线性代数（3 学时）期终试卷 B 卷

2006 年 2 月

专业________________ 学号________________ 姓名________________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

一、（24 分）填空题：

1. 行列式 $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & x \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ 是关于 x 的一次多项式，该多项式中 x 的系数为__________。

2. 若 n 阶方阵 A,B 均可逆，$AXB=C$，则 $X=$__________。

   (A) $A^{-1}B^{-1}C$　　(B) $CB^{-1}A^{-1}$　　(C) $A^{-1}CB^{-1}$　　(D) $B^{-1}CA^{-1}$

3. 设 $a=(1,2,3)$，$b=(3,2,1)$，$A=a^{\mathrm{T}}b$，则 $A^6=$

   ____

4. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & t & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，并且 A 的列向量线性相关，则 $t=$__________。

5. 设 S 是 n 元齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解空间，其中 $R(A)=r$，则 S 的维数为__________。

   (A) r　　(B) $n-r$　　(C) n　　(D) $r-n$

6. 设向量组 $a_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$，$a_2=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$，$a_3=\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix}$，$a_4=\begin{pmatrix}4\\5\\6\\7\end{pmatrix}$，则该向量组的秩是__________。

7. 已知 3 阶方阵的特征多项式为 $|A-\lambda E|=(1-\lambda)(4+\lambda)^2$，则 $|A|=$__________。

8. 若 x 是可逆方阵 A 对应于特征值 λ 的特征向量，则有__________。

   (A) $A^{\mathrm{T}}x=\lambda x$　　(B) $A^{-1}x=\lambda^{-1}x$　　(C) $A^{\mathrm{T}}Ax=\lambda x$　　(D) $AA^{\mathrm{T}}x=\lambda x$

二、（6 分）计算行列式$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$。

三、（12 分）设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，求$\boldsymbol{X}$，使得$\boldsymbol{AXB}=\boldsymbol{C}$。

四、（10 分）已知向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 线性无关，设

$$\boldsymbol{b}_1 = k\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_1 + k\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + k\boldsymbol{a}_3$$

问 k 满足什么条件时，向量 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3$ 也线性无关。

五、（10 分）问 k 为何值时，线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + kx_3 = 1 \\ 2x_1 + kx_2 + 8x_3 = 3 \end{cases}$ 有解？并求出通解。

六、（16 分）求一个正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_2x_3$ 化为标准形。

七、（10 分）设 $\mathbb{R}[x]_3 = \{f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$ 是次数不超过 3 的实系数多项式所成的集合。

1. 证明 $\mathbb{R}[x]_3$ 关于多项式的加法和数乘成为实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间；

2. 证明多项式的微分运算：

$$\forall f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{R}[x]_3, \mathfrak{D}(f(x)) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2$$

是 $\mathbb{R}[x]_3$ 上线性变换。

八、（12 分）判别下列命题是否正确，正确的需要证明，错误的需要给出一个反例。

1. 设$\boldsymbol{A}$是n阶方阵，λ是实数，则$|\lambda \boldsymbol{A}| = \lambda^n \cdot |\boldsymbol{A}|$。

2. 设$\boldsymbol{A}$是$m \times n$矩阵，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$是$n$维列向量，若列向量$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$和$\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$是线性无关的，则$\boldsymbol{x}$和$\boldsymbol{y}$也是线性无关的。