连续函数 1

长久以来，连续被认为是函数的一种理所当然的属性，连续函数的性质也被认为是显而易见的. 直到 1817 年，才由波尔查诺 (Bolzano) 提出了连续函数概念的雏形，并证明了介值定理. 后经柯西、魏尔斯特拉斯的严格化，才有了现今通行的连续函数的定义.

One should never try to prove anything
that is not almost obvious.

Grothendieck

1.1 函数的连续性

连续与间断

连续（continuous）

设函数 f 在点 a 的某个邻域上有定义，如果 $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$，则称 f **在点 a 处连续**. 形式上，连续等价于极限与函可数交换 $\lim_{x\to a} f(x) = f\left(\lim_{x\to a} x\right)$.

可见，要说明函数在一点连续，需要证明它在该点存在极限并且极限等于该点的函数值. 连续性有下述两种等价刻画.

- 如果用 $\epsilon\delta$ 语言，则函数在 a 点连续等价于

$$\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in U(a;\delta) : |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

- 增量的语言也是常用的表达方式. 称 $x - a$ 为**自变量在 a 点的增量**，通常记作 Δx 或 h, 即

$$\Delta x = h := x - a.$$

增量 (increment) 也称为差分 (difference), 而希腊字母的 d 就是 δ，因此选用希腊字母 Δ 来表示增量. 为了记号上的方便，也常用 h 表示.

函数 f 在 a 点增量定义为

$$\Delta f_a(\Delta x) := f(a + \Delta x) - f(a).$$

在没有歧义的情况下，常把 $\Delta f_a(\Delta x)$ 简记为 Δf. 从而，函数在 a 点连续等价于

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta f_a(\Delta x) = 0 \quad \text{或} \quad \lim_{\Delta x\to 0} \Delta f = 0.$$

例 1.1.1 设 $s_n(x) = \begin{cases} x^n \sin 1/x, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$，其中 n 是正整数. 判断 s_n 在原点的连续性.

解. 因为 $0 \le |s_n(x)| \le |x^n|$，根据迫敛性知 $\lim_{x\to 0} s_n(x) = 0 = s_n(0)$. 所以 s_n 在原点的连续. □

类似极限的处理，连续也可以更精细地刻画为左连续、右连续.

单侧连续

如果 $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$，则称 f **在点 a 处右连续**；如果 $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$，则称 f **在点 a 处左连续**.

显然，函数在一点连续的充要条件是它在该点既左连续又右连续.

例 1.1.2 讨论 Heaviside 函数 $H(x)$ 在原点的连续性.

解. 易见 $H(0+0) = 1, H(0-0) = 0$. 由于 $H(0) = 0$，所以函数左连续，但不右连续. □

函数不连续的点称为**间断点（discontinuity）**. 根据左右极限的情况可以有下述初步的分类.[1]

1: 不同文献有不同的分类方式，读者仅需清楚实质，不必纠结类别.

间断点类型

设函数 f 在 $U^\circ(a)$ 有定义，在 a 点可以没有定义.

第 I 类间断点 若 $f(a+0)$ 和 $f(a-0)$ 均存在，但函数在 a 不连续.

- **Ia. 可去间断点** $f(a+0) = f(a-0)$;
- **Ib. 跳跃间断点** $f(a+0) \ne f(a-0)$.

第 II 类间断点 若 $f(a+0)$ 和 $f(a-0)$ 至少有一个不存在.

可去间断点是最简单的间断点，修改或补充该点的函数值就能使函数连续，比如原点是 $\sin x/x$ 的可去间断点. 跳跃间断点也较为简单，Heaviside 函数是典型的例子. 第 II 类间断点结构复杂，也称为**本性间断点**. 比如 $1/x$ 在原点的极限为无穷大，因此称为**无穷间断点**；而 $\sin 1/x$ 在原点附近振荡，常称为**振荡间断点**.

例 1.1.3 讨论黎曼函数在 $(0,1)$ 上的连续性，并指出间断点的类型.

解. 我们已经知道黎曼函数各点的极限均为零. 因此它在无理点处连续，在有理点处间断且都是可去间断点. □

连续函数

如果函数 f 在 D 上处处连续（D 的端点处仅考虑单侧连续），则称 f 是 D 上的连续函数.

如果函数在有限区间上只有有限个第 I 类间断点，则称其为**分段连续函数**. 比如阶梯函数就是分段连续函数.

例 1.1.4 讨论有理函数的连续性.

解. 根据四则运算法则，有理函数是其定义域上的连续函数. 其分母的零点是间断点，并且是无穷间断点. □

例 1.1.5 证明：$\sin x, \cos x$ 都是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数.

证明. 因为 $\lim\limits_{x\to a}\sin x = \sin a$，$\lim\limits_{x\to a}\cos x = \cos a$，所以它们连续. □

例 1.1.6 设 f 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 且 $f(x) = f(2x)$. 证明: f 是常值函数.

证明. 任给 $x \in \mathbb{R}$，有

$$f(x) = f(x/2) = f(x/2^2) = \cdots = f(x/2^n) = \cdots.$$

由于 $x/2^n \to 0(n \to 0)$，根据 Heine 定理，有

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x/2^n) = \lim_{t\to 0} f(t) = f(0).$$

这意味着函数是常值函数. □

一致连续

当 f 在 D 上连续时，对每个 $a \in D$，任给 $\epsilon > 0$，总存在 $\delta > 0$，只要 $|x-a| < \delta$，必有 $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. 前述的 δ 不仅依赖于 ϵ，事实上还依赖于 a，这是因为函数在各点附近的陡峭程度并不一致. 如果上述 δ 不依赖于 a 的选取，则称函数为**一致连续**.

一致连续

设 f 在 D 上有定义. 如果对于任意的 $\epsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，只要 $x', x'' \in D$ 满足 $|x' - x''| < \delta$，必有 $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$，则称函数 f 在 D 上**一致连续**.

例 1.1.7 证明：$f(x) = \sqrt{x}$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续.

证明概要. 注意到

$$\left|\sqrt{x'} - \sqrt{x''}\right| \le \sqrt{|x' - x''|}.$$

因此为了使得 $|\sqrt{x'} - \sqrt{x''}| < \epsilon$, 只需 $|x' - x''| < \epsilon^2$ 即可. □

直观上讲，一致连续大体上意味着函数图像在各点的陡峭程度是一致的. 但上例的函数在原点无限陡峭却任然一致连续，似乎违背直觉. 这是因为函数虽然在原点很陡峭，但变化量并不大. 上例可以推广到更一般的函数类.

例 1.1.8 如果函数 f 在定义域上满足 $|f(x)-f(y)| \le L|x-y|^{\alpha}$，其中 L 和 α 都是正常数，则称 f 为 α-**赫德尔（Hölder）函数**. 如果 $\alpha=1$，则称 f 为**李普希兹（Lipschitz）函数**. 证明：α-赫德尔（Hölder）函数必然一致连续.

证明概要. 要使 $|f(x)-f(y)|<\epsilon$，只要 $|x-y|<\delta=(\epsilon/L)^{1/\alpha}$. □

下面给出一个不一致连续的例子. 为此，我们先给出一个不一致连续的充要条件.

函数 f 在 D 上**不一致连续**的充要条件是：存在正数 ϵ_0 以及 D 中的两个数列 $\{x_n\},\{y_n\}$，使得 $x_n-y_n\to 0$，但 $|f(x_n)-f(y_n)|\ge\epsilon_0$.

例 1.1.9 证明：$f(x)=1/x$ 在 $(0,1)$ 上不一致连续.

证明概要. 取 $\epsilon_0=1, x_n=1/(n+1), y_n=1/n$. □

最后我们指出，连续是函数的局部性质，而一致连续是函数的整体性质.

1.2 连续函数的性质

局部性质

连续函数的大多数局部性质是极限性质的直接推论，证明留给读者.

局部保号性

若函数 f 在点 a 连续，且 $f(a)>0$，则存在 $\delta>0$，对任意 $x\in U(a;\delta)$，有 $f(x)\ge f(a)/2>0$.

四则运算法则

若函数 f 和 g 均在点 a 连续，则 $f\pm g, fg$ 均在点 a 连续. 如果又有 $g(a)\ne 0$，则 f/g 也在点 a 连续.

因此，连续函数经过四则运算后仍是其定义域内的连续函数. 要注意的是，一致连续是函数的整体性质，四则运算不能直接推广.

复合函数连续性

设 f 在点 a 处连续，且 $\lim\limits_{t\to t_0}x(t)=a$，则

$$\lim_{t\to t_0} f(x(t)) = f\left(\lim_{t\to t_0} x(t)\right) = f(a).$$

特别地，如果 x 在点 t_0 处连续，则复合函数 $f\circ x$ 在点 t_0 处连续.

可以看到，当外函数连续时，复合函数的极限计算便捷许多，甚至可以省略换元过程. 例如，

$$\lim_{x\to 0}\cos\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\cos\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)=\cos 1.$$

这一做法同样适用于内函数是数列的情形，如

$$\lim_{n\to\infty}\sec\frac{3n^2}{n^2-n}=\sec\left(\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2}{n^2-n}\right)=\sec 3.$$

整体性质

最值性（Extreme Value Theorem）

闭区间上的连续函数必有最大值和最小值.

证明. 设 f 在 $[a,b]$ 上连续. 我们先证明 f 有界. 假如 f 无界，则存在 $[a,b]$ 中的点列 $\{x_n\}$ 使得 $f(x_n)\to\infty$. 根据致密性定理, 存在收敛子列, 不妨仍记为 $\{x_n\}$. 设 $x_n\to c$，则由保序性知 $c\in[a,b]$. 由于 f 在 c 点连续，所以

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f\left(\lim_{n\to\infty}x_n\right)=f(c).$$

矛盾. 因此函数 f 在 $[a,b]$ 上有界. 下证它能取到最值.

继续使用反证法. 假如 $M=\sup f$ 无法达到，则存在点列 $\{x_n\}$ 使得 $f(x_n)\to M$. 类似上面的证明, 不妨设 $x_n\to c$, 进而得 $f(c)=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=M$. 即 f 在点 c 处取到了最大值，矛盾. 所以 $\sup f$ 能取到，即有最大值. 同理可证存在最小值. □

3 课时/27 课时

介值性（Intermediate Value Theorem）

设 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续.

- 若 $f(a)f(b)<0$, 则存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f(\xi)=0$. **(零点定理)**
- 若 $f(a)<f(b)$, 则对于任意 $\mu\in(f(a),f(b))$, 存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=\mu$. **(介值定理)**

证明. 只需证明第一条. 我们使用二分法. 将 $[a,b]$ 二等分, 记分点为 x_1. 然后选取 $[a,x_1],[x_1,b]$ 中函数在端点异号的小区间，记作 $[a_1,b_1]$. 继续将 $[a_1,b_1]$ 二等分, 记分点为 x_2，得到端点异号的小区间 $[a_2,b_2]$. 依此, 可得区间套 $\{[a_n,b_n]\}$. 根据区间套定理，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi\in[a,b]$. 如果 $f(\xi)\neq 0$, 则由保号性知 ξ 附近没有端点异号的区间. 因此 $f(\xi)=0$. □

例 1.2.1 设 f 在区间 I 上连续. 若 $A,B\in f(I)$ 且 $A<B$，证明: $[A,B]\subset f(I)$. 特别地，若 I 是闭区间，则 $f(I)=[\min f,\max f]$.

证明. 设 $a,b\in I$ 满足 $f(a)=A, f(b)=B$. 在 $[a,b]$ 或者 $[b,a]$ 上使用连续函数介值性即可. 当 I 是闭区间时，取 $A=\min f, B=\max f$ 即可. □

例 1.2.2 设 $f:[a,b]\to[a,b]$ 连续，证明: f 存在不动点，即存在 $\xi\in[a,b]$ 使得 $f(\xi)=\xi$.

证明. 考虑 $g(x)=f(x)-x$, 则 $g(a)\geq 0, g(b)\leq 0$. 由零点定理可得结论. □

例 1.2.3 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数, 记 $a_0=0, a_{n+1}=f(a_n)+a_n$. 已知 $\{a_n\}$ 有界, 证明: f 存在零点.

证明. 反证法. 若 f 没有零点，则 f 恒正或恒负, 从而 $\{a_n\}$ 单调有界收敛于 a_∞. 对迭代式取极限可知 $f(a_\infty)=0$, 矛盾. 因此必然存在零点. □

利用介值性，可以得到反函数的连续性.

连续反函数定理

设 f 是 $[a,b]$ 上的严格递增的连续函数,则其反函数 f^{-1} 是 $[f(a),f(b)]$ 上的严格递增的连续函数.

证明. 由介值性知反函数的定义域为 $[f(a),f(b)]$. 下证连续性. 任意给定 $\epsilon>0$. 记 $x_0=f^{-1}(y_0)$, 取 x_1,x_2 使得

$$\max\{x_0-\epsilon,a\}\leq x_1<x_0<x_2\leq\min\{x_0+\epsilon,b\}.$$

若 x_0 是端点，取单侧即可. 利用严格单调性有

$$y_1=f(x_1)<y_0<f(x_2)=y_2.$$

因此，当 $y_1<y<y_2$ 时,

$$x_0-\epsilon\leq x_1=f^{-1}(y_1)<f^{-1}(y)<f^{-1}(y_2)=x_2\leq x_0+\epsilon.$$

所以，取 $\delta=\min\{y_2-y_0,y_0-y_1\}$, 则对任意 $y\in U(y_0;\delta)$ 成立 $|f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)|<\epsilon$. □

例 1.2.4 证明：有理幂函数 $f(x)=x^{p/q}$ 在其定义域上连续.

证明. 仅考虑 $(0,+\infty)$. 由于 x^q 是连续函数，所以其反函数 $x^{1/q}$ 也连续, 从而 $x^{p/q}=(x^{1/q})^p$ 也连续. □

类似地，根据三角函数的连续性可知反三角函数连续.

一致连续性 (Cantor Theorem)

闭区间上的连续函数必然一致连续.

证明. 设 f 在 $[a,b]$ 连续. 如果它不一致连续, 则存在 $\epsilon_0>0$ 及 $\{x_n\},\{y_n\}$, 使得 $x_n-y_n\to 0$ 且 $|f(x_n)-f(y_n)|\geq\epsilon_0$. 由致密性定理, 通过选取子列不妨假设 $x_n,y_n\to\xi\in[a,b]$. 由连续性, $|f(x_n)-f(y_n)|\to|f(\xi)-f(\xi)|=0$, 矛盾. □

例 1.2.5 设 f 是 $[a,b]$ 上的连续函数. 证明：对任意正数 ϵ，存在 $[a,b]$ 上的阶梯函数 φ，使得

$$\sup_{x\in[a,b]}|f(x)-\varphi(x)|\leq\epsilon.$$

证明. 根据一致连续性，对于任意的 $\epsilon>0$，存在正整数 N，使得当 $|x'-x''|\leq(b-a)/N$ 时，$|f(x')-f(x'')|\leq\epsilon$. 因此，只需将 $[a,b]$ 等分为 N 份，从左自又的小区间依次记作 $I_1=[a_1,b_1),I_2=[a_2,b_2),\cdots,I_N=[a_N,b_N]$. 定义阶梯函数 $\varphi=\sum_j f(a_j)\chi_{I_j}$ 即可. □

例 1.2.6 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 且 $A<B$. 证明: (a) f 在 $\mathbb{R}$ 上有界; (b) 对于任意 $\mu\in(A,B)$，存在 $\xi\in\mathbb{R}$，使得 $f(\xi)=\mu$；(c) f 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续.

证明. 我们用有限区间的结论来处理本题的无限区间.

(a) 因为 $f(+\infty)=A$，所以存在 $M>0$，当 $x\geq M$ 时有 $|f(x)-A|<1$，从而 $|f(x)|\leq|A|+1$. 类似地，存在 $N>0$，当 $x\leq-N$ 时有 $|f(x)|\leq|B|+1$. 而在闭区间 $[-N,M]$ 上函数 f 有界，不妨设 $|f(x)|\leq C$. 故而，对于任意 $x\in\mathbb{R}$，必有

$$|f(x)|\leq|A|+|B|+C+1.$$

(b) 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A<\mu$，根据保序性，存在 $a\in\mathbb{R}$ 使得 $f(a)<\mu$；类似地，存在 $b\in\mathbb{R}$ 使得 $f(b)>\mu$. 在 $[a,b]$ 或者 $[b,a]$ 上应用介值性，可知存在 ξ 使得 $f(\xi)=\mu$.

(c) 任给 $\epsilon>0$. 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 均存在，根据 Cauchy 原理，存在 $M>0$, 如果 $x',x''\in[M,+\infty)$ 或者 $x',x''\in(-\infty,-M]$，有

$$|f(x')-f(x'')|<\epsilon.$$

另一方面，由 Cantor 定理，函数 f 在闭区间 $[-M-1,M+1]$ 上一致连续. 因此存在 $0<\delta<1$, 只要 $x',x''\in[-M-1,M+1]$ 满足 $|x'-x''|<\delta$，必有

$$|f(x')-f(x'')|<\epsilon.$$

因此，如果 $|x'-x''|<\delta$, 则必有 $x',x''\in(-\infty,-M]$ 或 $x',x''\in[-M-1,M+1]$ 或 $x',x''\in[M,+\infty)$，无论哪种情形，都有 $|f(x')-f(x'')|<\epsilon$.

需要注意最值性未必成立，$\arctan x$ 就是一个反例. □

1.3 初等函数的连续性

我们已经知道有理函数、有理幂函数、三角函数、反三角函数都是连续的. 如果可以证明指数函数是连续函数，那么根据反函数定理可知对数函数也是连续函数. 进一步，根据复合函数连续性，可知一般的幂函数也是连续函数. 因此，只要证明指数函数连续，就能得到初等函数的连续性.

指数函数
指数函数是连续函数.

证明. 考虑 $f(x)=a^x(a>1)$. 我们已经知道 $\lim\limits_{x\to 0}a^x=1=a^0$，即 f 在原点连续. 下面将其它点的问题转化为原点的情形. 考虑右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+}a^x$. 取有理数 r,r_0 使得 $r_0<x_0<x<r$ 且 $r-r_0<2(x-x_0)$，则

$$0\le a^x-a^{x_0}\le a^r-a^{r_0}=a^{r_0}(a^{r-r_0}-1)\le a^{x_0}(a^{2(x-x_0)}-1).$$

从而 $\lim\limits_{x\to x_0^+}a^x=a^{x_0}$，即指数函数右连续. 类似可证左连续.[2] □

2: 此证明并未使用 $a^{x+y}=a^xa^y$. 若使用此性质，则直接有

$$\lim_{x\to x_0}a^x=a^{x_0}\lim_{x\to x_0}a^{x-x_0}=a^{x_0}.$$

$a^{x+y}=a^xa^y \qquad (a^x)^y=a^{xy} \qquad (ab)^x=a^xb^x$

证明. 前文已经证明了第一个等式. 这里我们用连续性给出一个新的证法. 注意到当指数是有理数时，它们都是成立的. 下面考虑一般实数. 取有理数列 $\{r_n\}$ 和 $\{s_n\}$，使得 $r_n\to x, s_n\to y$. 于是，根据指数函数的连续性，有

$$\begin{aligned}a^{x+y}=a^{\lim\limits_{n\to\infty}(r_n+s_n)}&=\lim_{n\to\infty}a^{r_n+s_n}=\lim_{n\to\infty}(a^{r_n}a^{s_n})\\&=\lim_{n\to\infty}a^{r_n}\cdot\lim_{n\to\infty}a^{s_n}=a^{\lim\limits_{n\to\infty}r_n}\cdot a^{\lim\limits_{n\to\infty}s_n}=a^x\cdot a^y.\end{aligned}$$

类似地可得 $(ab)^x=a^xb^x$. 下证 $(a^x)^y=a^{xy}$.

$$\begin{aligned}(a^x)^y&=\lim_{m\to\infty}(\lim_{n\to\infty}a^{r_n})^{s_m}=\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}((a^{r_n})^{s_m})\\&=\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}(a^{r_ns_m})=\lim_{m\to\infty}a^{\lim\limits_{n\to\infty}r_ns_m}=\lim_{m\to\infty}a^{xs_m}=a^{xy}.\end{aligned}$$

上面第二个等式，需要用到幂函数 $f(t)=t^{s_m}$ 的连续性. □

对数函数
对数函数是 $(0,+\infty)$ 上的连续函数.

证明. 不妨考虑 $f(x)=\log_a x(a>1)$. 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=0$. 根据指数函数的连续性和严格单调性，知其值域为 $(0,+\infty)$. 再根据反函数定理，可知 $f(x)=\log_a x$ 是定义在 $(0,+\infty)$ 上的连续函数. □

幂函数

幂函数是其定义域上的连续函数.

证明. 当 $x>0$ 时，$x^{\alpha}=e^{\alpha\ln x}$. 根据复合函数连续性，$x^{\alpha}$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续. 类似可知其它点处的连续性. □

因此，初等函数在定义区间上都是连续的. 它们的极限可以直接通过代值求得，比如

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sin 2^{x}}{\ln\left(x^{2}+3\right)}=\frac{\sin 2^{3}}{\ln\left(3^{2}+3\right)}=\frac{\sin 8}{\ln 12}.$$

某些幂指函数的极限也能用这种方式计算.

例 1.3.1 设 $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=a>0$, $\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=b$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)^{v(x)}=a^{b}$.

证明. 利用指数函数和对数函数的连续性，有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}u(x)^{v(x)}&=\lim_{x\to x_0}e^{v(x)\ln u(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}(v(x)\ln u(x))}\\&=e^{\lim\limits_{x\to x_0}v(x)\cdot\ln\left(\lim\limits_{x\to x_0}u(x)\right)}=e^{b\ln a}=a^{b}.\end{aligned}$$

可见，求解幂指型极限的关键是利用对数函数转化为乘积型极限. □

等价无穷小是估计函数大小的常用方式，利用指数函数和对数函数的连续性，可以得到下述重要的等价无穷小关系.

重要的等价无穷小 $(x\to 0)$

$\ln(1+x)\sim x$　　$e^{x}-1\sim x$　　$(1+x)^{\alpha}-1\sim\alpha x(\alpha\neq 0)$

证明. 利用连续性，有

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)=\ln e=1;\\&\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}\xlongequal{u=e^{x}-1}\lim_{u\to 0}\frac{u}{\ln(u+1)}=1;\\&\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{\alpha x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{\alpha x}=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha\ln(1+x)}{\alpha x}=1.\end{aligned}$$

根据定义，它们都是等价无穷小. □

更一般地, 如果 $\varepsilon(x)=o(1)(x\to x_0)$ 且 $\varepsilon(x)\neq 0$, 则当 $x\to x_0$ 时有

$$\ln(1+\varepsilon(x))\sim\varepsilon(x),\quad e^{\varepsilon(x)}-1\sim\varepsilon(x),\quad (1+\varepsilon(x))^{\alpha}-1\sim\alpha\varepsilon(x).$$

例 1.3.2 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}\right)^n$.

解. 根据 Heine 定理，有

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}\right)^n=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}\ln\left(1-2x+3x^2\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1-2x+3x^2\right)}{x}}.$$

由于

$$\ln\left(1-2x+3x^2\right)\sim -2x+3x^2(x\to 0).$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}\right)^n=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2x+3x^2}{x}}=e^{-2}.$$

也可以直接用数列形式的等价无穷小 $\ln\left(1-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}\right)\sim -\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}$. □

3 课时/30 课时