Licenciatura em Engenharia Informática

Disciplina: Álgebra linear e geometria analítica

Matrizes

Introdução

Matrizes são organizações de informações numéricas em uma tabela rectangular formada por linhas e colunas.

A função das matrizes é relacionar dados numéricos. Por isso, o conceito de matriz não é só importante na Matemática, mas também em outras áreas já que as matrizes têm diversas aplicações.

Definição de matriz

Matriz é uma tabela organizada em linhas e colunas no formato *m* x *n*, onde *m* representa o número de linhas (horizontal) e *n* o número de colunas (vertical).

Representação de matrizes

As matrizes são sempre representadas por letras maiúsculas, que são acompanhadas por índices, nos quais o primeiro número indica a quantidade de linhas, e o segundo, o número de colunas.

$$A_{m \text{ x } n}$$

Coluna

Linha

A **quantidade de linhas** (filas horizontais) e **colunas** (filas verticais) de uma matriz determina sua **ordem.** A matriz A possui ordem m por n. As informações contidas em uma matriz são chamadas de **elementos** e ficam organizadas entre parênteses ou colchetes, veja os exemplos:

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 7 & -8 \\ -1 & 3 & 2 & -6 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 10 & 3 \end{bmatrix}$$

A matriz A possui duas linhas e quatro colunas, logo, sua ordem é dois por quatro → $A_{2x4.}$

A matriz B possui duas linhas e duas colunas, logo, sua ordem é dois por dois → $B_{2x2.}$

Elementos de uma matriz

Seja a matriz genérica **A** $_{\mathbf{m \times n}}$, isto é, **m** representa as linhas e **n** o número de colunas. Então, temos:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & .a_{14} & a_{15} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & .. & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{m4} & a_{m5} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Abreviadamente, A **=** $[a_{ij}]_{m \times n}$

Dessa forma, os elementos da matriz **A** são indicados por a_{ij}, onde o **i** e **j** representam, respectivamente a linha e a coluna que o elemento ocupa.

- $\mathbf{a_{11}}$ representa o elemento da **linha 1** e **coluna 1**.
- $\mathbf{a_{32}}$ representa o elemento da **linha 3** e **coluna 2**.
- $\mathbf{a_{22}}$ representa o elemento da **linha 2** e **coluna 2**.
- $\mathbf{a_{mn}}$ representa o elemento da **linha m** e **coluna n**

Exemplo:

Na matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

$\mathbf{a_{11}} = 1$ $\mathbf{a_{12}} = 4$ $\mathbf{a_{13}} = 0$

$\mathbf{a_{21}} = -2$ $\mathbf{a_{22}} = 4$ $\mathbf{a_{23}} = 3$

Exemplos:

1. Escreva a matriz **M =** $[a_{ij}]_{2 \times 3}$, tal que $\mathbf{a_{ij} = i + j}$.

Teremos uma matriz, com **2 linhas** e **3 colunas**. Os elementos da matriz são a soma dos índices (posição) das linhas e colunas. Assim os elementos são:

$\mathbf{a_{11} = 1 + 1 = 2}$ $\mathbf{a_{12} = 1 + 2 = 3}$ $\mathbf{a_{13} = 1 + 3 = 4}$

$\mathbf{a_{21} = 2 + 1 = 3}$ $\mathbf{a_{22} = 2 + 2 = 4}$ $\mathbf{a_{23} = 2 + 3 = 5}$

Então a matriz é: $M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \Rightarrow M = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

2. Construa a matriz A = [a_{ij}]$_{3\times3}$, tal que, $a_{ij} = \begin{cases} -\frac{1}{2}i^2 - 2 & se\ i = j \\ i.j + \frac{2}{3} & se\ \ i \neq j \end{cases}$

Teremos uma matriz, com **3 linhas** e **3 colunas**.

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ Vamos determinar os elementos

$$a_{11} = -\frac{1}{2}1 - 2 = -\frac{5}{2} \quad ; \quad a_{22} = -\frac{1}{2}4 - 2 = -4 \quad ; \quad a_{33} = -\frac{1}{2}9 - 2 = -\frac{13}{2}$$

$$a_{12} = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3} \quad ; \quad a_{13} = 3 + \frac{2}{3} = \frac{11}{3} \quad ; \quad a_{23} = 6 + \frac{2}{3} = \frac{20}{3}$$

$$a_{21} = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3} \quad ; \quad a_{31} = 3 + \frac{2}{3} = \frac{11}{3} \quad ; \quad a_{32} = 6 + \frac{2}{3} = \frac{20}{3}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{8}{3} & \frac{11}{3} \\ \frac{8}{3} & -4 & \frac{20}{3} \\ \frac{11}{3} & \frac{20}{3} & -\frac{13}{2} \end{bmatrix}$$

Matrizes especiais

1. **Matriz linha**, é a matriz do tipo 1 x *n*, ou seja com uma única linha

Por exemplo, $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

2. **Matriz coluna,** é a matriz do tipo m x 1, ou seja com uma única coluna

Por exemplo, $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

3. **Matriz nula,** é a matriz de elementos iguais a zero.

4. **Matriz quadrada, é** uma matriz do tipo *n* x *n*, ou seja, com mesmo numero de linhas e de colunas e diz-se, neste caso, que a matriz é de ordem *n*.

Por exemplo, $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ é matriz quadrada de ordem 2

Numa matriz quadrada, definimos duas diagonais

$$M_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Diagonal principal

Diagonal secundária

5. **Matriz identidade, é** uma matriz quadrada em que todos elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os demais elementos são iguais a zero.

Denota-se a matriz identidade por I $_n$

Por exemplo, $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6. **Matriz transposta**

É obtida com a troca ordenada das linhas e colunas de uma matriz conhecida.
Seja $A = (a_{ij})_{m\,x\,n}$. A matriz transposta de *A* que se denota A^t é a matriz do tipo $n x m$ tal que $A^t = (a_{ij})_{n\,x\,m}$

Por exemplo, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ a sua transposta é $B^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

7. **Matriz simétrica** é uma matriz quadrada de ordem *n* tal que **A = A^t** ou seja $a_{ij} = a_{ji}$

Por exemplo $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 4 \\ 6 & 4 & 8 \end{bmatrix}$ $\quad A^t = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 4 \\ 6 & 4 & 8 \end{bmatrix}$

É matriz simétrica, porque: $a_{12} = a_{21} = 5$; $a_{13} = a_{31} = 6$; $a_{23} = a_{32} = 4$

8. **Matriz anti-simétrica** é uma matriz quadrada de ordem n tal que **A = -A^t** ou seja $a_{ij} = -a_{ji}$

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -4 \\ -3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad -A^t = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -4 \\ -3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

É matriz anti-simétrica, porque: $a_{12} = -a_{21}$; $a_{13} = -a_{31}$; $a_{23} = -a_{32}$

9. **Matriz oposta:** É obtida com a troca de sinal dos elementos de uma matriz conhecida.

Por exemplo, $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ a matriz oposta é $-A = \begin{bmatrix} -2 & -6 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}$

A soma de uma matriz com a sua matriz oposta resulta em uma matriz nula.

10. Matrizes Idênticas

Duas matrizes $A = (a_{ij})_{m\ x\ n}$ e $B = (b_{ij})_{m\ x\ n}$ são idênticas se, e somente se, todos os elementos que ocupam a mesma posição são iguais.

Exemplo: Encontre os valores de a, b, x e y de modo que as matrizes

A= $\begin{pmatrix} a+b & x-y \\ 2b-3a & 2y-x \end{pmatrix}$ e B = $\begin{pmatrix} 12 & 3 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$ sejam idênticas

Resolução: $\begin{cases} a+b=12 \\ 2b-3a=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=9 \end{cases}$ e $\begin{cases} x-y=3 \\ 2y-x=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=8 \\ y=5 \end{cases}$

Exercícios:

1. Construa a matriz $A=(a_{ij})_{2x3}$, de modo que $a_{ij} = 3i^2 - j$
2. Determine a matriz $B=(b_{ij})_{3x3}$ tal que $b_{ij} = \begin{cases} -2, & se\ i>j \\ 1, & se\ i=j \\ 3, & se\ i<j \end{cases}$
3. Para que valor de *a*, a matriz $A=\begin{pmatrix} a & a^2-1 & -3 \\ a+1 & 2 & a^2+4 \\ -3 & 4a & -1 \end{pmatrix}$ é simétrica?
4. Sendo as matrizes $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 12 & -1 \end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix} x-y & x+y \\ 2y-5 & -1 \end{pmatrix}$, calcule *x* e *y* de modo que $A=B^t$.

Operações com matrizes

Adição de Matrizes

A adição de duas matrizes $A=(a_{ij})_{m\,x\,n}$ e $B=(b_{ij})_{m\,x\,n}$, é uma outra matriz $C=(c_{ij})_{m\,x\,n}$, definida por: $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$

Exemplo: Dadas as matrizes:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \text{ e } B=\begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix} \rightarrow \text{C}= A+B=\begin{bmatrix} 1+7 & 2+8 \\ 3+9 & 4+10 \\ 5+11 & 6+12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 12 & 14 \\ 16 & 18 \end{bmatrix}$$

Propriedades da adição de matrizes

Considerando **A**, **B** e **C** matrizes de mesma ordem e **N** uma matriz nula, caso as operações a seguir sejam possíveis, então temos:

- Comutativa: **A + B = B + A**
- Associativa: **(A + B) + C = A + (B + C)**
- Elemento neutro: **A + N = N + A = A**

- Elemento oposto: **A + (-A) = (-A) + A = N**
- $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^t = \mathbf{A}^t + \mathbf{B}^t$

Subtração de Matrizes

Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{m\,x\,n}$ e $B = (b_{ij})_{m\,x\,n}$, chama-se diferença entre essas matrizes a soma de A com a matriz oposta de B ou seja A - B = A + (- B)

Exemplo: Dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \text{C} = A - B = \begin{bmatrix} 1+2 & 2-4 \\ 5+3 & 3-5 \\ 4+1 & 6-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 8 & -2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Multiplicação de um número real por uma matriz

Seja $\mathbf{A}_{\mathbf{mxn}}$ uma matriz, e ***a*** um número real. O produto de ***a*** por **A** resulta em uma matriz $\mathbf{B}_{\mathbf{m\,xn}}$, de forma que multiplicamos o número real ***a*** por cada elemento de **A**.

Exemplo: $3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 0 \\ -9 & 12 \end{bmatrix}$

Multiplicação de matrizes

Para realizar a multiplicação, o **número de colunas da primeira matriz deve ser igual ao número de linhas da segunda**. A matriz produto (que vem da multiplicação) possui ordem dada pela quantidade de linhas da primeira e quantidade de colunas da segunda.

$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times r} = C_{m \times r}$$

Para efectuar a multiplicação entre as matrizes A e B, devemos multiplicar cada uma das linhas por todas as colunas da seguinte maneira: o primeiro elemento de A é multiplicado pelo primeiro elemento de B e, em seguida, somado ao segundo elemento de A e multiplicado pelo segundo elemento de B, e assim sucessivamente. Veja o exemplo:

Dadas as matrizes: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

Determine A.B

- 1ª linha e 1ª coluna

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{c_{11}}{\boxed{1 . (-1) + 2.4}} \\ \end{bmatrix}$$

- 1ª linha e 2ª coluna

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 . (-1) + 2.4 & \overset{c_{12}}{\boxed{1.3 + 2.2}} \\ & \end{bmatrix}$$

- 2ª linha e 1ª coluna

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 . (-1) + 2.4 & 1.3 + 2.2 \\ \underset{c_{21}}{\boxed{3.(-1) + 4.4}} & \end{bmatrix}$$

- 2ª linha e 2ª coluna

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 . (-1) + 2.4 & 1.3 + 2.2 \\ 3.(-1) + 4.4 & \underset{c_{22}}{\boxed{3.3 + 4.2}} \end{bmatrix}$$

$$A.B = \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 13 & 17 \end{bmatrix}.$$

Agora observe o que aconteceria se fosse feito o contrário, ou seja, multiplicar B por A:

Determine A.B

$$B.A = \begin{bmatrix} \boxed{-1 \quad 3} \\ \boxed{4 \quad 2} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix}1\\3\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}2\\4\end{matrix}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{(-1).1+3.3} & \boxed{(-1).2+3.4} \\ \boxed{4.1+2.3} & \boxed{4.2+2.4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 10 & 16 \end{bmatrix}$$

Portanto, $A.B \neq B.A$, ou seja, para a multiplicação de matrizes não vale a propriedade comutativa.

Vejamos outro exemplo com as matrizes A e B

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A.B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.1+3(-2) & 2.2+3.0 & 2.3+3.4 \\ 0.1+1(-2) & 0.2+1.0 & 0.3+1.4 \\ -1.1+4(-2) & -1.2+4.0 & -1.3+4.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 18 \\ -2 & 0 & 4 \\ -9 & -2 & 13 \end{bmatrix}$$

$$B.A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2+2.0+3(-1) & 1.3+2.1+3.4 \\ -2.2+0.0+4(-1) & -2.3+0.1+4.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 17 \\ -8 & 10 \end{bmatrix}$$

Exercícios:

1. Dada a funcao $f(x) = 2x^2 + x - 3I_3$, calcule f (A) se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. Dadas as matrizes: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

   Calcula A. B e B.A

Operações elementares sobre linhas de uma matriz

Definição: Uma **operação elementar sobre as linhas** de uma matriz é uma das seguintes operações:

(i) Permutar duas linhas da matriz.
Ex: $L_1 \leftrightarrow L_2$

(ii) Multiplicar uma linha por um escalar diferente de zero.

Ex: $L_1 \longleftarrow \alpha L_1$

(iii) Somar à uma linha, outra multiplicada por um escalar diferente de zero.
Ex: $L1 \longleftarrow L_{1+} \alpha L_2$

Exemplos: Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) Trocar linhas 1 e 2 $\rightarrow \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) Multiplicar linha 1 por $\frac{1}{2} \rightarrow \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) Multiplicar a linha 2 por -2 e somar a linha 3 $\rightarrow B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & -6 \end{pmatrix}$

A matriz A diz-se equivalente por linhas a matriz B

Definição: Diz-se que uma matriz está escalonada ou tem linhas em escada se:
i) As linhas nulas (caso existam) ocorrem depois das linhas não nulas.
ii) O primeiro elemento não nulo de cada linha (elemento pivô) situa-se numa coluna mais a esquerda que todos os pivôs das linha seguinte.

Definição: Uma matriz reduzida à forma de escadas por linhas diz-se na forma canónica se todos os elementos pivôs são unitários e todos elementos situados na coluna da linha pivô são nulos.

Exemplos: $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$ estão escalonadas

Definição: **Característica ou posto de uma matriz** com linhas em escadas

é igual ao número de linhas não nulas da matriz. Denota-se C (A) ou P (A).

Definição: Seja A uma matriz qualquer do tipo *m* x *n*.

A nulidade de A é a diferença entre o número de colunas da matriz A com a sua característica. C (A) - *n*

Exemplo 1: Reduza à forma de escadas por linhas e determine a característica e a nulidade da matriz: $M=\begin{pmatrix}0 & 0 & -2\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & -2\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}\xrightarrow[L_1\leftrightarrow L_3]{}\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ -1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}\xrightarrow[L_2\to L_2+L_1]{}\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3\to L_3+L_2]{}\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow[L_2\to \frac{1}{2}L_2]{}\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow[L_1\to L_1-3L_2]{}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

C (M) = 2 e nulidade: 3-2=1

Exercício: Reduza à forma de escadas por linhas e determine a característica e a nulidade da matriz: $M=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}$