Tổ hợp tuyến tính và cơ sở

Cho họ (tập, hệ) các vector $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_r \in \mathbb{R}^n$ và các số thực $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$.

Ta nói vector

$$\alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{u}_2 + \cdots + \alpha_r \boldsymbol{u}_r$$

là một **tổ hợp tuyến tính** (linear combination) của $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_r$ với các **hệ số** (coefficient) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$.

Ta nói họ $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_r$ là **phụ thuộc tuyến tính** (linearly dependent) nếu có vector nào đó là một tổ hợp tuyến tính của các vector còn lại. Ngược lại, họ được nói là **độc lập tuyến tính** (linearly independent).

Tập tất cả các tổ hợp tuyến tính của $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_r$ được gọi là **linear span** (tiếng Việt???) của $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_r$, kí hiệu $\mathrm{Sp}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_r)$. Tức là

$$\mathrm{Sp}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_r) = \{\alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{u}_2 + \cdots + \alpha_r \boldsymbol{u}_r : \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}\}$$

Ta nói $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_r$ là một **cơ sở** (basis) của $\mathrm{Sp}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_r)$ nếu $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_r$ độc lập tuyến tính.

Trực giao và trực chuẩn

Cho 2 vector $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Ta định nghĩa **tích vô hướng** (inner product, dot product) của $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ là

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

Ta nói $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ **trực giao** (orthogonal, perpendicular), kí hiệu $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$, nếu

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = 0$$

Ta định nghĩa **chuẩn** (norm, length) của $\boldsymbol{x}$ là

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle} = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2}$$

Ta nói $\boldsymbol{x}$ là **vector đơn vị** (unit vector) nếu

$$\|\boldsymbol{x}\| = 1$$

Ta nói họ (hệ, tập) các vector $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_r \in \mathbb{R}^n$ là **trực giao** (orthogonal) nếu chúng đôi một trực giao, tức là

$$\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle = 0, \forall i \neq j$$

Ta nói họ (hệ, tập) các vector $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \dots, \boldsymbol{q}_r \in \mathbb{R}^n$ là **trực chuẩn** (orthonormal) nếu chúng là họ trực giao các vector đơn vị, tức là

$$\begin{cases} \langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle = 0, \forall i \neq j \\ \|\boldsymbol{v}_i\| = 1, \forall i \end{cases}$$

Ta nói ma trận Q vuông cấp n là **ma trận trực giao** (orthogonal matrix) nếu các vector cột của nó lập thành họ trực chuẩn. Khi đó ta cũng có các vector dòng của nó lập thành họ trực chuẩn. Tức là

$$Q^TQ = QQ^T = I_n$$

$$Q^{-1} = Q^T$$

Trực giao hóa Gram-Schmidt

Thuật giải. (Gram-Schmidt)
Input: Họ các vector $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_r$ cùng kích thước. **Output:** Thông báo nếu họ không độc lập tuyến tính; ngược lại, trả về họ trực giao $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_r$ hoặc họ trực chuẩn $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \dots, \boldsymbol{q}_r$ là các cơ sở của $\mathrm{Sp}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_r)$.
Bước 1. $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}_1$ Nếu $\boldsymbol{v}_1 = 0$ thông báo họ không độc lập tuyến tính và kết thúc. **Bước 2.** $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{u}_2 - \frac{\langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_1 \rangle}{\lVert \boldsymbol{v}_1 \rVert^2} \boldsymbol{v}_1$ Nếu $\boldsymbol{v}_2 = 0$ thông báo họ không độc lập tuyến tính và kết thúc. **Bước 3.** $\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{u}_3 - \frac{\langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{v}_1 \rangle}{\lVert \boldsymbol{v}_1 \rVert^2} \boldsymbol{v}_1 - \frac{\langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{v}_2 \rangle}{\lVert \boldsymbol{v}_2 \rVert^2} \boldsymbol{v}_2$ Nếu $\boldsymbol{v}_3 = 0$ thông báo họ không độc lập tuyến tính và kết thúc. ... (đủ r bước hoặc kết thúc với thông báo họ không độc lập tuyến tính) **Bước chuẩn hóa (normalizing) (nếu cần họ trực chuẩn).** $$\boldsymbol{q}_1 = \frac{\boldsymbol{v}_1}{\lVert \boldsymbol{v}_1 \rVert}, \boldsymbol{q}_2 = \frac{\boldsymbol{v}_2}{\lVert \boldsymbol{v}_2 \rVert}, \dots, \boldsymbol{q}_r = \frac{\boldsymbol{v}_r}{\lVert \boldsymbol{v}_r \rVert}$$

Ví dụ 1. Dùng thuật giải Gram-Schmidt trực chuẩn hóa họ 3 vector sau (nếu họ độc lập tuyến tính)

$$\boldsymbol{u}_1 = (-1, 1, -1, 1), \boldsymbol{u}_2 = (-1, 3, -1, 3), \boldsymbol{u}_3 = (0, 2, 0, 2)$$

***Hướng dẫn giải*:**

Bước 1.

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}_1 = (-1, 1, -1, 1)$$

$$\lVert \boldsymbol{v}_1 \rVert^2 = (-1)^2 + 1^2 + (-1)^2 + 1^2 = 4$$

Bước 2.

$$\langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_1 \rangle = (-1) \times (-1) + 3 \times 1 + (-1) \times (-1) + 3 \times 1 = 8$$

$$\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{u}_2 - \frac{\langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_1 \rangle}{\lVert \boldsymbol{v}_1 \rVert^2} \boldsymbol{v}_1 = (-1, 3, -1, 3) - \frac{8}{4}(-1, 1, -1, 1) = (1, 1, 1, 1)$$

$$\|\boldsymbol{v}_2\|^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 4$$

Bước 3.

$$\langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{v}_1 \rangle = 0 \times (-1) + 2 \times 1 + 0 \times (-1) + 2 \times 1 = 4$$

$$\langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{v}_2 \rangle = 0 \times 1 + 2 \times 1 + 0 \times 1 + 2 \times 1 = 4$$

$$\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{u}_3 - \frac{\langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{v}_1 \rangle}{\|\boldsymbol{v}_1\|^2}\boldsymbol{v}_1 - \frac{\langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{v}_2 \rangle}{\|\boldsymbol{v}_2\|^2}\boldsymbol{v}_2 = (0,2,0,2) - \frac{4}{4}(-1,1,-1,1) - \frac{4}{4}(1,1,1,1) = 0$$

Như vậy, họ không độc lập tuyến tính.

Ví dụ 2. Dùng thuật giải Gram-Schmidt trực chuẩn hóa họ 3 vector sau

$$\boldsymbol{u}_1 = (1,1,1), \boldsymbol{u}_2 = (0,1,1), \boldsymbol{u}_3 = (0,0,1)$$

Hướng dẫn giải:

Bước 1.

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}_1 = (1,1,1)$$

$$\|\boldsymbol{v}_1\|^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2 = 3$$

Bước 2.

$$\langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_1 \rangle = 0 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 1 = 2$$

$$\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{u}_2 - \frac{\langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_1 \rangle}{\|\boldsymbol{v}_1\|^2}\boldsymbol{v}_1 = (0,1,1) - \frac{2}{3}(1,1,1) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$\|\boldsymbol{v}_2\|^2 = \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

Bước 3.

$$\langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{v}_1 \rangle = 0 \times 1 + 0 \times 1 + 1 \times 1 = 1$$

$$\langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{v}_2 \rangle = 0 \times \left(-\frac{2}{3}\right) + 0 \times \left(\frac{1}{3}\right) + 1 \times \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

$$\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{u}_3 - \frac{\langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{v}_1 \rangle}{\|\boldsymbol{v}_1\|^2}\boldsymbol{v}_1 - \frac{\langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{v}_2 \rangle}{\|\boldsymbol{v}_2\|^2}\boldsymbol{v}_2 = (0,0,1) - \frac{1}{3}(1,1,1) - \frac{1/3}{2/3}\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\|\boldsymbol{v}_3\|^2 = 0^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Như vậy, ta có họ trực giao tương ứng

$$\boldsymbol{v}_1 = (1,1,1), \boldsymbol{v}_2 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \boldsymbol{v}_3 = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Để có họ trực chuẩn ta làm thêm bước chuẩn hóa

$$q_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), q_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2,1,1), q_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1)$$

Phân rã QR (QR decomposition)

Mệnh đề. (Phân rã QR) Nếu A là ma trận $m \times n$ gồm n vector cột độc lập tuyến tính thì A có thể được phân tích thành

$$A = QR$$

với Q là ma trận $m \times n$ gồm n vector cột trực chuẩn và R là ma trận $n \times n$ tam giác trên khả nghịch.

Thuật giải. (QR-decomposition)

Input: Ma trận A kích thước $m \times n$.

Output: Thông báo nếu các cột của A không độc lập tuyến tính; ngược lại, trả về Q, R.

Bước 1. Xác định n cột của $A = [\boldsymbol{u}_1 | \boldsymbol{u}_2 | \dots | \boldsymbol{u}_n]$.

Bước 2. Thực hiện thuật giải Gram-Schmidt trực chuẩn hóa $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_n$.

Thông báo nếu các cột của A không độc lập tuyến tính và kết thúc; ngược lại, được $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \dots, \boldsymbol{q}_n$ là họ trực chuẩn tương ứng.

Bước 3. Xây dựng ma trận Q gồm n cột $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \dots, \boldsymbol{q}_n$

$$Q = [\boldsymbol{q}_1 | \boldsymbol{q}_2 | \dots | \boldsymbol{q}_n]$$

Bước 4. Xây dựng ma trận R kích thước $n \times n$ như sau

$$R = \begin{bmatrix} \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{q}_1 \rangle & \langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{q}_1 \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{q}_1 \rangle \\ 0 & \langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{q}_2 \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{q}_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \langle \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{q}_n \rangle \end{bmatrix}$$

Bước 5. Trả về $A = QR$.

Ví dụ 3. (tiếp theo Ví dụ 2) Phân rã QR ma trận sau

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Hướng dẫn giải:

Các cột của A

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dùng thuật giải Gram-Schmidt trực chuẩn hóa $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ được (xem Ví dụ 2)

$$\boldsymbol{q}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \boldsymbol{q}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}, \boldsymbol{q}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}$$

Tính các tích vô hướng

$$\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{q}_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(1 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 1) = \frac{3}{\sqrt{3}}$$

$$\langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{q}_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(0 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 1) = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{q}_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(0 \times 1 + 0 \times 1 + 1 \times 1) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{q}_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(0 \times (-2) + 1 \times 1 + 1 \times 1) = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$\langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{q}_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(0 \times (-2) + 0 \times 1 + 1 \times 1) = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{q}_3 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(0 \times 0 + 0 \times (-1) + 1 \times 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Từ đó ta có

$$R = \begin{bmatrix}\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{q}_1 \rangle & \langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{q}_1 \rangle & \langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{q}_1 \rangle\\ 0 & \langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{q}_2 \rangle & \langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{q}_2 \rangle\\ 0 & 0 & \langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{q}_3 \rangle\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{3}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

Như vậy, một phân rã QR của A là

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 1 & 0\\1 & 1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{3}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$