Instituto Superior de Ciências e Tecnologia de Moçambique

Licenciatura em Engenharia Informática

Disciplina: Álgebra linear e geometria analítica

Base do espaço vectorial

Vamos considerar alguns exemplos

1) Dados os vectores $u = (2,3)$, $v = (1, -2)$ e $w = (7,0)$
O vector w é uma combinação linear dos vectores u e v
$w = 2u + 3v \leftrightarrow (7,0) = 2(2,3) + 3(1,-2)$

Podemos dizer que estes vectores são **LD**

2) Dados os vectores $u = (2,3)$ e $v = (-1, 4)$
Será que existe um número λ, tal que $\lambda u = v$?
$\lambda(2,3) = (-1, 4)$
$2\lambda = -1 \rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$ e $3\lambda = 4 \rightarrow \lambda = 4/3$
Isto é impossível, logo estes vectores são **LI**

Este é o principal conceito para a formação de uma base.

Definição:

Base é um conjunto linearmente independente de vectores do espaço vectorial que gera o espaço através de combinação linear dos elementos da base, isto é;

Um conjunto $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$ é uma base do espaço vectorial V se:

a) B é Linearmente independente
b) B gera V $\leftrightarrow (v_1, v_2, \ldots, v_n) = V$

Exemplos:

1) $B = \{(1,0), (0,1)\}$ é uma base de IR^2, denominada base canónica. De facto:

a) B é LI porque $\alpha_1(1,0) + \alpha_2(0,1) = (0,0) \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$

b) $\forall (x, y) \in RI^2,\ (x, y) = \alpha_1(1,0) + \alpha_2(0,1)$

Isto é, qualquer vector de IR^2 pode ser escrito como combinação linear dos dois vectores.

2) B= {(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)} é uma base de $IR^{3.}$, denominada base canónica.

3) O conjunto B ={1} é uma base de IR, porque todo número real pode ser escrito como combinação linear de 1.

$x = 1.\,x$ então 1 gera o espaço IR.

Alem disso, se $a.1 = 0$ então $a = 0$, logo o conjunto B ={1} é **LI**

4) O conjunto {(1,-1) , (-2,2) , (1,0) }não é uma base de IR^2 porque os vectores são LD.

Isto é, um dos vectores é combinação linear dos outros.

(-2,2) = -2 (1, -1) +0 (1,0)

5) B= {(1,0) e (1,1)}é base do IR^2 porque:

a) B é LI

$$\alpha_1(1,0)+\alpha_2(1,1)=(0,0)\Leftrightarrow(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2)=(0,0)\Leftrightarrow\alpha_1=\alpha_2=0$$

b) $\forall(x,y)\in IR^2,\ (x,y)=\alpha_1(1,0)+\alpha_2(1,1)=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2)\Rightarrow\alpha_2=y\ e\ \alpha_1=x-y$

Isto é, qualquer vector de IR^2 pode ser escrito como combinação linear dos dois vectores.

Qualquer vector genérico v **=** $(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\,\boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{v_2}$ gera o IR^2

Exercicicios:

1) Mostra que o conjunto A = {(1,2) , (3,5) } é uma base de IR^2.
2) Mostra que o conjunto B= {(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)}é uma base de IR^3
3) Verifica se os conjuntos seguintes são bases de IR^2
   a) A= {(2,3) e (-4,-6)}
   b) B= {(1,1) e (1,-1)}
   c) C= {(1,2) e (3,5)}

Componentes de um vector

Seja B = { $v_1, v_2, \ldots, v_n$ **} uma base de um espaço vectorial V.**

$\forall\ v \in$ V, $v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n$. Os reais $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são chamados de componentes ou coordenadas de v na base B e representa-se por $v_B = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Exemplos:

1) Consideremos as bases: A ={ (1,0), (0,1)} e B={(2,0), (1,3)} do IR^2 e o vector v = (8,6). As componentes do vector v na base A ($v_{A)}$ e na base B($v_{B)}$ são:

v_A = **8**(1,0)+6(0,1) ↔ v_A=(8,6) ; v_B= **3**(2,0)+ **2**(1,3) ↔ v_B=(3,2)

2) Escrever o vector v = (-2,8) na base B= {(1,3) e (2,-1)}

$$(-2,8) = \alpha_1 (1,3) + \alpha_2 (2,-1) \iff (-2,8) = (\alpha_1, 3\alpha_1) + (2\alpha_2, -\alpha_2)$$
$$\iff (-2,8) = (\alpha_1 + 2\alpha_2\ ,\ 3\alpha_1 - \alpha_2)$$
$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = -2 \\ 3\alpha_1 - \alpha_2 = 8 \end{cases} \begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow o\ vector\ v\ \ escrito\ na\ base\ B\ e \quad v = (2, -2)$$

Exercício: Escrever o vector v = (3,6) na base B= {(1,0) e (1,3)}

Mudança de base

A cada base, corresponde um sistema de coordenadas, realizar uma mudança de base, é substituir o sistema de coordenadas por outro.

Vamos ver alguns exemplos:

1) Dados os conjuntos: A = {(-1,2) , (3,-1)} e B = {(1,-1), (2,0)} bases do IR^2 .
   Sabendo que v_A = (4,3), calcule as coordenadas do vector v na base B.

O vector v na base B obtém -se:

v_B = M . v_A onde M é a matriz de mudança de base de A para B dada por **M = B^{-1}. A**

O papel da matriz de mudança de base é transformar as componentes de um vector $\vec{v}$ na base A em componentes do mesmo vector na base B.

Passos:

1° Escrever cada base na forma matricial

A = {(-1,2) , (3,-1)} $A=\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

B = {(1,-1), (2,0)} $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

2° Calcular a matriz **inversa de B**

$$\text{Det } B=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=2 \quad \rightarrow \quad B^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

3° Calcular matriz de mudança de base de **A** para **B**

$$M = B^{-1}.\ A \quad \rightarrow \quad M_B^A=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

4° Calcular o vector v na base B

$$v_B = M\ .\ v_A \quad \rightarrow \quad v_B=\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -5 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \text{então } v_B=(-5,\ 5)$$

2) Dadas as bases: A = { (1,3), (3,6)} e B = { (1,2) , (-1,-1)} do IR^2 . Sabendo que $v_B = (4,5)$, calcule v_A.

O vector v na base A é obtido: $v_A = M\ .\ v_B$ onde M é a matriz de mudança de base dada por

$M = A^{-1}.\ B$

Passos:

1° Escrever cada base na forma matricial; $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

2° Calcular a matriz inversa de A

$$\text{Det A}=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & 6\end{vmatrix}=-3 \quad \rightarrow \quad A^{-1}=-\frac{1}{3}\begin{bmatrix}6 & -3\\ -3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 1 & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

3° Calcular matriz de mudança de base de B para A

$$M = A^{-1}.\,B \quad \rightarrow \quad M_A^B=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 1 & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

4° Calcular o vector v na base A

$$V_A = M\,.\,v_B \quad \rightarrow \quad v_A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\ 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\ -2\end{bmatrix} \quad \text{assim } v_A=(5,-2)$$

Mudança de Base de A para B $\mathbf{v_B = M\,.\,v_A}$ Onde M é a matriz de mudança de base $\mathbf{M = B^{-1}.\,A}$	**Mudança de Base de B para A** $\mathbf{v_A = M^{-1}\,.\,v_B}$ Onde M^{-1}é a matriz de mudança de Base $\mathbf{M^{-1} = A^{-1}.\,B}$

Conclusão: As matrizes de mudança de base de A para B e de B para A são inversas. Isto é**;**

$\mathbf{M.M^{-1}=I}$

Exercícios

1) Sabendo que A = {(1,2),(-3,-5)} e B = {(1,1),(1,0)} são base do espaço IR^2 determine:
   a) $v_{B,}$ sabendo que v_A= (-1, 1) b) $v_{A,}$ sabendo que v_B= (2,-1)

2) Dadas as bases A = {(1,3),(1, -2)} e B = {(3,5),(1,2)} espaço IR^2. Calcule:
   a) A matriz de mudança de base de A para B.
   b) A matriz de mudança de base de B para A.
   c) Sabendo que v_A = (3, 2) . Calcular $v_{B.}$
   d) Sabendo que v_B = (5, -10), calcular $v_{A.}$