Licenciatura em Engenharia Informática

Disciplina: Álgebra linear e geometria analítica

Sistemas de Equações Lineares

Definição: Chama-se sistema de m equações lineares a n incógnitas a todo o sistema de equações que, pela aplicação dos princípios de equivalência, é redutível a forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Onde a_{ij} são coeficientes do sistema, b_j são os termos independentes e x_i são as incógnitas.

O sistema pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2n} \\ \dots & .... & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{m4} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & | & b_2 \\ \dots & \dots & .. & \dots & \dots & | & .... \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & | & b_m \end{pmatrix}$$ É a matriz completa ou ampliada do sistema

Classificação de sistemas de equações

Discussão de um sistema de equações lineares

Discutir um sistema de equações lineares é averiguar em que casos tal sistema é possível ou impossível.

Teorema: Um sistema de m equações e n incógnitas admite solução (isto é, possível) se, somente se o posto da matriz ampliada é igual ao posto da matriz dos coeficientes.

Teorema: Se o posto da matriz ampliada é iguala o posto da matriz dos coeficientes e é igual ao número de incógnitas *n* então o sistema é possível e determinado.

Teorema: Se o posto da matriz ampliada é iguala o posto da matriz dos coeficientes e é menor ao número de incógnitas *n* então o sistema é possível e indeterminado.

Fazendo número de incógnitas menos o posto (n - p), determinamos o grau de indeterminação do sistema que indica o número das suas soluções independentes.

Teorema: Um sistema de m equações e n incógnitas não admite solução (isto é, impossível) se, somente se o posto da matriz ampliada é diferente ao posto da matriz dos coeficientes.

Exemplos:

1. Determine os valore de $\alpha \in$IR, para os quais o sistema $\begin{cases} x+2y-3z=4 \\ 3x-y+5z=2 \\ 4x+y+(\alpha^2-14)z=\alpha+2 \end{cases}$

a) Não tem solução.
b) Tem única solução.
c) Tem uma infinidade de soluções.

Resolução

1°Escrever a matriz ampliada e reduzi-la a forma de escadas por linhas.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & \alpha^2-14 & \alpha+2 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \to L_2 - 3L_1 \text{ e } L_3 \to L_3 - 4L_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & -7 & \alpha^2-2 & \alpha-14 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_3 \to L_3 - L_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & 0 & \alpha^2-16 & \alpha-4 \end{array}\right)$$

2° Discutir os valores de α

a) Não tem solução se P(a) $\neq$ P (c)

$$\begin{cases} \alpha^2 - 16 = 0 \\ \alpha - 4 \neq 0 \end{cases} \leftrightarrow \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \pm 4 \\ \alpha \neq 4 \end{cases} \Rightarrow \alpha = -4$$

b) Tem única solução se P(a) = P (c) = n =3

$$\alpha^2 - 16 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq \pm 4$$

c) Tem uma infinidade de soluções se P(a) = P (c) < n = 3

$$\begin{cases} \alpha^2 - 16 = 0 \\ \alpha - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \pm 4 \\ \alpha = 4 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 4$$

2. Determine os valores de k para os quais o sistema $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + kz = 3 \\ x + ky + 3z = 2 \end{cases}$

a) Não tem solução.

b) Tem única solução

c) Tem uma infinidade de soluções.

Resolução:

1°Escrever a matriz ampliada e reduzi-lo a forma de escadas por linhas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 2 & 3 & k & | & 2 \\ 1 & k & 3 & | & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 \to L_2 - 2L_1 \text{ e } L_3 \to L_3 - L_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & k+2 & | & 1 \\ 0 & k-1 & 4 & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_1 \to L_1 - L_2 \text{ e } L_3 \to L_3 - (k-1)L_2]{}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -k-3 & | & 0 \\ 0 & 1 & k+2 & | & 1 \\ 0 & 0 & -k^2 - k + 6 & | & 2-k \end{pmatrix}$$

2° Discutir os valores de *k*

a) Não tem solução se P(a) $\neq$ P (c)

$$\begin{cases} -k^2 - k + 6 = 0 \\ 2 - k \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = 2 \ \vee \ k_2 = -3 \\ k_2 \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow k = 3$$

b) Tem única solução se P(a) = P (c) = n =3

$$-k^2 - k + 6 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \ k \neq 2 \ \vee \ k \neq -3$$

c) Tem uma infinidade de soluções se P(a) = P (c) < n = 3

$$\begin{cases} -k^2 - k + 6 = 0 \\ 2 - k = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = 2 \ \vee \ k_2 = -3 \\ k_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow k = 2$$

Resolução de sistemas de equações lineares pelo método de Gauss

A Resolução de sistemas de equações lineares pelo método de Gauss, consiste no teorema:

Dois sistemas de equações lineares que possuem matrizes ampliadas equivalentes são equivalentes.

Para tal é necessário construir a matriz ampliada do sistema, reduzi-lo a forma canónica de escadas e discutir as condições de compatibilidade e incompatibilidade das equações do sistema.

Exemplos:

1) Resolve utilizando o método de Gauss o sistema:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 7 \\ x - 2y - 3z = -7 \\ x - y + z = 0 \\ 2x - y + 6z = 7 \end{cases}$$

A sua matriz ampliada é $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 7 \\ 1 & -2 & -3 & | & -7 \\ 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 2 & -1 & 6 & | & 7 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & | & 7\\ 1 & -2 & -3 & | & -7\\ 1 & -1 & 1 & | & 0\\ 2 & -1 & 6 & | & 7\end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2\to L_2-L_1\\ L_3\to L_3-L_1\\ L_4\to L_4-2L_1}]{} \begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & | & 7\\ 0 & -3 & -5 & | & -14\\ 0 & -2 & -1 & | & -7\\ 0 & -3 & 2 & | & -7\end{pmatrix} \xrightarrow[L_2\to -(L_2-L_3)]{} \begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & | & 7\\ 0 & 1 & 4 & | & 7\\ 0 & -2 & -1 & | & -7\\ 0 & -3 & 2 & | & -7\end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_1\to L_1-L_2\\ L_3\to L_3+2L_2\\ L_4\to L_4+3L_2}]{}$$

$$\to \begin{pmatrix}1 & 0 & -2 & | & 0\\ 0 & 1 & 4 & | & 7\\ 0 & 0 & 7 & | & 7\\ 0 & 0 & 14 & | & 14\end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_3\to 1/7L_3\\ L_4\to 1/14L_4}]{} \begin{pmatrix}1 & 0 & -2 & | & 0\\ 0 & 1 & 4 & | & 7\\ 0 & 0 & 1 & | & 1\\ 0 & 0 & 1 & | & 1\end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_1\to L_1+2L_3\\ L_2\to L_2-4L_3\\ L_4\to L_4-L_3}]{} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & | & 2\\ 0 & 1 & 0 & | & 3\\ 0 & 0 & 1 & | & 1\\ 0 & 0 & 0 & | & 0\end{pmatrix}$$

P(a) = P (c) = 3= P = *n* Então o sistema é possível e determinado. Donde $\begin{cases} x = 2\\ y = 3\\ z = 1\end{cases}$

2) Utilizando o método de Gauss resolve o sistema: $\begin{cases} 2x-5y+3z-4s+2t=4\\ 3x-7y+2z-5s+4t=9\\ 5x-10y-5z-4s+7t=22\end{cases}$

$$\begin{pmatrix}2 & -5 & 3 & -4 & 2 & | & 4\\ 3 & -7 & 2 & -5 & 4 & | & 9\\ 5 & -10 & -5 & -4 & 7 & | & 22\end{pmatrix} \xrightarrow[L_2\to L_2-L_1]{} \begin{pmatrix}2 & -5 & 3 & -4 & 2 & | & 4\\ 1 & -2 & -1 & -1 & 2 & | & 5\\ 5 & -10 & -5 & -4 & 7 & | & 22\end{pmatrix} \xrightarrow{L1\leftrightarrow L2}$$

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & -1 & -1 & 2 & | & 5\\ 2 & -5 & 3 & -4 & 2 & | & 4\\ 5 & -10 & -5 & -4 & 7 & | & 22\end{pmatrix} \xrightarrow[L2\to -2L1+L2 \text{ e } L3\to -5L1+L3]{} \begin{pmatrix}1 & -2 & -1 & -1 & 2 & | & 5\\ 0 & -1 & 5 & -2 & -2 & | & -6\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & | & -3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L2\to -L2]{} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 & 2 & | & 5 \\ 0 & 1 & -5 & 2 & 2 & | & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & | & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[L1\to 2\,L2+L1]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -11 & 3 & 6 & | & 17 \\ 0 & 1 & -5 & 2 & 2 & | & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & | & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L1\to -3L3+L1 \text{ e } L2\to -2L3+L2]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -11 & 0 & 15 & | & 26 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & 8 & | & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & | & -3 \end{pmatrix}$$

O sistema dado é equivalente ao sistema $\begin{cases} x - 11z + 15t = 26 \\ y - 5z + 8t = 12 \\ s - 3t = -3 \end{cases}$

P(a) = P (c) = P = 3 < n   Então o sistema é possível e indeterminado.

Grau de indeterminação do sistema é n – p = 5-3 = 2 (tem duas incógnitas livres)

Fazendo $z = \alpha$ e $t = \beta$, vem:

$$\begin{cases} x - 11z + 15t = 26 \\ y - 5z + 8t = 12 \\ s - 3t = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 11\alpha + 15\beta = 26 \\ y - 5\alpha + 8\beta = 12 \\ s - 3\beta = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 26 + 11\alpha - 15\beta \\ y = 12 + 5\alpha - 8\beta \\ s = 3\beta - 3 \end{cases}$$

Solução: $(26 + 11\alpha - 15\beta, 12 + 5\alpha - 8\beta, \alpha, 3\beta - 3, \beta)$ onde α e $\beta \in IR$

3) Utiliza o método de Gauss e resolve o sistema: $\begin{cases} x + 2y - 3z + 4t = 2 \\ 2x + 5y - 2z + t = 1 \\ 5x + 12y - 7z + 6t = 7 \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & | & 2 \\ 2 & 5 & -2 & 1 & | & 1 \\ 5 & 12 & -7 & 6 & | & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow[L2\to -2L1+L2 \text{ e } L3\to -5L1+L3]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & | & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -7 & | & -3 \\ 0 & 2 & 8 & -14 & | & -3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[L1\to -2L2+L1 \text{ e } L3\to -2L2+L3]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -11 & 18 & | & 8 \\ 0 & 1 & 4 & -7 & | & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[L3\to 1/3\, L3]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -11 & 18 & | & 8 \\ 0 & 1 & 4 & -7 & | & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix}$$

$P(a)=3 \ e \ P(c)=2$ Então o sistema é impossível $P(a)\neq P(c)$

Sistemas Homogêneos

Definição: Um sistema é homogêneo quando todos os termos independentes das suas equações são nulos.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

(0,0,0, …, 0) é sempre solução de um sistema homogêneo e recebe o nome de solução trivial. Quando existem as demais soluções são chamadas não triviais. Por isso, um sistema homogêneo é sempre possível, podendo ser determinado (se admite somente a solução trivial) ou indeterminado (se admite outras soluções para além da trivial).

Exemplo: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ y=0 \\ 2x+2y+2z=0 \end{cases}$

Exemplo

Utiliza o método de Gauss e resolve o sistema: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} l_2 \to l_2 - l_1 \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 & -4 \\ 5 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} l_1 \leftrightarrow l_2 \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$l_2 \to l_2 - 2l_1 \;\; e \;\; l_3 \to l_3 - 5l_1 \;\; e \;\; l_4 \to l_4 - 2l_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & -4 \\ 0 & 7 & -7 & 9 \\ 0 & 16 & -16 & 22 \\ 0 & 5 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$l_3 \to \frac{1}{2} l_3 \quad e \quad l_4 \to \frac{1}{5} l_4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & -4 \\ 0 & 7 & -7 & 9 \\ 0 & 8 & -8 & 11 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$l_2 \leftrightarrow l_4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 8 & -8 & 11 \\ 0 & 7 & -7 & 9 \end{pmatrix}$$

$$l_1 \to l_1 + 3l_2 \;\; e \;\; l_3 \to l_3 - 8l_2 \;\; e \;\; l_4 \to l_4 - 7l_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$l_3 \to \frac{1}{3} l_3 \;\; e \;\; l_4 \to \frac{1}{2} l_4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$l_1 \to l_1 + l_3 \;\; e \;\; l_2 \to l_2 - l_3 \;\; e \;\; l_4 \to l_4 - l_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

P(a) = P (c) =3 < n = 4 Então o sistema é indeterminado, com grau de indeterminação

n – p = 4 – 3 = 1

Fazendo $x_3 = \alpha$, vem: $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \Leftrightarrow \{x_2 - \alpha = 0 \Leftrightarrow x_2 = \alpha \\ x_4 = 0 \end{cases}$ Solução: $(0, \alpha, \alpha, 0)$, $\alpha \in IR$

Ficha de exercícios

1. Dado o sistema $\begin{cases} 5x+5y=15 \\ 2x+4y+z=10 \\ 3x+4y=11 \end{cases}$

Escreva a matriz ampliada associada ao sistema, reduza-a à forma escada por linhas e determina a solução.

2. Resolva os sistemas seguintes achando as matrizes ampliadas linha reduzidas à forma escada e dando também seus postos, os postos das matrizes dos coeficientes:

a) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 - 3x_2 = 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ 3x + 2y + z = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_1 + 7x_2 - 7x_3 = 5 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -4 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \end{cases}$

3. Resolva os seguintes sistemas de equações lineares pelo método de Gauss:

a) $\begin{cases} 2x+y=7 \\ 3x-2y=0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x-y+3z=0 \\ 4x+2y-z=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x-y+z=3 \\ 4x+2y-2z=2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -x-2y+z=3 \\ 2x+3y-z=-2 \\ x-y+2z=9 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x-y+3z=8 \\ -x+2y+z=4 \\ 3x+y-4z=0 \end{cases}$

Solução a). $x=2, \quad y=3$; *b).* $x=-\frac{5}{8}\alpha$, $y=\frac{7}{4}\alpha$, $z=\alpha$ - *Arbitrário*; *e)* $x=2, \quad y=2, \quad z=2$.

4. Considere o sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2y - z = 3 \\ (2m-1)z = \frac{4}{5} \end{cases}$$

Para que valores de ***m*** o sistema:

a) É possível e determinado.
b) É impossível.

5. Determine os valores de *k*, de modo que o sistema $\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = 1 \end{cases}$ seja:

a) Compatível e determinado.

b) Incompatível

c) Compatível e indeterminado.

Solução: a) $k \neq 1$ e $k \neq -2$ b) $k = -2$ c) $k = 1$

6. Determine os valores de *k* para os quais o sistema $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + kz = 3 \\ x + ky + 3z = 2 \end{cases}$

a) Não tem solução.

b) Tem única solução

c) Tem uma infinidade de soluções.

Solução: a) $k = -3$ b) $k \neq 2$ ou $k \neq -3$ c) $k = 2$

7. Determine os valores de *k* para os quais o sistema $\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 3x - y + 5z = 2 \\ 4x + y + (k^2 - 14)z = k + 2 \end{cases}$

a) Seja impossível.

b) Seja possível indeterminado

c) Seja possível determinado.

Solução: a) $k = -4$ b) $k = 4$ c) $k \neq 4$ ou $k \neq -4$

8. Resolve o sistema: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

9. Determine $\beta \in IR$ de modo que o sistema $\begin{cases} \beta x + y - \beta z = 0 \\ -2y - 2z = 0 \\ x - y + \beta z = 0 \end{cases}$ admita somente a solução trivial.

FIM