} a_n = -\sum_{k=n}^{\infty}\frac{r_{k+1}}{k(k+1)} + \frac{r_n}{n} = o(\frac{1}{n}).$$

□

现在我们用 Abel-Dirichlet 判别法来证明交错级数判别法. 所谓**交错级数**是指通项正负交错的级数. 从而，根据首项的正负，它有下面两种形式:

$$\begin{aligned}&+a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n-1}a_n + \cdots\\ &-a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \cdots + (-1)^n a_n + \cdots\end{aligned}$$

其中 $a_n > 0(n \geq 1)$. 这两种形式本质相同，下文以第一种为例展开讨论.

Leibniz 判别法

若交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 满足

(a) $a_{n+1} \leq a_n$, $n = 1, 2, 3, \cdots$;
(b) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$,

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛. 并且它的和 s 满足 $0 \leq s \leq a_1$，它的余项 r_n 满足 $|r_n| \leq |a_{n+1}|$.

证明. 显然 $\sum(-1)^{n-1}$ 的部分和数列有界，而 (a_n) 单调递减趋于零，故根据 Dirichlet 判别法知此交错级数收敛.

注意到

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_{n+k} = (a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_{n+3} - a_{n+4}) + \cdots \geq 0,$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_{n+k} = a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - (a_{n+4} - a_{n+5}) + \cdots \leq a_{n+1},$$

易得余项估计.

其实，上述证明属于杀鸡用了牛刀，我们可以用区间套定理给出更为直观的证明. 记部分和数列为 (s_n)，根据条件易知

$$0 \leq s_2 \leq s_4 \leq \cdots \leq s_{2n+2} \leq \cdots \leq s_{2n+1} \leq \cdots \leq s_3 \leq s_1.$$

根据区间套定理可知，$s_n \to s \in [0, a_1]$. □

例 1.4.3 讨论**交错 p 级数** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ 敛散性及其余项的大小，其中 $p > 0$.

解. 满足莱布尼茨判别法条件，级数收敛. 并且，余项 $|r_n| \leq \frac{1}{(n+1)^p}$. □

例 1.4.4 讨论 $\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ 的敛散性.

解. 虽然 $\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 并且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 收敛，但是这并非正项级数，不能应用比较判别法. 虽然如此，上面的估计仍然暗示了两者很接近，为了衡量他们的接近程度，我们考虑它们的差

$$c_n = \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

因为 $c_n \leq 0$ 并且 $c_n \sim -\frac{1}{n}$，故而 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ 发散. 结合 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 收敛，可知原级数发散. □

例 1.4.5 已知 $a_n \sim \frac{1}{n}$，判断 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(a_n + a_{n+1})$ 的敛散性（若收敛，须指明绝对收敛或条件收敛）.

解. 显然，$|(-1)^n(a_n + a_{n+1})| \sim \frac{2}{n}$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}$ 发散，故原级数不绝对收敛. 再者，其部分和为

$$s_n = -a_1 - a_2 + a_2 + a_3 - \cdots + (-1)^n a_n + (-1)^n a_{n+1} = -a_1 + (-1)^n a_{n+1}.$$

因为 $a_n \to 0$，所以 $s_n \to -a_1$. 所以原级数条件收敛. □

1.5 交换律与分配律

级数作为一种“加法”，我们显然希望它有交换律. 如果只交换有限项，这当然没有问题；但如果不限制交换的项数，将会有奇迹发生.

级数重排定理

交换律 若 $\sum a_n$ 绝对收敛, 则对任意 $\sigma \in \mathrm{Sym}(\mathbb{N})$, 重排级数 $\sum a_{\sigma(n)}$ 也绝对收敛，且 $\sum a_{\sigma(n)} = \sum a_n$.

Riemann 重排定理 若 $\sum a_n$ 条件收敛, 则对任意 $\alpha \in \mathbb{R}$, 存在 $\sigma \in \mathrm{Sym}(\mathbb{N})$, 满足 $\sum a_{\sigma(n)} = \alpha$.

证明. (1) 设 $\sum a_n$ 绝对收敛. 由于

$$\sum_{k=1}^{n}|a_{\sigma(k)}| \le \sum_{k=1}^{\infty}|a_k|,$$

故而 $\sum a_{\sigma(n)}$ 也绝对收敛. 为了考虑其和，记 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)}$. 注意到

$$L_n := \min\left\{\mathbb{Z}_+ - \{\sigma(1), \sigma(2), \cdots, \sigma(n)\}\right\} \to +\infty, (n \to \infty)$$

因此

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)}\right| \le \sum_{k=L_n}^{\infty}|a_k| \to 0.$$

故而 $\sum a_{\sigma(n)} = \sum a_n$.

(2) 记 $a^+ := \max\{a, 0\}, a^- := \min\{a, 0\}$, 则有 $a = a^+ + a^-, |a| = a^+ - a^-$. 于是 $\sum a_n = \sum(a_n^+ + a_n^-), \sum|a_n| = \sum(a_n^+ - a_n^-)$.

因此，若 $\sum a_n$ 条件收敛, 则 $\sum a_n^+ = +\infty, \sum a_n^- = -\infty$. 方便起见，把 $\{a_n\}$ 中的非负项依次记为 $\{a_{n_i}\}$，剩下的负项依次记为 $\{a_{m_j}\}$, 则

$$\sum_i a_{n_i} = +\infty, \quad \sum_j a_{m_j} = -\infty.$$

不妨假设 $\alpha \ge 0$. 按以下方式逐项取遍 $\{a_n\}$:

先取非负项，直到第 I_1 项使得此时的部分和首次大于 α，即

$$S_1 = \sum_{i=1}^{I_1} a_{n_i} > \alpha.$$

然后取负项，直到第 J_1 项使得首次实现

$$S_2 = \sum_{i=1}^{I_1} a_{n_i} + \sum_{j=1}^{J_1} a_{m_j} < \alpha.$$

继而再次取非负项，直至首次实现

$$S_3 = \sum_{i=1}^{I_1} a_{n_i} + \sum_{j=1}^{J_1} a_{m_j} + \sum_{i=I_1+1}^{I_2} a_{n_i} > \alpha.$$

依此类推，可得原级数的一个重排

$$\sum_{i=1}^{I_1} a_{n_i} + \sum_{j=1}^{J_1} a_{m_j} + \cdots + \sum_{i=I_k+1}^{I_{k+1}} a_{n_i} + \sum_{j=J_k+1}^{J_{k+1}} a_{m_j} + \cdots.$$

根据取法，易知

$$a_{m_{J_k}} \le S_{2k} - \alpha \le 0 \le S_{2k-1} - \alpha \le a_{n_{I_k}}.$$

注意到 $a_{n_i} \to 0, a_{m_j} \to 0$, 因此 $S_n \to \alpha$.

由于 $\{S_n\}$ 是所得重排级数的保号加括号级数的部分和，其敛散性与重排级数的敛散性一致，故所给重排级数即为所求. □

例 1.5.1 将级数 $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ 重排为

$$L = (p\text{ 项正}) + (q\text{ 项负}) + (p\text{ 项正}) + (q\text{ 项负}) + \cdots$$

证明: $L = \ln 2 + \frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}$.

证明. 注意到通项趋于零, 只要考虑部分和子列 $S_{m(p+q)}$ 即可.

$$\begin{aligned} S_{m(p+q)} &= \sum_{k=1}^{mp} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{mq} \frac{1}{2k} = \sum_{n=1}^{2mp} \frac{1}{n} - \sum_{k=1}^{mp} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{mq} \frac{1}{2k} \\ &= \ln(2mp) + \gamma_{2mp} - \frac{1}{2}\ln mp - \frac{1}{2}\gamma_{mp} - \frac{1}{2}\ln mq - \frac{1}{2}\gamma_{mq} \\ &\to \ln 2 + \frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}. \end{aligned}$$

□

下面我们来讨论分配律. 对于有限个数的和式，我们有

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \cdot \sum_{m=0}^{N} b_m = \sum_{n,m=0}^{N} a_n b_m.$$

当 $N=\infty$ 时，主要的困难是如何定义上式右端. 注意此时右端仍然只有可列项，所以可以看作一个级数，问题在于如何排序. 根据重排定理，如果右端按照某个排序绝对收敛，那么就可以按照任意排序求和.

分配律

设级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ 都绝对收敛，则

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{m=0}^{\infty} b_m = \sum_{n,m=0}^{\infty} a_n b_m,$$

其中右端可以按照任意排序求和.

证明. 因为

$$\sum_{n,m=0}^{N} |a_n b_m| \le \sum_{n=0}^{N} |a_n| \cdot \sum_{m=0}^{N} |b_m| \le \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot \sum_{m=0}^{\infty} |b_m| < +\infty.$$

所以 $\sum_{n,m} |a_n b_m|$ 绝对收敛. □

常用的求和顺序有**正方形序、对角线序**. 正方形序是指

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} s_n, \quad s_n = a_n \sum_{k=0}^{n} b_k + b_n \sum_{k=0}^{n-1} a_k.$$

对角线序是指

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} c_n, \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

对角线序的和式称为两个级数的 **Cauchy 乘积**.

Cauchy 乘积定理

设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ 均绝对收敛. 令

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0,$$

则 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ 绝对收敛，且

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

例 1.5.2 求级数 $1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n+1)x^n + \cdots$ 的和, 其中 $|x| < 1$.

解. 和式很像 $\frac{d}{dx}(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)$, 因此猜测和式为 $\frac{d}{dx}\frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2}$. 注意到 $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$，进而由 Cauchy 乘积定理可得. □

1.6 向量值级数

前面我们讨论的级数 $\sum a_n$ 都是在 $\mathbb{R}$ 上的，其实我们可以在更一般的空间中讨论问题. 方便起见，我们先讨论 d 维欧氏空间 $\mathbb{R}^d$. 它包含很多常见的空间，比如复平面 $\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$, 复空间 $\mathbb{C}^d=\mathbb{R}^{2d}$. 再比如复数域上的 $m\times n$ 矩阵空间 $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{C})=\mathbb{R}^{2mn}$.

设 $\alpha_n\in\mathbb{R}^d$，则自然可以考虑有限和 $\sum_{n=1}^N\alpha_n$. 为了进一步讨论极限，我们需要引入**范数/模**. 设 $\alpha=(a^1,\cdots,a^d)\in\mathbb{R}^d$, 它的**欧氏范数**定义为

$$\|\alpha\|:=\left(|a^1|^2+|a^2|^2+\cdots+|a^d|^2\right)^{1/2}.$$

进而可以定义 $\mathbb{R}^d$ 中的极限.

欧氏空间中的极限

设 (α_n) 为 $\mathbb{R}^d$ 中的点列，若存在 $\alpha\in\mathbb{R}^d$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\|\alpha_n-\alpha\|=0,$$

则称 (α_n) 收敛于 α，记作 $\alpha_n\to\alpha$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha$.

通常我们使用坐标来判断敛散性.

坐标审敛法

设 $\alpha_n=(a_n^1,\cdots,a_n^d),\alpha=(a^1,\cdots,a^d)\in\mathbb{R}^d$, 则

$$\alpha_n\to\alpha\iff\forall j=1,\cdots,d\,:\,a_n^j\to a^j.$$

证明. 只要使用下述不等式

$$|a_n^j-a^j|\le\|\alpha_n-\alpha\|\le\sum_{j=1}^d|a_n^j-a^j|.$$

□

特别地，如果 $c_n=a_n+ib_n$ 是一个复数列，则 $c_n\to a+ib$ 的充要条件是 $a_n\to a$ 且 $b_n\to b$.

根据坐标审敛法，容易得到 Cauchy 原理.

Cauchy 原理

设 $\alpha_n\in\mathbb{R}^d$, 则 (α_n) 收敛的充要条件是它满足 Cauchy 条件:

$$\forall\epsilon>0,\exists N,\forall n,m\ge N\,:\,\|\alpha_n-\alpha_m\|<\epsilon.$$

依据上述极限概念，我们可以定义 $\mathbb{R}^d$ 上级数的敛散性.

向量值级数

设 $\alpha_n \in \mathbb{R}^d$，称 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 为 $\mathbb{R}^d$ 上的级数. 若存在 $\alpha \in \mathbb{R}^d$ 使得

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \alpha_n = \alpha,$$

则称 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 收敛于 α，记作 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \alpha$.

根据 Cauchy 原理，容易得到下述两个级数审敛法.

向量值级数的 Cauchy 原理

设 $\alpha_n \in \mathbb{R}^d$. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 收敛的充要条件是：对于任意 $\epsilon > 0$，存在 N，使得当 $n \geq N$ 时，对于任意正整数 p 成立

$$\|\alpha_{n+1} + \cdots + \alpha_{n+p}\| < \epsilon.$$

向量值级数的绝对收敛性

设 $\alpha_n \in \mathbb{R}^d$. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \|\alpha_n\|$ 收敛，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 绝对收敛. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 绝对收敛，则其收敛.

例 1.6.1 设 $z \in \mathbb{C}$，证明 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ 绝对收敛.

证明. 由于 $\left\|\frac{z^n}{n!}\right\| = \frac{|z|^n}{n!}$，且 $\sum \frac{|z|^n}{n!}$ 收敛. □

例 1.6.2 设 $A \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{C})$，证明 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$ 绝对收敛

证明. 注意到 $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$, 事实上

$$\begin{aligned}\|AB\|^2 &= \sum_{i,k} \left|\sum_{j} (A)_{ij}(B)_{jk}\right|^2 \leq \sum_{i,k} \left(\sum_{j} |(A)_{ij}|^2 \cdot \sum_{j} |(B)_{jk}|^2\right) \\ &= \sum_{i,j} |(A)_{ij}|^2 \cdot \sum_{j,k} |(B)_{jk}|^2 = \|A\|^2 \|B\|^2.\end{aligned}$$

故而 $\left\|\frac{A^n}{n!}\right\| \leq \frac{\|A\|^n}{n!}$，所以级数绝对收敛. □

易知，绝对收敛的向量值级数成立交换律. 如果 $\mathbb{R}^d = \mathbb{C}$ 或 $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{C})$，那么还成立 Cauchy 乘积定理. 证明留给读者.

方阵级数的乘积定理

设 $A_j, B_j \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{C})$，其中 $n \geq 1$. 若级数 $\sum_{j=1}^{\infty} A_j$ 和 $\sum_{j=1}^{\infty} B_j$ 均绝对收敛，则 $\sum_{j,k=0}^{\infty} A_j B_k$ 也绝对收敛，且 $\sum A_j \sum B_k = \sum A_j B_k$. 特别地，

此时成立

$$\sum_{j=0}^{\infty} A_j \sum_{k=0}^{\infty} B_k = \sum_{l=0}^{\infty} C_l, \quad C_l = \sum_{j+k=l} A_j B_k.$$

根据上述定理，对于任意的 $z, w \in \mathbb{C}$，成立

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!}.$$

最后我们指出，如果 V 是一个一般的线性空间，只要 V 上有一个范数，那么就可以讨论 V 上的级数.

线性赋范空间

设 V 是一个线性空间. 如果一个函数 $\|\cdot\| : V \to [0, +\infty)$ 满足:

- $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
- $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|, \forall \lambda \in \mathbb{C}, v \in V$
- $\|v + u\| \leq \|v\| + \|u\|$

则称 $\|\cdot\|$ 是 V 上的一个**范数**, 称 $(V, \|\cdot\|)$ 是一个**赋范线性空间**.

给定一个赋范线性空间 $(V, \|\cdot\|)$，对于 $v_n \in V$，可以如下定义级数的和

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = v \Longleftrightarrow \lim_{N\to\infty} \left\| v - \sum_{n=1}^{N} v_n \right\| = 0.$$

级数的上述收敛性也被称为**依范数收敛**.