Mahomed Bachir

Cálculo Diferencial (Derivadas)

Definição da derivada

Seja $\boldsymbol{y = f(x)}$ definida num certo intervalo.

Suponhamos que dá-se ao x um acréscimo $\Delta\boldsymbol{x}$ e ao $\boldsymbol{y}$ um acréscimo $\Delta\boldsymbol{y}$. Deste modo, teremos que $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ e ao $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ chamamos derivada da função no ponto x, e representa-se por $\boldsymbol{f'(x)\ ou\ y'\ ou\ \frac{d_y}{d_x}}$.

Assim, a derivada de uma função por definição do limite, é calculada usando a expressão $\boldsymbol{y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}}$.

Regras:

1º Determinar o valor de $\boldsymbol{x} + \Delta\boldsymbol{x}$, substituindo na função dada.

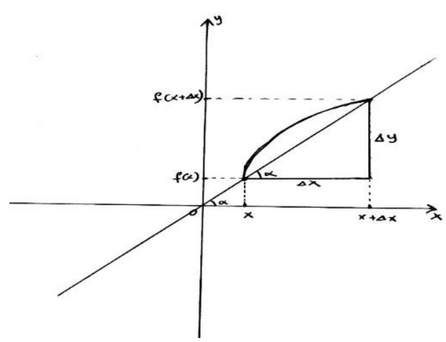
2º Aplicar a definição da derivada a partir do limite

Exemplos:

a) Calcule a derivada por definição, da função $\boldsymbol{f(x) = x^2}$

b) Calcule a derivada da função $\boldsymbol{f(x) = x^2 - 4}$ nos pontos $\boldsymbol{x_1 = 2\ e\ x_2 = 3}$.

Interpretação gráfica da derivada



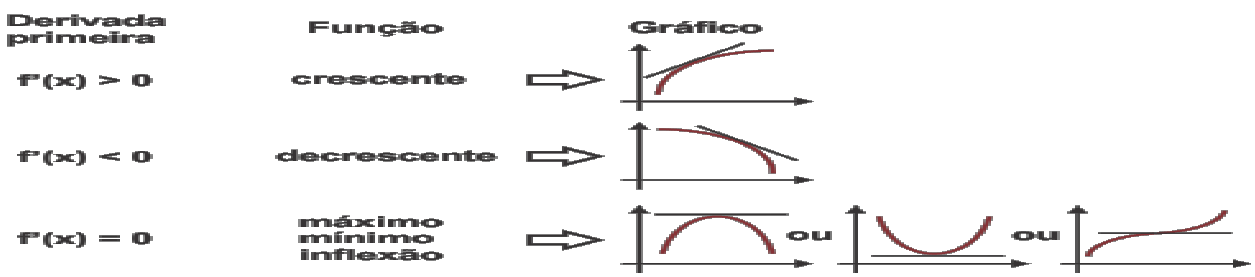
$$tg\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\alpha$$

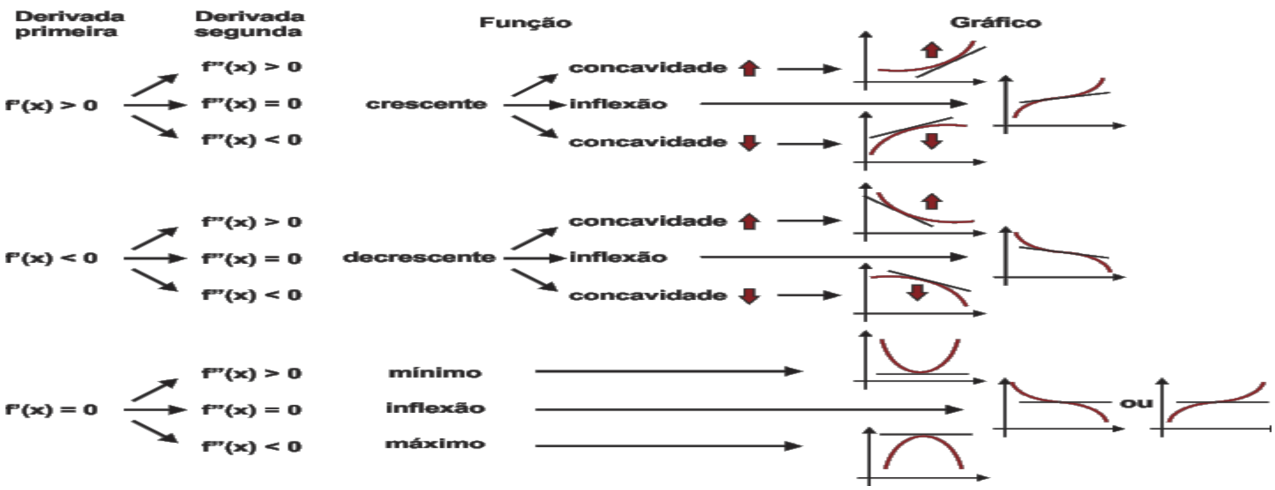
Isto é, a derivada de uma função $\boldsymbol{f}$ num ponto $\boldsymbol{x_0}$ é numericamente igual ao declive **(coeficiente $\boldsymbol{a}$)** da recta.

Derivabilidade de uma função e sinal da derivada

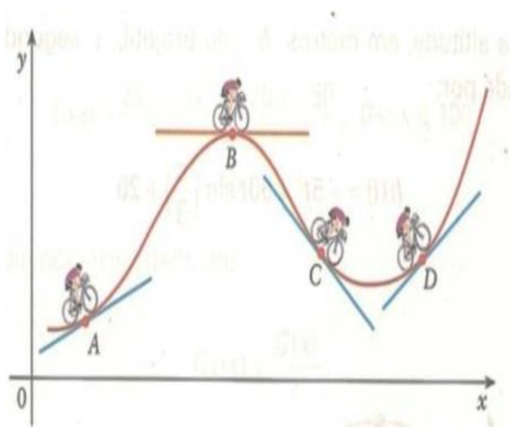
1ª Derivada



2ª Derivada



Exemplo:



- $f'_{(A)} > 0$ e $f'_{(D)} > 0$ - quando a recta tangente no ponto dado é crescente, a derivada é positiva
- $f'_{(B)} = 0$ e f' *no ponto de inflexão* - quando a recta tangente no ponto dado é constante, a derivada é zero
- $f'_{(C)} < 0$ - quando a recta tangente no ponto dado é decrescente, a derivada é negativa
- Quando o ponto esta numa posição que forma bico, não existe derivada.

Exercícios

---

1. **Calcule a derivada aplicando a definição:**

   a) $y = sen\, x$ b) $y = \sqrt[3]{x}$

2. **Usando a definição da derivada, determine as derivadas nos pontos $x = a$, $x = 2$ e $x = -3$ das funções:**

   a) $y = 2x^2$ b) $y = x^3$

   c) $y = x^3 - 3x^2 + 6$ d) $y = \sqrt{x}$

   e) $y = \frac{x-2}{x}$

3. **Dada a função real de variável real $y = -2x + 3$:**
   a) Determine $f'_{(x_0)}$, sendo x_0 um número real qualquer
   b) Caracterize a função f', derivada da função f.
4. **Seja $y = \frac{1}{4}x^2$.**
   a) Determine $f(2 + \Delta x)$
   b) Determine a derivada da função
   c) Determine o valor da derivada para $x = 2$.
5. **Seja dada a função $y = x^2 - x$.**
   a) Determine a derivada
   b) Determine o ponto em que a derivada é :
      i. 4 ii. $\frac{1}{2}$ iii. -2
6. **Seja $y = x + \frac{4}{x}$**
   a) Determine a derivada
   b) Determine os pontos em que a derivada é:
      i. $\frac{3}{4}$ ii. -15 iii. 1

Fórmulas e regras de derivação

As formulas de derivação ajudam a calcular as derivadas sem que seja necessário usar a definição por limite. Cada função tem a sua própria fórmula.

As derivadas podem ser simples ou compostas. São compostas quando a variável apresenta uma operação.

1º Derivada de constante	$y = k \Rightarrow y' = 0$
2º Derivada de uma variável de expoente 1	$y = x \Rightarrow y' = 1$
3º Derivada do produto entre uma constante e uma variável	$y = ax \Rightarrow y' = a \cdot x'$
4º Derivada de uma soma • Se a função for simples • Se a função for composta	$y = a \pm b \Rightarrow y' = a' \pm b'$ $y = f(x) \pm g(x) \Rightarrow y' = f'(x) \pm g'(x)$

5º Derivada de um produto • Se a função for simples • Se a função for composta	$\boldsymbol{y = a \cdot b \Longrightarrow y' = a' \cdot b + b' \cdot a}$ $\boldsymbol{y = f(x) \cdot g(x) \Longrightarrow y' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)}$
6º Derivada de um quociente • Se a função for simples: • Se a função for composta:	$\boldsymbol{y = \frac{a}{b} \Longrightarrow y' = \frac{a' \cdot b - b' \cdot a}{b^2}}$ $\boldsymbol{y = \frac{f(x)}{g(x)} \Longrightarrow y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{[g(x)]^2}}$

Exercícios

1. **Calcule a derivada de:**

   a) $y = 3x - 1$ b) $y = 2x + 3$ c) $y = -6x + 8$

   d) $y = -\frac{1}{3}x - 1$ e) $y = \frac{1}{3}x$ f) $y = \frac{3x-2}{4}$

2. **Seja $\boldsymbol{f(x) = 2x + 3 \ e \ g(x) = 5x}$. Determine $\boldsymbol{(f + g)' \ e \ (f - g)'}$.**

3. **Seja $\boldsymbol{f(x) = x + 1 \ e \ g(x) = x^2 + 2}$. Determine $\boldsymbol{(f \cdot g)'}$.**

4. **Determine a derivada de:**

   a) $y = x(8x + 1)$ b) $y = (x - 1)^2$

   c) $y = (5x + 1)(2x - 4)$ d) $y = (2 - 3x)(5 + 8x)$

5. **Sendo $\boldsymbol{f(x) = x + 1 \ e \ g(x) = x - 3}$, determine $\boldsymbol{\left(\frac{f}{g}\right)'}$**

6. **Calcule a derivada aplicando as regras da divisão:**

   a) $y = \frac{x-2}{10}$ b) $y = \frac{3x-2}{x}$ c) $y = \frac{2}{x} - \frac{5}{x}$

   d) $y = \frac{2x-3}{5x}$ e) $y = \frac{1}{x+3}$ f) $y = \frac{2x+\pi}{2-\frac{x}{2}}$

7º Derivada de uma potência • Se a função for simples • Se a função for composta	$\boldsymbol{y = x^n \Longrightarrow y' = n \cdot x^{n-1}}$ $\boldsymbol{y = f(x)^n \Longrightarrow y' = n \cdot f(x)^{n-1} \cdot [f(x)]'}$
8º Derivada da raiz quadrada • Se a função for simples • Se a função for composta	$\boldsymbol{y = \sqrt{x} \Longrightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$ $\boldsymbol{y = \sqrt{f(x)} \Longrightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot [f(x)]'}$
9º Derivada de raiz de índice n • Se a função for simples • Se a função for composta	$\boldsymbol{y = \sqrt[n]{x} \Longrightarrow y' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}}$ $\boldsymbol{y = \sqrt[n]{f(x)} \Longrightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt[n]{f(x)^{n-1}}} \cdot [f(x)]'}$

Exercícios

1. Calcule a derivada de:

a) $y = x^2 + 4x + 1$

b) $y = 3x^2$

c) $y = \frac{1}{2}x^3$

d) $y = -2x^2 + 3\pi$

e) $y = x^{-9}$

f) $y = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 5x$

g) $y = -6x^2 + 2x + 7$

h) $y = (x^2 - 1)^2$

i) $y = (x - 2)^3$

j) $y = 5x^3 + x^2$

k) $y = x^7$

l) $y = x^{12}$

m) $y = (3x^2 - 5x + 8)^4$

n) $y = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + 1$

2. Calcule, aplicando as regras da derivação:

a) $y = \frac{x^4-2}{10}$

b) $y = \left(\frac{3x-2}{x}\right)^2$

c) $y = \frac{2}{x^2} - \frac{5}{x^5}$

d) $y = \frac{2x^2-3}{x^3}$

e) $y = \frac{1}{x^2}$

f) $y = \frac{1}{x^4}$

g) $y = \frac{x}{2x^2+1}$

h) $y = \frac{2x+3}{x^2-1}$

i) $y = \frac{x}{x^2+2x+1}$

j) $y = \frac{x^2+1}{1-3x^3}$

k) $y = -\frac{5}{(2x^5-x^3)^2}$

l) $y = \frac{x^2-5}{x^3+1}$

m) $y = \frac{1}{x^2-4x-5}$ n) $y = \frac{1}{(2x+1)^3}$ o) $y = \left[\frac{1}{(x-1)^2} + x\right]^2$

p) $y = x^{\sqrt{3}} - 1$ q) $y = \frac{(2x+5)^3}{x}$ r) $y = \left(\frac{2x+3}{x-1}\right)^2$

3. Calcule a derivada das funções seguintes:

a) $y = \sqrt{x^2-1}$ b) $y = \sqrt{3x+2}$ c) $y = \sqrt{x^2-3}$

d) $y = \sqrt[3]{x+1}$ e) $y = \sqrt[3]{x^3-2}$ f) $y = \sqrt[3]{x}$

g) $y = \left(\frac{\sqrt{x+1}}{x}\right)^2$ h) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ i) $y = \sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$

j) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ k) $y = x^{\frac{2}{3}}$ l) $y = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

4. Determine a derivada das funções seguintes:

a) $y = x\left(\sqrt{x} + \frac{x}{\sqrt{x}}\right)$ b) $y = 3x^2 + \frac{3}{\sqrt{x}} - 2x^{-1}$ c) $y = \frac{x^2+\sqrt{x}+1}{x}$

d) $y = \frac{x^3+x^2+1}{x^4}$ e) $y = (-x^2+3)^{\frac{1}{2}}$ f) $y = (-2x+1)^5$

g) $y = \frac{(x-2)^2}{x}$ h) $y = \sqrt[3]{-x^3+2}$ i) $y = \frac{(x-3)^2}{x+3}$

j) $y = x^3\sqrt[3]{x}$ k) $y = \left(\frac{x-1}{x-2}\right)^3$ l) $y = x^2\sqrt{x}$

m) $y = \frac{\sqrt{x^5}}{x\sqrt{x}}$ n) $y = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}x - 3\right)^2}$ o) $y = \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$

10º Derivada da função exponencial • Se a função for simples • Se a função for composta	$\boldsymbol{y = a^x \Rightarrow y' = a^x \cdot lna}$ $\boldsymbol{y = a^{f(x)} \Rightarrow y' = a^{f(x)} \cdot lna \cdot f(x)'}$
11º Derivada da função de base e (número de Neper) • Se a função for simples • Se a função for composta	$\boldsymbol{y = e^x \Rightarrow y' = e^x}$ $\boldsymbol{y = e^{f(x)} \Rightarrow y' = e^{[f(x)]} \cdot f(x)'}$
12º Derivada da função logarítmica • Se a função for simples • Se a função for composta	$\boldsymbol{y = log_a^x \Rightarrow y' = \frac{1}{xlna}}$ $\boldsymbol{y = log_a^{[f(x)]} \Rightarrow y' = \frac{1}{f(x)lna} \cdot f(x)'}$

13º Derivada do logaritmo natural • Se a função for simples • Se a função for composta	$y = \ln x \Longrightarrow y' = \frac{1}{x}$ $y = \ln[f(x)] \Longrightarrow y' = \frac{1}{f(x)} \cdot f(x)'$

Exercícios

1. Calcule, aplicando as regras da derivação:

a) $y = e^{4x}$ b) $y = 10^{2x-3}$ c) $y = 2xe^{4x}$

d) $y = \frac{e^x}{x}$ e) $y = 5^{x^2}$ f) $y = e^{-x+\frac{1}{3}}$

g) $y = 3^{-\frac{1}{x}}$ h) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ i) $y = e^{x^2+8x-1}$

j) $y = \left(\sqrt{2}\right)^{3x+1}$ k) $y = 2^x$ l) $y = 2^{\sqrt{x+1}}$

m) $y = 3^{2x}$ n) $y = \frac{3^x}{x}$ o) $y = x^2e^{-x}$

p) $y = e^{-\frac{x}{3}}$ q) $y = 5^x$ r) $y = 2^{3x}$

s) $y = e^{\sqrt{x}}$ t) $y = 3^{senx}$ u) $y = 2^{-x^2+\frac{1}{x}}$

v) $y = \left(\frac{2}{3}\right)^{-x+7}$ w) $y = \frac{1}{e^{x^3+3x-5}}$ x) $y = \sqrt{e^{3x+5}}$

2. Calcule a derivada das funções seguintes:

a) $y = ln\,(x-1)$ b) $y = ln\,\sqrt{x}$ c) $y = log_2^{(x^2-1)}$

d) $y = \frac{ln\,x}{x}$ e) $y = log_2^{(2x-1)}$ f) $y = x^2log_2^x$

g) $y = ln\,(2x^2+3x+5)$ h) $y = log_3^{(x^2-3)}$ i) $y = log_2^{\sqrt{x}}$

j) $y = ln3x$ k) $y = log_{\frac{1}{2}}^{\left(\frac{-3}{x^2-1}\right)}$ l) $log_{\frac{1}{2}}^{\left(\frac{1}{x}+3\right)}$

m) $y = ln(-3x)$ n) $y = ln\sqrt{2x}$ o) $y = lg\,\frac{x}{x+3}$

p) $y = log_5^{\sqrt{4x+7}}$ q) $y = \left[log_3^{(3x+8)}\right]^2$ r) $y = \frac{1}{ln(-2x+5)}$

14º Derivadas trigonométricas

Função seno • Se a função for simples • Se a função for composta	$y = sen\ x \Rightarrow y' = cos\ x$ $y = sen\ f(x) \Rightarrow y' = cos\ f(x) \cdot f'(x)$
Função co - seno • Se a função for simples • Se a função for composta	$y = cos\ x \Rightarrow y' = -sen\ x$ $y = cos\ f(x) \Rightarrow y' = -sen\ f(x) \cdot f'(x)$
Função tangente • Se a função for simples • Se a função for composta	$y = tgx \Rightarrow y' = \frac{1}{cos^2 x} = sec^2 x$ $y = tgf(x) \Rightarrow y' = \frac{1}{cos^2 f(x)} \cdot f(x)' = sec^2 f(x) \cdot f'(x)$
Função co - tangente • Se a função for simples • Se a função for composta	$y = ctgx \Rightarrow y' = -\frac{1}{sen^2 x} = -cosec^2 x$ $y = ctgf(x) \Rightarrow y' = -\frac{1}{sen^2 f(x)} \cdot f(x)' = -cosec^2 f(x) \cdot f'(x)$
Função arco-seno • Se a função for simples • Se a função for composta	$y = arcsen\ x \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $y = arcsenf(x) \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-(f(x))^2}} \cdot f(x)'$
Função arco-coseno • Se a função for simples • Se a função for composta	$y = arccos\ x \Rightarrow y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $y = arccosf(x) \Rightarrow y' = -\frac{1}{\sqrt{1-(f(x))^2}} \cdot f(x)'$
Função arco-tangente • Se a função for simples: • Se a função for composta:	$y = arctgx \Rightarrow y' = \frac{1}{1+x^2}$ $y = arctgf(x) \Rightarrow y' = \frac{1}{1+[f(x)]^2} f(x)'$
Função arco – cotangente • Se a função for simples: • Se a função for composta:	$y = arctgx \Rightarrow y' = -\frac{1}{1+x^2}$ $y = arctgf(x) \Rightarrow y' = -\frac{1}{1+[f(x)]^2} f(x)'$

Exercícios

1. Calcule, aplicando as regras da derivação:

a) $y = sen\ x$

b) $y = sen\ e^{2-x}$

c) $y = sen\ x + cosx$

d) $y = sen\ 3x$

e) $y = \ln\ (senx)$

f) $y = \cos 5x$

g) $y = sen\ 2x$

h) $y = sen^2(5x+1)$

i) $y = cos^2(3x-1)$

j) $y = sen(-3x+1)$

k) $y = sen^5(3x)$

l) $y = cos(5x^2-7)$

m) $y = 3sen^2(x+1)$

n) $y = xsenx^3 + 2sen3x$

o) $y = \frac{2}{\cos 3x}$

p) $y = 3sen\ (x+1)^2$

q) $y = 4sen(2x-5)$

r) $y = \frac{1}{tgx}$

s) $y = sen^3 \frac{1}{x^3}$

t) $y = \frac{1}{2} sen \left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$

u) $y = tg3x$

v) $y = \frac{1}{sen2x}$

w) $y = \ln\ (cosx)$

x) $y = \frac{1}{tgx^2}$

y) $y = cos2x$

z) $y = tg\ e^{3x-1}$

aa) $y = tg(-5x)$

bb) $y = cosx^2$

cc) $y = -\cos\ (-6x+3)$

dd) $y = senx \cdot cosx$

ee) $y = cos(x^2-1)$

ff) $y = cos\left(\frac{1}{2}x^2 + 5x\right)$

gg) $y = 5tg^2(x+1)$

hh) $y = -cos^2 x$

ii) $y = -3tg(-x+\pi)$

jj) $y = arcsen\ 2x$

kk) $y = -cos^3 x^3$

ll) $y = \frac{2}{ctg\ 2x}$

mm) $y = 2acrsenx$

nn) $y = tg\ 5x$

oo) $y = ctg\ 3x$

pp) $y = arccos3x$

qq) $y = cos^2(3x-1)$

rr) $y = arccos2x$

ss) $y = arccos(x+5)$

tt) $y = tg\frac{1}{x}$

uu) $y = arcsen\ 5x$

vv) $y = arcsen\ x^2$

ww) $y = arccos\sqrt{x}$

xx) $y = arcsen^4(x-7)$

yy) $y = arctg(2x - x^2)$

2. Calcule a derivada das funções seguintes:

a) $y = 2xcos(5x-1)$

b) $y = \pi cos\pi x + 3\pi$

c) $y = 5x\sqrt{3x-1}$

d) $y = 3x + sen\ 2x$

e) $y = 3x + \sqrt{5x+3}$

f) $y = \sqrt{sen^2 x + cos^2 x}$

g) $y = cos3x \cdot sen3x$

h) $y = (senx)^{3x}$

i) $y = \frac{3^{2x}-4}{3^{2x}+4}$

j) $y = \frac{2x}{3sen\ ax}$

k) $y = 3x\sqrt{3x} + x\sqrt{3}$

l) $y = (x^2 + 3) \cdot 2^{3-x}$

m) $y = \sqrt{xsenx}$

n) $y = log_3^x \cdot senx$

o) $y = xlnx$

p) $y = 3xln(2x - 7)$

q) $y = e^{\frac{1}{x}} \cdot arctg(-2x)$

r) $y = \frac{log_3^{(x^2-1)}}{3x}$

s) $y = lnx^2 \cdot log_3^8$

t) $y = sen(3x - \pi) \cdot e^{\frac{x}{3}}$

u) $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

v) $y = \sqrt{sen\ e^x} + sen\ e^{\sqrt{x}}$

w) $y = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+3x-1}}{2x+3}$

x) $y = (2x - 3)^2 \cdot sen\ (-x)$

Estudo completo de funções

Em classes anteriores, foram dadas vários tipos de funções cujos gráficos eram construídos seguindo regras específicas para cada um dos casos. Por isso, construía-se o gráfico e depois efectuava-se o estudo completo.

No entanto, existe uma forma de tratar todas as funções de igual forma, as **derivadas**.

Essa forma consiste em fazer o estudo completo e depois esboçar o gráfico.

Regras:

1º Calcular o domínio da função

2º Calcular a assimptota vertical

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \Longrightarrow AV: x = a$$

- Onde “a” é o valor que não faz parte do domínio calculado
- O resultado do limite deve ser ∞

3º Calcular a assimptota horizontal

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b \Longrightarrow AH: y = b$$

- O resultado do limite não pode ser igual a ∞

4º Calcular a 1ª derivada da função

5º Calcular os zeros da 1ª derivada da função

6º Preencher a tabela de modo a identificar os extremos e estudar a variação da função (Monotonia)

x	$-\infty$	x_1'		x_2'	$+\infty$
y'	**Sinal**	0	**Sinal**	0	**Sinal**
y	**Direcção**	A	**Direcção**	B	**Direcção**

- A e B são valores da função nos zeros da derivada
- $(x_1'\ e\ A)\ e\ (x_2'\ e\ B)$ são pontos Máximos ou Mínimos.

6º Calcular os pontos de intersecção do gráfico com os eixos (zeros da função e ordenada na origem)

- Zero da função é o valor de x quando y é zero.
- Ordenada na origem é o valor de y quando x é zero.

7º Calcular a 2ª derivada e o(s) seu(s) zero(s), de modo a determinar o(s) ponto(s) de inflexão.

8º Esboçar o gráfico

9º Determinar o contradomínio

Outros:

- Equação da recta tangente dado um ponto

$$\boldsymbol{y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)}$$

- Condição de paralelismo

$$\textbf{Se } \boldsymbol{r//t \implies a_r = a_t}$$

- Condição de perpendicularidade

$$\textbf{Se } \boldsymbol{r \perp t \implies a_r = -\frac{1}{a_t}}$$

Exercícios

1. **Aplicando a derivada, construa o gráfico das seguintes funções:**
   a) $y = x + 3$
   b) $y = \frac{2}{x}$
   c) $y = 3x^2 - 4x + 1$
   d) $y = x^2 - 4$
   e) $y = sen\, x$
   f) $y = x^4 - 2x^2 - 3$
   g) $y = 3x^3 - 4x$
   h) $y = -3x + 12$
   i) $y = \frac{3x-6}{-2x+2}$
2. **Estude a monotonia das seguintes funções:**
   a) $y = 5 - 6x^2 - 2x$
   b) $y = 1 - x^{\frac{2}{3}}$
   c) $y = xe^{-x}$
   d) $y = xlnx$
3. **Determine os extremos de cada uma das seguintes funções:**
   a) $y = -x^2 + 3x + 1$
   b) $y = 4 - 20x + x^2 + 2x^3$
   c) $y = x^3(x - 2)$
   d) $y = x^2e^{-2x}$
4. **Nas seguintes funções, determine os pontos máximos e mínimos e faça um esboço do gráfico:**
   a) $y = -2x^2 + 7x - 3$
   b) $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x$
5. **A partir das tabelas, esboce os gráficos:**

a)

x	$-\infty$	-3		5	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\searrow$	-2	$\nearrow$	4	$\searrow$

b)

x	$-\infty$	1		3	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\searrow$	$-$	$\nearrow$	$\nexists$	$\searrow$

6. **Dada a função $g(x) = \frac{x-1}{x+2}$.**
   a) Indique o domínio de g
   b) Calcule os zeros de g
   c) Determine as equações das assimptotas de g
   d) Faça o estudo da variação da função e determine os extremos de g
   e) Esboce o gráfico de g
7. **Considere as funções $f(x) = \frac{4x}{x^2+1}$ e $g(x) = a^x$**
   a) Determine $(fog)(0)$
   b) Determine a inversa de g, caso exista
   c) Indique o domínio de f
   d) Determine os zeros da função de f
   e) Determine os intervalos de variação e os extremos de f
   f) Esboce o gráfico de f
   g) Estude a paridade de f

8. **Dada a função $f(x) = 2x^3 - 6x$**
   a) Determine os zeros da função
   b) Estude a variação da função e indique os extremos 3
   c) Esboce o gráfico de f
9. **Considere a função $f(x) = x^2(x+2)$.**
   a) Indique o domínio de f
   b) Determine os zeros da função
   c) Estude a variação e indique os extremos
   d) Esboce o gráfico de f
10. **Dadas as funções $f(x) = \frac{x}{4-x^2}$ e $g(x) = \frac{2x+1}{x}$**
    a) Determine o domínio de f e g
    b) Determine $(fog)(-1)$
    c) Determine as equações das assimptotas de f
    d) Determine os intervalos de variação da função
    e) Esboce o gráfico de f
    f) Estude a injectividade de f
11. **Dadas as funções $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$ e $g(x) = e^x + 1$**
    a) Indique o domínio de g
    b) Determine a expressão inversa de g
    c) Determine a expressão inversa de $(gof)(1)$
    d) Determine os zeros da função f
    e) Faça o estudo da variação e determine os extremos da função f
    f) Esboce o gráfico de f
12. **Seja $f(x) = 2x^3 + 2$.**
    a) Determine os pontos de intersecção do gráfico com os eixos
    b) Determine $f'(x)$
    c) Calcule as equações das tangentes nos pontos referidos na alínea a.
13. **Determine a equação da recta tangente ao gráfico, para o valor de x indicado:**
    a) $y = ln(x-3) \quad se\ x = 7$
    b) $y = e^{3x} \quad se\ x = \frac{1}{3}$
    c) $y = lnx^2 \quad se\ x = 2 \wedge x = -2$