Licenciatura em Engenharia Informática

Disciplina: Álgebra linear e geometria analítica

Determinante de uma Matriz

Toda matriz A quadrada, está associado um número ao qual damos o nome de determinante.

O determinante da matriz A é representado por det A ou |A|

→ Exemplo: Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ então $\det A = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$

Determinante de matriz de ordem 1

O determinante de uma matriz A que **possui só um elemento**, é dado pelo próprio elemento.

$$\textbf{Se } A = [a_{11}] \textbf{ então } \det A = a_{11}$$

→ Exemplo: Dada a matriz A = [-7] → det A = – 7

Determinante de matriz de ordem 2

O determinante de uma matriz de ordem 2 é calculado fazendo a <u>multiplicação</u> dos elementos da diagonal principal e <u>subtraindo</u> pela multiplicação dos elementos da diagonal secundária.

Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ então $\det A = a_{11} . a_{22} - a_{12} . a_{21}$

→ Exemplo: Calcule o determinante da matriz A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 2.(-5) - 5.(-2) = -10 + 10 = 0$$

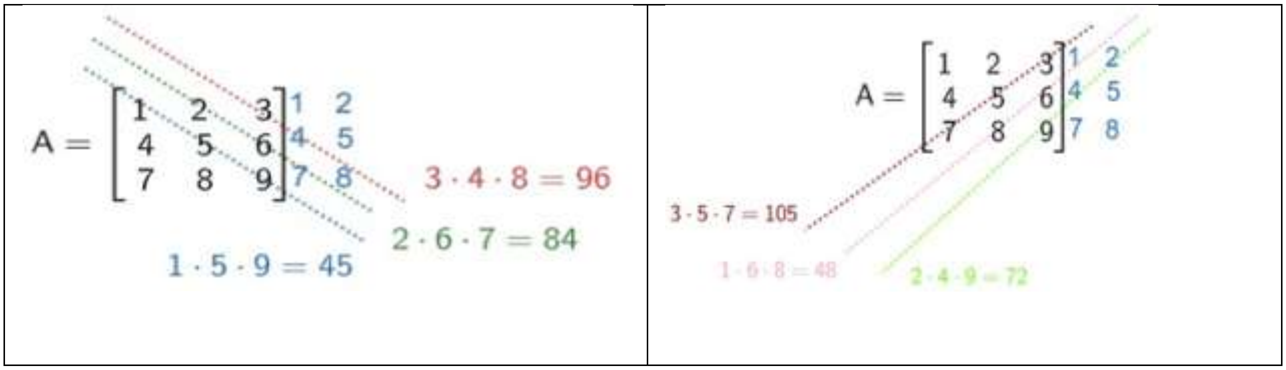
Determinante de matriz de ordem 3

O determinante de 3ª ordem é calculado utilizando a **Regra de Sarrus**

→ Exemplo 1: Calcule o determinante da matriz A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

.



Det A = 45 + 84 + 96 – 72 – 48 – 105= 225 – 225 = 0

Exemplo2: $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 16 - 3 + 15 - 18 - 2 + 20 = 28$

Determinante de ordem n≥3. Teorema de Laplace

Para o cálculo de determinantes quando a ordem é igual ou superior a 3, temos o **teorema de** Laplace,

O teorema de Laplace consiste em escolher uma das filas (linha ou coluna) da matriz e somar os produtos dos elementos dessa fila pelos seus respectivos cofatores.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (\textit{Vamos escolher a primeira coluna})$$

$$\textit{Então } \det A = a_{11}.A_{11} + a_{21}.A_{21} + a_{31}.A_{31} \quad (\textit{onde } A_{ij} \textit{ é o cofator do elemento } a_{ij})$$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}.D_{ij}$$

Exemplo1: Calcule o determinante da matriz C, utilizando o teorema de Laplace

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Vamos utilizar a primeira linha

Det C = $2.A_{11} + 2.A_{12}. + (-2).A_{13}$ (onde A_{11}, A_{12} e A_{13} são os co-factores)

Det C = $2\,(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + (-2)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$

Det C = $2(-2-2) - 2\,(1+1) - 2\,(2-2)$

Det C = $2(-4) - 2.2 - 2.0 = -8 - 4 = -12$

Exemplo2

Dada a matriz $C = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

Calcule o determinante da matriz C, utilizando o teorema de Laplace

Vamos utilizar a primeira coluna: $\det C = (-2)A_{11} + 0.\,A_{21} + 3.A_{31} + 1.A_{41}$

Precisamos encontrar os valores dos co-factores:

$A_{11} = (-1)^2\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -4 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 3$	$A_{31} = (-1)^4\begin{vmatrix} 3 & 1 & 7 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 13$	$A_{41} = (-1)^5\begin{vmatrix} 3 & 1 & 7 \\ -1 & 2 & 1 \\ -4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -9$

$$\det C = (-2)A_{11} + 0.\,A_{21} + 3.A_{31} + 1.A_{41}$$
$$\det C = (-2)\,3 + 0 + 3.13 + 1(-9)$$
$$\det C = -6 + 39 - 9 = 24$$

Exercícios

1. Calcule o determinante das seguintes matrizes:

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$

2. Utilize a regra de Sarrus e calcule o determinante da matriz: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

3. Utilize o teorema de Laplace e calcule o determinante da matriz: $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ -3 & 0 & 5 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

Matriz inversa

Definição: Seja A uma matriz quadrada do tipo *n* x *n*. a matriz B do tipo *n* x *n* diz se matriz inversa de A, sse AB = BA= I_n

Se uma matriz A de ordem *n* tem inversa então $\det A \neq 0$

Cálculo da matriz inversa com recurso a matriz adjunta

1°Calcular a Matriz de co-factores. É formada por todos os co-factores de uma matriz original.

2°Escrever a matriz adjunta que se obtém fazendo transposta da matriz dos co-factores de uma matriz original. Indicamos a matriz adjunta com um traço sobre a letra que indica a Matriz original.

3° Calcular a **matriz inversa** pela fórmula;

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \overline{M} \quad ; \quad \det(M) \neq 0$$

Exemplo1: Dada a matriz: $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$; $\det\ A = 2$

Vamos calcular os co-factores associados a matriz A

$$\tilde{a}_{11} = (-1).^{1+1} D_{11} \Rightarrow \tilde{a}_{11} = (-1)^2 \cdot |2| \Rightarrow \tilde{a}_{11} = 1.2 = \tilde{a}_{11} = 2$$

$$\tilde{a}_{12} = (-1).^{1+2} D_{12} \Rightarrow \tilde{a}_{12} = (-1)^3 \cdot |0| \Rightarrow \tilde{a}_{12} = (-1).0 = \tilde{a}_{12} = 0$$

$$\tilde{a}_{21} = (-1).^{2+1} D_{21} \Rightarrow \tilde{a}_{21} = (-1)^3 \cdot |5| \Rightarrow \tilde{a}_{21} = (-1).5 = \tilde{a}_{12} = -5$$

$$\tilde{a}_{22} = (-1).^{2+2} D_{22} \Rightarrow \tilde{a}_{22} = (-1)^4 \cdot |1| \Rightarrow \tilde{a}_{22} = 1.1 = \tilde{a}_{22} = 1$$

A matriz dos co-fatores é: $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ e a matriz adjunta de A é $\overline{A} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Então a matriz inversa de A é $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\overline{A} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -5/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$

Exemplo2: Se a matriz dos co-fatores de A for a matriz $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -6 \\ 2 & 7 & 5 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, então a matriz adjunta de A será: $\overline{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 0 \\ -6 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

Sabendo que det (A) = 3, calcular a matriz inversa de A é:

Assim, temos: $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 0 \\ -6 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & 1 \\ 1 & 7/3 & 0 \\ -2 & 5/3 & 0 \end{pmatrix}$

Exemplo3: Calcule, se existir, a matriz inversa da matriz $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

1°Calcular determinante de C

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det C = 2(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2(-1-0) = -2$$

2° Calcular a matriz dos co-factores de $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

$$C_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 7 \qquad C_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \qquad C_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -5$$

$$C_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -11 \qquad C_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5 \qquad C_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 7$$

$$C_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \qquad C_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \qquad C_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$\begin{pmatrix} 7 & 3 & -5 \\ -11 & -5 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ 3° Matriz adjunta de C é $\overline{C} = \begin{pmatrix} 7 & -11 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \\ -5 & 7 & -1 \end{pmatrix}$

4° Inversa da matriz da matriz C é

$$C^{-1} = \frac{1}{\det C}\overline{C} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 & -11 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \\ -5 & 7 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} & \frac{11}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{7}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Exercícios

1. Calcule, se existir, a matriz inversa das matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Determine os valores de x para que a matriz $A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix}$ tenha matriz inversa.

Cálculo da matriz inversa pelo método de Jordan

Dada uma matriz A de ordem n, I uma matriz identidade da mesma ordem e A^{-1} a matriz inversa da matriz A.

Formar a matriz (A | I).

O método de Jordan consiste em aplicar operações elementares nas linhas da matriz (A | I) para obter a matriz matriz $(I \mid A^{-1})$.

Exemplo1) Utilize o método de Jordan para calcular a inversa da matriz

$$A=\begin{bmatrix}1&3&3\\1&4&3\\1&3&4\end{bmatrix} \qquad \det A=\begin{bmatrix}1&3&3&|&1&3\\1&4&3&|&1&4\\1&3&4&|&1&3\end{bmatrix}=16+9+9-12-9-12=1$$

$$\begin{bmatrix}1&3&3\\1&4&3\\1&3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} l_2 \to l_2-l_1 \;\; e\; l_3 \to l_3-l_1 \begin{bmatrix}1&3&3\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix} \to l_1 \to l_1-3l_2$$

$$\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&-3&0\\-1&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix} l_1 \to l_1-3l_3 \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7&-3&-3\\-1&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}7&-3&-3\\-1&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$$

Exercícios: Utilize o método de Jordan para calcular a matriz inversa das matrizes:

a) $\begin{pmatrix}1&2&-3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&4&1\\-2&0&3\end{pmatrix}$ ***Sol*** ; ***a)*** $\begin{pmatrix}1&-2&7\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$; ***b)*** $\begin{pmatrix}-1&1/2&-1/2\\2/3&-1/12&1/4\\-2/3&1/3&0\end{pmatrix}$

Licenciatura em Engenharia Informática

Ficha de exercícios N°3

Determinante de uma matriz

1. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, Calcule

   a) Det A + det B b) det(A + B) ***<u>Solução</u>***: a) 1 b) 3

2. Calcule os seguintes determinantes aplicando a regra de Sarrus:

   a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & -2 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$ ***<u>Soluções</u>***: a) 4 b) 58 c)-27

3. Resolva a equação $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & x \\ -3 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 0$. ***<u>Solução</u>***: x = 4

4. Aplicando o teorema de Laplace, calcule o valor dos seguintes determinantes:

   a) $\begin{vmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 7 \\ 8 & 1 & 1 & 9 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

   <u>Soluções</u>: a) 18 b)85 c)20

5. Determine os valores de x para os quais

   $\begin{vmatrix} 2-x & 3 & 4 \\ 0 & 4-x & -5 \\ 1 & -1 & 3-x \end{vmatrix} = -17$; $\begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 0$; $\begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & x-1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$

6. Dada a matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ Calcule: a) $\boldsymbol{Adj\ A}$ b) $|\boldsymbol{A}|$ c) $\boldsymbol{A}^{-1}$

7. Dada a matriz A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ Calcule: a) Adj A b)Det A c) A^{-1}

8. Determine a inversa da matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

9. Para cada uma das matrizes seguintes, calcula a matriz inversa usando o método de Jordan.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

Sol ; a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} -1 & 1/2 & -1/2 \\ 2/3 & -1/12 & 1/4 \\ -2/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$; c) $\frac{-1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; d) $A^{-1}=\begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$