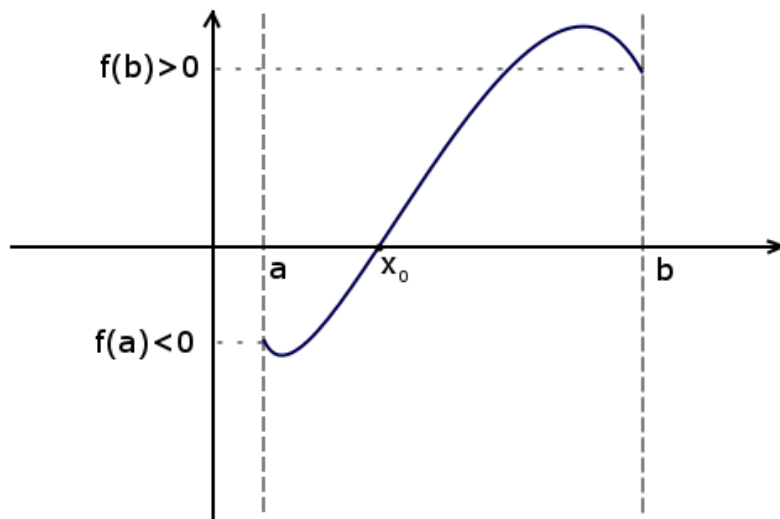


Temat: Znajdowanie miejsca zerowego metodą połowienia przedziałów.

Omawiany algorytm wyznacza miejsce zerowe z dokładnością do pewnego ϵ (dokładność tą ustalamy na początku programu) w przedziale obustronnie domkniętym $[a, b]$ przy następujących założeniach:

1. Funkcja jest ciągła (oznacza to, że jej wykres narysujemy nie odrywając ołówka, choć definicja funkcji ciągłej jest znacznie bardziej złożona) w przedziale $[a, b]$
2. funkcja ma dokładnie jedno miejsce zerowe.

Przyjrzyjmy się poniższemu rysunkowi spełniającemu powyższe założenia:



Dla każdej takiej funkcji będzie zachodził warunek:

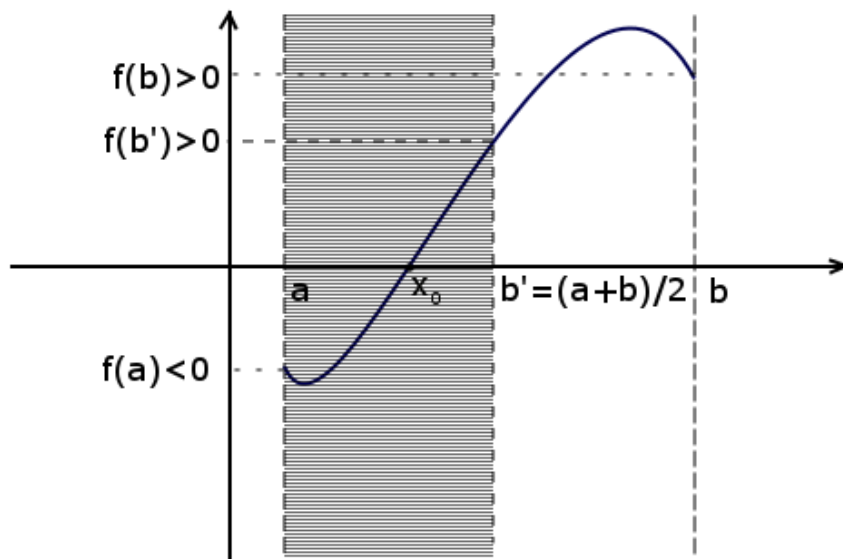
$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

ponieważ wartości na krańcach przedziałów będą zawsze przeciwnych znaków (chyba, że miejsce zerowe znajduje się w jednym z krańców).

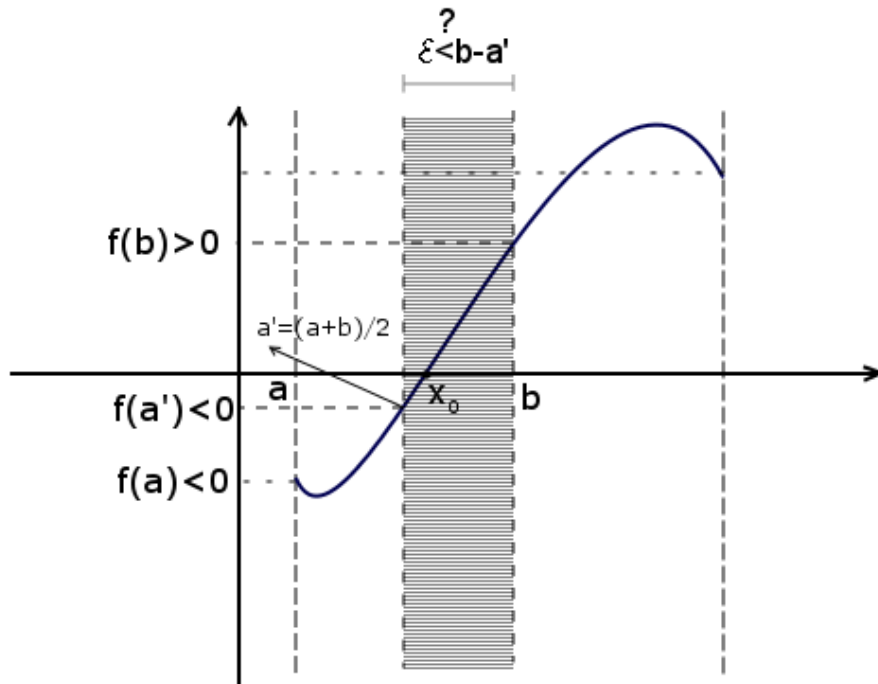
W pierwszym kroku wyznaczamy środek przedziału i sprawdzamy, czy nie jest on już miejscem zerowym. Jeśli nie to sprawdzamy czy

$$f(a) \cdot f(\text{środek}) < 0$$

Jeśli tak, to miejsce zerowe musi znajdować się w przedziale $[a, \text{środek})$, w przeciwnym razie w przedziale $(\text{środek}, b]$. W pierwszej sytuacji wartość b zostanie zastąpiona wartością środka, w drugiej wartość a . W omawianym przykładzie zachodzi sytuacja pierwsza:



Czynności dzielenia przedziału $[a, b]$ powtarzamy do momentu, aż nie będzie spełniony warunek $\epsilon < a - b$:



Gdy osiągniemy szukaną dokładność, tzn. $b - a \leq \epsilon$, możemy wypisać miejsce zerowe, które przyjmuje wartość $\frac{b+a}{2}$.

Przedstawione poniżej rozwiązanie szuka miejsca zerowego dla wielomianu:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 6$$

, który spełnia podane na początku artykułu założenia. Program wyznacza miejsce zerowe z dokładnością do pięciu miejsc po przecinku. Funkcję

```
def f(a: float, b: float, epsilon: float) -> float:
```

możemy dowolnie zmieniać, tak samo przedział $[a, b]$ oraz ϵ pamiętając o założeniach.

KOD PROGRAMU

```
#Funkcja obliczająca wartość funkcji
def wart(x: float):
    return x * (x * (x - 3) + 2) - 6

#Funkcja iteracyjna
def polowienie_przedzialow_it(a: float, b: float, epsilon: float):
    if wart(a) == 0.0: return a
    if wart(b) == 0.0: return b
    while b - a > epsilon:
        srodek = (a + b) / 2

        if wart(srodek) == 0.0: # jesli miejsce zerowe jest w srodku
            return srodek

        if wart(a) * wart(srodek) < 0:
            b = srodek
        else:
            a = srodek

    return round((a + b) / 2, 8)
```

```

# Funkcja rekurencyjna
def polowienie_przedzialow_rek(a: float, b: float, epsilon: float):
    if wart(a) == 0.0:
        return a
    if wart(b) == 0.0:
        return b

    srodek = (a + b) / 2

    if b - a <= epsilon:
        return round(srodek, 8)

    if wart(a) * wart(srodek) < 0:
        return polowienie_przedzialow_rek(a, srodek, epsilon)
    return polowienie_przedzialow_rek(srodek, b, epsilon)

#PROGRAM - Obliczanie miejsc zerowych metoda połowienia przedziałów
a = -10; b = 10; epsilon = 0.00001

print("Znalezione miejsce zerowe wynosi (iteracyjnie): ",
      polowienie_przedzialow_it(a, b, epsilon))
print("Znalezione miejsce zerowe wynosi (rekurencyjnie): ",
      polowienie_przedzialow_rek(a, b, epsilon))

```

ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

ZAD.1 Napisz program wyznaczający miejsce zerowe funkcji $f(x) = -x^3 - 2x^2 + 3x - 5$ (metodą połowienia przedziałów) w przedziale $[-20, 20]$. Do tego celu wykorzystaj funkcję napisaną w sposób iteracyjny i rekurencyjny.

ZAD.2 Napisz program obliczający przybliżoną wartość miejsca zerowego (z użyciem metody połowienia przedziałów) funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ ($a \neq 0$). Dane a i b oraz wartość przybliżenia ϵ mają być podane przez użytkownika (zadbaj o to aby użytkownik nie podał za $a = 0$). Program powinien sam ustalić krańce rozpatrywanego przedziału na podstawie wartości funkcji tzn. ma najpierw sprawdzić przedział $[-5, 5]$ i jeżeli $f(-5) \cdot f(5) > 0$ to powinien poszerzyć zakres o 5 z każdej strony, czyli sprawdzić przedział $[-10, 10]$, a jeżeli i w tym przedziale $f(-10) \cdot f(10) > 0$, to znowu ma poszerzyć z każdej strony zakres o 5, itd. Znajdowanie krańców przedziału $[-p, p]$ kończymy, gdy $f(-p) \cdot f(p) < 0$. Do wyznaczania miejsca zerowego użyj funkcji zdefiniowanej iteracyjnie i rekurencyjnie.

ZAD.3 Napisz program obliczający przybliżone wartości miejsc zerowych funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$ (metodą połowienia przedziałów), ale tylko w przypadku gdy wyróżnik $\Delta > 0$ oraz $a \neq 0$ (czyli dla 2 miejsc zerowych). Po podaniu przez użytkownika wartości a, b, c program powinien sprawdzić, czy spełnione są wymagania programu. Jeżeli nie to powinien wypisać odpowiedni komunikat np. „Nie mogę obliczyć miejsc zerowych ze względu na podane przez Ciebie dane.”. Gdy dane będą poprawne program ma osobno rozpatrzyć znajdowanie miejsca zerowego dla przedziału $[-p, sr]$ oraz przedziału $[sr, p]$, gdzie sr to odcięta wierzchołka paraboli $W(sr, f(sr))$, a p to liczba dobrana tak, że $f(-p) \cdot f(sr) < 0$ oraz $f(p) \cdot f(sr) < 0$. Możesz rozpatrywać p zwiększając odległość od sr o wartość 5 (zaczynając od $p = sr + 5$), aż nie będą spełnione powyższe warunki. Program ma również wczytać wartość przybliżenia ϵ z jakim mają być wyliczone miejsca zerowe. Do wykonania tego programu wykorzystaj funkcję zdefiniowaną iteracyjnie i rekurencyjnie.