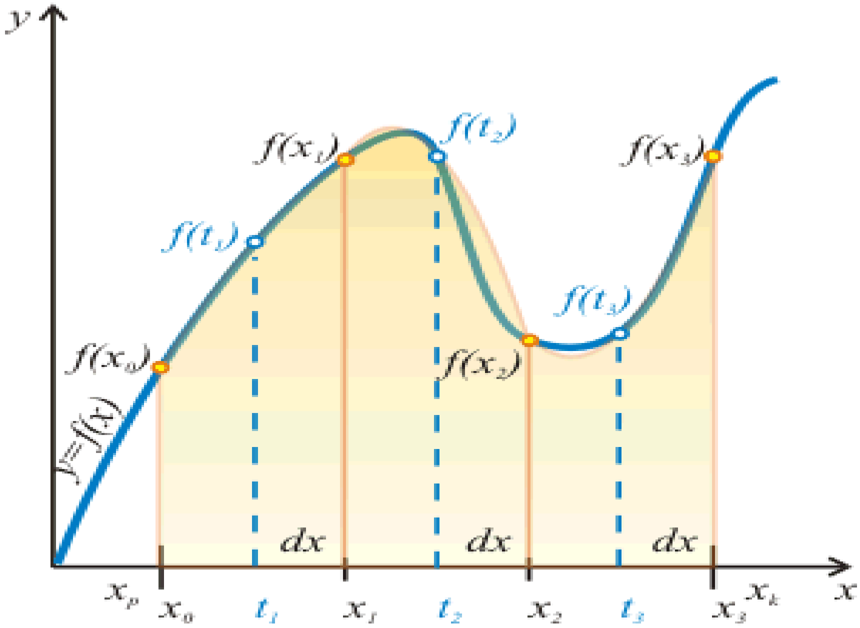
METODA SIMPSONA – ZAGADNIENIE UZUPEŁNIAJĄCE

Algorytm całkowania metodą Simpsona



Metoda Simpsona jest najdokładniejszą z opisanych tutaj metod przybliżonego całkowania. W **metodzie prostokątów** całka oznaczona przybliżana była funkcjami stałymi - liczyliśmy sumę pól prostokątów. W **metodzie trapezów** całkę przybliżaliśmy za pomocą funkcji liniowych - obliczaliśmy sumy pól trapezów. W metodzie Simpsona stosujemy jako przybliżenie parabolę - będziemy obliczali sumy wycinków obszarów pod parabolą. Zasada jest następująca:

Przedział całkowania $[x_p,x_k]$ dzielimy na n + 1 równo odległych punktów x_o, x_1, x_2 ,..., x_n:

dla i = 0,1,2,...,n

$$x_i = x_p + \frac{i}{n}\cdot\left(x_k - x_p\right)$$

Dla każdych dwóch sąsiednich punktów wyznaczamy punkt środkowy t_i wg wzoru:

dla i = 1,2,...,n

$$t_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$$

Obliczamy odległość między dwoma sąsiednimi punktami.

$$dx = \frac{x_k - x_p}{n}$$

Dla każdego wyznaczonego w ten sposób punktu obliczamy wartość funkcji f(x) w tym punkcie:

punkty podziałowe
dla i = 0,1,2,...,n $f_i = f(x_i)$
punkty środkowe
dla i = 1,2,...,n $f_{ti} = f(t_i)$

W każdym podprzedziale $[x_{i-1},x_i]$ przybliżamy funkcję za pomocą paraboli g(x) o następującej postaci:

dla i = 1,2,...,n

$$g_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i;\ \ x \in \left[x_{i-1}, x_i\right]$$

Parabola $g_i(x)$ musi przechodzić przez punkty: (x_{i-1},f_{i-1}), (t_i,f_{ti}), (x_i,f_i). Współczynniki a_i, b_i i c_i wyznaczymy zatem z układu trzech równań:
dla i = 1,2,...,n

$$\begin{cases} a_i x_{i-1}^2 + b_i x_{i-1} + c_i = f_{i-1} \\ a_i t_i^2 + b_i t_i + c_i = f_{t_i} \\ a_i x_i^2 + b_i x_i + c_i = f_i \end{cases}$$

Uwaga:
W metodzie Simpsona chodzi o wyznaczenia pola pod parabolą w danym podprzedziale, a nie jej współczynników. Możemy zatem pójść inną drogą. Załóżmy, iż powyższe współczynniki są znane (ostatecznie możemy je przecież wyliczyć).

Pole pod parabolą w przedziale $[x_{i-1},x_i]$ będzie równe całce oznaczonej:
dla i = 1,2,...,n

$$P_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} g_i(x)dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(a_i x^2 + b_i x + c_i\right)dx; \quad x \in \left[x_{i-1}, x_i\right]$$

Funkcja pierwotna jest bardzo prosta w tym przypadku i ma wzór następujący:
dla i = 1,2,...,n

$$G_i(x) = \int g_i(x)dx = \frac{a_i}{3}x^3 + \frac{b_i}{2}x^2 + c_i x + C$$

Wartość całki obliczymy zgodnie z definicją Newtona-Leibniza:
dla i = 1,2,...,n

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} g_i(x)dx = G_i(x_i) - G_i(x_{i-1})$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} g_i(x)dx = \frac{a_i}{3}x_i^3 + \frac{b_i}{2}x_i^2 + c_i x_i - \frac{a_i}{3}x_{i-1}^3 - \frac{b_i}{2}x_{i-1}^2 - c_i x_{i-1}$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} g_i(x)dx = \frac{a_i}{3}x_i^3 - \frac{a_i}{3}x_{i-1}^3 + \frac{b_i}{2}x_i^2 - \frac{b_i}{2}x_{i-1}^2 + c_i x_i - c_i x_{i-1}$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} g_i(x)dx = \frac{a_i}{3}\left(x_i^3 - x_{i-1}^3\right) + \frac{b_i}{2}\left(x_i^2 - x_{i-1}^2\right) + c_i\left(x_i - x_{i-1}\right)$$

Teraz postaramy się uprościć maksymalnie otrzymane wyrażenie. W tym celu wyciągamy przed nawias wspólny czynnik i całość dzielimy przez 6:

dla i = 1,2,...,n

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} g_i(x)dx = \frac{(x_i - x_{i-1})}{6}\left\{2a_i\left(x_i^2 + x_i x_{i-1} + x_{i-1}^2\right) + 3b_i\left(x_i + x_{i-1}\right) + 6c_i\right\}$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} g_i(x)dx = \frac{(x_i - x_{i-1})}{6}\left(2a_i x_i^2 + 2a_i x_i x_{i-1} + 2a_i x_{i-1}^2 + 3b_i x_i + 3b_i x_{i-1} + 6c_i\right)$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} g_i(x)dx = \frac{(x_i - x_{i-1})}{6}\left\{\left(a_i x_{i-1}^2 + b_i x_{i-1} + c_i\right) + \left(a_i x_i^2 + b_i x_i + c_i\right) + a_i\left(x_{i-1} + x_i\right)^2 + 2b_i\left(x_{i-1} + x_i\right) + 4c_i\right\}$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} g_i(x)dx = \frac{(x_i - x_{i-1})}{6}\left\{\left(a_i x_{i-1}^2 + b_i x_{i-1} + c_i\right) + \left(a_i x_i^2 + b_i x_i + c_i\right) + 4\left(a_i\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)^2 + b_i\frac{x_{i-1} + x_i}{2} + c_i\right)\right\}$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} g_i(x)dx = \frac{(x_i - x_{i-1})}{6}\left\{\left(a_i x_{i-1}^2 + b_i x_{i-1} + c_i\right) + \left(a_i x_i^2 + b_i x_i + c_i\right) + 4\left(a_i t_i^2 + b_i t_i + c_i\right)\right\}$$

Zwróćcie uwagę, iż wyrażenia w nawiasach są odpowiednio wartościami funkcji f_{i-1}, f_i oraz f_{ti}. Natomiast różnica

$$x - x_{i-1}$$

jest odległością dx pomiędzy dwoma sąsiednimi punktami podziałowymi. Zatem po uproszczeniu otrzymujemy ostateczny wzór:

dla i = 1,2,...,n

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} g_i(x)dx = \frac{x_k - x_p}{6n}\left(f_{i-1} + f_i + 4f_{t_i}\right)$$

Wzór ten pozwala wyliczyć pole obszaru pod parabolą aproksymującą funkcję f(x) w przedziale $[x_{i-1},x_i]$. Wartość całej całki otrzymamy sumując te pola, czyli:

$$\int_{x_p}^{x_k} f(x)dx \approx \frac{x_k - x_p}{6n}\left(\sum_{i=1}^{n} f_{i-1} + \sum_{i=1}^{n} f_i + 4\sum_{i=1}^{n} f_{t_i}\right)$$

Jest to wzór wyliczania przybliżonej wartości całki oznaczonej za pomocą metody Simpsona. Ponieważ w obliczanych sumach wartości funkcji się powtarzają dwukrotnie (z wyjątkiem pierwszej i ostatniej), do obliczeń komputerowych stosujemy efektywniejszy wzór otrzymywania powyższej sumy:

$$\sum_{i=1}^{n} f_{i-1} + \sum_{i=1}^{n} f_i = f_0 + f_n + 2\sum_{i=1}^{n-1} f_i$$

$$\int_{x_p}^{x_k} f(x)dx \approx \frac{x_k - x_p}{6n}\left(f_0 + f_n + 2\sum_{i=1}^{n-1} f_i + 4\sum_{i=1}^{n} f_{t_i}\right)$$

Specyfikacja problemu

Dane wejściowe

x_p - początek przedziału całkowania, $x_p \in R$

x_k - koniec przedziału całkowania, $x_k \in R$

n - liczba punktów podziałowych, $n \in N$

$f(x)$ - funkcja rzeczywista, której całkę liczymy

Dane wyjściowe

s - przybliżona wartość całki oznaczonej funkcji $f(x)$ w przedziale $[x_p,x_k]$, $s \in R$

Zmienne pomocnicze

s_t - suma wartości funkcji w punktach środkowych, $s_t \in R$

dx - odległość między dwoma sąsiednimi punktami podziałowymi, $dx \in R$

x - pozycja punktu podziałowego, $x \in R$

i - licznik punktów podziałowych, $i \in N$

Lista kroków

K01: $s \leftarrow 0$; $s_t \leftarrow 0$

K02: $dx \leftarrow \dfrac{x_k - x_p}{n}$

K03: **Dla** $i = 1,2,...,n$:
wykonuj kroki K04...K06

K04: $x \leftarrow x_p + i \cdot dx$

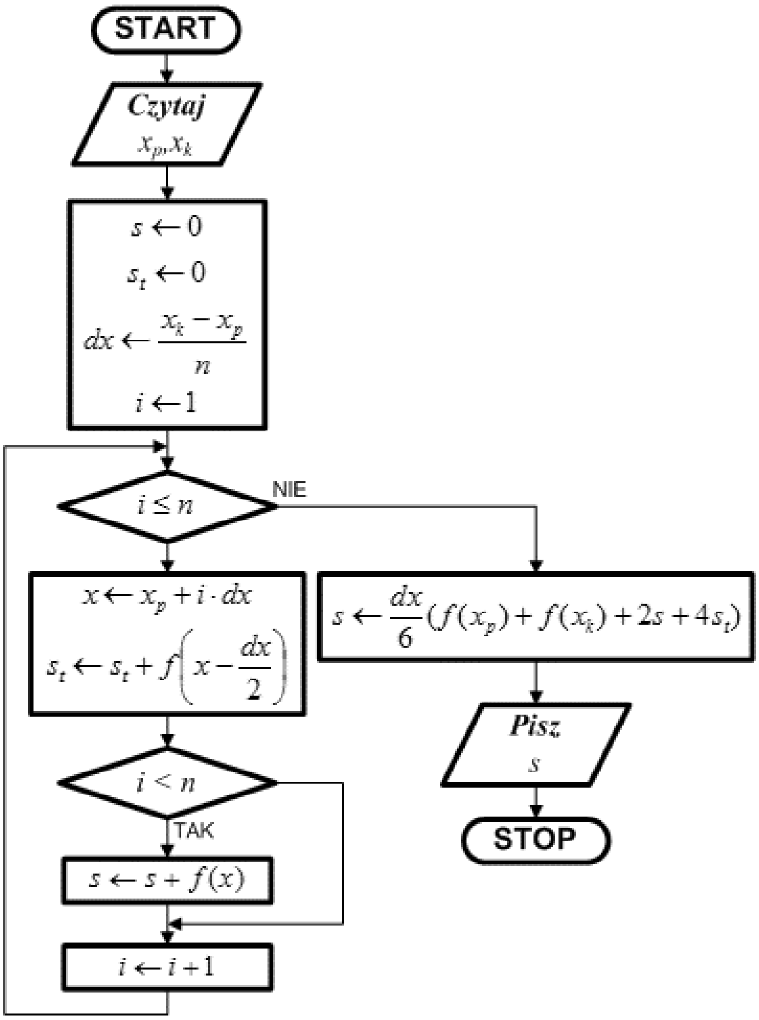
K05: $s_t \leftarrow s_t + f\left(x - \dfrac{dx}{2}\right)$

K06: **Jeśli** $i < n$,
to $s \leftarrow s + f(x)$

K07: $s \leftarrow \dfrac{dx}{6} \cdot \left(f(x_p) + f(x_k) + 2s + 4s_t\right)$

K08: **Zakończ**

Schemat blokowy



Odczytujemy krańce przedziału całkowania [x_p,x_k]. Do obliczenia całki metodą Simpsona musimy zliczyć dwie sumy - wartości funkcji w punktach podziałowych x_i oraz wartości funkcji w punktach środkowych przedziałów t_i. Pierwszą sumę będziemy obliczać w zmiennej s, drugą w s_t. Obie na początku przyjmują wartość 0. Wyznaczamy dalej odległość pomiędzy dwoma sąsiednimi punktami podziałowymi dx i rozpoczynamy pętlę, w której zmienna i pełni rolę numeru punktu podziałowego i środkowego. Pętla ta wykonuje się n-razy od i=1 do i=n włącznie, czyli jest to zwykła pętla iteracyjna typu FOR.

W pętli wyznaczamy wartość punktu podziałowego x_i i umieszczamy ją w zmiennej x. Następnie obliczamy wartość funkcji w punkcie środkowym t_i, który jest odległy o połowę dx od wyznaczonego wcześniej punktu x_i. Wartość tę dodajemy do sumy s_t.

Drugą sumę tworzymy w zmiennej s. Jednakże powinna ona zawierać jedynie wartości funkcji dla punktów podziałowych od x_1 do x_{n-1}. Dlatego przed sumowaniem sprawdzamy, czy indeks i jest w odpowiednim zakresie.

Po zakończeniu pętli wyznaczamy wartość całki w zmiennej s zgodnie z podanym wzorem, wyprowadzamy ten wynik dla użytkownika i kończymy wykonywanie algorytmu.

ZADANIE DO ROZWIĄZANIA – METODA SIMPSONA

Napisz program obliczający pole obszaru metodą Simpsona przybliżoną wartość pola obszaru zamkniętego ograniczonego prostymi x = a, x = b, osią OX i funkcją f . Sprawdź jak będzie się zmieniała wartość pola dla n=4, 10, 50, 100.

a) $a = -4, b = 3$ oraz $f(x) = 2x^3 - x^2 + 5x - 1$

b) $a = -2, b = 5$ oraz $f(x) = \frac{-3x+12}{x+3}$

c) $a = 2, b = 12$ oraz $f(x) = \sqrt{2x + 3}$