Instituto Superior de Ciências e Tecnologia de Moçambique

Licenciatura em Engenharia Informática

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Tema: Vectores

Um **espaço vetorial** é um conjunto de vetores que é definido como segue:

Definição: Um espaço vetorial consiste de:

- *um conjunto não vazio;*
- *uma soma, tal que* $u, v \in V \Rightarrow u + v \in V$*;*
- *uma multiplicação por um escalar real, tal que* $\alpha \in \mathbb{R}, u \in V \Rightarrow \alpha u \in V$.

Grandezas escalares e vectoriais.

-Grandeza escalar: é aquela que só tem módulo ou valor numérico.
- Grandeza vectorial: é aquela que, necessita além do módulo, direcção e sentido.
Uma grandeza vectorial é representada por um vector

Definição de vector

Considere o segmento orientado AB na figura abaixo.

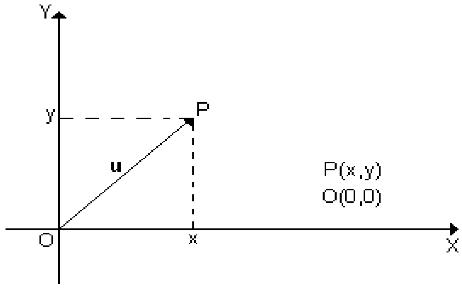
Observe que o segmento orientado AB é caracterizado por três aspectos bem definidos:

• Comprimento (denominado **módulo**)
• direcção
• sentido (de A para B)

Chama-se **vector** AB ao conjunto infinito de todos os segmentos orientados equipolentes a AB, ou seja, o conjunto infinito de todos os segmentos orientados que possuem o mesmo comprimento, a mesma direcção e o mesmo sentido de AB.

Um vector pode ser representado, por um par de pontos no IR^2

Considere o vector $\vec{u}$, representado no plano cartesiano Oxy, conforme figura abaixo:



$$\vec{u} = \vec{OP} = P - O = (x, y) - (0,0) = (x - 0, y - 0) = (x, y)$$

Portanto, $\vec{u} = (x, y)$ ou $\vec{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

O **módulo do vector** $\vec{u}$ sendo a distância do ponto P à origem O, será dado por:

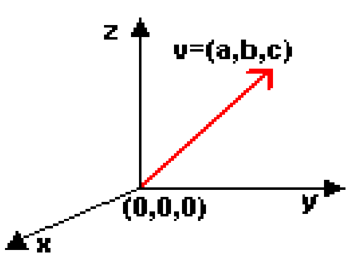
$$\left|\vec{u}\right| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Exemplo: Dados os pontos: A (4, -1) e B (-1,2). Determine as coordenadas do vector $\vec{AB}$

$$\vec{AB} = B - A = (-1,2) - (4,-1) = (-1 - 4, 2 + 1) = (-5, 3)$$

O módulo ou o comprimento do vector $\vec{AB} = \sqrt{(-5)^2 + 3^2} = \sqrt{34}$

No caso de IR^3 um vector definido pelo ponto P (x, y, z) é representado por um trio ordenado de números reais.



Portanto, $\vec{u} = (x, y, z)$ ou $\vec{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

Neste caso, o módulo do vector $\vec{u}$ será: $\left|\vec{u}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Exemplo: Se um vector $\vec{u}$ tem origem em A= (1, 2 -3) e extremidade em B = (0, -1, -2).

As coordenadas são: $\vec{u}$ = B-A= (0, -1, -2) - (1,2, -3) = (-1, -3,1)

O comprimento ou módulo do vector $\vec{u}$ é $\left|\vec{u}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{11}$

Operações com vectores

Soma de vectores

Se v =(v_1,v_2,v_3) e w =(w_1,w_2,w_3), a soma de v e w é obtida somando as coordenadas de cada vector:

v + w = (v_1+w_1, v_2+w_2, v_3+w_3)

Propriedades da soma de vectores

1. Para quaisquer vectores u e v de R^3, a soma u + v está em R^3.
2. **Comutativa**: Para todos os vectores u e v de R^3: v + w = w + v.
3. **Associativa**: Para todos os vectores u, v e w de R^3: u +(v + w) = (u + v) + w.
4. **Elemento neutro**: Existe um vector Ø=(0,0,0) (nulo) em R^3 tal que para todo vector u de R^3, se tem: Ø+u = u.
5. **Elemento oposto**: Para cada vector v de R^3, existe um vector -v em R^3 tal que: v +(-v) = Ø.

Diferença de vectores

Se v =(v_1,v_2,v_3) e w =(w_1,w_2,w_3), definimos a diferença entre v e w, por:

v - w = (v_1 - w_1, v_2 - w_2, v_3 - w_3)

Exercício: Dados v =(1,3,4) e w =(1,8,12), calcular os vectores v + w e v –w

$$v + w = (1,3,4) + (1,8,12) = (2,11,16)$$
$$v - w = (1,3,4) - (1,8,12) = (0,-5,-8)$$

Produto de vector por escalar

Se v =(a, b, c) e k um número real, definimos a multiplicação de k por v, como:

k .v = (k a, k b, k c)

Exemplo: $-\frac{2}{3}(-1, 0, 3) = \left(\frac{2}{3}, 0, -2\right)$

Dois vectores dizem-se iguais, se eles são de mesma dimensão e todas as coordenadas respectivamente são iguais.

Por exemplo:

Quais os valores de *x* e *y* para que os vectores $v = (2, x, -1)$ e $u = (y, 5, -1)$ sejam iguais?

Resposta: $v = u$ se $x = 5$ e $y = 2$

Nota: Existe um importante conjunto de vectores em R^3.

i = (1,0,0) ; j = (0,1,0); k = (0,0,1) são chamados vectores unitários

Estes três vectores formam a base canónica para o espaço R^3, o que significa que todo vector no espaço R^3 pode ser escrito como combinação linear dos vectores

i, j e k, isto é, se v = (a, b, c), então: v = (a, b, c) = a i + b j + c k

Combinação Linear de Vectores

Sejam $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vectores de um espaço vectorial V.

Definição: O vector *v* é uma Combinação linear dos vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ se existirem os números reais $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tal que:

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots\ldots + a_n v_n$$

Por exemplo: 1. O vector (1,1,1) pode ser escrito de outra forma:

(1,1,1) = 1(1,0,0) +1 (0,1,0) +1 (0,0,1)
O que fizemos foi escrever o vector (1,1,1) como combinação linear do conjunto de vectores { (1,0,0), (0,1,0) , (0,0,1)}

2. Dados os vectores: $u=\begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix}$, $v=\begin{bmatrix}3\\1\\4\end{bmatrix}$ $e\, b=\begin{bmatrix}1\\5\\4\end{bmatrix}$ verificar se o vector *b* é combinação linear dos vectores *u* e *v*. Caso sim represente *b* como combinação linear de *u* e *v*.

$$b=a_1u+a_2v \iff a_1\begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix}+a_2\begin{bmatrix}3\\1\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\5\\4\end{bmatrix}\iff\begin{bmatrix}-a_1\\2a_1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3a_2\\a_2\\4a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\5\\4\end{bmatrix}\iff\begin{cases}-a_1+3a_2=1\\2a_1+a_2=5\\4a_2=4\end{cases}$$

$a_2=1\ e\ a_1=2$ É uma combinação linear. Então $b=2u+v$

Produto escalar ou interno

O produto escalar de dois vectores quaisquer v e w é representado da seguinte forma **v. w**

Dados os vectores v = (v_1,v_2,v_3) e w = (w_1,w_2,w_3), definimos o produto escalar ou produto interno entre v e w, como o escalar real.

$$v\,.w = v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3$$

Exemplos: 1) O produto interno entre v = (1,2,5) e w = (2, -7,12) é:

$v\,.w$ = 1.2 + 2.(-7) + 5.12 = 48

2) O produto interno entre v =(2,5,8) e w =(-5,2,0) é:

$v\,.\,w$ = 2.(-5) + 5.2 + 8.0 = 0

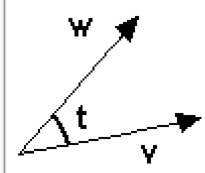
Exercícios:

1. Calcule o módulo do vector $v=(2,6,3)$
2. Dado que $v=(2,y,1)$ e $|v|=3$, calcule o valor de y
3. Determine a_1 e a_2 tais que $w=a_1u+a_2v$, sendo $u=(1,2)$, $v=(4,-2)\ e\ w=(-1,8)$
4. Escreva o vector $v=1,-8,-1)$ como combinação linear dos vectores $v_1=(3,-2,1)\ e\ v_2=(4,1,5)$
5. Determine o produto interno entre os vectores $v=(1,0,1)\ e\ u=(2,1,0)$
6. Dados os vectores $u=(4,\alpha,-1)\ e\ v=(\alpha,2,3)$ e os pontos A (4, -1,2) e B (3,2, -1), determine o valor de α tal que $u\,.\,(v+\overrightarrow{AB})=5$

Ângulo entre dois vectores (Produto Escalar)

Se for dado o ângulo entre os dois vectores, o produto escalar entre os vectores v e w pode ser escrito na forma:

v .w = |v| |w| cos (t) então $\cos(t) = \dfrac{v\,.\,w}{|v|\,|w|}$ onde t é o ângulo formado pelos vectores v e w



Vectores paralelos

Dois vectores *v* e *w* são paralelos se existe uma constante real $k \neq 0$ tal que $v = k\,w$

Exemplo: $v = (3, 2, -1)$ é paralelo ao vector $w = (6, 4, -2)$ porque existe $k = 2$ tal que $w = k\ v$

Vectores ortogonais

Dois vectores v e w são ortogonais se o produto escalar entre ambos é nulo, isto é, **v .w = 0**

Exemplo: Dados os vectores $u = (1, -2, 2)$ e $w = (4, m, -5)$

Calcule o valor de *m* para que os vectores sejam ortogonais

$u\,.\,v = 0 \Leftrightarrow (1,-2,2)\,.\,(4, m, -5) = 0 \Leftrightarrow 4 - 2m - 10 = 0 \Leftrightarrow m = -3$

Multiplicação de um vector por uma matriz

Seja $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ uma matriz de ordem *m* x *n* e *v* um vector $v = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$ de dimensão *n* x 1. O produto da matriz A por *v* e uma matriz *m* x 1

$$A.v = [v_1 a_1 + v_2 a_2 + \ldots\ldots + v_n a_n]$$

Exemplo: Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ e o vector $v = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

Determine o produto da matriz *A* pelo vector *v*

$$A.v = (-1)\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix}4\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3\\-2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}12\\-3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}11\\-5\end{bmatrix}$$

Ou podemos fazer a multiplicação de matrizes

$$A.v = \begin{bmatrix}3 & 1 & 4\\2 & 0 & -1\end{bmatrix} . \begin{bmatrix}-1\\2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3+2+12\\-2+0-3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}11\\-5\end{bmatrix}$$

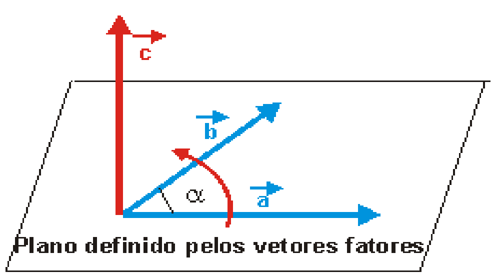
Exercícios

1. Dados os vectores u = (1 ,0,1) e **v** = (2,1,0) determine:
   a) o vector soma **u** + **v**
   b) o módulo do vector **u** + **v**
   c) o vector diferença **u** – **v**
   d) o vector 3 **u** – 2 **v**
   e) o produto interno **u . v**

2. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix}2 & -3 & 1\\4 & 1 & 5\\7 & 0 & -2\end{bmatrix}$ e o vector $v = \begin{bmatrix}-1\\2\\3\end{bmatrix}$ Determine o produto da matriz *A* pelo vector *v*

Produto vectorial de dois vectores

Considere dois vectores **a** e **b.** O produto vectorial destes vectores é um vector **c** perpendicular aos vectores a e b.



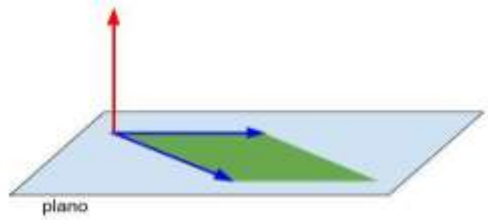
O vector *c* é perpendicular ao plano que contem os vectores a e b.

O produto vectorial **c** dos vectores **a** e **b** é representado por **c = a** x **b**

A definição nos permite concluir que tocada a ordem dos factores ocorrerá uma inversão no sentido do vector produto **a** x **b = – (b** x **a)**

Interpretação geométrica do módulo do produto vectorial de dois vectores

Vamos observar um exemplo, partindo de dois vectores, que resultam no seu produto vectorial



Note que é possível formar um paralelogramo tendo como base os dois vectores iniciais. O módulo do produto vectorial dá-nos a área do paralelogramo cujos lados são representados pelos vectores.

$|a\,x\,b|$ Área do paralelogramo

Como calcular o produto vectorial de dois vectores?

Considere os vectores $u = (x_1, y_1, z_1)\ e\ \ v = (x_2, y_2, z_2)$

O produto vectorial entre eles indicado por *u* x *v*

Montar e calcular o determinante. Na primeira linha colocar os vectores da base cartesiana i, j e k os vectores unitários nas direcções x, y e z, respectivamente.

A segunda e a terceira linha são as componentes dos vectores *u* e *v*, sendo que eles têm que estar na ordem.

$u\,x\,v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$ Onde *i* = (1,0,0); *j* = (0,1,0); k = (0,0,1) são vectores unitários

Exemplo: Dados os vectores $u = (1,1,2)\ e\ \ v = (3,-1,0)$

Calcule o produto vectorial *u* x *v* e *v* x *u*

$$u \ x \ v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = i(0+2) - j(0-6) + k(-1-3)$$

$$= (1,0,0)(2) - (0,1,0)(-6) + (0,0,1)(-4)$$

$$= (2,0,0) - (0,-6,0) + (0,0,-4) = (2,6,-4)$$

$$v \ x \ u = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = i(-2-0) - j(6-0) + k(3+1) =$$

$$= (-2,0,0) - (0,-6,0) + (0,0,4) = (-2,-6,4)$$

Produto misto

Dados os vectores $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$, definimos o produto misto entre *u*, *v* e *w*, denotado por [*u*, *v*, *w*] ou por u. (*v* × *w*), como o número real obtido a partir do determinante.

$$[u, v, w] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Aplicações do Produto Misto

O módulo do produto misto entre *u*, *v* e *w* representa o volume do paralelepípedo que tem as 3 arestas os vectores *u*, *v* e *w*, sendo que estes vectores têm a mesma origem.

Isto é, V (paralelepípedo) = $\left| [u, v, w] \right|$

Exemplo:

Calcule o produto misto dos vectores: $a = (1, 9, -2)$, $b = (2, 3, -1)$, $c = (2, -1, -1)$

$$[a, b, c] = \begin{vmatrix} 1 & 9 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 18 + 4 + 12 - 1 + 18 = 12$$

DEPENDÊNCIA E INDEPENDÊNCIA LINEAR

Seja V um espaço vectorial e os vectores $v_1, v_2, ..., v_n$ elementos de V

Os vectores $v_1, v_2, ..., v_n$ são **linearmente independentes (LI)** se a equação
$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = 0$ (1)

Admite apenas a solução trivial $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$

Se a equação (1) admitir soluções distintas da trivial, isto é, algum $\alpha \neq 0$,

então os vectores $v_1, v_2, ..., v_n$ **são linearmente dependentes (LD)**.

Notas:

-Um conjunto de vectores é linearmente dependente se um deles for uma combinação linear dos demais.

-dois vectores paralelos são linearmente dependentes.

Exemplo1: O conjunto {(1,1,1), (0,1,0) }é LI ou LD?

Aplicando a definição:

$$\alpha_1(1,1,1) + \alpha_2(0,1,0) = (0,0,0)$$
$$(\alpha_1, \alpha_1, \alpha_1) + (0, \alpha_2, 0) = (0,0,0)$$
$$(\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1) = 0$$
$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \end{cases}$$

Os vectores são LI, pois os coeficientes são todos nulos

Exemplo2: Mostre que os vectores $u = (1,1,1)$, $v = (1,1,0)$ e $w = (1,0,0)$ de IR^3 são linearmente Independentes.

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 (1,1,1) + \alpha_2 (1,1,0) + \alpha_3 (1,0,0) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$$ Então os vectores são LI

Exemplo 3: Verifique se o conjunto $\{(2,1,3)\ ,\ (3,1,2)\ (5,2,5)\}$é LI ou LD

$$x_1(2,1,3)+x_2(3,1,2)+x_3(5,2,5)=(0,0,0)$$

$$\begin{cases}2x_1+3x_2+5x_3=0\\ x_1+x_2+2x_3=0\\ 3x_1+2x_2+5x_3=0\end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix}2&3&5\\1&1&2\\3&2&5\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1&1&2\\2&3&5\\3&2&5\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&-1&-1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}P(a)=2\\ P(c)=2\\ n=3\end{cases}$$ O sistema é indeterminado tem mais que uma solução.

Então os vectores são LD.

Exemplo 4: Determine o valor de *h* para que os vectores $\{(1,3,-3)\ ,\ (-2,-4,1)\ (-1,1,h)\}$ sejam LD.

$$x_1(1,3,-3)+x_2(-2,-4,1)+x_3(-1,1,h)=(0,0,0)$$

$$\begin{cases}x_1-2x_2-x_3=0\\ 3x_1-4x_2+x_3=0\\ -3x_1+x_2+h\,x_3=0\end{cases}$$

$$\begin{bmatrix}1&-2&-1\\3&-4&1\\-3&1&h\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1&-2&-1\\0&2&4\\0&-5&h-3\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&2\\0&0&h+7\end{bmatrix}$$

Para ter infinitas soluções ou seja ser LD $\begin{array}{l}P(a)=P(c)<3\\ h+7=0 \quad \Leftrightarrow \quad h=-7\end{array}$

Exercícios:

1. Verifique se os vectores são LI ou LD.

a) $v_1=(1,-1,2)$, $v_2=(2,0,3)$ e $v_3=(0,-2,1)$

b) $v_1=(0,1,2)$, $v_2=(1,2,3)$ e $v_3=(1,3,0)$

c) $v_1=(1,2,3)$ e $v_2=(-2,-4,-6)$

Distância entre dois vectores

A distância entre dois vectores *u* e *v* é obtida pelo módulo da diferença dos vectores

$$d(u,v) = |\,u - v\,| = \sqrt{(u_1 - v_1,\, u_2 - v_2)}$$

Exemplo1: Calcule a distância entre os vectores

$u = (7,3) \;\; e \; v = (1,-5)$

1° Passo: diferença entre os dois vectores

$$u - v = (7,3) - (1,-5) = (7-1\,,\; 3+5) = (6,\, 8)$$

2 ° Passo: Modulo ou norma da diferença

$$d(u,v) = |\,u - v\,| = |\;(6\,,\,8)\;| = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$$

Exemplo 2. Calcular a distancia entre os vectores

$u = (3,-5,4) \; e \; v = (6,2,-1)$

1° Passo: diferença entre os dois vectores

$$u - v = (3,-5,4) - (6,\,2,-1) = (3-6,-5-2,\,4+1) = (-3,-7,\,5)$$

2 ° Passo: modulo ou norma da diferença

$$d(u,v) = |\,u - v\,| = \sqrt{9+49+25} = \sqrt{83}$$

Exercícios

1. Dados os vectores $u = (-2, 3,\, 8)$, $v = (0,\; 2,\, -1)$ e $w = (1, -2, 1)$

Calcule o produto escalar definido pelos vectores *u* e *v*.

a) Calcule o vector *k* perpendicular aos vectores *u* e *v*.
b) Calcule o produto misto definido pelos vectores *u*, *v* e *w*.
c) Prove que os vectores *u* e *w* são ortogonais.

2. Calcule a área do paralelogramo cujos lados são definidos pelos vectores $a = (-1,-2,1) \; e \; b = (-3, 0, 3)$

Instituto Superior de Ciências e Tecnologia de Moçambique
Licenciatura em Engenharia Informática
Álgebra Linear e Geometria Analítica - Ficha 4

Vectores

1. Dados 5 pontos no espaço R^3: A (4,1,3), B (1, -1,2), C (-7,2,0), D (4, -1,3) e E (5,0, -3). Ache as coordenadas dos vectores: $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{BE}$ e $\vec{DA}$.

2. Determine as coordenadas da extremidade do vector $\vec{AB} = (3,0,-1)$, se a sua origem é A (1,2, -3).

3. Determine as coordenadas da origem do vector $\vec{MN} = (0,-3,2)$, se a sua extremidade é N (1, -1,2).

4. Escreva os sistemas equivalentes as equações vectoriais seguintes:

$$a)\ x_1\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad b)\ x_1\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix} -1 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

5. Escreva as equações vectoriais equivalentes aos sistemas seguintes:

$$a)\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 5 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \\ x_2 - x_3 = 4 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} x_1 - 6x_2 = 5 \\ x_2 - 4x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + 6x_2 + x_3 + 5x_4 = 3 \\ -x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

6. Escreva o vector $\vec{v} = (-3,2)$ como combinação linear dos vectores $\vec{i} = (1,0)$ e $\vec{j} = (0,1)$.

7. Escreva o vector $\vec{v} = (1,3,-2)$ como combinação linear dos vectores $\vec{i} = (1,0,0)$ e $\vec{j} = (0,1,0)$ e $\vec{k} = (0,0,1)$.

8. Dados os vectores $\vec{v_1} = (2,-1,2)$, $\vec{v_2} = (0,3,-2)$ e $\vec{v_3} = (4,2,0)$

a) Escreva, se possível o vector $\vec{v} = (2,5,-2)$ como combinação linear dos vectores $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$

b) Determine o valor de m para que o vector $\vec{u} = (6,0,m)$ seja combinação linear dos vectores $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$.

c) Escreva, se possível o vector $\vec{v_1}$ como combinação linear dos vectores $\vec{v_2}$ e $\vec{v_3}$.

9. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ e o vector $v = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}$ Determine o produto Av.

10. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ e o vector $v = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$ Determine o produto Av.

11. Dado o conjunto: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 12 \end{bmatrix}; v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}; v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}; v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$

Resolve as equações: a) $A \,.\, X = v_1$ b) $A \,.\, X = v_2$ c) $A \,.\, X = v_3$

12. Determine os valores de h para que os vectores seguintes sejam linearmente dependentes:

$a) \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ h \end{bmatrix}$ $b) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ h \end{bmatrix}$

13. Prove que são linearmente dependentes os seguintes vectores:

a) $v_1 = (2,3)\ e\ v_2(-4,-6)$ b) $v_1 = (1,0)$, $v_2(0,1)\ e\ v_3 = (7,4)$

14. Prove que são linearmente independentes os seguintes vectores:

a) $v_1 = (1,2)\ e\ v_2(-1,3)$ b) $v_1 = (6,2,3)\ e\ v_2(0,5,3)$

15. Calcule o produto interno dos seguintes vectores:

a) (-2,1) e (-1,5) b) (3,-1,0) e (2,1,-2) c) (1,2,3) e (2,-1,1)

16.Calcule modulo dos vectores seguintes:

a) (2, -3,4) b) (2,1,-2) c) (1,-2,2,0).

17. Calcule k tal que d ($\vec{u}$, $\vec{v}$) = 6,com $\vec{u} = (2, k, 1, -4)$ e $\vec{v} = (3, -1, 6, -3)$

18. Determine k tal que $\left|\vec{u}\right| = \sqrt{39}$, onde $\vec{u} = (1, k, -2, 5)$.

19. Dados os vectores $\vec{a} = (3, -1, -2)$ e $\vec{b} = (1, 2, -1)$. Ache os vectores:

a) $\vec{a} \times \vec{b}$ b) $(2\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{b}$ c) $(2\vec{a} - \vec{b}) \times (2\vec{a} + \vec{b})$

20. Dados os vectores $\vec{a} = (1, -1, 3)$, $\vec{b} = (-2, 2, 1)$ e $\vec{c} = (3, -2, 5)$. Calcule $\vec{a}\,(\vec{b} \times \vec{c})$.

21.Calcule o volume do paralelepípedo definido por $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (1, 0, -2)$ e $\vec{c} = (2, -1, 1)$

22. Determine o vector ortogonal aos vectores $\vec{v}_1 = (1, -1, 0)$, $\vec{v}_2 = (1, 0, 1)$

23. Verifique se são LI ou LD os seguintes conjuntos de vectores:

S_1 ={(1,2,1),(1,4,2),(2,4,2)} S_2={(1,4,2),(2,4,2),(2,6,3)} S_3={(1,2,1)(1,4,2),(2,6,3)}

24. Considere em IR^3 os conjuntos de vectores:

S_1 ={(1,2,1),(1,4,2),(2,4,2)} S_2={(1,4,2),(2,4,2),(2,6,3)} S_3={(1,2,1)(1,4,2),(2,6,3)}

Qual é a afirmação verdadeira?

A. S_1 e S_2 são linearmente independentes;
B. S_1 e S_3 são linearmente independentes;
C. S_1 é linearmente independente e S_3 é linearmente dependente;
D. S_2 e S_3 são linearmente dependentes;

25. Qual das matrizes seguintes é tal que o conjunto das suas linhas é linearmente independente em IR^3?

A. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}$ B. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ C. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ D. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$