线性规划

1. 定义

标准型线性规划

普通形式

- 已知
  - n 个实数 $c_1, c_2, \cdots c_n$
  - m 个实数 $b_1, b_2, \cdots b_m$,
  - mn 个实数 a_{ij} 其中 $i = 1, 2, \cdots, m, j = 1, 2, \cdots, n,$
- 希望找到 n 个实数 $x_1, x_2, \cdots x_n$, **最大化**

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j x_j$$

- 满足**约束条件**:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x, \leqslant b_i, i = 1, 2, \cdots, m$$
$$x_j \geqslant 0, j = 1, 2, \cdots, n$$

矩阵形式

线性规划问题$(A, b. c)$

$$\begin{aligned} \text{最 大 化 } &: c^{\mathrm{T}} x \\ \text{满 足 约 束 : } & Ax \leqslant b \\ & x \geqslant 0 \end{aligned}$$

松弛型线性约束

- 定义 (N, B, A, b, c, v) 为松弛型
  - **基本变量**：等式左边的变量　B 基本变量的下标集合
  - **非基本变量**：等式右边的变量 N 非基本变量的下标集合
  - 可选常数项：v
- **目标函数**：z

$$z = v + \sum_{j \in N} c_j x_j$$
$$x_i = b_i - \sum_{j \in N} a_{ij} x, \quad , i \in B$$

- 例子

松弛型：

$$
\begin{aligned}
z &= 28 - \frac{x_3}{6} - \frac{x_5}{6} - \frac{2x_6}{3} \\
x_1 &= 8 + \frac{x_3}{6} + \frac{x_5}{6} - \frac{x_6}{3} \\
x_2 &= 4 - \frac{8x_3}{3} - \frac{2x_5}{3} + \frac{x_6}{3} \\
x_4 &= 18 - \frac{x_3}{2} + \frac{x_5}{2}
\end{aligned}
$$

中，我们有 $B=\{1, 2, 4\}$，$N=\{3, 5, 6\}$，

$$
A=\begin{bmatrix} a_{13} & a_{15} & a_{16} \\ a_{23} & a_{25} & a_{26} \\ a_{43} & a_{45} & a_{46} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/6 & -1/6 & 1/3 \\ 8/3 & 2/3 & -1/3 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{bmatrix} \quad b=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 18 \end{bmatrix}
$$

$c=(c_3\ c_5\ c_6)^T=(-1/6 -1/6 -2/3)^T$，以及 $v=28$。

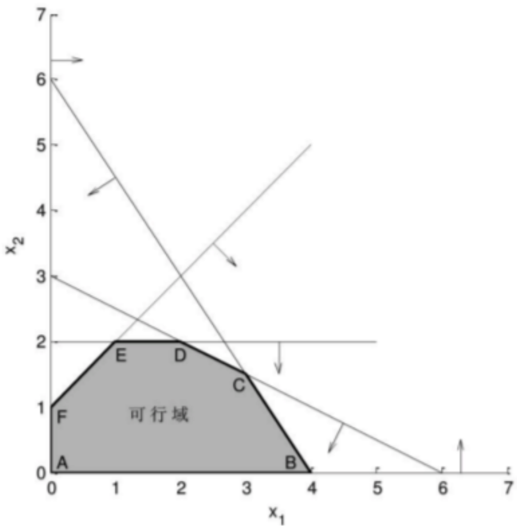
2. 非标准型转为标准型

标准型约束	转换过程	转换方法	例子
目标函数是必须是最大化	最小化=>最大化	目标函数取负	最小化 $-2x_1+3x_2$ 转为 最大化 $2x_1-3x_2$
所有变量都必须有非负约束	无非负约束=>非负约束	将无约束 x_j 替换为 $x_j^1 - x_j^2$ 增加非负约束 $x_j^1 \geq 0 \quad x_j^2 \geq 0$	最大化 $2x_1-3x_2$ 满足约束 $x_1+x_2=7$ $x_1-2x_2\leqslant 4$ $x_1\geqslant 0$ $\Downarrow$ 最大化 $2x_1-3x_2'+3x_2''$ 满足约束 $x_1+x_2'-x_2''=7$ $x_1-2x_2'+2x_2''\leqslant 4$ $x_1, x_2', x_2''\geqslant 0$
不能有等式约束	等式约束=>不等式约束	用一对不等式约束 $f(x_1,x_2,....x_n)\geq b$ 和 $f(x_1,x_2,....x_n)\leq b$ 替换 $f(x_1,x_2,....x_n)=b$	最大化 $2x_1-3x_2'+3x_2''$ 满足约束 $x_1+x_2'-x_2''=7$ $x_1-2x_2'+2x_2''\leqslant 4$ $x_1, x_2', x_2''\geqslant 0$ $\Downarrow$ 最大化 $2x_1-3x_2'+3x_2''$ 满足约束 $x_1+x_2'-x_2''\leqslant 7$ $x_1+x_2'-x_2''\geqslant 7$ $x_1-2x_2'+2x_2''\leqslant 4$ $x_1, x_2', x_2''\geqslant 0$
不能有大于等于约束	大于等于约束=>小于等于约束	大于等于约束乘以-1	最大化 $2x_1-3x_2'+3x_2''$ 满足约束 $x_1+x_2'-x_2''\leqslant 7$ $x_1+x_2'-x_2''\geqslant 7$ $x_1-2x_2'+2x_2''\leqslant 4$ $x_1, x_2', x_2''\geqslant 0$ $\Downarrow$ 最大化 $2x_1-3x_2+3x_3$ 满足约束 $x_1+x_2-x_3\leqslant 7$ $-x_1-x_2+x_3\leqslant -7$ $x_1-2x_2+2x_3\leqslant 4$ $x_1, x_3, x_3\geqslant 0$

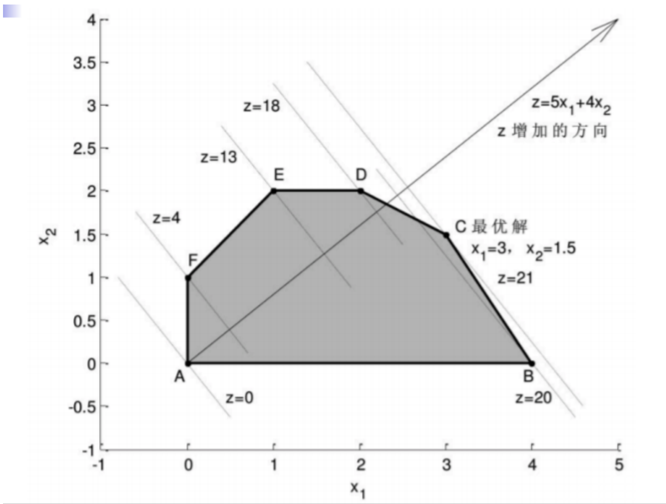
3. 图解法

> 例:
> $$
> \begin{aligned}
> \max \quad z &= 5x_1+4x_2 \\
> \text{s.t. } 6x_1+4x_2 &\leq 24 \\
> x_1+2x_2 &\leq 6 \\
> -x_1+x_2 &\leq 1 \\
> x_2 &\leq 2 \\
> x_1, x_2 &\geq 0
> \end{aligned}
> $$

1. 画出可行域



2. 列出梯度向量 求解最大值



- **梯度向量**：向量(5,4)是目标函数 $z = 5x_1 + 4x_2$ 的梯度向量，指向 z 增加得最快的方向
- **最优值**：垂直于 直线族 $z = 5x_1 + 4x_2$ 的任一条直线; 最优解在 $\mathbf{C(3, 1.5)}$,相应的目标函数最大值为 z=21

4. 单纯型算法

1. 标准型转为松弛型
   - 标准型
     - 最大化 $\quad 3x_1 + x_2 + 2x_3$
     - 约束

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + 3x_3 &\le 30 \\
2x_1 + 2x_2 + 5x_3 &\le 24 \\
4x_1 + x_2 + 2x_3 &\le 36 \\
x_1, x_2, x_3 &\ge 0
\end{aligned}
$$

   - 松弛型

$$
\begin{aligned}
z &= 3x_1 + x_2 + 2x_3 \\
x_4 &= 30 - x_1 - x_2 - 3x_3 \\
x_5 &= 24 - 2x_1 - 2x_2 - 5x_3 \\
x_6 &= 36 - 4x_1 - x_2 - 2x_3
\end{aligned}
$$

- 基本解形式：$(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_6) = (0,0,0,30,24,36)$
- 目标函数形式：$z = (3 \cdot 0) + (1 \cdot 0) + (2 \cdot 0) = 0$
- **目标函数最大化方法**：增大 x_1, x_2, x_3 都可以增大值

2. 增加X_1
   - 受限于
     - $x_4 \quad x_1 \text{最大值为} 30$
     - $x_5 \quad x_1 \text{最大值为} 12$
     - $x_6 \quad x_1 \text{最大值为} 9$ 最紧凑
   - 改写第三个约束 x1都被式子替代

$$
\begin{aligned}
z &= 27 + \frac{x_2}{4} + \frac{x_3}{2} - \frac{3x_6}{4} \\
x_4 &= 21 - \frac{3x_2}{4} - \frac{5x_3}{2} + \frac{x_6}{4} \\
x_5 &= 6 - \frac{3x_2}{2} - 4x_3 + \frac{x_6}{2} \\
x_1 &= 9 - \frac{x_2}{4} - \frac{x_3}{2} - \frac{x_6}{4}
\end{aligned}
$$

     - 基本解形式：$(9,0,0,21,6,0)$
     - 目标函数值：27
     - **目标函数最大化方法**：增大x_2, x_3

3. 增大X_3
   - 第二个约束最紧凑
   - 改写第二个约束 替换X3

$$
\begin{aligned}
z &= \frac{111}{4} + \frac{x_2}{16} - \frac{x_5}{8} - \frac{11x_6}{16} \\
x_1 &= \frac{33}{4} - \frac{x_2}{16} + \frac{x_5}{8} - \frac{5x_6}{16} \\
x_3 &= \frac{3}{2} - \frac{3x_2}{8} - \frac{x_5}{4} + \frac{x_6}{8} \\
x_4 &= \frac{69}{4} + \frac{3x_2}{16} + \frac{5x_5}{8} - \frac{x_6}{16}4
\end{aligned}
$$

     - 基本解形式：$(33/4, 0, 3/2, 69/4, 0, 0)$
     - 目标函数值：111/4
     - **目标函数最大化方法**：增大x_2

4. 增大X_2
   - 第二个约束最紧凑
   - 改写第二个约束 替换X2

$$
\begin{aligned}
z &= 28 - \tfrac{x_3}{6} - \tfrac{x_5}{6} - \tfrac{2x_6}{3} \\
x_1 &= 8 + \tfrac{x_3}{6} + \tfrac{x_5}{6} - \tfrac{x_6}{3} \\
x_2 &= 4 - \tfrac{8x_3}{3} - \tfrac{2x_5}{3} + \tfrac{x_6}{3} \\
x_4 &= 18 - \tfrac{x_3}{2} + \tfrac{x_5}{2}
\end{aligned}
$$

- 基本解形式：$(8,4,0,18,0,0)$
- 目标函数值：28
- **得到最优值**

5. 单纯型表

6. 对偶

定义

$$\begin{aligned}\max z &= CX \\ \text{s.t. } AX &\le B \\ X &\ge 0\end{aligned}$$

对偶问题

$$\begin{aligned}\min w &= B^T Y \\ \text{s.t. } A^T Y &\ge C^T \\ Y &\ge 0\end{aligned}$$

例子

$$\begin{aligned}&\min \quad w = 12y_1 + 16y_2 + 15y_3 \\ &\text{s.t.} \begin{cases} 2y_1 + 4y_2 \ge 2 \\ 2y_1 + 5y_3 \ge 3 \\ y_1, y_2, y_3 \ge 0 \end{cases}\end{aligned}$$

对偶问题

$$\begin{aligned}&\max \quad z = 2x_1 + 3x_2 \\ &\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 12 \\ 4x_1 \le 16 \\ 5x_2 \le 15 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}\end{aligned}$$