Instituto Superior de Ciências e Tecnologia de Moçambique
Licenciatura em Engenharia Informática
Disciplina: Álgebra linear e geometria analítica

Vectores e valores próprios

Seja V um espaço vectorial e $T: V \rightarrow V$ um operador linear.

Um vector $v \in V$, $v \neq o$ é vector próprio ou autovector de T
se existir $\lambda \in IR$, tal que **T(v) = λ v.**

O real λ é chamado valor próprio ou autovalor de T associado ao vector próprio *v*.

Exemplos:

1) Dada a matriz $T=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$ e um vector v =(1,1)

Valor próprio ou autovalor $\lambda=\frac{1}{2}$

$$T.(v)=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vector próprio autovector (1,1)

Porque T (v) = λ v

2) Vamos considerar $T: IR^2 \rightarrow IR^2$, tal que T(x,y)=(4x+5y , 2x+y).

a) Verifique se v = (5,2) é um autovector de T.

T(v) = T(5,2) = (4.5+5.2 , 2.5+2) = (30, 12) = 6(5,2) = λ v

Logo v é um autovector de T associado ao autovalor 6

b) Verifique se v = (1,1) é um autovector de T.

$T(v) = T(1,1) = (4+5\ ,\ 2+1) = (9,3) = 3(3,1) \neq \lambda\, v$

Logo v não é autovector de T

3) O vector v = (-4,0,2) é autovector de $A=\begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$?

Por definição v é autovector de A se $A.v = \lambda.v \rightarrow$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$ então v é autovector da matriz A

associado ao autovalor $\lambda=5$

DETERMINAÇÃO DOS VALORES E VECTORES PRÓPRIOS

Seja $T: V \rightarrow V$ um operador linear e [T] = A (matriz canonica de T)

1° **Valores próprios:**

$$\mathbf{T\ (v) = \lambda\ v \quad \Leftrightarrow \quad A\ .\ v = \lambda\ v}$$
$$\mathbf{A\ .\ v\ -\ \lambda\ v = 0}$$
$$\mathbf{A\ .\ v\ -\ \lambda\ I.\ v = 0}$$
$$\mathbf{(A - \lambda\ I)\ .\ v = 0 \quad (1)}$$

Se **Det** $\mathbf{(A - \lambda\ I) \neq 0 \rightarrow}$ **o sistema é** possivel e determinado, admite uma única solucao (0,0). Na definição autovector $v \neq 0$. Então **Det** $\mathbf{(A - \lambda\ I) = 0\ (1)}$

A equação (1) é chamada "*equação característica de* T " e suas raízes são os valores próprios ou autovalores de T.

2° **Vectores próprios:**

Os vectores próprios são as soluções da equação (A - λ I).v = 0 para cada valor próprio encontrado.

Exemplo1: Encontre os valores e vectores próprios do operador linear definido por T(x,y) = (x+y , -2x+4y).

Resolução:

1°Cálculo dos valores próprios :
Det (A – λ I) = 0

Seja A matriz que representa T

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 4-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda) + 2 = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda - 3)(\lambda - 2) = 0$$

$$\lambda_1 = 3 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 2$$

2° Cálculo dos vectores próprios: **(A - λ I).v = 0**

Para $\lambda_1=3$ e v = (x, y)

$$(A - \lambda I).v = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 4-\lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -2x + y = 0 \\ -2x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ \end{cases} \Rightarrow v = (x, 2x)$$; x é qualquer número real

Por exemplo: (1,2), (2,4), (-2,-4),……são vectores próprios ou autovectores asociados ao valor λ=3

Para λ_1=2 e v = (x, y)

$$(A - \lambda I).v=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 4-\lambda \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -x+y=0 \\ -2x+2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x \\ \end{cases} \Rightarrow v=(x\,,\,x)$$; x é qualquer numero real

Por exemplo: (2,2), (3,3), (-2,-2),…… são vectores próprios ou autovectores asociados ao valor λ=2

Exemplo 2: Seja T: $IR^2 \rightarrow IR^2$ e T(x,y) = (4x+2y, 3x-y)
Determinar os autovalores e os autovectores.

1° Cálculo dos autovalores:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A - \lambda I = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 3 & -1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = (4-\lambda)(-1-\lambda)-6=0$$

$$\lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

λ_1=5 e λ_2= -2

2° Cálculo dos autovectores :

Para λ_1=5 e v = (x, y)

$$(A - \lambda I).v=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 3 & -1-\lambda \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -x+2y=0 \\ 3x-6y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y \\ y=\dfrac{x}{2} \end{cases} \Rightarrow v=\left(x\,,\,\frac{x}{2}\right)$$; x é qualquer número real e $x \neq 0$

Para λ_1=-2 e v = (x, y)

$$(A - \lambda I).v=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 3 & -1-\lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 6x+2y=0 \\ 3x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \\ y=-3x \end{cases} \Rightarrow v=(x,-3x)$$; x é qualquer número real e $x \neq 0$

Exemplo 3: Considere o operador linear T sobre o IR^3, definido por:

T (z, y, z) = (x + 2y - z, 3y + z, 4z)

a) **Escrever a matriz que representa T**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

b) **Determinar os valores próprios do polinómio característico.**

Det (A -λ I) =0

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{bmatrix}$$

$$Det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda)(4-\lambda) = 0$$

Os valores próprios são as raízes do polinómio: λ = 1 ; λ = 3 e λ = 4

c) Cálculo dos vectores próprios: (A - λ I). v = 0

Para λ_1=1 e v = (x, y, z)

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2y - z = 0 \\ 2y + z = 0 \\ 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ \forall x \in R \mid \{0\} \end{cases}$$

Todo vector v = (x, 0,0) é auto vector associado ao auto valor λ=1

Por exemplo: (1,0,0); (-2,0,0); …

Para λ_1=4 e v = (x, y, z)
$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -3x + 2y - z = 0 \\ -y + z = 0 \\ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x = -z \\ y = z \\ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{z}{3} \\ y = z \\ \forall z \in R \mid \{0\} \end{cases}$$

$$\left(\frac{z}{3}, z, z\right) \quad \rightarrow Ex: \left(-\frac{1}{3}, -1, -1\right) \ \left(\frac{2}{3}, 2, 2\right)$$

Para λ_1=3 e v = (x, y, z)
$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x + 2y - z = 0 \\ z = 0 \\ \forall x, y \in R \Rightarrow x = y \neq 0 \end{cases}$$

$$(x, x, 0) \quad \rightarrow Ex: (3,3,0), (-4,-4,0)$$

Exercicios:

1) Calcule os valores e vectores próprios :

a) do operador linear definido por $T(x, y) = (4x + 5y, 2x + y)$

b) do operador linear definido por $T(x, y) = (x + 2y, 3x + 2y)$

2) Sabendo que $\lambda = 2$ é um valor próprio de $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ calcule os vectores próprios.