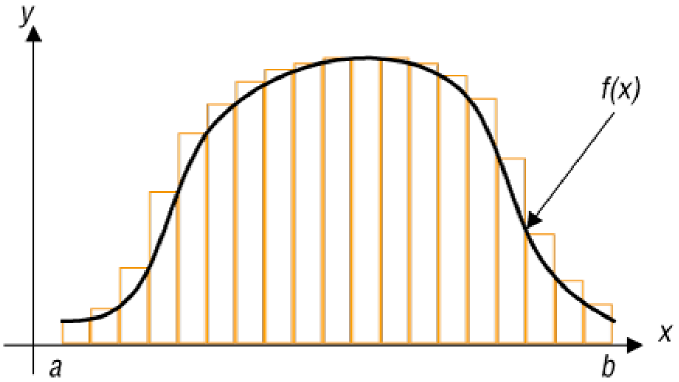
Temat: Obliczanie przybliżonego pola obszaru zamkniętego.

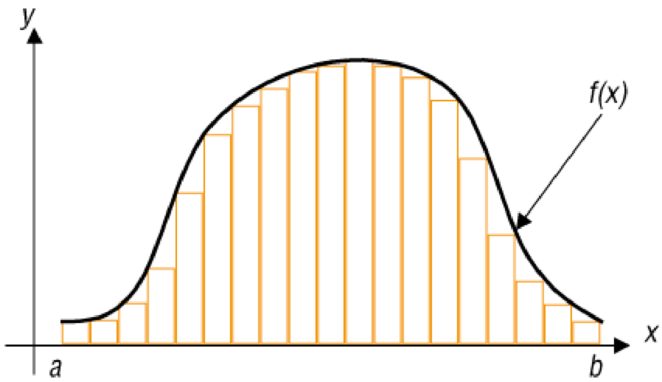
METODA PROSTOKĄTÓW

Przyjmijmy, że w prostokątnym układzie współrzędnych znajduje się obszar ograniczony prostymi $x = a$ i $x = b$, osią *OX* oraz wykresem funkcji $f(x)$. W wielu zadaniach niezbędne jest obliczenie pola tego obszaru. Można to zrobić dokładnie za pomocą całki oznaczonej, jednak jej obliczenie dla złożonych funkcji jest zwykle trudnym zadaniem. W zastosowaniach inżynierskich zupełnie wystarczający jest wynik przybliżony (o ile przybliżenie ma odpowiednio dużą dokładność).

Jednym ze sposobów znalezienia pola obszaru jest przybliżenie jego kształtu prostokątami o rozłącznych wnętrzach. Suma pól prostokątów jest w przybliżeniu równa polu obszaru ograniczonego prostymi $x = a$, $x = b$, osią *OX* oraz wykresem funkcji $f(x)$.

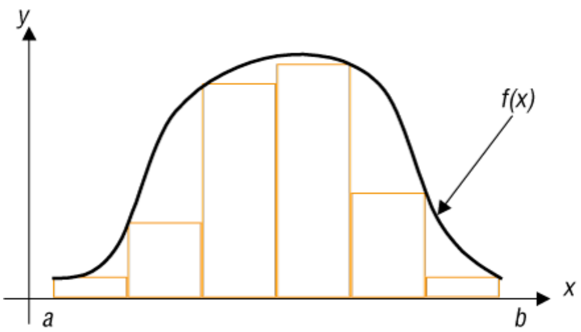


Rys. 1. Metoda prostokątów – z nadmiarem

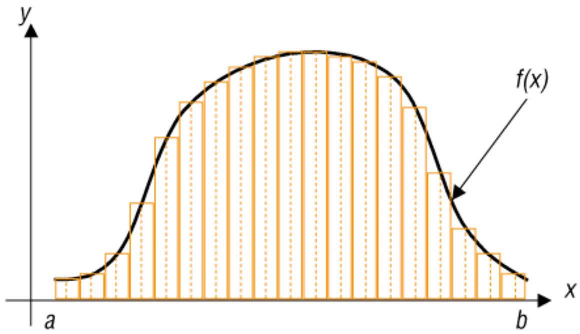


Rys. 2. Metoda prostokątów – z niedomiarem

Obszar możemy pokrywać z nadmiarem (rys. 1.) – liczymy wtedy wartości funkcji f(x) dla prawych krańców przedziałów, lub z niedomiarem (rys. 2) – liczymy wtedy wartości funkcji f(x) dla lewych krańców przedziałów. Im mniejszej liczby prostokątów użyjemy do pokrycia pola, tym mniej dokładny wynik otrzymamy (rys. 3.). W praktyce najwygodniej jest przyjąć, że wszystkie prostokąty mają boki poziome jednakowej długości i wykres funkcji przebiega przez ich środki. W ten sposób błędy nadmiaru i niedomiaru w pewnym stopniu się znoszą (rys. 4.).

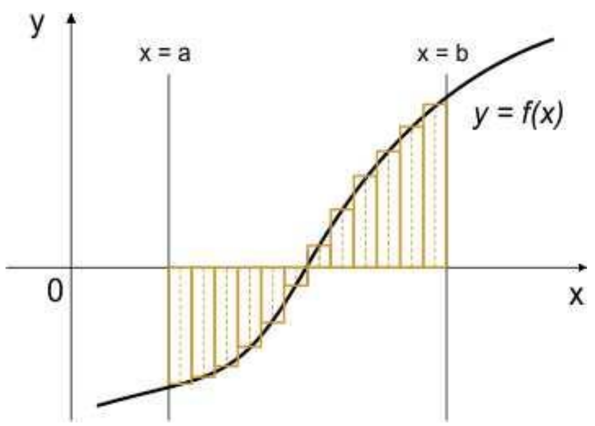


Rys. 3. Przy małej liczbie prostokątów wynik jest mniej dokładny



Rys. 4. Błędy nadmiaru i niedomiaru znoszą się

Aby skonstruować uniwersalny algorytm, musimy uwzględnić również te funkcje, które przyjmują wartości ujemne (rys. 5.). Nie wiedząc zatem, czy funkcja przyjmuje dla danego argumentu wartość dodatnią czy ujemną, jako drugi bok prostokąta będziemy przyjmować wartość bezwzględną z wartości funkcji, gdyż długość boku prostokąta nie może być wartością ujemną.



Rys. 5. Obliczanie obszaru ograniczonego wykresem funkcji, która zmienia swój znak

Nasze obserwacje pozwalają sformułować podstawy algorytmu obliczania przybliżonego pola obszaru ograniczonego wykresem funkcji, osią *OX* oraz prostymi $x = a$ i $x = b$ metodą prostokątów.

Obliczanie przybliżonego pola obszaru zamkniętego metodą prostokątów

Zadanie: Wyznacz pole obszaru ograniczonego wykresem funkcji $y = f(x)$, prostymi $x = a$, $x = b$ i osią *OX*.
Dane: liczby rzeczywiste a i b, $a < b$; liczba przedziałów n, na które dzielimy przedział $\langle a, b\rangle$; $n \in N_+$, funkcja ciągła $f(x)$ w przedziale $\langle a, b\rangle$.
Wynik: przybliżona wartość pola obszaru zamkniętego P, ograniczonego prostymi $x = a$, $x = b$ oraz wykresem funkcji $f(x)$ i osią *OX*.
Aby wyznaczyć pole obszaru ograniczonego wykresem funkcji $f(x)$, osią *OX* oraz prostymi $x = a$ i $x = b$, obliczamy najpierw szerokość w pojedynczego prostokąta:

$$w = \frac{b-a}{n}$$

Wysokość i-tego prostokąta to wartość funkcji $f(x)$ w punkcie o odciętej będącej środkiem poziomego boku tego prostokąta:

$$f\left(a + w \cdot i - \frac{w}{2}\right), \qquad gdzie\ i \in \langle 1, n \rangle$$

Zatem pole i-tego prostokąta wynosi:

$$w \cdot \left| f\left(a + w \cdot i - \frac{w}{2}\right) \right|,\ gdzie\ i \in \langle 1, n \rangle$$

Następnie obliczamy sumę pól powierzchni prostokątów:

$$P_{f(x)} = w \cdot \sum_{i=1}^{n} \left| f\left(a + w \cdot i - \frac{w}{2}\right) \right|$$

PSEUDOKOD ALGORYTMU
w ← (b – a)/n
x ← a
P ← 0
dla i ← 1, 2, …, n **wykonuj**
  x ← a + w × i – w / 2
  P ← P + w × f(x)
zwróć P

Zdefiniowane funkcje – metoda prostokąta

```
def wart(x):
    return x   #Tu ma być zwrócona wartość funkcji

def pole_obszaru_pr(a, b, n):
    w = (b-a)/n
    p=0
    for i in range(1,n+1):
        x=a+w*i-w/2
        p=p+w*abs(wart(x))
    return p
```

$\boxed{\text{PRZYKŁAD 1}}$ Napis program obliczający metodą prostokątów przybliżoną wartość pola obszaru zamkniętego ograniczonego prostymi $x = -4$ oraz $x = 5$, osią OX oraz funkcją $f(x) = 2 \cdot x - 1$ (Sprawdź jaki będzie wynik dla 5, 20 i 100 przedziałów).

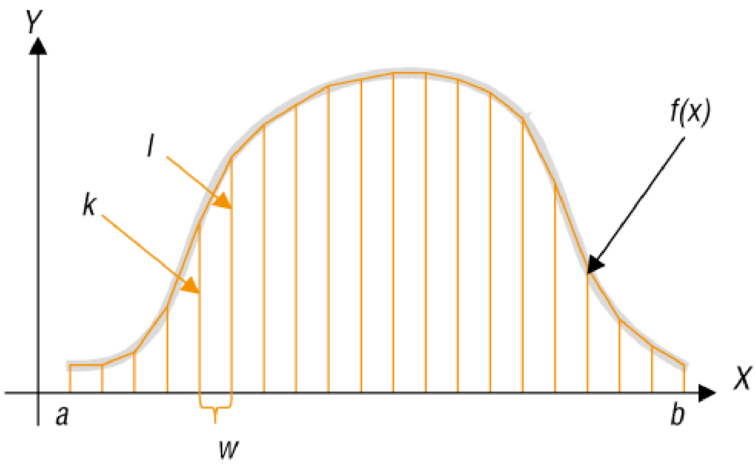
KOD W PYTHON

```
def wart(x):
    return 2*x-1

def pole_obszaru_pr(a, b, n):
    w = (b-a)/n
    p=0
    for i in range(1,n+1):
        x=a+w*i-w/2
        p=p+w*abs(wart(x))
    return p

print(f"Pole obszaru zamkniętego dla n=5: {pole_obszaru_pr(-4,5,5)}")
print(f"Pole obszaru zamkniętego dla n=20: {pole_obszaru_pr(-4,5,20)}")
print(f"Pole obszaru zamkniętego dla n=50: {pole_obszaru_pr(-4,5,100)}")
```

METODA TRAPEZÓW



Rys. 5. Metoda trapezów

Dokładniejsze przybliżenie pola obszaru ograniczonego uzyskamy, zastępując prostokąt inną figurą geometryczną, np. trapezem, o wiele lepiej wpasowującym się w pochyłe fragmenty wykresu (rys. 5.). Przyjmując takie same założenia, jak dla metody prostokątów, otrzymujemy *n* trapezów prostokątnych o wysokości *w* każdy i podstawach długości:

$k = f(a + w \cdot (i - 1))$ oraz $l = f(a + w \cdot i)$.

Podstawiamy te dane do wzoru na pole trapezu:

$$P_t = \frac{k + l}{2} \cdot w$$

gdzie:
P_t – pole trapezu,
k, l – długości podstaw trapezu,
w – wysokość trapezu.
Sumując, otrzymujemy:

$$P_{f(x)} = \frac{f(a) + f(a + w)}{2} \cdot w + \frac{f(a + w) + f(a + 2 \cdot w)}{2} \cdot w + \frac{f(a + 2 \cdot w) + f(a + 3 \cdot w)}{2} \cdot w + \dots + \frac{f(a(n - 2) \cdot w) + f(a + (n - 1) \cdot w}{2} \cdot w + \frac{f(a + (n - 1) \cdot w) + f(a + n \cdot w)}{2} \cdot w$$

Zauważamy, że każda z wartości:

$$f(a+w), f(a+2\cdot w), \cdots, f(a+(n-1)\cdot w)$$

występuje dwa razy, natomiast *f(a)* i *f(a+n·w) = f(b)* występują tylko raz.

Wyciągając $\frac{w}{2}$ przed nawias, otrzymujemy wzór na wyznaczanie pola obszaru ograniczonego metodą trapezów:

$$P_{f(x)} = \frac{w}{2} \cdot \left(|f(a)| + |f(b)| + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} |f(a+i\cdot w| \right)$$

PSEUDOKOD ALGORYTMU

w ← (b – a)/n
x ← a
s ← 0
dla i ← 1, 2, …, n-1 **wykonuj**
    x ← a + w × i
    s ← s + $|f(x)|$
p = w/2 * ($|f(a)|$+$|f(b)|$+2*s)
zwróć p

Zdefiniowane funkcje – metoda trapezu

```
def wart(x):
    return x    #Tu ma być zwrócona wartość funkcji

def pole_obszaru_tr(a, b, n):
    w = (b-a)/n
    s=0
    for i in range(1, n):
        x = a + w * i
        s=s+abs(wart(x))
    p = w/2 * (abs(wart(a))+abs(wart(b))+2*s)
    return p
```

PRZYKŁAD 2 Napis program obliczający metodą trapezów przybliżoną wartość pola obszaru zamkniętego ograniczonego prostymi $x = -4$ oraz $x = 5$, osią OX oraz funkcją $f(x) = 2 \cdot x - 1$ (Sprawdź jaki będzie wynik dla 5, 20 i 100 przedziałów).

KOD W PYTHON

```
def wart(x):
    return 2*x-1

def pole_obszaru_tr(a, b, n):
    w = (b-a)/n
    s=0
    for i in range(1, n):
        x = a + w * i
        s=s+abs(wart(x))
    p = w/2 * (abs(wart(a))+abs(wart(b))+2*s)
    return p

print(f"Pole obszaru zamkniętego dla n=5: {pole_obszaru_tr(-4,5,5)}")
print(f"Pole obszaru zamkniętego dla n=20: {pole_obszaru_tr(-4,5,20)}")
print(f"Pole obszaru zamkniętego dla n=50: {pole_obszaru_tr(-4,5,100)}")
```

ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

ZAD.1 Napisz program obliczający metodą prostokątów i trapezów przybliżoną wartość pola obszaru zamkniętego ograniczonego prostymi x = -2, x = 2, osią OX i funkcją $f(x) = x^2 - 4$. Sprawdź jak będzie się zmieniała wartość pola dla n=4, 10, 50, 100.

ZAD.2 Oblicz metodą prostokątów i trapezów pole obszaru ograniczonego osią *OX*, wykresem funkcji $f(x) = \sin x + 3\cos x - 1$ oraz prostymi $x = 0$ i $x=\pi/2$. Porównaj otrzymane wartości z dokładną wartością pola, która wynosi $\sqrt{3} + 1$. Przeprowadź w arkuszu kalkulacyjnym analizę błędów bezwzględnych i względnych obliczeń w każdej z metod, w zależności od liczby prostokątów lub trapezów. Powtórz obliczenia dla funkcji:

a. $f(x) = \sin x$ oś *Ox*, proste $x = 0$ i $x = \pi$; pole 2,

b. $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ oś *Ox*, proste $x = 0$ i $x = 1$; pole $\frac{\pi}{4}$,

c. $f(x) = \sqrt{2x}$ oś *Ox*, proste $x = 0$ i $x = 8$; pole $\frac{64}{3}$,

d. $f(x) = x \sin 4x$ oś *Ox*, proste $x = 0$ i $x = \frac{\pi}{4}$; pole $\frac{1}{16}$.