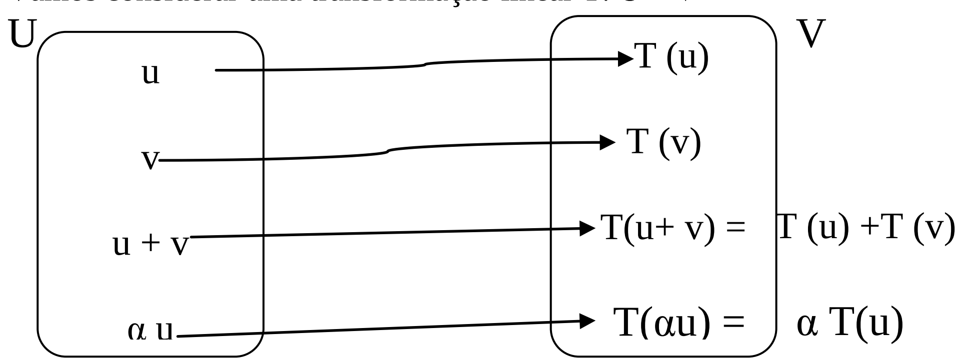
Instituto Superior de Ciências e Tecnologia de Moçambique
Licenciatura em Engenharia Informática
Disciplina: Álgebra linear e geometria analítica

Transformações lineares

Neste capítulo será estudado um tipo especial de função (ou aplicação), onde o domínio e o contradomínio são espaços vetoriais reais. Assim, tanto a variável dependente quanto a independente são vetores. O estudo será limitado ao estudo das funções vetoriais lineares, que serão denominadas de transformações lineares.

Diz-se que T é uma transformação do espaço vetorial U no espaço vetorial V, e escreve-se T: U→V

Vamos considerar uma transformação linear T: U→V



Definição:
Sejam U e V espaços vetoriais. Uma aplicação T: U→V é chamada transformação linear de U em V se:

i) $T(O)_U = T(O)_V$ (imagem de um vector nulo é um vector nulo)
ii) T (u+ v) = T (u) +T (v)
iii) T (αu) = α T (u)
para todo $u, v \in U$ e para todo $\alpha \in R$

Exemplo1) Seja T:$IR^2 \rightarrow IR^3$, tal que: **T(x, y)= (x, y, x + y)**

Se u = (1, 2) e v = (-2,3) e α = -3
T(1,2)=(1, 2,1+2)=(1,2,3) ; T(-2,3)=(-2,3,-2+3)=(-2,3,1) ; u + v = (-1,5)
T(u+v) = (-1,5,4)
T(u)+T(u) =(1,2,3)+(-2,3,1)=(-1,5,4) → T(u+v) = T(u)+T(u)
T(-3u)=T (-3,-6)=(-3,-6,-9)
-3T(u)=-3(1,2,3)=(-3,-6,-9) → T(-3u)= -3T(u)
T (0,0) =(0,0,0) a imagem dum vector nulo é um vector nulo.

Exercicio: Seja a transformação T: $IR^2 \rightarrow IR^3$, que associa vectores v =(x,y)$\in$ IR^2 com vetores u=(x,y,z)$\in$ R^3.

Dada a lei que define a transformação: **T(x,y)=(3x, -2y, x-y),** calcular:

a) $T(v_1)$ se $v_1=(2,1)$ **b)** $T(v_2)$ se $v_2=(-1,2)$ **c)** $T(\alpha v_3)$ se $v_3=(2,-1)$

Exemplo2:

Mostrar que a transformação T: $IR^2 \rightarrow IR^3$ definida por **T(x,y)=(3x, -2y, x-y)** é linear.

Demonstração: Sejam $u=(x_1, y_1)$e $v=(x_2 ,y_2)$ vetores genéricos de IR^2. Então:

i) T (0, 0) = (0, 0, 0)

ii) $T(u) = (3x_1,-2y_1, x_1-y_1)$ e $T(v) = (3x_2,-2y_2, x_2-y_2)$

$u + v=(x_1, y_1) +(x_2, y_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2)$

$T(u + v) =T(x_1+x_2, y_1+y_2) = [3(x_1+x_2),-2(y_1+y_2), (x_1+x_2) - (y_1+y_2)]$

$T(u + v) = (3x_1+3x_2, -2y_1-2y_2, x_1+x_2 - y_1-y_2)$

$\mathbf{T(u + v)=(3x_1 ,-2y_1, x_1-y_1) +(3x_2 , -2y_2, x_2-y_2)= T(u)+T(v)}$

iii) Para todo $u=(x_1, y_1)$ e α qualquer numero real

$T(\alpha u) =T(\alpha x_1, \alpha y_1)=(3\alpha x_1,-2 \alpha y_1 , \alpha x_1-\alpha y_1)$

$T(\alpha u) =\alpha (3 x_1,-2 y_1 , x_1- y_1)= \alpha T(u)$ c qd

Exemplo 3) Seja T: $IR^3 \rightarrow IR^3$ uma transformação linear tal que:
T (1,0,0) =(1,1,1); T(0,1,0)=(2,-1,1) e T(0,0,1)=(1,0,2).
Determine a lei que dá essa transformação T (x, y, z).

Seja v = (x, y, z) qualquer vector de IR^3
Podemos escrever esta base como combinação linear
(x, y, z) = a (1,0,0) +b (0,1,0) +c (0,0,1)
(x, y, z) = (a, 0, 0) + (0, b, 0) + (0, 0,c)
x = a ; y = b ; z = c
T(x, y, z) = x T (1, 0, 0) + y T (0, 1, 0) + z T (0, 0, 1)
T(x, y, z) = x (1, 1, 1) + y (2,-1, 1) + z (1, 0, 2)
T(x, y, z) = (x, x, x) + (2 y, - y, y) + (z, 0, 2z)
T(x, y, z) =(x+2y+z, x –y, x+y+2z)

Matriz de uma transformação linear

As transformações lineares podem ser representadas por matrizes. Se T é uma transformação linear de IR^n para IR^m e x um vector coluna com n entradas, então

$$T(x) = A\,x$$

Sendo A matriz de ordem m x n, chamada matriz de transformação linear.

Exemplo:

1) Seja $T: IR^2 \rightarrow IR^3$, definida por $T(x,y) = (2x - y, x - 2y, x + 2y)$. Determinar a matriz da transformação linear.

1°Passo:Soma $\begin{bmatrix} 2x - y \\ x - 2y \\ x + 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ x \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -y \\ -2y \\ 2y \end{bmatrix}$

2°Passo: Produto $x\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$; 3°Passo: Matriz $T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Porque: $T(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (2x - y, x - 2y, x + 2y)$

Outro método consiste em utilizar a base canónica de IR^2 {(1,0),(0,1)} que gera a imagem de T(x, y) = (2x- y, x-2y, x+2y).

$T(1,0) = (2,1,1)$
$T(0,1) = (-1,-2,2)$

Matriz $T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

2) Suponha que a matriz $A = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$ representa uma transformação linear $T: IR^2 \rightarrow IR^2$ em relação a base.

   a) Escreve a expressao analitica dessa transformação linear.

$$T(x,y) = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow T(x,y) = (-4x - 4y, 5x - 4y)$$

b) Calcula as imagens dos vectores $v_1 = (-8,-2)$ e $v_2 = (8,2)$

$$T(-8,-2) = (32+8,-40+8) = (40,-32)$$

$$T(8,2) = (-32-8\,,40-8) = (-40,32)$$

Ou

$$T(-8,-2) = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4(-8)-4(-2) \\ 5(-8)-4(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32+8 \\ -40+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ -32 \end{bmatrix}$$

Exercícios:

1. Seja T: $IR^3 \rightarrow IR^3$ uma transformação linear que é representada pela matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Qual é a imagem do vector (-1, 0,1) pela transformação T?

A. (0,0,0) B.(0,1,1) C.(1,0,1) D.(1,2,3)

2. Seja $T: R^3 \rightarrow R^2$ uma transformação linear tal que T (1,0,0) = (1,0), T (0, 1,0) = (1,1) e T(0,0,1)=(1,-1). Determine a expressão geral da transformação linear T (*x*, *y*, *z*).

3.Seja $T: R^2 \rightarrow R^2$ uma transformação linear tal que T (1,2) = (2,3) e T (0, 1) = (1,4). Determine a expressão geral da transformação linear T (*x*, *y*).