同济大学 2009-2010 学年第一学期高等数学 B(上)期终试卷

一. 填空题($4'\times 4=16'$)

1. 设函数 $f(x)$ 具有二阶导数，且 $y'\neq 0,\ \dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{y'}$，则 $\dfrac{d^2x}{dy^2}=$ $\underline{\quad -\dfrac{y''}{y'^3}\quad}$.

2. 设函数 $f(u)$ 为可导函数，且 $f'(0)\neq 0$，由参数方程 $\begin{cases} x=f(\sin 2t)-\pi \\ y=f(e^{3t}-1) \end{cases}$ 所确定的函数的导数 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}=$ $\underline{\quad \dfrac{3}{2}\quad}$.

3. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n})=$ $\underline{\quad \ln 2\quad}$.

4. 微分方程 $y''+5y'+6y=xe^{-2x}+\sin^2 x$ 的特解形式为(不需确定系数)

$\underline{\quad x(Ax+B)e^{-2x}+C\cos 2x+D\sin 2x+E\quad}$.

二. 选择题($4'\times 4=16'$)

5. 设函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{a+e^{bx}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$，则常数 a,b 满足: $[D]$.

$(A)a<0,b>0$； $(B)a>0,b<0$； $(C)a\le 0,b>0$； $(D)a\ge 0,b<0$

6. 曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^{-x})$， $[D]$

(A) 没有水平渐近线但有铅直渐近线; (B) 没有铅直渐近线但有水平渐近线;

(C) 没有水平和铅直渐近线; (D) 有水平和铅直渐近线

7. 将 $x\to 0^+$ 时的无穷小量 $\alpha=\int_0^x \sin t\,dt,\ \beta=\int_0^{\sqrt{x}}\tan t\,dt,\ \gamma=\int_0^{x^2}(e^t-1)dt$ 排列起来，使得后面的是前一个的高阶无穷小，则正确的排列顺序是: $[C]$

$(A)\alpha,\beta,\gamma$； $(B)\alpha,\gamma,\beta$； $(C)\beta,\alpha,\gamma$； $(D)\gamma,\beta,\alpha$

8. 设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某个邻域内有定义，且 $f(0)=0,\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=-2$，则在该点处 $f(x)$: $[C]$

(A) 不可导; (B) 可导且 $f'(0)\neq 0$； (C) 取得极大值; (D) 取得极小值.

三. 解答题($7'\times 4=28'$)

9. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\sin(\sin x)}{x^3}$， $[=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t-\sin t}{t^3}=\dfrac{1}{6}]$

10. 计算定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\tan x\sec^2 xdx$ $[=\dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} xd(\tan^2 x)=\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sec^2 x-1)dx=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}]$

11. 计算反常积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}dx$

$$[=\int_1^{+\infty}(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2})\arctan xdx=-\int_0^{+\infty}\arctan xd(\frac{1}{x})-[\frac{1}{2}\arctan^2 x]_1^{+\infty}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2+\frac{3}{32}\pi^2]$$

12. 试求微分方程 $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{1}{x}y=(1-x^2)y^2$ 的通解

$$[(\frac{1}{y})'-\frac{1}{x}(\frac{1}{y})=x^2-1\Rightarrow\frac{1}{y}=x(\frac{x^2}{2}-\ln x+c)]$$

四. ($8'$)求曲线 $y=\ln x$ 上的点, 使此曲线在该点的曲率半径为最小.

$$[R=\frac{1}{K}=\frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{x}(x>0)\Rightarrow R'=\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}(2x^2-1)}{x^2}\Rightarrow(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{2}\ln 2)]$$

五. ($8'$)设不定积分 $I_n=\int\dfrac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}dx$,

(1)计算 I_0，I_1； (2)利用变换 $x=\sin t$，建立 $I_n(n=2,3,4,\cdots)$ 的递推公式

$$[(1)\ I_0=\arcsin x+c,\ I_1=-\sqrt{1-x^2};\quad [(2)\ I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}-\frac{1}{n}x^{n-1}\sqrt{1-x^2}+c]$$

六. ($8'$)设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且在 $[a,b]$ 上 $g(x)>0$，证明至少存在一点

$\xi\in[a,b]$，使 $f(\xi)=\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$. $[f_{\min}\le\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}\le f_{\max}]$

七. ($8'$)过坐标原点作曲线 $y=1+x^2(x\ge 0)$ 的切线, 记该切线与此曲线及 y 轴所围成的平面图形为 D，试求:

(1)平面图形 D 的面积; (2)平面图形 D 绕直线 $x=1$ 旋转一周所成的旋转体的体积,

$$[y=2x,\ S=\frac{1}{3},\ V=\frac{\pi}{2}]$$

八. ($8'$)已知 $y_1=xe^x+e^{2x}$, $y_2=xe^x+e^{-x}$, $y_3=xe^x+e^{2x}-e^{-x}$ 是某个二阶常系数线性非齐次微分方程的三个解, 试写出该微分方程的通解并建立此微分方程.

$$[y=c_1e^{-x}+c_2e^{2x}+xe^x,\ y''-y'-2y=(1-2x)e^x]$$

同济大学 2010-2011 学年第一学期高等数学 B(上)期终试卷

一. 填空题($4'\times 4=16'$)

1. 已知极限 $\lim\limits_{x\to e} f(x)$ 存在, 且函数 $f(x)$ 满足: $f(x)=\dfrac{\ln x-1}{x-e}\lim\limits_{x\to e} f(x)+(\dfrac{x}{e})^{\frac{e}{x-e}}$, 则

$\lim\limits_{x\to e} f(x)=$ $\underline{\dfrac{e^2}{e-1}}$.

2. 设函数 $f(x)=\ln(x^2+2x-3)$, 则 $f^{(n)}(2)=$ $\underline{(-1)^{n-1}(n-1)!(\dfrac{1}{5^n}+1)}$.

3. 不定积分 $\int\dfrac{1+\tan x}{\sin 2x}dx=$ $\underline{\dfrac{1}{2}(\tan x+\ln|\tan x|)+C}$.

4. 定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{3^{\sin x}}{3^{\sin x}+3^{\cos x}}dx=$ $\underline{\dfrac{\pi}{4}}$.

二. 选择题($4'\times 4=16'$)

5. 曲线 $\begin{cases} x=\dfrac{3t}{1+t^3} \\ y=\dfrac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}$ $(t\neq -1)$ 的斜渐近线方程为 [A]

$A: y=-x-1$;　　$B: y=x-1$;　　$C: y=-x+1$;　　$D: y=x+1$.

6. 曲线 $16y^2=x^2-2x$ 上点 $P(2,0)$ 处曲率 $K=$ [B]

$A: 0$;　　$B: 16$;　　$C: \dfrac{1}{16}$;　　$D: 4$.

7. 设 $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 内连续的偶函数, $F'(x)=f(x)$, 则原函数 $F(x)$ [C]

A:均为奇函数;　　B:均为偶函数;
C:中只一个奇函数;　　D:既非奇函数也非偶函数.

8. 设 s_1 为曲线 $y=\sin x$ 上相应于 $0\le x\le 2\pi$ 的一段弧长, s_2 为椭圆 $x^2+2y^2=2$ 的周长, 则 [D]

$A: |s_1-s_2|=\pi$;　　$B: s_1>s_2$;　　$C: s_1<s_2$;　　$D: s_1=s_2$.

三. 解答题($4'\times 7=28'$)

9. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\dfrac{2+\cos x}{3})^x-1}{x^3}$.　　$[=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x\ln\frac{2+\cos x}{3}}-1}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(\cos x-1)}{3x^3}=-\dfrac{1}{6}]$

10. 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 内的连续的奇函数，且 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=2$，证明 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，并求 $f'(0)$.
$$[\, f(0)=0,\ \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=2=f'(0)\,]$$

11. 求定积分 $\int_{-1}^{2}[x]\max\{1,e^{-x}\}dx$，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.
$$[\, I=\int_{-1}^{0}-e^{-x}dx+\int_{0}^{1}0dx+\int_{1}^{2}dx=2-e\,]$$

12. 判定反常积分 $\int_{e}^{+\infty}\dfrac{\ln x-1}{x^2}dx$ 的收敛性，如果收敛，求出其值.
$$[\, I=-\int_{e}^{+\infty}(\ln x-1)d(\frac{1}{x})=[-\frac{\ln x-1}{x^2}-\frac{1}{x}]_{e}^{+\infty}=\frac{1}{e}\,]$$

四. $(8')$设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 内的连续函数，且 $f(0)\neq 0$，试求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x tf(x-t)dt}{\int_0^x xf(x-t)dt}$.
$$[=\lim_{x\to 0}\frac{x\int_0^x f(u)du-\int_0^x uf(u)du}{x\int_0^x f(u)du}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)du}{xf(x)+\int_0^x f(u)du}=\lim_{x\to\infty}\frac{xf(\xi)}{x[f(x)+f(\xi)]}=\frac{1}{2}\,]$$

五. $(8')$设可积函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内满足关系式：$f(x)=f(x-\pi)+\sin x$，且当 $x\in[0,\pi)$ 时 $f(x)=x$，试求 $\int_{\pi}^{3\pi}f(x)dx$.
$$[\, I=\int_{\pi}^{2\pi}(x-\pi+\sin x)dx+\int_{2\pi}^{3\pi}(x-2\pi)dx=\pi^2-2\,]$$

六. $(8')$设 n 为正整数，函数 $f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x}{e^{-nx}-x^2-1}, & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$，求曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=-\dfrac{x}{2}$ 所围平面图形绕 x 轴旋转一周所成的旋转体的体积.
$$[\, f(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ -\dfrac{x}{x^2+1}, & x\geq 0\end{cases}\Rightarrow V=\pi\int_0^1[(-\frac{x}{x^2+1})^2-(-\frac{x}{2})^2]dx=(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{3})\pi\,]$$

七. $(8')$求微分方程 $(x^2y^2-1)\dfrac{dy}{dx}+2xy^3=0$ 的通解. $[\,(x^2)'+\dfrac{1}{y}(x^2)=\dfrac{1}{y^3}\Rightarrow x^2=\dfrac{1}{y}(C-\dfrac{1}{y})\,]$

八. $(8')$令 $x=\sin t$，化简微分方程 $(1-x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2}-x\dfrac{dy}{dx}-y=e^{\arcsin x}$，并求其通解.
$$[\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{1}{\cos t},\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{dt^2}\frac{1}{\cos^2 t}+\frac{dy}{dt}\frac{\sin t}{\cos^3 t}\Rightarrow\frac{d^2y}{dt^2}-y=e^t\Rightarrow y=C_1e^{\arcsin x}+C_2e^{-\arcsin x}+\frac{\arcsin x}{2}e^{\arcsin x}\,]$$

同济大学 2011-2012 学年第一学期高等数学 B(上)期终试卷

一. 填空选择题($3'\times 8=24'$)

1. 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x+1}{x-2})^x=$ $\underline{\qquad e^3 \qquad}$.

2. 若极限 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-2h)-f(x_0)}{h}=3$，则 $f'(x_0)=$ $\underline{\qquad -\dfrac{3}{2} \qquad}$.

3. 积分 $\int_{-2}^{2}(x^2+x^3\sqrt{4-x^2})dx=$ $\underline{\qquad \dfrac{16}{3} \qquad}$.

4. 积分 $\int \sin xe^{2\cos x}dx=$ $\underline{\qquad -\dfrac{1}{2}e^{2\cos x}+C \qquad}$.

5. 微分方程 $4y''-4y'+y=0$ 的通解为 $y=$ $\underline{\qquad (c_1x+c_2)e^{\frac{1}{2}x} \qquad}$.

6. 记 $I_1=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^4 xdx$，$I_2=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 xdx$，$I_3=\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx$，$I_1=\int_{-\pi}^{\pi}x\sin^2 xdx$. 则这 4 项积分的大小关系为 [B]

   (A) $I_2>I_1>I_3>I_4$; (B) $I_3>I_2>I_1>I_4$; (C) $I_4>I_1>I_3>I_2$; (D) $I_1>I_2>I_4>I_3$.

7. 下列反常积分中收敛的反常积分是 [A]

   $(A)\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^2+2}dx$;　　$(B)\int_e^{+\infty}\dfrac{1}{x\sqrt{\ln x+2}}dx$;　　$(C)\int_{-\infty}^{+\infty}\sin xdx$;　　$(D)\int_0^1\dfrac{1}{x-1}dx$

8. 若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x^2)-\ln 2}{x^3-1} & ,x\neq 1\\ a & x=1\end{cases}$ 在 $x=1$ 连续，则常数 [D]

   (A) $a=\dfrac{2}{3}$;　　(B) $a=-\dfrac{2}{3}$;　　(C) $a=-\dfrac{1}{3}$;　　(D) $a=\dfrac{1}{3}$.

二. 解答题($6'\times 5=30'$)

1. 计算由曲线 $y=\sqrt{x+2}$ 与直线 $x-3y+4=0$ 所围平面图形的面积.

   [$A=\int_{-1}^{2}(\sqrt{x+2}-\dfrac{1}{3}x-\dfrac{4}{3})dx=\dfrac{1}{6}$]

2. 若函数 $u(x)$ 与 $v(x)$ 具有 n 阶导数，试写出 $u(x)\cdot v(x)$ 计算 n 阶导数的莱布尼茨公式，

   计算 $x\cdot e^{2x}$ 的10阶导数.　　[$[u(x)v(x)]^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k u^{(k)}v^{(n-k)}$; $(xe^{2x})^{(10)}=2^{10}e^{2x}(x+5)$]

3. 求函数 $f(x)=(x^2+x-5)e^x$ 的单调区间以及函数的极大与极小值.

$[f'=(x+4)(x-1)e^x \Rightarrow (-\infty,-4],[1,+\infty)$ Z ; $[-4,1]$] $;f_{\max}(-4)=7e^{-4};f_{\min}(1)=-3e]$

4. 计算反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}dx$. $[I=\ln 2+\frac{\pi}{2}]$

5. 求微分方程 $y''+2y'-3y=1,\ y(0)=\frac{2}{3},\ y'(0)=-7$ 的解.

$[y=c_1e^{-3x}+c_2e^x-\frac{1}{3}=2e^{-3x}-e^x-\frac{1}{3}]$

三. $(8')$在长度单位为米的坐标中，由方程 $x=y^2-1$ 与直线 $x-2y-2=0$ 围成的薄片铅直的浸入水中，其中 x 轴平行于水面且在水下 1 米深处，试求该薄片的一侧所受的水压力.

$[P=\int_{-1}^{1}\rho g(1-y)(2y+2-y^2+1)dy=4\rho g]$

四. $(10')$求积分 $\int_0^1\sqrt{x}\ln(x+1)dx$, $[I=\frac{2}{3}\ln 2+\frac{8}{9}-\frac{\pi}{3}]$

五. $(10')$1. 试求常数 a,b，使得函数在= $y=\begin{cases}x^2, & 0\le x\le 1\\ ax+b, & 1<x\le 2\end{cases}$ 在区间 $[0,2]$ 上可导;

2. 若由该曲线段绕 y 轴旋转形成一个容器，如果每单位时间以常量 v_0 向容器均匀的注水，试求该容器在水溢出前水深为 h 时水面的上升速度.

$$[a=2,b=-1;V(h)=\int_0^h\pi x^2(y)dy\Rightarrow v_0=V'=\pi x^2(h)h'\Rightarrow h'=\begin{cases}\dfrac{v_0}{\pi h}, & 0\le h\le 1\\ \dfrac{4v_0}{\pi(h+1)^2}, & 1<h\le 3\end{cases}]$$

六. $(10')$要建一个容积为 14，侧面为圆柱形，顶部接着一个半球形的仓库(不含底部)，已知顶部每平方单位的造价是其侧面圆柱部分单位造价的 3 倍，试求该仓库的底圆半径，使得该仓库的造价最省.

$$[f=2\pi rh+2\pi r^2 3,\pi r^2h+\frac{2}{3}\pi r^3=14\Rightarrow f(r)=\frac{28}{r}+\frac{14\pi}{3}r^2,f'(r)=0\Rightarrow r=\sqrt[3]{\frac{3}{\pi}},\text{L}\ ]$$

七. $(8')$函数 $f(x)$ 在 $[x_0,+\infty)$ 上具有二阶导数，并且 $f''(x)<0$，对于任意 $x>x_0$，由拉格朗日中值定理，存在 $x_0<\xi<x$，使得 $f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0)$. 证明 ξ 定义了 $(x_0,+\infty)$ 上的一个单调增加函数.

$[f'(x)$ 递减 $\xi=\xi(x)$ 唯一确定(函数); 又可证 $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$] ，可得 $\xi(x)$ 递增]

同济大学 2012-2013 学年第一学期高等数学 B(上)期终试卷

一. 填空选择题($3'\times 8$)

1. 函数 $f(x)=xe^{-x}$ 的四阶带佩亚诺余项的麦克劳林公式为 $f(x)=$ $\underline{x-x^2+\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{6}x^4+o(x^4)}$

2. $y=e^{2(x-1)}+x$ 在 $x=1$ 所对应点的曲率 $K=$ $\underline{\frac{\sqrt{10}}{25}}$

3. 极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-x^a}{a-x}=$ $\underline{a^a(1-\ln a)}$

4. 由方程 $y+2\sqrt{y+x}=2x^2$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 在 $(1,0)$ 点的导数 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{(1,0)}=$ $\underline{\frac{3}{2}}$

5. 函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 则数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)$ 存在是函数极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在的什么条件? [B]

   (A) 充分条件; (B) 必要条件; (C) 充分必要条件; (D) 无关条件.

6. 在区间 $[a,b]$ 上, 函数 $f(x)$ 连续的充分条件是: [B]

   $(A)\int_a^b f(x)dx$ 存在; $(B)f(x)$ 可导; $(C)f(x)$ 具有原函数; $(D)f(x)$ 有界.

7. 如果作换元 $x=2\sin t$, 则定积分 $\int_2^{\sqrt{2}} f(\sqrt{4-x^2})dx$ 等于 [C]

   $(A)\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(2\cos t)\cdot 2\cos t dt$; $(B)\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(2\cos t)\cdot 2\cos t dt$;

   $(C)\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} f(2\cos t)\cdot 2\cos t dt$; $(D)\int_{\frac{\pi}{4}}^{0} f(2\cos t)dt$.

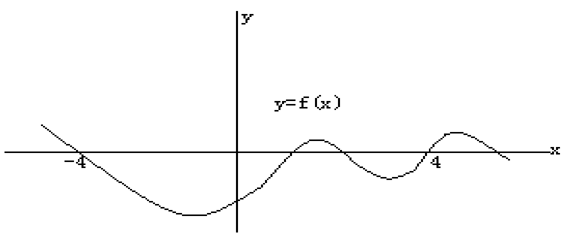
8. 可导函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上单调增加的充分条件是在该区间上 [D]

   $(A)\Delta f(x)=(1-e^{x^2})\Delta x+o(\Delta x)$; $(B)\int_0^1 f(x)dx>0$;

   $(C)f''(x)>0$; $(D)\Delta f(x)=[1+f^4(x)]\Delta x+o(\Delta x)$.

二. ($4'\times 3$)

1. 如图是函数 $y=f(x)$ 的图像, 试在下列空格中填入恰当的符号: <0; $=0$ 或 >0.



$\int_{-4}^{4} f(x)dx \underline{<0}$ ；　$\int_{-4}^{4} f'(x)dx \underline{=0}$ ；　$\int_{-4}^{4} f''(x)dx \underline{>0}$ ；　$\int_{-4}^{4} f'''(x)dx \underline{<0}$.

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^{2x}(1+2t)^{\frac{1}{t}}dt$ 　　[$=\lim\limits_{x\to 0}2(1+4x)^{\frac{1}{2x}}=2e^2$]

3. 计算不定积分 $\int (x+1)\ln(x+1)dx$ 　　[$\frac{1}{2}(x+1)^2\ln(x+1)-\frac{1}{4}(x+1)^2+c$]

三. (6'×3)

1. 求曲线 $y=\frac{x-1}{e^{2x}}$ 的凹凸区间与拐点的坐标.

[$y'=e^{-2x}(3-2x),\ y''=4e^{-2x}(x-2)\Rightarrow \cap:(-\infty,2];\cup:[2,+\infty)$ ；拐点: $(2,e^{-4})$]

2. 计算反常积分 $\int_e^{+\infty}\frac{1}{x(2\ln x+\ln^2 x)}dx$. 　　[$=\frac{1}{2}\ln\frac{\ln x}{2+\ln x}\Big|_e^{+\infty}=\frac{1}{2}\ln 3$]

3. 一个由曲线段 $y=4x^2\ (0\le x\le 1)$ 绕 y 轴旋转形成的容器内装满了比重为 γ 的均匀液体，如果要将该容器内的液体全部排空至少需要做多少功. 　　[$W=\int_0^4(4-y)\pi\gamma\frac{y}{4}dy=\frac{8}{3}\pi\gamma$]

四. (8')试用适当的换元法求微分方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{2x(y-x^2)^2}{2(y-x^2)^2+1}$ 的通解.

[$y-x^2=u\Rightarrow\frac{du}{dx}+2x=\frac{2xu^2}{2u^2+1}\Rightarrow 2u-\arctan u=-x^2+c\Rightarrow\cdots$]

五. (8')试说明闭区间上连续函数的像集是闭区间，并举例说明在闭区间上，像集是闭区间的函数未必连续. 　　[最值定理；介值定理；反例略]

六. (10')计算由曲线 $y=e^{2x}$ ，该曲线经过坐标原点的切线以及 y 轴所围成图形的面积，并求该图形绕 x 轴旋转所得旋转体的体积.

[切线: $y=2ex$;切点: $x=\frac{1}{2}$ ； $A=\int_0^{\frac{1}{2}}(e^{2x}-2ex)dx=\frac{e-2}{4};V_x=\pi\int_0^{\frac{1}{2}}[(e^{2x})^2-(2ex)^2]dx=\frac{e^2-3}{12}\pi$]

七. (10')试求微分方程 $y''+y=x^2+\cos^2 x$ 的通解.

[$\lambda=\pm i;\ y^*=Ax^2+Bx+C+D\cos 2x+E\sin 2x;\ y=C_1\cos x+C_2\sin x+x^2-\frac{3}{2}-\frac{1}{6}\cos 2x$]

八. (10') $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数，若 $\int_0^T f(t)dt=A$ ，求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$.

[$=\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\(0\le\theta<T)}}\frac{\int_0^{nT}f(t)dt+\int_{nT}^{nT+\theta}f(t)dt}{nT+\theta}=\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\(0\le\theta<T)}}\frac{n\int_0^T f(t)dt+\int_0^{\theta}f(t)dt}{nT+\theta}=\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\(0\le\theta<T)}}\frac{\int_0^T f(t)dt+\frac{1}{n}\int_0^{\theta}f(t)dt}{T+\frac{\theta}{n}}=\frac{A}{T}$]

同济大学 2013-2014 学年第一学期高等数学 B(上)期终试卷

一. 选择与填空题($3'\times 8=24'$)

1. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{n-2}{n+1})^{2n}=$ <u>e^{-6}</u>

2. 利用定积分的几何意义，积分 $\int_{-2}^{4}\sqrt{8+2x-x^2}\,dx=$ <u>$\dfrac{9}{2}\pi$</u>

3. 微分方程 $y''+y'-12y=0$ 的通解为 <u>$y=C_1e^{-4x}+C_2e^{3x}$</u>

4. 已知敌方的导弹阵地位于坐标原点处，发射的导弹飞行轨迹为光滑曲线 $y=f(x)$，我方拦截导弹的阵地位于 x 轴正向 2000 公里处，发射的拦截导弹飞行速度是敌方导弹速度的两倍，如果由计算机控制，在敌方导弹发射时我方的拦截导弹同时发射，并且我方导弹的运行轨迹是直线，如果两导弹的相撞点为 (x_0,y_0)，则该点满足的方程为

$$2\int_0^{x_0}\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx=\sqrt{(x_0-2000)^2+f^2(x_0)}$$

5. $\{x_0\}$ 是有界数列, 则该数列单调是数列极限存在的什么条件 【 A 】

(A) 充分条件; (B) 必要条件; (C) 充分必要条件; (D) 无关条件.

6. $f(x)$ 是连续函数, 曲线段 $\int_a^x f(t)dt(a\le x\le b)$ 的弧长 s 的计算公式为 【 C 】

$(A)s=\int_a^b\sqrt{x^2+f^2(x)}\,dx$; $(B)s=\int_a^b\sqrt{x^2+f'^2(x)}\,dx$;

$(C)s=\int_a^b\sqrt{1+f^2(x)}\,dx$; $(D)s=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$ 无关条件.

7. 函数 $f(x)$ 具有三阶连续导数，如果 $f''(x)>0,\ x\in[a,b]$，则下列四项积分中，积分值确定为正数的积分为 【 A 】

$(A)I=\int_a^b[f'(b)-f'(x)]dx$; $(B)I=\int_a^b f'(x)dx$;

$(C)I=\int_a^b[f(x)-f(a)]dx$; $(D)I=\int_a^b f'''(x)dx$.

8. 利用换元 $x=\ln(t+1)$, 积分 $\int_0^2 f(e^x)dx$ 等于 【 D 】

$(A)\int_0^2\dfrac{f(t+1)}{t+1}dt$; $(B)\int_0^{e^2-1}f(t+1)dt$; $(C)\int_0^{e^2}\dfrac{f(t+1)}{t+1}dt$; $(D)\int_0^{e^2-1}\dfrac{f(t+1)}{t+1}dt$.

二. 计算下列各题($6'\times 6=36'$)

1. 试计算由 $x^2+\ln x+y^3+y=3$ 所确定的曲线在 $(1,1)$ 点的切线方程.

$$[\ y'=-\frac{2x^2+1}{(3y^2+1)x}=-\frac{3}{4}\Rightarrow 3x+4y-7=0\ ]$$

2. 求由参数方程$\begin{cases} x = e^{-t} \\ y = e^t + t \end{cases}$所确定函数$y = y(x)$的导数$\dfrac{dy}{dx}$；$\dfrac{d^2 y}{dx^2}$.

$$[\frac{dy}{dx} = -(e^{2t} + e^t);\ \frac{d^2 y}{dx^2} = 2e^{3t} + 2e^{2t}]$$

3. 求不定积分$\displaystyle\int \frac{x}{1+\sqrt{x+1}}dx$　　$[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - x + c]$

4. 曲线段$L: y = x^3(-a \le x \le a)$的弧长为$s$，$D_n$是$xoy$平面上与$L$距离不超过$n$的点集,

即$D_n = \{(x,y)\big|(x-x')^2 + (y-y')^2 \le n^2, (x',y') \in L\}$, D_n的面积为A_n,求极限$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{n^2}$.

$$[\pi n^2 \le A_n \le \pi(n+s)^2 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{n^2} = \pi]$$

三. $(8')$计算反常积分$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^3}dx$.　　$[= -\frac{1}{2}[\frac{\arctan x}{x^2} + \frac{1}{x} + \arctan x]_1^{+\infty} = \frac{1}{2}]$

四. $(8')$ $f(x)$具有二阶导数，如果极限$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1+f(x)+xf(2x)}{x^2} = -1$，求$f(0), f'(0), f''(0)$.

$$[f(0 = -1, f'(0) = 1, f''(0) = -6]$$

五. $(8')$可导函数$f(x)$满足方程$f(x) = -2\int_0^{-x} tf(-t)dt + x^4 + 1$，求函数$f(x)$.

$$[f(0) = 1, f'(x) = -2xf(x) + 4x^3 \Rightarrow f(x) = 2(x^2-1) + 3e^{-x^2}]$$

六. $(10')$求函数$y = xe^{x^2+3x+1}$的单调区间与极值，并求出该函数在区间$[-2,2]$上的最值.

$$[y' = (2x+1)(x+1)e^{x^2+3x+1} \Rightarrow (-\infty,-1]\uparrow,\ [-1,-\frac{1}{2}]\downarrow,\ [-\frac{1}{2},+\infty)\uparrow;$$

$$极小\ y(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2\sqrt[4]{e}}, 极大\ y(-1) = -\frac{1}{e};\ y_{\min}(-2) = -\frac{2}{e}, y_{\max}(2) = 2e^{11}]$$

七. $(10')$计算由曲线$y = e^{2x} - 1$，直线$y = e^4 - 1$以及y轴所围图形的面积；并求出由该图形绕y轴旋转所得旋转体的体积.

$$[A = \int_0^2 [(e^4 - 1 - (e^{2x} - 1)]dx = \frac{3}{2}e^4 + \frac{1}{2}; V = \int_0^2 2\pi x(e^4 - e^{2x})dx = \frac{\pi}{2}(5\pi^4 - 1)]$$

八. $(8')$计算极限$\displaystyle\lim_{x\to 0}\int_{\ln(1+x)}^{x}\frac{(1-2t)^{\frac{1}{t}}}{t^2}dt$.

$$[\int_{\ln(1+x)}^{x}\frac{(1-2t)^{\frac{1}{t}}}{t^2}dt = \frac{(1-2\xi)^{\frac{1}{\xi}}}{\xi^2}(x - \ln(1+x)), \ln(1+x) < \xi < x \Rightarrow \xi :\ x \Rightarrow L = \frac{1}{2e^2}]$$

同济大学 2014-2015 学年第一学期高等数学 B(上)期终试卷

一. 填空选择题($3'\times 8=24'$)

1. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{n^2-3n+2}{n^2+1})^n=$ __e^{-3}__

2. $y=xe^x$ 在 $x=1$ 对应点的曲率 $k=$ __$\dfrac{3e}{(1+4e^2)^{\frac{3}{2}}}$__

3. 反常积分 $\int_0^1\dfrac{1}{x^{\alpha-1}}dx+\int_1^{+\infty}\dfrac{1+\sqrt{x}}{x^\alpha}dx$ 收敛，则常数 α 的取值区间是 $\alpha\in$ __$(\dfrac{3}{2},2)$__

4. $\int e^x f'(3-2e^x)dx=$ __$-\dfrac{1}{2}f(3-2e^x)+c$__

5. $f(x)$ 在 $[a,b]$(其中 $b=a+1$)上具有二阶导数,且 $f''(x)<0$,下列不等式正确的是 【 B 】

$(A) f'(b)<f'(a)<f(b)-f(a)$； $(B) f'(b)<f(b)-f(a)<f'(a)$；

$(C) f(b)-f(a)<f'(b)<f'(a)$； $(D) f'(a)<f(b)-f(a)<f'(b)$.

6. $f(x)$ 是连续函数，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f(\dfrac{2k-n}{n})\cdot\dfrac{1}{n}$ 等于下面的定积分 【 D 】

$(A)\int_{-1}^1 f(2x-1)dx$； $(B)\int_0^2 f(2x-1)dx$； $(C)2\int_{-1}^1 f(x)dx$； $(D)\int_0^1 f(2x-1)dx$.

7. 如果数列 $\{x_n\}$ 在任意区间 $[a,b]$ 上只含有有限项，则下面判断中正确的判断是 【 D 】

$(A)\{x_n\}$ 是收敛数列; $(B)\{x_n\}$ 是有界数列但不收敛;

$(C)\{x_n\}$ 是无界数列但是当 $n\to\infty$ 时不是无穷大量; (D) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$.

8. $f(x)=x(x^2-1)(x^2-2)(x^3-3)+4$，则 $f'(x)=0$ 在区间 $(-1,1)$ 内有几个实根 【 C 】

$(A)0$ 个; $(B)1$ 个; $(C)2$ 个; (D) 至少 3 个.

二. 计算下列各题($6'\times 4=24'$)

1. 求函数 $y=e^{-\frac{1}{2}x^2+2x+3}$ 的单调区间与凹凸区间.

[$y'=(2-x)e^{-\frac{1}{2}x^2+2x+3}, y''=(x-1)(x-3)e^{-\frac{1}{2}x^2+2x+3}$]

2. 求曲线 $x^2e^{y-1}+y^3=2$ 在 $(1,1)$ 点的切线方程. [$x+2y-3=0$]

3. 计算反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^3}\arctan x dx$ [$\frac{1}{2}$]

4. 求微分方程 $y''-3y'-4y=4x+1$ 的通解. [$y=C_1e^{-x}+C_2e^{4x}-x+\frac{1}{2}$]

三. ($8'$)分析曲线 $y=(x+1)\ln(e+\frac{1}{x})$ $(x>0)$ 是否有铅直、水平与斜渐近线, 如果有则求出相应的渐近线. [铅直渐近线 $x=0$; 斜渐近线 $y=x+1+\frac{1}{e}$]

四. ($8'$)已知 $f(x),g(x)$ 都是非负的连续函数, 曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 关于直线 $y=c$ 对称,由曲线 $y=f(x),y=g(x)$ 以及直线 $x=a,x=b(a<b)$ 所围成的平面图形的面积为 A.

(1)证明该图形绕 x 轴旋转所得旋转体的体积为 $V=2\pi cA$;

[$V=\int_a^b\pi(f^2-g^2)dx=\pi\int_a^b(f+g)(f-g)dx=2c\pi\int_a^b(f-g)dx$]

(2)计算椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2\le 1$ 绕直线 $y=2$ 旋转所得旋转体的体积. [$V=8\pi^2$]

五. ($8'$)设 $f(x)$ 是可导函数, 并且满足方程 $f(x)=\int_0^{2x}tf(\frac{t}{2})dt+x^2+1$, 求函数 $f(x)$.

[$f(0)=1, f'(x)=4xf(x)+2x\Rightarrow f(x)=\frac{3}{2}e^{2x^2}-\frac{1}{2}$]

六. ($8'$)(1)写出 $\ln(1+x)$ 的带有佩亚诺余项的 n 阶迈克劳林公式;(2)计算极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{(1+\frac{1}{x})^{x^2}}$.

[(1) $x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+o(x^n)$;(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{(1+\frac{1}{x})^{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})}=\sqrt{e}$]

七. ($10'$)由方程 $y=2x^2,y=4$ 所确定的抛物型薄片铅直地浸入水中, 顶端与水面持平(长度单位为米). (1)试求薄片一侧所受到的水压力; (2)如果此后水面以每分钟 0.5 米的速度开始上涨, 试计算薄片一侧所受到的水压力的变化率.

[(1) $P=\int_0^4\rho g(4-y)\sqrt{2y}dy=\frac{128}{15}\sqrt{2}\rho g$; (2) $P=\int_0^4\rho g(h-y)\sqrt{2y}dy,\frac{dP}{dt}=\frac{8}{3}\sqrt{2}\rho g$]

八. ($10'$)设 $x^{2n}+y^{2n}=a^{2n}$ $(a>0)$ 所围图形在第一象限部分的面积为 A_n. (1)利用定积分写出 A_n 的计算公式(无需计算 A_n 的值); (2)证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n$ 存在; (3)计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n$.

[(1) $A_n=\int_0^a\sqrt[2n]{a^{2n}-x^{2n}}dx$;(2) $a^2\int_0^1(1-t^{2n})dt\le A_n=a^2\int_0^1\sqrt[2n]{1-t^{2n}}dt\le a^2$;(3) $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=a^2$]

同济大学 2015-2016 学年第一学期高等数学 B(上)期终试卷

一. 填空选择题($3'\times 8=24'$)

1. 极限 $\lim\limits_{h\to 0}(\dfrac{2-h}{2+3h})^{\frac{1}{h}}=$ $\underline{\qquad e^{-2}\qquad}$.

2. 积分 $\int \cos x\cdot f'(1-2\sin x)dx=$ $\underline{\qquad -f(1-2\sin x)/2+C\qquad}$.

3. 函数 $F(x)=\int_0^{x^2}\sin(t^2+1)dt$ 的导函数 $F'(x)=$ $\underline{\qquad 2x\sin(x^4+1)\qquad}$.

4. 曲线 $y=\dfrac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+1\quad(-1\le x\le 2)$ 的弧长 $s=$ $\underline{\qquad 14/3\qquad}$.

5. 极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=+\infty$ 的定义是 【 D 】

(A) $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$；

(B) $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $x>\delta$ 时，有 $f(x)>\varepsilon$；

(C) $\forall M>0,\exists X>0$，当 $x>X$ 时，有 $|f(x)|>M$；

(D) $\forall M>0,\exists\delta>0$，当 $x_0-\delta\le x<x_0$ 时，有 $f(x)>M$.

6. 若 $y_1(x),y_2(x),y_3(x)$ 是二阶微分方程 $y''=a(x)y'+b(x)y+c(x)$ 的三个线性无关的解，则该方程的通解为 【 D 】

(A) $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+C_3y_3(x)$，其中 C_1,C_2,C_3 是任意常数;

(B) $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+y_3(x)$，其中 C_1,C_2 是任意常数;

(C) $C_1y_1(x)+C_2[y_2(x)+y_3(x)]$，其中 C_1,C_2 是任意常数;

(D) $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+C_3y_3(x)$，其中任意常数 $C_1+C_2+C_3=1$.

7. 若 $f(x)$ 是连续函数，则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f(\dfrac{n+2k}{2n})\dfrac{1}{n}$ 等于 【 A 】

(A) $\int_{1/2}^{3/2}f(x)dx$； (B) $\int_0^2 f(x)dx$； (C) $\int_0^{1/2}f(x)dx$； (D) $\int_0^1 f(\dfrac{x}{2})dx$.

8. 若对于积分 $\int_0^a f(a-2x)dx$ 作换元 $a-2x=u$，则该定积分化为 【 C 】

(A) $\int_{-a}^{a}f(u)du$； (B) $2\int_0^a f(u)du$； (C) $\dfrac{1}{2}\int_{-a}^{a}f(u)du$； (D) $\int_0^a f(u)du$.

二. 计算下列各题($6'\times 4=24'$)

1. 试求曲线 $\sin y+x^2+y=x$ 在点 $(1,0)$ 处的切线方程. [$x+2y=1$]

2. 求不定积分 $\int \ln(x^2+1)dx$. [$x\ln(x^2+1)-2x+2\arctan x+c$]

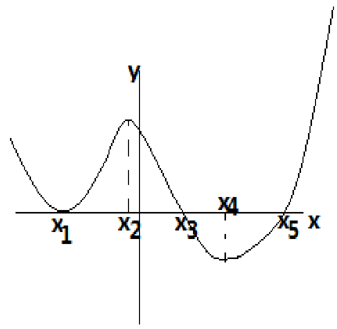
3. 求微分方程 $xy'=x^3-y$ 的通解. [$y=\frac{1}{x}(\frac{1}{4}x^4+c)$]

4. 求微分方程 $y''-2y'-15y=15x-3$ 的通解. [$y=C_1e^{-5x}+C_2e^{3x}-x+\frac{1}{3}$]

三. ($8'$)计算由 $y=x^2+2x$ 与直线 $y=x+2$ 所围图形的面积. [$\int_{-2}^{1}(2-x-x^2)dx=\frac{9}{2}$]

四. ($8'$)计算反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^3}dx$. [$I=-\frac{1}{2x^2}\arctan x-\frac{1}{2x}-\frac{1}{2}\arctan x\Big|_1^{+\infty}=\frac{1}{2}$]

五. ($8'$)已知 $y=f'(x)$ 的函数图像如图,



(1)求函数 $y=f(x)$ 的单调区间、极大值与极小值;

(2)求曲线 $y=f(x)$ 的凹凸区间与拐点.

[$(-\infty,x_3],[x_5,+\infty)$] ;$[x_3,x_5]$Z ;$f(x_3)$ 极大, $f(x_5)$ 极小

$[x_1,x_2],[x_4,+\infty)\cup;(-\infty,x_1],[x_2,x_4]\cap$; 拐点 $(x_1,f(x_1)),(x_2,f(x_2)),(x_4,f(x_4))$]

六. ($10'$)在半径为 R 的半球内内接一圆锥体, 使得该锥体的锥顶位于半球的球心上, 锥体的底面平行于半球的底面, 求这样的内接圆锥体体积的最大值.

[$V=\frac{1}{3}\pi(R^2-3h^2)h, V_{\max}(\frac{R}{\sqrt{3}})=\frac{2\pi R^3}{9\sqrt{3}}$]

七. ($10'$)一椭球形容器由长半轴为 $2m$, 短半轴为 $1m$ 的半支椭圆曲线绕其短半轴旋转而成, 若容器内盛满了水, 试求要把该容器内的水全部吸出需作的功.

[$\frac{x^2}{4}+y^2=1(-1\le y\le 0), dW=4\pi(1-y^2)dy\rho g(-y), W=\pi g$]

八. ($8'$)已知 $f(x)$ 具有二阶导数, 且 $f''(x)\ge\sqrt{\frac{1+x^2}{1+2x^2}}$, 判断 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 的情况, 并给出判断的理由. [$f''(x)\ge\frac{1}{\sqrt{2}}, f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2\to+\infty$]

同济大学 2016-2017 学年第一学期高等数学 B(上)期终试卷

一. 选择填空题($3'\times 8=24'$)

1. $y=f(x)$ 具有二阶导数，且 $f'(x)\neq 0$. 若曲线 $y=f(x)$ 在 (x_0,y_0) 的曲率为 $k\neq 0$，其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 所表示的曲线在对应点的曲率为 k'，则有 【 A 】

   $(A) k'=k$； $(B) k'=\dfrac{1}{k}$； $(C)\ k'>k$； $(D) k'<k$.

2. 已知函数 $y=f(x)$ 满足 $f(0)=1$，如果在任意点 x 处，当 Δx 充分小时都有 $\Delta y=\dfrac{x}{1+x^2}\Delta x+o(\Delta x)$，则有 【 C 】

   $(A) f(x)=\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$； $(B) f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}+1$；

   $(C)\ f(x)=\ln\sqrt{1+x^2}+1$； (D) 题中所给的条件无法得到确定的函数 $f(x)$.

3. 下面的极限式中哪项等于连续函数 $f(x)$ 的定积分 $\int_0^2 f(x)dx$. 【 D 】

   $(A)\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})\frac{2}{n}$； $(B)\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\frac{2k}{n})\frac{1}{n}$； $(C)\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})\frac{1}{n}$； $(D)\lim\limits_{n\to\infty}2\sum\limits_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})\frac{1}{n}$.

4. 要使反常积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{(\sqrt{1+x})^p}dx$ 收敛，则实数 p 的取值范围是 【 C 】

   $(A) p>1$； $(B) p<1$； $(C) p>2$； $(D) p<2$.

5. 如果作换元 $\sin x=t$，则积分 $\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(\sin x)dx=$ $\underline{\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} f(t)\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt}$.

6. 微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=e^{2x-3y+1}$ 的通解 $y=$ $\underline{\dfrac{1}{3}\ln(\dfrac{3}{2}e^{2x+1}+C)}$.

7. 已知 $\int f(x)dx=e^{x^2}+C$，则 $\int xf(2x^2-1)dx=$ $\underline{\dfrac{1}{4}e^{(2x^2-1)^2}+C}$.

8. 定积分 $\int_{-R}^{R}[x^3\ln(1+x^4)+\sqrt{R^2-x^2}]dx=$ $\underline{\dfrac{1}{2}\pi R^2}$.

二. 计算题($8'\times 3=24'$)

1. 求极坐标所表示的曲线 $\rho=\sqrt{2}e^{4\theta}$ 在 $\theta_0=\dfrac{\pi}{4}$ 所对应点处的切线方程. [$5x-3y=2e^{\pi}$]

2. 计算定积分 $\int_1^{\pi^2+1}\sin\sqrt{x-1}dx$. [2π]

3. 可导函数 $f(x)$ 满足等式 $\int_0^{2x}tf(\dfrac{t}{2})dt=f(x)-2$, 求函数 $f(x)$. [$f(x)=2e^{2x^2}$]

三. ($10'$)已知函数 $f(x)$ $(x\in R)$ 在点 $x=1$ 左连续, 同时该点是函数 $f(x)$ 的跳跃间断点, 如果该函数只有 $x=1$ 一个间断点, 试分析函数 $f(x^3+3x^2-9x+C)$ 间断点的个数.

[$-26<C<6$ 三个; $C=6$ 两个; $C\le -26$ 或 $C>6$ 一个]

四. ($10'$)求微分方程 $\begin{cases} y''+2y'-3y=x+1 \\ y\big|_{x=0}=\dfrac{4}{9},\ y'\big|_{x=0}=\dfrac{14}{3} \end{cases}$ 的解. [$y=2e^{x}-e^{-3x}-\dfrac{1}{3}x-\dfrac{5}{9}$]

五. ($10'$)曲线 $y=x^2+1$ $(x\ge 0)$. (1)求该曲线在点 $(2,5)$ 处的切线方程 L ;

(2)求该曲线与切线 L 以及 y 轴所围图形的面积;

(3)求题(2)所叙述的图形绕 y 轴旋转所得旋转体的体积. [$y=4x-3;A=\dfrac{8}{3};V=\dfrac{8}{3}\pi$]

六. ($10'$)一只容器由 $y=x^2$ $(0\le x\le 2)$ 绕 y 轴旋转而成. (1)如果容器内的水量是容器容量的 $\dfrac{1}{4}$, 求容器内水面的高度; (2)如果要将题(1)中这部分水吸尽, 求外力需要作的功.

[$h=2;W=\dfrac{16}{3}\rho g\pi$]

七. ($12'$)(1)如果周期函数 $f(x)$ $(x\in R)$ 有最小正周期 T_0 , 证明对于 $f(x)$ 的任意一个周期 T , 都有 $T=nT_0$, 其中 n 是正整数; [记周期 $T-nT_0\in[0,T_0)$]

(2)如果 $f(x)$ $(x\in R)$ 以 $T_1=\pi$ 以及 $T_2=1$ 为周期,证明存在一列 $\{T_n\}$ (若 $i\ne j$,则 $T_i\ne T_j$) 使得 T_n 都是函数 $f(x)$ 的周期, 并且数列 $\{T_n\}$ 有极限; [T_1 T_2 非最小正周期, 存在 $T_3<T_2,\cdots T_n<T_{n-1}$ 为更小正周期]

(3)如果满足题(2)条件的函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 连续, 证明 $f(x)$ 是常数.

[$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,当 $|x|<\delta$ 时, $|f(x)-f(0)|<\varepsilon$; $T_n-T_{n-1}\to 0,\exists T<\delta,0<x-nT<\delta$]

同济大学2017-2018学年第一学期高等数学B(上)期终试卷

一. 选择题($3'\times 5=15'$)

1. 设有数列$\{x_n\}$, 若$x_n\ge 0$. 记$S_n=x_1+x_2+\cdots+x_n$, 则数列$\{S_n\}$有界是$\{S_n\}$收敛的

______条件. 【C】

(A)充分非必要; (B)必要非充分; (C)充分且必要; (D)既不充分又非必要.

2. 设$f(x)$在$x=0$处连续, 且$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h^2)}{h^2}=1$, 则 【$C$】

(A)$f(0)=0$, 且$f_-'(0)$存在; (B)$f(0)=1$, 且$f_-'(0)$存在;

(C) $f(0)=0$, 且$f_+'(0)$存在; (D) $f(0)=1$, 且$f_+'(0)$存在.

3. 设$f(x)=\begin{cases} e^{x^2}+1, & x<0 \\ \sin(x^2), & x\ge 0 \end{cases}$, 令$g(x)=\int_{-1}^{x}f(t)dt$, 则$g(x)$在$x=0$处 【$C$】

(A)不连续, 且$x=0$为可去间断点; (B)不连续, 且$x=0$为跳跃间断点;

(C)连续但不可导; (D)可导.

4. 考虑反常积分: (1)$\int_e^{+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}dx$, (2)$\int_e^{+\infty}\dfrac{\ln^2 x}{x^2}dx$, (3)$\int_e^{+\infty}\dfrac{\ln^2 x}{x}dx$, (4)$\int_e^{+\infty}\dfrac{dx}{x\ln^2 x}$, 其中收敛

的有 【C】

(A)1个; (B)2个; (C)3个; (D)4个.

5. 设$y_1(x)$与$y_2(x)$是线性微分方程$y''+py'+qy=f(x)$的两个解, 而$y_3(x)$与$y_4(x)$是线性微分方程$y''+py'+qy=g(x)$的两个解, 则下列函数中, ______一定是线性微分方程$y''+py'+qy=f(x)-g(x)$的解. 【B】

(A)$y_1(x)-2y_2(x)+2y_3(x)-y_4(x)$; ($B$)$2y_1(x)-y_2(x)+y_3(x)-2y_4(x)$;

(C)$2y_1(x)-y_2(x)+2y_3(x)-y_4(x)$; ($D$)$y_1(x)-2y_2(x)+y_3(x)-2y_4(x)$.

二. 填空题($3'\times 5=15'$)

1. 设$f(x)=\begin{cases} \ln(x+e), & x\ge 0 \\ a^x, & x<0 \end{cases}$在$x=0$处可导, 则$a=$ $\underline{\quad e^{\frac{1}{e}}\quad}$.

2. 曲线 $y=x^2-1$ 在点 $(\sqrt{2},1)$ 处的曲率为 $\underline{\quad\dfrac{2}{27}\quad}$.

3. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{n+2i}=$ $\underline{\quad\dfrac{1}{2}\ln 3\quad}$.

4. 定积分 $\int_{-1}^{1}(\sin x+1)\sqrt{1-x^2}dx=$ $\underline{\quad\dfrac{\pi}{2}\quad}$.

5. 设 $f(x)$ 满足方程 $f''(x)=\dfrac{1}{2}f^3(x)$，且 $f(1)=2, f'(1)=-2$，则 $f(x)=$ $\underline{\quad\dfrac{2}{x}\quad}$.

三. 计算题$(8'\times 5=40')$

1. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^{x^2}\sin\sqrt{x^2-t}dt}{x-\sin x}$. $\quad[=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^{x^2}\sin\sqrt{u}du}{x-\sin x}=4]$

2. 计算积分 $\int_1^5\dfrac{dx}{\sqrt{|x^2-2x-3|}}$. $\quad[=\int_1^3\dfrac{dx}{\sqrt{4-(x-1)^2}}+\int_3^5\dfrac{dx}{\sqrt{(x-1)^2-4}}=\dfrac{\pi}{2}+\ln(2+\sqrt{3})]$

3. 计算积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{xe^x}{(1+e^x)^2}dx$. $\quad[=\ln\dfrac{e^x}{1+e^x}\Big|_0^{+\infty}=\ln 2]$

4. 求微分方程 $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{1}{x}y=xy^2$ 满足 $y(1)=-3$ 的特解. $\quad[(\dfrac{1}{y})'+\dfrac{1}{x}(\dfrac{1}{y})=-x\Rightarrow y=-\dfrac{3}{x^2}]$

5. 求微分方程 $y''-5y'+6y=6x+1$ 的通解. $\quad[y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+x+1]$

四. $(10')$求函数 $f(x)=(x-4)\sqrt[3]{(x+1)^2}$ 在 $[-2,2]$ 上的最小值与最大值.

$$[f'(x)=\frac{5}{3}(x-1)(x+1)^{-\frac{1}{3}}\Rightarrow f_{\max}(-1)=0, f_{\min}(-2)=-6]$$

五. $(12')$设曲线 $y=\sin^3 x\ (0\le x\le\dfrac{\pi}{2})$ 与 $y=0, x=\dfrac{\pi}{2}$ 围成的平面图形为 A；

(1)求 A 的面积； (2)求 A 绕 x 轴旋转一周所形成的旋转体的体积；

(3)求 A 绕 y 轴旋转一周所形成的旋转体的体积. $\quad[\dfrac{2}{3};\ \dfrac{5}{32}\pi^2;\ \dfrac{14}{9}\pi]$

六. $(8')$设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，且对于任意 $a<b$, $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的平均值等于它在该区间中点的函数值，即 $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=f(\dfrac{a+b}{2})$，求 $f(x)$.

$$[f(b)=f(\frac{a+b}{2})+\frac{b-a}{2}f'(\frac{a+b}{2})\Rightarrow f(0)=f(\frac{a}{2})-\frac{a}{2}f'(\frac{a}{2})$$

$$\Rightarrow xf'(x)=f(x)-f(0)\Rightarrow f(x)=Cx+f(0)]$$

同济大学 2018-2019 学年第一学期高等数学 B(上)期终试卷

一. 选择题($3'\times 5=15'$)

1. 设有数列$\{x_n\}$，记$y_n=x_{2n},z_n=x_{2n+1}$，则“数列$\{y_n\}$与$\{z_n\}$均收敛，且极限相同”是“数列$\{x_n\}$收敛”的 ____C____ 条件.

(A) 充分非必要; (B) 必要非充分;

(C) 充分且必要; (D) 既不充分又非必要.

2. 设函数 $f(x)=\dfrac{1+3^{\frac{1}{x}}}{1-3^{\frac{1}{x}}}$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的 ____B____ .

(A) 可去间断点; (B) 跳跃间断点;

(C) 无穷间断点; (D) 第二类间断点，但不是无穷间断点.

3. 设函数 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续，并且在$(0,1)$内可导，则 “右极限 $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)$ 存在” 是 “右导数 $f_+'(0)$ 存在” 的 ____A____ 条件.

(A) 充分非必要; (B) 必要非充分;

(C) 充分且必要; (D) 既不充分又非必要.

4. 设函数 $f(x)$ 在$[-1,1]$上连续，在$(-1,1)$内三阶可导，且 $f'''(x)$ 在$(-1,1)$上没有零点，则下列命题正确的是 【 D 】

$(A) f(x)$ 在$[-1,1]$上一定没有零点; $(B) f(x)$ 在$[-1,1]$上的零点至多有 1 个;

$(C) f(x)$ 在$[-1,1]$上的零点至多有 2 个; $(D) f(x)$ 在$[-1,1]$上的零点至多有 3 个.

5. 设 $y_1(x), y_2(x)$ 与 $y_3(x)$ 是线性微分方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的三个解，则下列函数中， ____B____ 一定也是方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的解.

$(A) y_1(x)+y_2(x)+y_3(x)$; $(B) y_1(x)+y_2(x)-y_3(x)$;

$(C) y_1(x)-y_2(x)-y_3(x)$; $(D) y_3(x)-y_1(x)-y_2(x)$.

二. 填空题$(3'\times 5=15')$

1. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=6$, 则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2\tan x)-f(3\sin x)}{\sqrt{1+x}-1}=$ $\underline{\quad -12 \quad}$.

2. 设反常积分 $\int_2^{+\infty}\dfrac{dx}{x\ln^p x}dx$ 收敛, 则实数 p 的最大取值范围是 $\underline{\quad p>1 \quad}$.

3. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\tan\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2n}{4n^2+k^2}\right)=$ $\underline{\quad \dfrac{1}{2} \quad}$.

4. 定积分 $\int_{-1}^{1}\dfrac{x^2+\sin^3 x}{1+\sqrt{1-x^2}}dx=$ $\underline{\quad 2-\dfrac{\pi}{2} \quad}$.

5. 设 $y=f(x)$ 定义在 $(0,+\infty)$ 上, 满足微分方程 $xf'(x)=-f^2(x)$, 且 $f(e)=1$, 则

$f(x)=$ $\underline{\quad \dfrac{1}{\ln x} \quad}$.

三. 计算题$(8'\times 5=40')$

1. 设 $y=y(x)$ 是由方程 $x=\int_1^{y-x}\sin^2\dfrac{\pi t}{4}dt$ 确定的隐函数, 求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$. [3]

2. 计算反常积分 $\int_0^1\dfrac{dx}{\sqrt{1-x}(\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[4]{1-x})}$. $[12\ln 2-6]$

3. 设 $f(x)=\int_0^x\dfrac{\sin^4 t}{\pi-t}dt$, 求 $I=\int_0^{\pi}f(x)dx$. $[\dfrac{3\pi}{8}]$

4. 求微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y+x\ln x}{x}$ 满足 $y(1)=0$ 的特解. $[y=\dfrac{1}{2}x\ln^2 x]$

5. 求微分方程 $y''-9y'+14y=28x-4$ 的通解. $[y=C_1e^{2x}+C_2e^{7x}+2x+1]$

四. $(10')$设 $f(x)=\begin{cases}x^{2x}, & x>0\\ x+1, & x\le 0\end{cases}$, 求 $f(x)$ 的极值点. $[x=0$ 极大值点$, x=\dfrac{1}{e}$ 极小值点$]$

五. $(10')$设曲线 $y=2x-x^2$ 与直线 $y=0$ 围成的平面图形为 A. (1)求 A 的面积;

(2)求 A 绕 x 轴旋转一周所形成的旋转体的体积;

(3)求 A 绕 y 轴旋转一周所形成的旋转体的体积. $[\dfrac{4}{3};\ \dfrac{16}{15}\pi;\ \dfrac{8}{3}\pi]$

六. $(10')$设实数 β 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\cos\left((n+2)\beta\right)-\cos(n\beta)\right]=A$, 试求 A,β 的值.

$[\beta=k\pi, A=0]$

同济大学 2019-2020 学年第一学期高等数学 B(上)期终试卷

一. 选择题($3'\times 5=15'$)

1. 设数列$\{x_n\}$单调，则“$\{x_n\}$有界”是“$\{x_n\}$收敛”的 <u>　　C　　</u> 条件.

(A)充分非必要; (B)必要非充分; (C)充分且必要; (D)既不充分也非必要.

2. 设 $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1}-\dfrac{2}{\pi}\arctan\dfrac{1}{x}$, 则 $x=0$ 为 $f(x)$ 的 <u>　　A　　</u>.

(A)可去型间断点; (B)跳跃型间断点;

(C)无穷型间断点; (D)第二类间断点, 但非无穷型间断点.

3. 已知 $f(0)=0, f'(0)=0, f''(0)=0$，而 $f'''(0)\neq 0$，则下列结论中正确的是 <u>　　B　　</u>

$(A)(0,0)$是曲线 $y=f(x)$ 的拐点， $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的极值点;

$(B)(0,0)$是曲线 $y=f(x)$ 的拐点， $x=0$ 不是函数 $f(x)$ 的极值点;

$(C)(0,0)$不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点， $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的极值点;

$(D)(0,0)$不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点， $x=0$ 不是函数 $f(x)$ 的极值点.

4. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，则“$\lim\limits_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A}f(x)dx$ 存在”是“$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 存在”的 <u>　　B　　</u> 条件.

(A)充分非必要; (B)必要非充分; (C)充分且必要; (D)既不充分也非必要.

5. 设 $y_1(x), y_2(x)$ 与 $y_3(x)$ 均是线性微分方程 $y''+py'+qy=f(x)$ 的解, 则下列函数中， <u>　　B　　</u> 一定也是该微分方程的解.

$(A)y_1(x)+y_2(x)+y_3(x)$; $(B)3y_1(x)-y_2(x)-y_3(x)$;

$(C)y_1(x)-y_2(x)-y_3(x)$; $(D)3y_1(x)-y_2(x)+y_3(x)$.

二. 填空题($3'\times 5=15'$)

1. 设 $f(x)=\begin{cases}\int_0^{3x}\dfrac{\sin t}{t}dt, & x>0\\ e^{ax}-b, & x\leq 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，则 $\dfrac{b}{a}=$ <u>　　$\dfrac{1}{3}$　　</u>.

2. 设 $f'(\ln x)=1+x^2, f(0)=1$，则 $f(x)=$ $\underline{\quad x+\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{2}\quad}$.

3. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\int_{\frac{n-2}{n}}^{\frac{n+2}{n}}\sin(x+1)^2dx=$ $\underline{\quad 4\sin 4\quad}$.

4. 定积分 $\int_{-4\pi}^{4\pi}(1+\sin^3 x)\cdot\sqrt{1-\cos^2 x}dx=$ $\underline{\quad 16\quad}$.

5. 设 $f(x)=\int_1^x e^{-y^3}dy$，则 $\int_0^1 xf(x)dx=$ $\underline{\quad \frac{1}{6}(e^{-1}-1)\quad}$.

三. 计算题($8'\times 5=40'$)

1. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $\int_0^x uf(x-u)du=e^{3x}-3x-1$，求 $f(x)$。 [$9e^{3x}$]

2. 设 $y=y(x)$ 是由 $\begin{cases} e^x=t^2+2t+1 \\ y+t\sin y=\frac{\pi}{2} \end{cases}$ 确定的函数，求 $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}$，$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0}$，以及 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}$。

[$2,\ -1,\ -\frac{1}{2}$]

3. 求 $f(x)=\frac{x}{\ln x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上的最大值与最小值。 [$f_{\min}(e)=e$]

4. 计算 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(1+\tan x)}{(\cos x+\sin x)^2}dx$。 [1]

5. 求微分方程 $\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=\sqrt{x-1}$ 的通解。 [$y=2x(\sqrt{x-1}-\arctan\sqrt{x-1})+cx$]

四. ($10'$)求微分方程 $y''-8y'+16y=8x+12$ 的通解。 [$y=(c_1+c_2x)e^{4x}+\frac{1}{2}x+1$]

五. ($12'$)设曲线 $y=2\sqrt{x}$，直线 $x+2y=5$ 与 x 轴围成的平面图形为 A.

(1)求 A 绕 x 轴旋转一周所形成的旋转体的体积；

(2)求 A 绕 y 轴旋转一周所形成的旋转体的体积。 [$\frac{22}{3}\pi;\ \frac{304}{15}\pi$]

六. ($8'$)设平面曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$, $a<t<b$，其中 $\varphi(t),\psi(t)$ 在 (a,b) 上具有连续的二阶导数，且 $[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2\neq 0$。证明：对于 C 上的点 P，若在以 P 为圆心的任意小的圆盘内均存在位于 C 上的三点，它们共线，则 C 在 P 点处的曲率一定为零。

[曲率公式，拉格朗日]