Thanh Son Trinh

Đại số tuyến tính tính toán

02/2023

Phân tích Markov và Ứng dụng

Phân tích Markov là một kỹ thuật ước tính xác suất các sự kiện xảy ra trong tương lai bằng việc phân tích xác suất đã biết trong hiện tại. Kỹ thuật này được ứng dụng rất rộng rãi trong quản trị kinh doanh, kết toán, marketing, kỹ thuật... bao gồm việc phân tích sự thay đổi thị phần, dự báo các khoản nợ khó đòi và xác định tình trạng hỏng hóc của máy móc thiết bị trong tương lai. Những phân tích Markov hỗ trợ cho những nhà quản trị đưa ra những quyết định có cơ sở khoa học và có hiệu quả.

1 Xích Markov

Ví dụ 1. Xét một hệ thống vật lí tiến triển theo thời gian. Tại thời điểm $t = 0$, hệ thống có thể rơi vào một trong ba trạng thái (hay vị trí) 1, 2 hoặc 3 một cách ngẫu nhiên. Kí hiệu $X(0)$ là vị trí của hệ thống tại thời điểm $t = 0$, thì $X(0)$ là một biến ngẫu nhiên, có thể nhận các giá trị 1 hoặc 2 hoặc 3 với các xác suất nhất định. Căn cứ vào các kết quả quan sát hay nghiên cứu, chúng ta có bảng phân phối xác suất sau cho $X(0)$ như sau

$X(0)$	1	2	3
$P(X)$	0.3	0.4	0.3

Tại các thời điểm tiếp theo, chẳng hạn, $t = 1, 2, 3, \ldots$ vị trí của hệ thống sẽ được mô tả bởi các biến ngẫu nhiên $X(1), X(2), X(3), \ldots$ với các bảng phân phối xác suất tương ứng. Dựa trên ví dụ này, chúng ta xét định nghĩa sau về quá trình ngẫu nhiên.

Định nghĩa 1. Xét một hệ thống tiến triển theo thời gian. Gọi $X(t)$ là vị trí (tình trạng) của hệ tại thời điểm t. Ứng với mỗi thời điểm t, $X(t)$ chính là một biến ngẫu nhiên mô tả vị trí (tình trạng) của hệ thống. Quá trình $\{X(t)\}_{t \geqslant 0}$ được gọi là một quá trình ngẫu nhiên.

Tập hợp các vị trí có thể có của hệ gọi là không gian trạng thái. Không gian trạng thái được kí hiệu là S. (Trong ví dụ trên, nếu giả sử rằng $X(t)$ chỉ có thể nhận một trong ba giá trị $1, 2, 3$ $\forall t$, thì $S = \{1, 2, 3\}$.)

Giả sử trước thời điểm s, hệ đã ở trạng thái nào đó, còn tại thời điểm s, hệ ở trạng thái i. Chúng ta muốn đánh giá xác suất để tại thời điểm t ($t > s$), hệ sẽ ở trạng thái j. Nếu xác suất này chỉ phụ thuộc vào bộ bốn (s, i, t, j), tức là $P[X(t) = j/X(s) = i] = p(s, i, t, j)$ là đúng $\forall i, \forall j, \forall s, \forall t$ thì điều này có nghĩa là, sự tiến triển của hệ trong tương lai chỉ phụ thuộc vào hiện tại (tình trạng của hệ tại thời điểm s), và hoàn toàn độc lập với quá khứ (tính không nhớ). Đó chính là tính Markov. Lúc này quá trình ngẫu nhiên $X(t)$ được gọi là quá trình Markov.

Nhận xét. Trong **Ví dụ 1**, $P[X(1) = 2/X(0) = 1]$ là xác suất có điều kiện của sự kiện $X(1) = 2$ (tại thời điểm $t = 1$, hệ thống nằm tại vị trí 2) với điều kiện $X(0) = 1$ (tại thời điểm $t = 0$, hệ thống nằm tại vị trí 1). Nếu quá trình ngẫu nhiên có tính Markov thì xác suất này chỉ phụ thuộc vào tình trạng của hệ tại thời điểm $s = 0$ và hoàn toàn độc lập với các tình trạng của hệ trong quá khứ (trước thời điểm $s = 0$).

Định nghĩa 2. Nếu không gian trạng thái S gồm một số hữu hạn hoặc vô hạn đếm được các trạng thái thì quá trình Markov $X(t)$ được gọi là xích Markov. Lúc này, có thể kí hiệu $S = \{1, 2, 3, \ldots\}$, tức là các trạng thái được đánh số. Hơn nữa, nếu tập các giá trị t đếm được (chẳng hạn, $t = 0, 1, 2, \ldots$) thì ta có xích Markov với thời gian rời rạc, hay xích Markov rời rạc. Nếu $t \in [0, \infty)$ thì ta có xích Markov với thời gian liên tục, hay xích Markov liên tục.

Định nghĩa 3. Xét một xích Markov, nếu xác suất chuyển trạng thái thoả mãn

$$p(s, i, t, j) = p(s + h, i, t + h, j), \forall i, j, t \text{ và } \forall h > 0,$$

thì xích Markov được gọi là thuần nhất theo thời gian.

2 Ma trận xác suất chuyển trạng thái

Trong mục này chúng ta đưa ra khái niệm về ma trận xác suất chuyển trạng thái của một xích Markov rời rạc và thuần nhất theo thời gian với không gian trạng thái gồm N phần tử. Trong trường hợp xích Markov rời rạc và thuần nhất có không gian trạng thái với số phần tử vô hạn đếm được, khái niệm về ma trận xác suất chuyển trạng thái sẽ được xây dựng một cách tương tự.

Ví dụ 2. Trong một khu phố 1000 dân có 3 siêu thị là A, B, và C (A, B, C được coi là các vị trí 1, 2, 3 của hệ thống siêu thị này). Giả sử rằng, trong từng tháng mỗi khách hàng luôn trung thành với một siêu thị. Ngoài ra, cũng giả sử rằng trong tháng đầu số khách vào các siêu thị lần lượt là 200, 500 và 300; tức là có 20% khách hàng vào siêu thị A, 50% vào B và 30% vào C. Như vậy, có thể dự đoán rằng một khách hàng vào A với xác suất 0,2; vào B với xác suất 0,5 và vào C với xác suất 0,3. Để mô tả tình trạng phân chia thị phần trong tháng đầu (tháng 0) của hệ thống siêu thị trên, chúng ta thiết lập biến ngẫu nhiên X(0) với quy tắc: nếu khách hàng mua hàng ở siêu thị A thì đặt X(0)=1, ở siêu thị B thì đặt X(0) = 2, còn ở siêu thị C thì X(0) = 3. Lúc đó, X(0) có bảng phân phối xác suất sau.

$X(0)$	1	2	3
$P(X(0))$	0.2	0.5	0.3

Ký hiệu $P[X(0) = i] = \pi_i^{(0)}, i = 1, 2, 3$, khi đó $\Pi^{(0)} := [\pi_1^{(0)}, \pi_2^{(0)}, \pi_3^{(0)}] = [0.2, 0.5, 0.3]$ được gọi là vector phân phối xác suất tại thời điểm $t = 0$ hay vector phân phối ban đầu. Các thành phần của $\Pi^{(0)}$ cho biết tỉ lệ khách hàng vào các siêu thị A, B và C.

Những tháng sau, ta giả sử xác suất để một người khách, đã vào mua hàng ở siêu thị A tháng trước, vào lại A trong tháng sau luôn là 0,8; chuyển sang mua hàng ở B luôn là 0,1 và chuyển sang C luôn là 0,1. Xác suất để một người khách, đã vào mua hàng ở siêu thị B tháng trước chuyển sang A luôn là 0,07; vào lại B luôn là 0,9 và chuyển sang C luôn là 0,03. Còn xác suất để một người khách, đã vào siêu thị C tháng trước chuyển sang A luôn là 0,083; chuyển sang B luôn là 0,067 và vào lại C luôn là 0,85. Lúc đó các xác suất chuyển của khách hàng được cho thông qua ma trận xác suất chuyển trạng thái P (còn gọi là ma trận chuyển sau một bước).

$$P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.07 & 0.9 & 0.03 \\ 0.083 & 0.067 & 0.85 \end{bmatrix}.$$

Để mô tả tình trạng phân chia thị phần trong tháng $t (t = 1, 2, 3, \dots)$ của hệ thống siêu thị trên, có thể thiết lập biến ngẫu nhiên $X(t)$ với quy tắc tương tự như khi thiết lập $X(0)$: nếu khách hàng mua hàng ở siêu thị A thì đặt X(t) = 1, ở siêu thị B thì đặt X(t) = 2, còn ở siêu thị C thì X(t) = 3. Vấn đề đặt ra là X(t) có bảng phân phối xác suất như thế nào.

Bảng phân phối xác suất của X(1). Xét $p_{12} = P[(X(1) = 2/X(0) = 1] = 0,1$ là xác suất để một người khách, đã vào mua hàng ở siêu thị A tháng 0 chuyển sang mua hàng ở siêu thị B trong tháng 1. Ngoài ra, $P[X(t+1) = 2/X(t) = 1] = 0,1 \forall t$ là số tự nhiên, vì theo giả thiết của bài toán thì xác suất để một người khách, đã vào mua hàng ở siêu thị A tháng trước chuyển sang mua hàng ở B luôn là 0,1. Vậy p_{12} được gọi là xác suất chuyển sau một bước từ vị trí 1 sang vị trí 2, bởi vậy có thể dùng kí hiệu $p_{12}^{(1)}$ để chỉ rõ đây là xác suất chuyển sau một bước. Các phần tử $p_{ij}, \forall i = 1, 2, 3$ và $\forall j = 1, 2, 3$ của ma trận P được định nghĩa tương tự.

Dễ thấy rằng trong tháng 1 số khách hàng mua hàng tại siêu thị A là $200 \times 0,8 + 500 \times 0,07 + 300 \times 0,083 = 219,9 (\approx 220)$; số khách hàng mua hàng tại siêu thị B là $200 \times 0,1 + 500 \times 0,9 + 300 \times 0,067 = 490,1 (\approx 490)$;còn số khách hàng mua hàng tại siêu thị C sẽ là $200 \times 0,1 + 500 \times 0,03 + 300 \times 0,85 = 290$. Do tổng số khách hàng là 1000, nên X(1) có bảng phân phối xác suất sau

$X(1)$	1	2	3
$P(X(1))$	0.2199	0.4901	0.2900

Vậy véc tơ phân phối xác suất tại thời điểm $t = 1$ là $\Pi(1) = [\pi_1(1), \pi_2(1), \pi_3(1)]$ cho biết tỉ lệ phần trăm khách hàng vào các siêu thị A, B và C trong tháng 1. Bằng phép tính ma trận ta cũng có

$$\Pi^{(1)} = \Pi^{(0)} \times P = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.07 & 0.9 & 0.03 \\ 0.083 & 0.067 & 0.85 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2199 & 0.4901 & 0.2900 \end{bmatrix}.$$

Tương tự

$$\Pi^{(2)} = \Pi^{(1)} \times P = \begin{bmatrix} 0.2199 & 0.4901 & 0.2900 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.07 & 0.9 & 0.03 \\ 0.083 & 0.067 & 0.85 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.234279 & 0.48251 & 0.283193 \end{bmatrix}.$$

Sau đây ta sẽ tìm ma trận xác suất chuyển trạng thái sau hai bước. Kí hiệu $p_{12}^{(}2)$ là xác suất chuyển từ vị trí 1 sang vị trí 2 sau hai bước. Theo công thức xác suất đầy đủ

$$\begin{aligned} p_{12}^{(2)} =& P[X(2) = 2/X(0) = 1] \\ =& P[X(1) = 1/X(0) = 1]P[X(2) = 2/X(1) = 1] + P[X(1) = 2/X(0) = 1]P[X(2) = 2/X(1) = 2] \\ &+ P[X(1) = 3/X(0) = 1]P[X(2) = 2/X(1) = 3] \\ =& p_{11}^{(1)} p_{12}^{(1)} + p_{12}^{(1)} p_{22}^{(1)} + p_{13}^{(1)} p_{32}^{(1)} \\ =& 0.8 \times 0.1 + 0.1 \times 0.9 + 0.1 \times 0.067 \\ =& 0.1767. \end{aligned}$$

Tương tự

$$p^{(2)} = p_{i1}^{(1)} p_{1j}^{(1)} + p_{i2}^{(1)} p_{2j}^{(1)} + p_{i3}^{(1)} p_{3j}^{(1)} = \sum_{k=1}^{3} p_{ik}^{(1)} p_{kj}^{(1)}$$

Vậy

$$P^{(2)} = [p^{(2)}]_{3\times 3} = P^{(1)} \times P^{(1)} = P \times P = P^2.$$

Ta có $\Pi^{(2)} = \Pi^{(1)} \times P = \Pi^{(0)} \times P^2$. Tổng quát

$$\Pi^{(n+m)} = \Pi^{(n)} \times P^{(m)},$$

trong đó $\Pi^{(n+m)}$ và $\Pi^{(n)}$ là các vector phân phối tại thời điểm $t = m + n$ và $t = n$; và $P^{(m)}$ là ma trận xác suất chuyển trạng thái sau m bước.

Định nghĩa 1. Xét xích Markov rời rạc và thuần nhất theo thời gian $X(t)$, $t = 0, 1, \dots$ với không gian trạng thái gồm N phần tử $S = \{1, \dots N\}$.

Giả sử tại thời điểm $t = n$, $X(n)$ cũng có thể nhận một trong N giá trị $1, \dots N$ với xác suất tương ứng là $\pi_1^{(n)}, \dots, \pi_N^{(n)}$ (với $\pi_1^{(n)} + \dots + \pi_N^{(n)} = 1$). Khi đó

$$\Pi^{(n)} = [\pi_1^{(n)}, \dots, \pi_N^{(n)}]$$

được gọi là vector phân phối tại thời điểm $t = n$.

Ma trận $P = [p_{ij}]_{N\times N}$, với $p_{ij} = p(t, i, t+1, j) = P(X(t+1) = j/X(t) = i], \forall t$ là ma trận xác suất chuyển trạng thái từ vị trí i sang vị trí j sau một bước.

Problem. Bài toán đặt ra là liệu giới hạn sau có tồn tại hay không?

$$\lim_{n\to+\infty} \Pi^{(n)}.$$

Nếu $\Pi = \lim_{n\to+\infty} \Pi^{(n)}$ tồn tại thì ta gọi Π là tỉ lệ cân bằng dừng (stationary equilibrium).

Solution. Ta có

$$\Pi^{(n+1)} = \Pi^{(n)} \times P.$$

Cho $n \to \infty$ suy ra

$$\Pi \times (I - P) = 0.$$

Bài tập. Tìm tỉ lệ cân bằng dừng ở **Ví dụ 2**.

Lời giải.

Giả sử tỉ lệ cân bằng dừng $\Pi = [x\ y\ z]$, khi đó từ $x + y + z = 1$ và $\Pi = \Pi.P$ ta có hệ

$$\begin{cases} 0.2x - 0.07y - 0.083z = 0 \\ -0.1x + 0.1y - 0.067z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1299/4769 \approx 0.272 \\ y = 2170/4769 \approx 0.455 \\ z = 1300/4769 \approx 0.273 \end{cases}.$$

Vậy $\Pi \approx [0.272\ 0.455\ 0.273]$. .... $\square$

3 Bài tập vận dụng

Bài 1. Ông chủ của phân xưởng lắp ráp đã theo dõi sự vận hành của các máy móc trong vài năm. Trong hai năm vừa qua, quan sát thấy 80% thời gian máy móc vận hành tốt trong tháng này nếu nó đã vận hành tốt trong tháng trước đó. Điều đó đồng thời có nghĩa chỉ có 20% thời gian máy móc đã vận hành không tốt trong tháng này khi nó đã vận hành tốt trong tháng trước đó. Thêm vào đó, 90% thời gian máy móc trong trạng thái không vận hành tốt trong tháng này nếu nó đã được vận hành không tốt trong tháng trước. Chỉ có 10% thời gian máy móc vận hành tốt trong tháng này khi nó đã không được vận hành tốt trong tháng trước đó.

a) Tìm ma trận xác suất chuyển trạng thái.

b) Gọi $\Pi^{(0)}$ là vector phân phối xác suất ban đầu và $\Pi^{(n)}$ là vector phân phối xác suất tại thời điểm $t = n$. Xác định $\Pi^{(2)}$.

c) Xác định tỉ lệ cân bằng dừng.

Lời giải.

a) Ta có

$$P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix},$$

Trong đó: $p_{11} = 0.8$ là xác suất máy móc sẽ vận hành tốt trong tháng này nếu nó vận hành tốt trong tháng trước,
$p_{12} = 0.2$ là xác suất máy móc sẽ vận hành không tốt trong tháng này nếu nó vận hành tốt trong tháng trước,
$p_{22} = 0.1$ là xác suất máy móc sẽ vận hành tốt trong tháng này nếu nó vận hành không tốt trong tháng trước,
$p_{21} = 0.9$ là xác suất máy móc sẽ vận hành không tốt trong tháng này nếu nó vận hành không tốt trong tháng trước.

b) Do $\Pi^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ nên $\Pi^{(2)} = \Pi^{(0)}.P^2 = \begin{bmatrix} 0.66 & 0.34 \end{bmatrix}$.

c) Giả sử $\Pi = [\pi_1, \pi_2]$ là tỉ lệ cân bằng dừng. Khi đó từ $\Pi = \Pi.P$ ta có

$$\begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}.$$

Suy ra

$$\begin{cases} \pi_1 = 0.8\pi_1 + 0.1\pi_2 \\ \pi_2 = 0.2\pi_1 + 0.9\pi_2 \end{cases}$$

Hay $0.2\pi_1 - 0.1\pi_2 = 0$. Hơn nữa $\pi_1 + \pi_2 = 1$. Do đó $\pi_1 = 1/3$ và $\pi_2 = 2/3$.

.... $\square$

Bài 2. (*Đề thi kết thúc học phần Đại số tuyến tính tính toán - DHKHDL16*) Theo khảo sát trong sinh viên của ĐH Công nghiệp TPHCM đối với ba quán cafe A, B, C trước cổng trường thì người ta có thông tin về sự thay đổi lượng khách đến quán sau mỗi tuần như bên dưới, cho biết thêm rằng ban đầu, hai quán A, B chưa mở nên 100% khách đều đến C:

- Trong những SV đến quán cafe A, sẽ có 20% người tiếp tục đến A, có 60% người sang B và 20% người sang C.
- Trong những SV đến quán cafe B, sẽ có 10% người sang A, có 40% người tiếp tục đến B và 50% người sang C.

- Trong những SV đến quán cafe C, sẽ có 70% người sang A, có 20% người sang B và 10% người tiếp tục đến C.

a) Hãy lập ma trận chuyển trạng thái Markov X kích thước 3×3 mô tả cho sự thay đổi của lượng người đến các quán. Từ đó tính tỷ lệ phần trăm những người đến quán $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}$ sau 1 tháng (4 tuần).

b) Bằng cách khảo sát các lũy thừa ma trận với số mũ lớn, hãy cho biết thị phần ổn định của các quán sau khi hoạt động trong thời gian đủ lâu. Hãy thực hiện việc này bằng 2 cách sau: dùng vòng lặp for, dùng thư viện của numpy.linalg.