BÀI TẬP TOÁN RỜI RẠC

CHƯƠNG 1: CƠ SỞ LOGIC.

1/ Xét chân trị của các vị từ $\overline{p(x)}$, $p(x) \wedge q(x)$, $p(x) \vee q(x)$, $p(x) \to q(x)$ và $p(x) \leftrightarrow q(x)$ tùy theo biến thực x :

a) p(x) = " $x^2 - 2x - 8 \le 0$ " và q(x) = " $(x + 1)(x - 2)^{-1} > 0$ ".

b) p(x) = " $(3 - 2x)(x + 4)^{-1} \ge 0$ " và q(x) = " $(x^2 + x - 2)(x^2 - 3x + 10) > 0$ ".

2/ Cho $a \in \mathbf{R}$. Viết mệnh đề phủ định $\overline{A}$ nếu A có nội dung như sau:

a) $2a^3 + 5a = 10$. b) $(2a - 5)(3a + 1)^{-1} \ge 7$. c) $\sqrt{8-5a} \le 2$. d) $\ln(a^2 - a - 2) < 3$.

e) Khoảng 2/3 số học sinh có thể chất tốt. f) Không đến 3/4 số tài xế có bằng lái hợp lệ.

g) Không quá 2/5 dân số tốt nghiệp đại học. h) Hơn một nửa số Bộ trưởng thực sự có năng lực.

i) Không ít hơn 1/6 số trẻ em bị thất học. j) Nhiều nhất là 30 ứng viên thi đạt ngoại ngữ.

k) Có ít nhất 5 sinh viên đạt giải thưởng. l) Đúng 12 thí sinh dự vòng chung kết của cuộc thi.

m) Hơn 7 vận động viên phá kỷ lục quốc gia. n) Ít hơn 16 quốc gia thi đấu môn bóng rổ.

o) Nếu Sơn thắng trận thì anh ấy được đi Paris. p) Không ai muốn làm việc vào ngày chủ nhật.

q) Cả lớp nói chuyện ồn ào. r) Có ai đó gọi điện thoại cho Tuấn. s) Các cầu thủ không thích bơi lội.

t) Hắn thông minh nhưng thiếu thận trọng. u) Ngọc học Toán mà không học Lịch sử.

v) Dũng cùng An đi thi ngoại ngữ. w) Vũ vừa giỏi Vật Lý vừa giỏi Hóa học.

x) Hải đạt kết quả thấp ở cả môn Tin học lẫn môn Toán. y) Họ đến trường hay họ đi xem phim.

z) Chúng tôi đi Vinh nhưng các anh ấy không đi Huế. α) Nhóm bác sĩ hay nhóm kỹ sư đi làm từ thiện.

Từ bài **3** *đến bài* **5**, *các ký hiệu* p, q, r và s *là các biến mệnh đề.*

3/ Rút gọn các dạng mệnh đề sau:

a) $[(p \vee q) \wedge (p \vee \overline{q})] \vee q$. b) $\overline{p \vee q} \vee [(\overline{p} \wedge q) \vee \overline{q}]$. c) $p \vee q \vee (\overline{p} \wedge \overline{q} \wedge r)$.

d) $p \wedge (q \vee r) \wedge (\overline{p} \vee \overline{q} \vee r)$. e) $(p \to q) \wedge [\overline{q} \vee (\overline{q} \wedge r)]$. f) $\overline{p} \vee (p \wedge \overline{q}) \vee (p \wedge q \wedge \overline{r}) \vee (p \wedge q \wedge r \wedge \overline{s})$.

4/ Chứng minh:

a) $[(p \vee q) \wedge \overline{\overline{p} \wedge q} \wedge \overline{p \wedge \overline{q}}] \Leftrightarrow (p \wedge q)$. b) $[\{(p \to r) \wedge (q \to r)\} \to (p \to q)] \Leftrightarrow (\overline{p} \vee q \vee \overline{r})$.

c) $\{(p \to q) \vee [p \to (q \wedge r)]\} \Leftrightarrow (p \to q)$. d) $\{[(\overline{p} \wedge q \wedge \overline{r}) \to \overline{q}] \to (p \vee r)\} \Leftrightarrow (p \vee q \vee r)$.

e) $\{[q \to (p \wedge r)] \wedge \overline{(p \vee r) \to q}\} \Leftrightarrow [(p \vee r) \wedge \overline{q}]$. f) $[p \to (q \vee r)] \Leftrightarrow [\overline{r} \to (\overline{q} \to \overline{p})]$.

g) $[(p \wedge q) \vee (q \wedge r) \vee (r \wedge p)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (q \vee r) \wedge (r \vee p)]$. h) $[p \to (q \to r)] \Leftrightarrow [(q \wedge \overline{r}) \to \overline{p}]$.

i) $[(p \to q) \wedge (q \to r) \wedge (r \to p)] \Leftrightarrow [(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r) \wedge (r \leftrightarrow p)]$. j) $[(\overline{q} \to \overline{p}) \wedge p] \Leftrightarrow \overline{p \to \overline{q}}$.

5/ Chứng minh các dạng mệnh đề sau là hằng đúng hoặc hằng sai:

a) $(p \wedge q) \to (p \vee \overline{q} \vee r)$. b) $(p \to q) \to [(q \to r) \to (p \to r)]$. c) $[p \to (q \wedge r)] \to (p \to q)$.

d) $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to [p \to (q \to r)]$. e) $\{[(p \to q) \to (r \to \overline{p})] \to (q \to \overline{r})\} \vee \overline{p}$.

f) $[p \wedge (q \vee r)] \to [(p \wedge q) \vee r]$. g) $(r \wedge q) \to (\overline{p} \vee q)$. h) $[(p \to \overline{q}) \to q] \wedge \overline{p \to q}$.

i) $[p \to (q \to r)] \wedge (p \to \overline{r}) \wedge \overline{p \to \overline{q}}$. j) $(p \wedge \overline{q}) \wedge (\overline{q} \to \overline{p}) \wedge (q \vee r)$.

6/ Cho các lượng từ γ và δ ($\gamma, \delta \in \{\forall, \exists\}$). Xét chân trị của A và viết $\overline{A}$ tùy theo dạng cụ thể của γ và δ:

a) A = " $\gamma x \in \mathbf{R}, |x| = -x^3$ ". b) A = " $\gamma x \in \mathbf{Q}, x^2 - 2x > -2$ ". c) A = " $\gamma x \in \mathbf{R}, \delta n \in \mathbf{N}, 2^n \le x < 2^{n+1}$ ".

d) A = " $\gamma x \in \mathbf{R}, \delta y \in \mathbf{R}, (x^2 = y^2) \to (x = y)$ ". e) A = " $\gamma x \in \mathbf{Q}, \delta y \in \mathbf{R}, (x^2 + 2x - 15)y = 0$ ".

f) A = " $\gamma x \in \mathbf{R}, \delta y \in \mathbf{Q}, x^2 + 4x \ge y^2 + 7$ ". g) A = " $\gamma x \in \mathbf{R}, \delta k \in \mathbf{Z}, (x - k)^2 \le 2^{-2}$ ".

7/ Viết dạng phủ định của A và xét chân trị của A (xét trực tiếp A hay xét gián tiếp $\overline{A}$):

a) A = "$\forall n \in \mathbf{N},\ 4|n^2 \to 4|n$". b) A = "$\exists x \in \mathbf{R},\ \sin x + 2x = 1$". c) A = "$\forall x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R},\ 2x + 3\sin y > 0$".

d) A = "$\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{N},\ (x^2 \geq y^2) \to (x \geq y)$". e) A = "$\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{Q},\ 2^y + 2^{-y} \geq \sin x + 3$".

f) A = "$\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{Q}, \forall t \in \mathbf{Z},\ x \leq y^2 + 2t$". g) A = "$\exists x \in \mathbf{Q}, \exists y \in \mathbf{R}, \forall t \in \mathbf{N},\ x^3 - 3y \neq 5t$".

8*/ Chứng minh qui nạp theo số nguyên n:

a) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = 4^{-1}n^2(n+1)^2, \forall n \geq 1$. b) $1.1! + 2.2! + \cdots + n.n! = (n+1)! - 1, \forall n \geq 1$.

c) $1.2.3 + 2.3.4 + \cdots + n(n+1)(n+2) = 4^{-1}n(n+1)(n+2)(n+3), \forall n \geq 1$. d) $2^n < n!, \forall n \geq 4$.

e) $n^2 < 2^n, \forall n \geq 5$ [để ý $(n+1)^2 < 2n^2, \forall n \geq 3$]. f) $n^3 < 2^n, \forall n \geq 10$ [để ý $(n+1)^3 < 2n^3, \forall n \geq 4$].

g) $2^{-1}n + 1 \leq 1^{-1} + 2^{-1} + 3^{-1} + \cdots + (2^n)^{-1} \leq (n+1), \forall n \geq 0$.

h) $8 \mid (3^n + 7^n - 2), \forall n \geq 0$. i) $4 \mid (6.7^n - 2.3^n), \forall n \geq 0$. j) $3^{n+1} \mid (2^{3^n} + 1), \forall n \geq 0$.

k) Cho $a \in \mathbf{R} \setminus \{ \mathbf{0} \}$ và $(a + a^{-1})$ là số nguyên. Chứng minh $(a^n + a^{-n})$ là số nguyên, $\forall n \geq 1$.

l) Cho dãy số Fibonacci $a_o = 0$, $a_1 = 1$ và $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \forall n \geq 0$. Chứng minh rằng $\forall n \geq 0$,
$a_n = (\sqrt{5})^{-1}(\alpha^n - \beta^n)$ với α và β là hai nghiệm thực của phương trình $x^2 - x - 1 = 0$ thỏa $\alpha > \beta$.

9/ Giải thích sự đúng đắn của các sự suy luận dưới đây (p, q, r, s, t và u là các biến mệnh đề):

a) $[\, p \wedge (p \to q) \wedge (s \vee r) \wedge (r \to \overline{q}) \,] \Rightarrow (s \vee t)$. b) $[\, (\overline{p} \vee q) \wedge (\overline{p} \to r) \wedge (\overline{r} \vee s) \,] \Rightarrow (\overline{q} \to s)$.

c) $\{ \overline{s} \wedge [\, (\overline{p} \vee q) \to r \,] \wedge \overline{u} \wedge [\, r \to (s \vee t) \,] \wedge (u \vee \overline{t}) \} \Rightarrow p$. d) $[\, (p \to q) \wedge \overline{r} \wedge \overline{q} \,] \Rightarrow \overline{p \vee r}$.

e) $\{ [\, p \to (q \to r) \,] \wedge (t \to q) \wedge \overline{s} \wedge (p \vee s) \} \Rightarrow (\overline{r} \to \overline{t})$. f) $(p \wedge r \wedge \overline{q}) \Rightarrow [\, (p \wedge r) \vee q \,]$.

g) $\{ [\, p \to (q \to r) \,] \wedge (\overline{q} \to \overline{p}) \wedge p \} \Rightarrow r$. h) $\{ [\, (p \wedge q) \to r \,] \wedge (r \to s) \wedge \overline{s} \} \Rightarrow (p \to \overline{q})$.

i) $\{ (p \to q) \wedge (r \to s) \wedge [\, (s \wedge q) \to (p \wedge t) \,] \wedge (t \to \overline{p}) \} \Rightarrow (\overline{p} \vee \overline{r})$. j) $[\, p \wedge (p \to q) \wedge (r \vee \overline{q}) \,] \Rightarrow r$.

k) $\{ (p \to q) \wedge (r \to s) \wedge [\, (s \vee q) \to t \,] \wedge \overline{t} \} \Rightarrow (\overline{p} \wedge \overline{r})$. l) $[\, (p \to q) \wedge (\overline{r} \vee \overline{q}) \wedge r \,] \Rightarrow \overline{p}$.

m) $\{ [\, p \to (r \wedge q) \,] \wedge p \wedge q \wedge [\, r \to (s \vee t) \,] \wedge \overline{s} \} \Rightarrow t$. n) $[\, (p \vee q) \wedge (p \to r) \wedge \overline{r} \,] \Rightarrow q$.

10/ Chỉ ra sự sai lầm của các sự suy luận dưới đây (p, q, r và s là các biến mệnh đề):

a) $[(p \vee q) \wedge r] \Leftrightarrow [p \vee (q \wedge r)]$. b) $[(p \wedge q) \to r] \Leftrightarrow [p \wedge (q \to r)]$. c) $\{ [\, p \wedge (\overline{r} \vee \overline{q}) \,] \vee \overline{p \to q} \} \Leftrightarrow \mathbf{1}$.

d) $\{ [\, (p \to q) \wedge (q \to r) \,] \vee [\, (p \to (q \to r) \,] \} \Leftrightarrow \mathbf{O}$. e) $\{ [\, p \to \{ (q \to r) \wedge s \}] \wedge [\, s \to (\overline{r} \wedge p) \,] \} \Leftrightarrow \mathbf{1}$.

f) $[\, (\overline{r} \wedge q) \vee (s \to \overline{p}) \,] \Leftrightarrow \overline{q}$. g) $[\, p \to (q \to r) \,] \Rightarrow (p \to r)$. h) $[(p \wedge q) \to r] \Rightarrow [(p \to r) \wedge (q \to r)]$.

i) $[\, (\overline{p} \to q) \wedge q \,] \Rightarrow \overline{p}$. j) $[\, (p \to q) \wedge \overline{p} \,] \Rightarrow \overline{q}$. k) $[\, (p \leftrightarrow q) \wedge (q \to r) \wedge (\overline{s} \to q) \wedge (r \vee \overline{s}) \,] \Rightarrow s$.

l) $\{ (p \to r) \wedge p \wedge [\, p \to (q \vee \overline{r}) \,] \wedge (\overline{s} \vee \overline{q}) \} \Rightarrow s$. m) $\{ [\, (p \vee r) \to q \,] \vee (q \to p) \} \Rightarrow (p \to q)$.

n) $[\, (p \wedge q \wedge r) \vee \overline{p \vee (q \wedge r)} \,] \Rightarrow \{ [\, p \wedge (q \vee r) \,] \vee \overline{p \vee q \vee r} \}$.

11*/ Cho các vị từ p(x) và q(x) theo biến $x \in A$. Chứng minh:

a) $[\, \forall x \in A, p(x) \wedge q(x) \,] \Leftrightarrow [\, (\forall x \in A, p(x)) \wedge (\forall x \in A, q(x)) \,]$.

b) $[\, \exists x \in A, p(x) \vee q(x) \,] \Leftrightarrow [\, (\exists x \in A, p(x)) \vee (\exists x \in A, q(x)) \,]$.

c) $[\, \exists x \in A, p(x) \wedge q(x) \,] \Rightarrow [\, (\exists x \in A, p(x)) \wedge (\exists x \in A, q(x)) \,]$.

d) $[\, (\forall x \in A, p(x)) \vee (\forall x \in A, q(x)) \,] \Rightarrow [\, \forall x \in A, p(x) \vee q(x) \,]$.

Cho ví dụ để thấy chiều đảo của c) và d) là không đúng.

12*/ Cho các vị từ p(x) và q(x) theo biến $x \in A$. Giải thích sự đúng đắn của các sự suy luận dưới đây:

a) $\{ [\, \forall x \in A, p(x) \to (q(x) \wedge r(x)) \,] \wedge [\, \forall x \in A, p(x) \wedge s(x) \,] \} \Rightarrow [\, \forall x \in A, r(x) \wedge s(x) \,]$.

b) $\{ [\, \forall x \in A, p(x) \vee q(x) \,] \wedge [\, \exists x \in A, \overline{p(x)} \,] \wedge [\, \forall x \in A, \overline{q(x)} \vee r(x) \,] \wedge [\, \forall x \in A, s(x) \to \overline{r(x)} \,] \}$

$\Rightarrow [\, \exists x \in A, \overline{s(x)} \,]$.

CHƯƠNG 2 : TẬP HỢP VÀ ÁNH XẠ.

1/ Liệt kê các tập hợp sau đây:
$A = \{1 + (-1)^n / n \in \mathbf{N}\}$, $B = \{n + n^{-1} / n \in \mathbf{N^*}\}$, $C = \{x = (m/n) / m, n \in \mathbf{Z}, n \neq 0, m^2 < 2$ và $6n > n^2 - 7\}$,
$D = \{ 2\sin(n\pi/6) + 5 / n \in \mathbf{Z} \}$, $E = \{ x = (m / n) / m, n \in \mathbf{Z}, \sqrt{17} < n \leq \sqrt{80}$ và $2^{-1} < x < 1 \}$,
$F = \{ x \in \mathbf{Z} / (x^2 + 3x - 10)(x + 4)^{-1} \leq 0 \}$ và $G = \{ x \in \mathbf{Q} / x^4 \geq 256$ và $x = \sqrt{3}\cos x - \sqrt{2}\sin 3x \}$.

2/ Cho $A, B \subset \mathbf{R}$. Viết $\overline{A}, \overline{B}$, $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ thành phần hội của các khoảng rời nhau trong **R**.
a) $A = (-9, -3) \cup [-1,2] \cup [4,5) \cup (7,11] \cup (13,+\infty]$ và $B = (-\infty,-7] \cup [-4,-2) \cup (0,3) \cup (6,8] \cup [10,15]$.
b) $A = (-\infty, -4) \cup [4, 7] \cup \{-1, 2, 8, 10\}$ và $B = (-5, 1] \cup [6, 9) \cup \{-6, 3, 5, 10\}$.

3/ Cho $A, B, C, D \subset E$. Hãy rút gọn các biểu thức tập hợp sau đây:
a) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$. b) $(A \cup B) \setminus [(A \setminus B) \cup (A \cap B)]$. c) $\overline{A} \cup \overline{B} \cup (A \cap B \cap \overline{C})$.
d) $(A \cap B) \cup (A \cap B \cap \overline{C} \cap D) \cup (\overline{A} \cap B)$. e) $\overline{A} \cup (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap B \cap C \cap \overline{D})$.

4/ Cho $A, B, D \subset E$. Chứng minh:
a) $D \setminus (A \cup B) = (D \setminus A) \cap (D \setminus B) = (D \cup B) \setminus (A \cup B)$. b) $D \setminus (A \cap B) = (D \setminus A) \cup (D \setminus B)$.
c) $(A \cup B) \setminus D = (A \setminus D) \cup (B \setminus D)$. d) $(A \cap B) \setminus D = (A \setminus D) \cap (B \setminus D)$.
e) $(A \setminus B) \setminus D = A \setminus (B \cup D) = (A \setminus D) \setminus (B \setminus D)$.

5*/ Cho $A, B, H, K \subset E$. Chứng minh:
a) $[(A \cap H) \cup (B \cap K)] \subset [(A \cup B) \cap (H \cup K)]$. b) $(A \setminus H) \subset [(A \setminus B) \cup (B \setminus H)]$.
c) $[(A \cup B) \setminus (H \cup K)] \subset [(A \setminus H) \cup (B \setminus K)] \subset [(A \cup B) \setminus (H \cap K)]$.
d) $[(A \cup B) \setminus H] \subset [A \cup (B \setminus H)]$. e) $[(A \cup B) \setminus (A \cup H)] \subset (B \setminus H)$.
Cho các ví dụ để thấy trường hợp không có dấu đẳng thức xảy ra trong a), b), c), d) và e).

6/ Cho $A = \{0, 1, a\}$, $B = \{a, 2\}$ và $C = \{2, b\}$.
a) Liệt kê các tập hợp A^2, $A \times B$, $C \times A$, $B \times C$ và $C \times B$.
b) Liệt kê các tập hợp B^3, $A \times B^2$, $C \times A \times C$, $A \times B \times C$ và $C^2 \times B$.

7*/ Cho $A, B \subset E$ và $H, K \subset F$. Chứng minh
a) $A \times (H \setminus K) = (A \times H) \setminus (A \times K)$. b) $[(A \times H) \setminus (B \times K)] = [(A \setminus B) \times H] \cup [A \times (H \setminus K)]$.
c) $(A \times H) \cap (B \times K) = (A \cap B) \times (H \cap K)$. d) $[(A \times H) \cup (B \times K)] \subset [(A \cup B) \times (H \cup K)]$.
e) $[(A \setminus B) \times (H \setminus K)] \subset [(A \times H) \setminus (B \times K)]$.
Cho các ví dụ để thấy trường hợp không có dấu đẳng thức xảy ra trong d) và e).

8/ Các qui tắc $f : X \to Y$ sau có phải là ánh xạ không ? Tại sao ?
a) $X = (-2, 1]$, $Y = \mathbf{R}$, $f(x) = x(x^2 + 2x - 3)^{-1}$, $\forall x \in X$. b) $X = \mathbf{R}$, $Y = (6, +\infty)$, $f(x) = e^x + 9e^{-x}$, $\forall x \in X$.
c) $X = Y = \mathbf{R}$, $f(x) = \ln|\sin x|$, $\forall x \in X$. d) $X = [-1, +\infty)$, $Y = \mathbf{R}$, $f(x) = y$ sao cho $y^2 - 2y = x$, $\forall x \in X$.
e) $X = [1, 3]$, $Y = \mathbf{R}\setminus\{0\}$, $f(x) = 3x^2 - 9x + 5$, $\forall x \in X$. f) $X = \mathbf{Q}$, $Y = \mathbf{Z}$, $f(m/n) = m^2 + 3n - mn$, $\forall (m/n) \in X$.

9/ Xét tính đơn ánh và toàn ánh của các ánh xạ $f : X \to Y$ sau:
a) $X = Y = \mathbf{R}$, $f(x) = x(x^2 + 1)^{-1}$, $\forall x \in X$. b) $X = [-2, +\infty)$, $Y = (-20, +\infty)$, $f(x) = x^2 + 6x - 3$, $\forall x \in X$.
c) $X = Y = \mathbf{R}$, $f(x) = (x - 1)(x + 3)(x - 4)$, $\forall x \in X$. d) $X = \mathbf{R}\setminus\{0\}$, $Y = \mathbf{R}$, $f(x) = (2x - 3)x^{-1}$, $\forall x \in X$.
e) $X = \mathbf{R}$, $Y = [-2, 2]$, $f(x) = \sin x + \sqrt{3}\cos x$, $\forall x \in X$. f) $X = Y = \mathbf{R}$, $f(x) = 3\cos 2x - 7x + 8$, $\forall x \in X$.

10/ Xác định $u = g_o f$, $v = f_o g$ (nếu có) và $w = h_o g_o f$ khi $f : X \to Y$, $g : Z \to T$ và $h : U \to V$ trong đó:
a) $X = Y = Z = T = U = V = \mathbf{R}$, $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x^2 + x - 3$ và $h(x) = x^3 + 4\cos x$.

b) $X = T = U = (0, +\infty)$, $Y = Z = \mathbf{R}$, $V = [1, +\infty)$, $f(x) = 3\ln x - 2$, $g(x) = e^{\sin x}$ và $h(x) = 5x^4 - x^2 + 1$.
c) $X = V = \mathbf{R}$, $Y = Z = \mathbf{R}\backslash\{1\}$, $T = U = \mathbf{R}\backslash\{-3\}$, $f(x) = x^2 - 4x + 6$, $g(x) = (3x + 2)(1 - x)^{-1}$ và $h(x) = \ln| x + 3|$.

11*/ Tìm $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$, $f(D)$, $f(E)$, $f(\mathbf{R})$, $f^{-1}(G)$, $f^{-1}(H)$, $f^{-1}(K)$, $f^{-1}(L)$, $f^{-1}(M)$ và $f^{-1}(N)$ nếu:
a) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ với $f(x) = x - 5$ (nếu $x \le 1$) và $f(x) = 2x + 1$ (nếu $x > 1$) trong đó
$A = \{ -1, 0, 1, 2, 3 \}$, $B = [1,3]$, $C = (-1,2)$, $D = (-\infty, 0]$ và $E = (3, +\infty)$,
$G = \{ -7, -5, -3, 1, 2, 5, 7, 9 \}$, $H = [-7, -5]$, $K = (-5, 5)$, $L = [7, +\infty)$, $M = [1, 9)$ và $N = (-3, 2]$.
b) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ với $f(x) = x + 7$ (nếu $x \le 0$), $f(x) = 5 - 2x$ (nếu $0 < x < 3$) và $f(x) = x - 1$ (nếu $x \ge 3$)
trong đó $A = \{ -2, -1, 0, 1, 2, 4, 5 \}$, $B = [-2, 1]$, $C = (2, 4)$, $D = (-1, 5]$, $E = [0, +\infty)$,
$G = \{-5, -2, -1, 0, 4, 5, 7, 10, 11\}$, $H = [-5, -1]$, $K = (-\infty, 0]$, $L = [-2, 4)$, $M = (5, 10]$ và $N = (7, 11)$.

12/ Chứng minh các ánh xạ dưới đây là song ánh và viết ánh xạ ngược của chúng:
a) $f : \mathbf{R} \to (-1, 1)$, $f(x) = x(1 + | x |)^{-1}$.
b) $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = e^x - 3e^{-x} + 1$.
c) $h : [1, 2) \to [5, 7)$, $h(x) = 3x + 2x^{-1}$.
d) $p : \mathbf{R} \to (-2, 3)$, $p(x) = (9 - 2e^x)(e^x + 3)^{-1}$.
e) $q : \mathbf{R} \setminus \{1\} \to \mathbf{R} \setminus \{-3\}$, $q(x) = (5 - 3x)(x - 1)^{-1}$.
f) $r : (0, 3] \to (2, 4^{-1}.17]$, $r(x) = (x + 1) + (x + 1)^{-1}$.
g) Tìm các ánh xạ u,v,w thỏa $p^{-1} \circ u = g$, $v \circ f = g$ và $f^{-1} \circ w \circ p = g$.

<u>CHƯƠNG 3:</u> PHƯƠNG PHÁP ĐẾM.

1/ Cho các tập hợp hữu hạn A, B, C $\subset$ E.
Chứng minh $| A \cup B \cup C | = | A | + | B | + | C | - (| A \cap B | + | B \cap C | + | C \cap A |) + | A \cap B \cap C |$.

2/ Cho $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{2,4,5,7,9\}$, $B = \{2,5,9\}$, $C = \{1,3,8\}$ và $D = \{0, 2, 4, 5, 7, 8, 9\}$.
a) Có bao nhiêu tập hợp $X \subset E$ thỏa $\overline{X} = A$?
b) Có bao nhiêu tập hợp Y, Z, T, W $\subset$ E thỏa $A \cap Y = B$, $A \cup Z = D$, $(A \setminus T) = B$ và $(W \setminus A) = C$?

3*/ Có bao nhiêu số nguyên tự nhiên chẵn (hoặc dãy số với chữ số cuối cùng chẵn) gồm 6 chữ số khác nhau mà trong đó có chữ số 0 ?

4/ Cho $S = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \}$. Có bao nhiêu tập hợp $A \subset S$ thỏa:
a) $| A | = 5$? b) $| A | = 5$ và $\min A = 3$? c) $| A | = 5$ và $\min A \le 3$? d) $| A | = 5$ và $\min A \ge 4$?

5/ Cho $S = \{1, 2,\ldots, n\}$. Có bao nhiêu tập $A \subset S$ sao cho A có ít nhất một số nguyên chẵn ? (xét n chẵn, lẻ).

6/ Tìm $n \ge 7$ biết rằng chỉ có một phần tư số tập con gồm 5 phần tử của $S = \{ 1, 2, \ldots, n \}$ có chứa số 7.

7/ Cho $S = \{ 1, 2, 3, \ldots, 14, 15 \}$. Có bao nhiêu tập hợp $A \subset S$ mà a) A chỉ có toàn số lẻ ?
b) A có 3 số lẻ ? c) $| A | = 8$ và A có 3 số lẻ ? d) A có 3 số lẻ và ít nhất 5 số chẵn ?

8*/ Có bao nhiêu cách chia n sinh viên thành 2 đội ($n \ge 2$) mà trong đó:
a) một đội học Anh Văn và một đội học Pháp văn ?
b) cả hai đội cùng đi làm công tác xã hội như nhau ? (xét n chẵn, lẻ).

9/ Từ 10 nam và 10 nữ, có bao nhiêu cách chọn ra một đội gồm 12 người thỏa: a) chọn tùy ý ?
b) đội có 6 nam ? c) đội có ít nhất 8 nam ? d) đội có số nam ít hơn số nữ ? e) đội có số nam chẵn ?

10/ Có bao nhiêu byte khác nhau chứa:
a) 3 bit 1 ? b) ít nhất 4 bit 1 ? c) không quá 5 bit 1 ? d) ít nhất 3 bit 0 và 3 bit 1 ?

11/ Có bao nhiêu cách chia 12 bút khác nhau cho 4 đứa trẻ nếu:
a) mỗi đứa được 3 bút? b) hai đứa lớn mỗi đứa 4 bút và hai đứa nhỏ mỗi đứa 2 bút?

12/ Tìm hệ số của đơn thức:
a) $x^4y^2z^3t^2$ trong khai triển $(x + 2y - z + 4t - 5u)^{11}$. b) $x^3y^9z^4t^3$ trong khai triển $(2x - y^3 - 3z^2 + 4t^3)^9$.

13*/ Xét tất cả các tam giác tạo từ 3 đỉnh khác nhau của một đa giác đều có n cạnh ($n \geq 4$).
a) Có tất cả bao nhiêu tam giác như vậy ? b) Có bao nhiêu tam giác có chung hai cạnh với đa giác trên ?
c) Có bao nhiêu tam giác có chung đúng một cạnh với đa giác trên ?
d) Có bao nhiêu tam giác không có chung cạnh nào với đa giác trên ?

14/ Có bao nhiêu cách xếp: a) 6 nam và 5 nữ xen kẽ nhau thành một hàng dọc ?
b) 6 nam và 5 nữ thành một hàng dọc sao cho 6 nam đứng gần nhau ?
c) 6 nam và 5 nữ thành một hàng dọc sao cho 5 nữ đứng gần nhau ?
d) 6 nam và 5 nữ thành một hàng dọc sao cho 6 nam đứng gần nhau ***và*** 5 nữ đứng gần nhau ?
e) 6 nam và 5 nữ thành một hàng dọc sao cho 6 nam đứng gần nhau ***hay*** 5 nữ đứng gần nhau ?
f) 6 bác sĩ, 7 kỹ sư và 8 luật sư thành một hàng ngang sao cho các đồng nghiệp đứng gần nhau ?

15*/ Có bao nhiêu cách xếp 5 cặp vợ chồng vào một bàn tròn có 10 ghế được đánh số thứ tự nếu:
a) xếp tùy ý ? b) những người nam ngồi gần nhau ? c) vợ chồng ngồi gần nhau ?

16/ Có bao nhiêu cách treo 3 áo đỏ, 4 áo trắng và 5 áo xanh thành một hàng dọc (các áo khác nhau) nếu:
a) treo tùy ý ? b) các áo cùng màu treo gần nhau ? c) các áo màu trắng treo gần nhau ?
d) các áo màu đỏ treo gần nhau và các áo màu xanh treo gần nhau ? e) áo ở đầu hàng có màu xanh ?
f) áo ở đầu hàng có màu đỏ và áo ở cuối hàng có màu trắng ?

17/ Làm lại bài **16** nhưng với giả thiết là các áo cùng màu được xem là giống nhau ?

18/ Có bao nhiêu cách chọn 20 tờ giấy bạc từ các loại tiền 1 đồng, 2 đồng, 5 đồng, 10 đồng và 20 đồng ?
Nếu yêu cầu thêm có ít nhất 7 tờ 5 đồng và không quá 8 tờ 20 đồng thì có bao nhiêu cách chọn ?

19/ Tìm số nghiệm nguyên của phương trình $x + y + z + t = 32$ (*hay bất phương trình* $x + y + z + t \leq 32$)
nếu :
a) $x, y, z, t \geq 0$. b) $x \geq 2, y \geq 3, z \geq 1, t > 5$. c) $x > -1, y \geq -4, z > 4, t \geq 3$. d) $x, y, z > 0$ và $1 \leq t < 25$.

20/ Có bao nhiêu cách chia 18 viên kẹo giống nhau cho 5 đứa trẻ nếu
a) chia tùy ý ? b) đứa nào cũng được kẹo ? c) đứa lớn nhất có 6 viên ?
d) đứa nhỏ nhất được ít nhất 4 viên ? e) đứa lớn nhất nhận không quá 7 viên ?

21/ Khi khai triển $(x + y + z + t)^{10}$, ta được bao nhiêu đơn thức khác nhau ? Trong số đó có bao nhiêu đơn thức $x^my^nz^u t^v$ (không kể hệ số $\neq 0$ ở phía trước) thỏa $m \geq 2, n \leq 3$ và $v \geq 1$?

22/ Có bao nhiêu cách chia 15 viên kẹo chanh (giống nhau) và 10 viên kẹo dừa (giống nhau) cho 6 đứa trẻ sao cho đứa nào cũng có cả hai thứ kẹo ?

23/ Có bao nhiêu cách mua 20 hộp sơn với đúng 7 màu trong số 10 màu mà cửa hàng có ?

24*/ Xét chuỗi ký tự bao gồm phần mẫu tự đứng trước và phần chữ số đứng sau. Phần mẫu tự có 9 mẫu tự $\alpha, \alpha, \beta, \beta, \beta, \gamma, \gamma, \gamma, \gamma$ xếp tùy ý (α, β, γ là 3 mẫu tự khác nhau lấy tùy ý từ A, E, H, P, Y). Phần chữ số là 6 chữ số xyzuvw (x, y, z, u, v, w là các chữ số hệ thập phân) thỏa $7 \leq x + y + z + u + v + w \leq 9$.
Hỏi có tất cả bao nhiêu chuỗi ký tự như vậy ?

25/ Cho $A \subset S = \{ 1, 2, \dots , 25 \}$ với $| A | \geq 14$. Chứng minh rằng có $a, b \in A$ thỏa $a \neq b$ và $a + b = 26$.

26*/ Cho $A \subset S = \{ 1, 2, \dots , 100 \}$ với $| A | \geq 11$. Chứng minh rằng có $x, y \in A$ thỏa $0 < | \sqrt{x} - \sqrt{y} | < 1$.
Tổng quát hóa kết quả trên theo hai hướng khác nhau: theo $| S |$ hoặc theo ($\sqrt[n]{x}$ và $\sqrt[n]{y}$).

27/ Lấy 10 điểm khác nhau tùy ý trên một tam giác đều có cạnh bằng 3 cm.
Chứng minh rằng trong số đó có ít nhất 2 điểm có khoảng cách không quá 1 cm.

28/ Từ thứ hai đến thứ bảy của mỗi tuần có 12 buổi (sáng và chiều). Có 782 sinh viên đăng ký học đàn theo các buổi nói trên trong tuần: mỗi sinh viên có thể chọn từ 2 đến 4 buổi.
Chứng minh rằng có ít nhất 2 sinh viên có lịch học trong tuần hoàn toàn giống nhau.

29*/ Xếp các con số 1, 2, … , 25 một cách tùy ý trên một đường tròn. Chứng minh rằng có 3 số gần nhau trên đường tròn có tổng ≥ 41 và có 3 số gần nhau trên đường tròn có tổng ≤ 37.

30*/ Cho $A \subset S = \{ 1, 2, \dots , 14 \}$ thỏa $| A | \geq 6$.
Chứng minh có $H, K \subset A$ (mà $\varnothing \neq H \neq K \neq \varnothing$) thỏa $| H | \leq 5, | K | \leq 5$ và $\sum_{h \in H} h = \sum_{k \in K} k$.

<u>CHƯƠNG 4 :</u> HỆ THỨC ĐỆ QUI.

1/ Giải các hệ thức đệ qui tuyến tính thuần nhất sau đây:
a) $a_o = 2$ và $a_{n+1} = -3a_n, \forall n \geq 0$. b) $a_1 = -5$ và $a_n = 8a_{n-1}, \forall n \geq 2$. c) $a_2 = 28, a_3 = -8$ và $a_n = 4a_{n-2}, \forall n \geq 4$.
d) $a_o = 1, a_1 = 0$ và $a_{n+1} = 5a_n - 6a_{n-1}, \forall n \geq 1$. e) $a_1 = 6, a_2 = 8$ và $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n, \forall n \geq 1$.

2/ Giải các hệ thức đệ qui tuyến tính không thuần nhất sau đây:
a) $a_o = -3$ và $a_n = a_{n-1} + 9, \forall n \geq 1$. b) $a_1 = 13$ và $a_{n+2} = -2a_{n+1} + 5.3^{n+1}, \forall n \geq 0$.
c) $a_2 = 61$ và $a_{n+1} = 3a_n + 4n - 6, \forall n \geq 2$. d) $a_o = -7$ và $a_{n+1} = -4a_n - 2(-4)^{n+1}(n - 2), \forall n \geq 0$.
e) $a_3 = 128$ và $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 12, \forall n \geq 2$.

3/ Giải các hệ thức đệ qui tuyến tính không thuần nhất sau đây:
a) $a_o = 1, a_1 = 2$ và $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n + 4, \forall n \geq 0$. b) $a_1 = -4, a_2 = 19$ và $a_{n+1} = 5a_n - 4a_{n-1} + 3, \forall n \geq 2$.
c) $a_2 = -5, a_3 = -26$ và $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} - 10, \forall n \geq 4$.
d) $a_o = 3, a_1 = -5$ và $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} + 8(-1)^{n+1}, \forall n \geq 2$.
e) $a_1 = -13, a_2 = 50$ và $a_{n+2} = -7a_{n+1} - 10a_n + (40n - 1) 3^n, \forall n \geq 1$.
f) $a_2 = -28, a_3 = -149$ và $a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} - 12n^2 - 24n + 4, \forall n \geq 3$.

4/ Tính các tổng số sau theo n nguyên:
a) $S_n = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$ $(n \geq 1)$. b) $S_n = 1^4 + 2^4 + \cdots + n^4$ $(n \geq 1)$.
c) $S_n = -1^4 + 2^4 + \cdots + (-1)^n n^4$ $(n \geq 1)$. d) $S_n = \sum_{k=0}^{n} (k+1)(k+2)2^k$ $(n \geq 0)$.
e) $S_n = \sum_{k=0}^{n} (2k-1)(-3)^k$ $(n \geq 0)$. f) $S_n = \sum_{k=1}^{n} (k^3 - 2k^2 + 4k)(-1)^k$ $(n \geq 1)$.

5*/ Vẽ n đường thẳng trong mặt phẳng cắt nhau từng đôi một nhưng không được có 3 đường thẳng nào đồng qui $(n \geq 1)$. Các đường thẳng này chia mặt phẳng thành bao nhiêu miền rời nhau từng đôi một ?

6*/ Giả sử dân số thế giới năm 2000 là 7 tỉ người và tốc độ tăng dân số thế giới là 3% mỗi năm.
Tính dân số thế giới vào năm n $(n \geq 2000)$.

7*/ Có bao nhiêu chuỗi ký tự gồm n ký tự (n ký tự này được lấy tùy ý từ các ký tự a, b, c) sao cho trong chuỗi ký tự không có 2 ký tự a đứng gần nhau ($n \geq 1$) ?

8*/ Có bao nhiêu chuỗi ký tự gồm n ký tự (n ký tự này được lấy tùy ý từ các ký tự 1, 2) sao cho trong chuỗi ký tự ít nhất 2 ký tự 1 đứng gần nhau ($n \geq 1$) ?

9*/ Cho $a_o = \alpha$, $a_1 = \beta$ và $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \forall n \geq 0$. Chứng minh rằng $a_n = \beta f_n + \alpha f_{n-1}, \forall n \geq 1$ trong đó f_m là số hạng thứ m ($m \geq 0$) của dãy số Fibonacci ($f_o = 0$, $f_1 = 1$ và $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \forall n \geq 0$).

10*/ Tính a_n và b_n biết rằng $a_o = 1$, $b_o = 2$, $a_{n+1} = 3a_n + 2b_n$ và $b_{n+1} = a_n + 2b_n, \forall n \geq 0$.
(Hướng dẫn: Tìm λ, μ thỏa $a_{n+1} + \lambda b_{n+1} = \mu(a_n + \lambda b_n)$ và tính $u_n = a_n + \lambda b_n, \forall n \geq 0$).

CHƯƠNG 5 : TẬP HỢP SỐ NGUYÊN.

Ký hiệu : $\mathbf{N}^* = \mathbf{N} \setminus \{0\}$ và $\mathbf{Z}^* = \mathbf{Z} \setminus \{0\}$.

1/ Tìm tất cả $k \in \mathbf{Z}$ thỏa

a) $(k^2 + 5k + 5)(k^2 - 2k - 9) = 1$. b) $(3k^2 + 4k - 17)(-5k^2 + k + 49) = -2$.

2*/ Cho $m, n \in \mathbf{N}^*$. Ký hiệu $\exists!$ được hiểu là " tồn tại duy nhất ". Chứng minh

a) $\exists!\ k \in \mathbf{N}^*, k^n \leq m < (k+1)^n$. b) $\exists!\ q, r \in \mathbf{N}, m = q^2 + r$ và $0 \leq r < (2q+1)$.

3*/ Cho $a_j = r_j^2 + s_j^2$ với $r_j, s_j \in \mathbf{Z}$ ($j = 1, 2, \ldots, n$).
Đặt $a = a_1 a_2 \ldots a_n$. Chứng minh có $r, s \in \mathbf{Z}$ thỏa $a = r^2 + s^2$.

4*/ Tìm tất cả $x, y \in \mathbf{Z}$ thỏa:

a) $x + y + xy = 0$. b) $x + y - xy = 0$. c) $3^x = 4y + 1$.

5*/ Cho số nguyên k lẻ và k *không* chia hết cho 3.
Chứng minh $k = 6t \pm 1$ với $t \in \mathbf{Z}$. Từ đó tìm số dư khi chia Euclide k^2 cho 24.

6*/ Cho $n \in \mathbf{N}$ và $k \in \mathbf{Z}$. Chứng minh:

a) $7 \mid (2^n - 1) \Leftrightarrow 3 \mid n$. b) 7 *không* chia hết $(2^n + 1)$. c) 100 *không* chia hết $(9^n + 1)$.
d) $11 \mid (k^2 + 3k + 5) \Leftrightarrow k = 4t + 11$ với $t \in \mathbf{Z}$. e) 121 *không* chia hết $(k^2 + 3k + 5)$.

7*/ Cho $a, b \in \mathbf{Z}$, $x, y, z \in \mathbf{Z}^*$ và số nguyên tố $p = 3, 7, 11$ hoặc 19. Chứng minh:

a) ($p \mid a$ và $p \mid b$) $\Leftrightarrow p \mid (a^2 + b^2)$. Kết quả này sai nếu $p = 2, 5, 13$ hoặc 17. b) $x^4 + y^4 \neq pz^2$.

8*/ Cho $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$ và $n \in \mathbf{N}^*$ sao cho $a \equiv b$ và $c \equiv d \pmod{n}$.
Chứng minh $ac \equiv bd \pmod{n}$ và $(a \pm c) \equiv (b \pm d) \pmod{n}$.

9*/ Cho $m, x, y, t \in \mathbf{Z}$. Chứng minh:

a) $m^2 \equiv 0$ hoặc $1 \pmod{4}$ và $x^2 + y^2 \neq 6t^2 + 10t + 527$.
b) $m^2 \equiv 0$ hoặc 1 hoặc $4 \pmod{8}$ và $x^2 + 2y^2 + 4t^2 - 12t \neq 983$.

10/ Tìm $d = (m, n)$, $e = [\,m, n\,]$ và dạng tối giản của (m / n) theo 2 cách khác nhau, tìm $a, b, u, v \in \mathbf{Z}$ sao cho $d = am + bn$, $e^{-1} = um^{-1} + vn^{-1}$ nếu m và n lần lượt là:

a) 43 và 16. b) – 352 và 128. c) – 442 và 276. d) – 675 và – 459. e) 936 và 715.
f) 6234 và – 3312. g) – 35298 và 6768. h) – 8820 và – 36288. i) 17640 và 12096.
j) 87657 và – 44441. k) – 654321 và 123456. l) – 7114800 và – 148500.

11*/ Cho $m, n \in \mathbf{Z}^*$. Chứng minh $(m, n) = [m, n] \Leftrightarrow |m| = |n|$.

12*/ Cho $r, s \in \mathbf{Z}^*$. $\forall a, b \in \mathbf{Z}$, đặt $a\mathbf{Z} = \{ ak / k \in \mathbf{Z} \}$ và $a\mathbf{Z} + b\mathbf{Z} = \{ ak + bt / k, t \in \mathbf{Z} \}$.

a) Chứng minh $(r\mathbf{Z} \subset s\mathbf{Z} \Leftrightarrow s | r)$, $r\mathbf{Z} + s\mathbf{Z} = (r, s)\mathbf{Z}$ và $r\mathbf{Z} \cap s\mathbf{Z} = [r, s]\mathbf{Z}$.

b) Rút gọn $(24\mathbf{Z} + 36\mathbf{Z} + 60\mathbf{Z} + 84\mathbf{Z})$ và $(4\mathbf{Z} \cap 6\mathbf{Z} \cap 9\mathbf{Z} \cap 10\mathbf{Z} \cap 15\mathbf{Z})$.

13/ Chứng minh $\forall k \in \mathbf{Z}$, $(14k + 3, 21k + 4) = 1$, $(24k + 2, -60k - 4) = 2$, $(18k - 12, 21k - 30) = 3$ và $(20 - 75k, 25 - 100k) = 5$.

14*/ Cho các số nguyên tố $p > 0$ và m. Chứng minh n không phải là số nguyên tố nếu:

a) $m = p + 4$ và $n = p + 8$. b) $m = 8p - 1$ và $n = 8p + 1$. c) $p \neq 3$, $m = 20p + 1$, $n = 10p + 1$.

15*/ Cho $n, k \in \mathbf{N}^*$ và $nk \neq 1$.

a) Chứng minh $(n^4 + 4k^4)$ không phải là số nguyên tố.

b) Giả sử $(2^n + 1)$ là số nguyên tố. Chứng minh $\exists m \in \mathbf{N}$, $n = 2^m$.

16*/ Cho số nguyên tố $p > 0$. Tìm tất cả $x, y \in \mathbf{Z}$ thỏa $xy = p(x + y)$.

17*/ Cho số nguyên tố $p > 0$.

a) Cho $k \in \mathbf{Z}^*$. Tính (p, k) và $[p, k]$. b) Chứng minh $p \mid C_p^m$ khi $0 < m < p$.

c) Chứng minh khi chia Euclide p cho $q = 30$ thì số dư $r = 1$ hoặc r là một số nguyên tố. Cho ví dụ để thấy kết quả này không còn đúng khi $t = 10, 20, 40, 50$.

18*/ a) Cho các số nguyên tố dương p và q thỏa $q \mid (p! + 1)$. Chứng minh $q > p$. Suy ra có vô hạn các số nguyên tố dương.

b) Đặt $A = \{ k = (4t + 3) / t \in \mathbf{N} \}$. Chứng minh $\forall k \in A, \exists h \in A$ sao cho h nguyên tố và $h \mid k$. Suy ra A chứa vô hạn số nguyên tố.

19*/ Cho $a, b \in \mathbf{Z}^*$.

a) Giả sử $(a, b) = 1$. Chứng minh $(a + b, ab) = 1$, $(a + b, a - b) = 1$ hoặc 2, $(a + b, a^2 + b^2) = 1$ hoặc 2. Cho các ví dụ minh họa tương ứng.

b) Giả sử $(a, b) = p$ với p là số nguyên tố dương. Chứng minh $(a + b, ab) = p$ hoặc p^2, $(a + b, a - b) = p$ hoặc $2p$, $(a + b, a^2 + b^2) = p$ hoặc $2p$ hoặc p^2 hoặc $2p^2$. Cho các ví dụ minh họa tương ứng.

20*/ Cho $a, b \in \mathbf{Z}^*$.

a) Giả sử $(a, b) = 1$. Tìm tất cả $x, y \in \mathbf{Z}$ thỏa $xa = yb$.

b) Giả sử $(a, b) = d \geq 2$. Tìm tất cả $x, y \in \mathbf{Z}$ thỏa $xa = yb$.

c) Giả sử $r, s \in \mathbf{Z}$ thỏa $ra + sb = (a, b)$. Tìm tất cả $x, y \in \mathbf{Z}$ thỏa $xa + yb = (a, b)$.

d) Áp dụng c) cho $(a = 46, b = 16)$, $(a = -124, b = 64)$ và $(a = 3450, b = -331)$.

21/ Cho $m, n \in \mathbf{N}^*$. Giả sử $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \ldots p_k^{r_k}$ là dạng phân tích thừa số nguyên tố của n.

Giả sử n có 2^m ước số dương. Chứng minh $\forall j \in \{ 1, 2, \ldots, k \}$, $\exists s_j \in \mathbf{N}^*$, $r_j = 2^{s_j} - 1$.

22/ Cho $n = 2^{14}3^9 5^8 7^{10} 11^3 13^8 37^{10}$.

a) Xác định tập hợp các ước số dương và tập hợp các ước số nguyên của n. Từ đó cho biết n có bao nhiêu ước số dương và bao nhiêu ước số nguyên ?

b) n có bao nhiêu ước số dương chia hết cho $2^3 3^4 5^7 11^2 37^2$?

c) n có bao nhiêu ước số nguyên chia hết cho 1.166.400.000 ?

23/ Xác định tập hợp các ước số dương và tập hợp các ước số nguyên của 25!. Mỗi tập hợp này có bao nhiêu phần tử ?

24*/ Cho $k \in \mathbf{N}^*$. Tìm một $n \in \mathbf{N}^*$ sao cho n có đúng k ước số dương.

25*/ Cho $m, n \in \mathbf{N}^*$ và $n \geq 2$.

a) Chứng minh $\sqrt[n]{m} \in \mathbf{N} \Leftrightarrow \sqrt[n]{m} \in \mathbf{Q}$.

b) Giả sử $m = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \ldots p_k^{r_k}$ là dạng phân tích thừa số nguyên tố của m và có $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ thỏa r_j lẻ. Chứng minh $\sqrt[n]{m} \notin \mathbf{Q}$.

CHƯƠNG 6 : QUAN HỆ HAI NGÔI

1/ Đặt $I_k = \{0, 1, \ldots, k\}, \forall k \in \mathbf{N}$. Hãy viết tập hợp $\Re$ và xét các tính chất của quan hệ hai ngôi $\Re$ trên S nếu:

a) $S = I_2, \forall x, y \in S : x \Re y \Leftrightarrow 0 \leq y - x \leq 1$.

b) $S = I_2, \forall x, y \in S : x \Re y \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 2$.

c) $S = I_2, \forall x, y \in S : x \Re y \Leftrightarrow 3x + y \leq 5$.

d) $S = I_3, \forall x, y \in S : x \Re y \Leftrightarrow x + y \geq 4$.

e) $S = I_4, \forall x, y \in S : x \Re y \Leftrightarrow (x = y$ hay $x + 2y = 4)$.

f) $S = I_4, \forall x, y \in S : x \Re y \Leftrightarrow (x + 2) \mid y$.

2/ Xét các tính chất của quan hệ hai ngôi $\Re$ trên S nếu:

a) $S = \mathbf{Z}, \forall x, y \in S : x \Re y \Leftrightarrow x \mid y^2$.

b) $S = \mathbf{Z}, \forall x, y \in S : x \Re y \Leftrightarrow$ y không chia hết x^2.

c) $S = \mathbf{Q}, \forall x, y \in S : x \Re y \Leftrightarrow x = |y|$.

d) $S = \mathbf{Q} \times \mathbf{Q}, \forall (x,u), (y,v) \in S : (x,u) \Re (y,v) \Leftrightarrow x \leq y$.

e) $S = \mathbf{R}, \forall x, y \in S : x \Re y \Leftrightarrow x \neq y$.

f) $S = \mathbf{R}, \forall x, y \in S : x \Re y \Leftrightarrow x = 2^y$ (để ý $2^t > t \ \forall t \in \mathbf{R}$).

3/ Kiểm chứng $\Re$ là một quan hệ tương đương trên S rồi viết các lớp tương đương và tập thương tương ứng:

a) S = { Huế, Paris, Moscou, Rome, Tokyo, Kyoto, Milan, Vinh, Lyon, ĐàLạt, Kobe, Sàigòn, Cairo, Nice, Bonn, Turin, Berlin }, $\forall x, y \in S : x \Re y \Leftrightarrow$ x và y là 2 thành phố thuộc cùng một quốc gia.

b) $S = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}, \forall x, y \in S : x \Re y \Leftrightarrow x^2 + 5x = y^2 + 5y$.

c) $S = \{-4, -2, -\sqrt{3}, -1, 0, 1, \sqrt{3}, 2, 3\}, \forall x, y \in S : x \Re y \Leftrightarrow x^3 + 3y = y^3 + 3x$.

d) $S = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 21, 24, 25, 35, 42, 48\}, \forall x,y \in S : x \Re y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbf{Z} : x = 2^k y$ (k phụ thuộc x và y).

e) $S = \{-11\pi/6, -\pi, -4\pi/5, -\pi/4, -\pi/5, -\pi/7, 0, \pi/6, \pi/3, 5\pi/6, \pi, 5\pi/4, 3\pi\}$ và

$$\forall x, y \in S : x \Re y \Leftrightarrow \sin x = \cos(y + 2^{-1}.7\pi).$$

f) $S = \wp(E)$ với $E = \{1, 2, 3\}, \forall X, Y \in S : X \Re Y \Leftrightarrow X \cap A = Y \cap A$ trong đó $A = \{1, 2\}$.

4*/ Kiểm chứng $\Re$ là một quan hệ tương đương trên $S = \mathbf{R}$ và xác định lớp tương đương $[a]$ của $a \in \mathbf{R}$ tương ứng (biện luận theo tham số thực a):

a) $\forall x, y \in S : x \Re y \Leftrightarrow x^2 + 3x = y^2 + 3y$.

b) $\forall x, y \in S : x \Re y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 2(x - y)$.

c) $\forall x, y \in S : x \Re y \Leftrightarrow x^3 \pm 12y = y^3 \pm 12x$ (xét riêng hai trường hợp + và −).

d) $\forall x, y \in S : x \Re y \Leftrightarrow x^2y + 7x = xy^2 + 7y$.

e) $\forall x, y \in S : x \Re y \Leftrightarrow 4x + xy^2 = x^2y + 4y$.

f) $\forall x, y \in S : x \Re y \Leftrightarrow 2\cos^2 x - \sin(xy)\cos^2 y = 2\cos^2 y - \sin(xy)\cos^2 x$.

5*/ Cho $S = \{a, b, c, d, e, f\}$.

a) Viết tập hợp $\Re$ nếu $\Re$ là quan hệ tương đương trên S có 3 lớp tương đương là $\{a, d, f\}, \{c, e\}$ và $\{b\}$.

b) Trên S có bao nhiêu quan hệ tương đương chia S thành 3 lớp tương đương có số phần tử của các lớp lần lượt là 3, 2, 1 (tương tự như quan hệ tương đương $\Re$) ?

c) Trên S có bao nhiêu quan hệ tương đương chia S thành 3 lớp tương đương ?

6/ Kiểm chứng $\Re$ là một quan hệ thứ tự trên S. Hỏi $\Re$ là thứ tự toàn phần hay bán phần ? Tại sao ?
Vẽ sơ đồ Hasse cho $(S,\Re)$ và tìm min,max và các phần tử tối tiểu và tối đại (nếu có):

a) S = { 2, 3, … , 11, 12 }, $\forall$x, y $\in$ S : x $\Re$ y $\Leftrightarrow$ [(x lẻ và y chẵn) hay (x − y chẵn và x $\le$ y)].
b) S = { 2, 4, 6, 8, 10, 12, 16, 20 }, $\forall$x, y $\in$ S : x y $\Leftrightarrow$ x | y (quan hệ ước số).
c) S = { 2, 3, 4, 6, 8, 16, 24, 32, 48, 96 }, $\forall$x, y $\in$ S : x $\Re$ y $\Leftrightarrow$ x | y.
d) S = { 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30,40, 50 }, $\forall$x, y $\in$ S : x $\Re$ y $\Leftrightarrow$ x ⋮ y (quan hệ bội số).
e) S = { 2, 3, 4, 5, 7, 8, 24, 48, 96 }, $\forall$x, y $\in$ S : x $\Re$ y $\Leftrightarrow$ x ⋮ y.
f) S = { 96, 768, 6, 48, 384, 3, 24 }, $\forall$x, y $\in$ S : x $\Re$ y $\Leftrightarrow$ $\exists$k $\in$ **N**: y = 2^kx (k phụ thuộc x và y).

7/ Cho S = { a = 2^m3^n / m, n $\in$ **N** , m $\le$ 3 và n $\le$ 2 } với các quan hệ thứ tự | và ⋮ .
a) Vẽ sơ đồ Hasse và tìm min,max cho (S, |) và (S,⋮) .
b) Đặt T = S \ { 1, 2, 72 }. Vẽ sơ đồ Hasse rồi tìm các phần tử tối tiểu và tối đại của (T, |) và (T,⋮).

8*/ Cho S = { a, b, c } với quan hệ thứ tự $\prec$.
Giả sử a là một phần tử tối tiểu và c là một phần tử tối đại của (S, $\prec$).
a) Vẽ tất cả các trường hợp khác nhau có thể xảy ra cho sơ đồ Hasse của (S, $\prec$).
b) Yêu cầu như a) nhưng có thêm điều kiện “ b cũng là một phần tử tối đại của (S, $\prec$) ’’ .

9*/ a) Giải thích thứ tự sắp xếp của các từ sau trong từ điển tiếng Anh:
individual, indistinct, real, indite, confirmation, individualism và red.
b) Giải thích thứ tự sắp xếp của các dãy số sau theo thứ tự từ điển:
852604, 74596, 935, 7489, 85297440, 85297311 và 7489231.

10*/ Vẽ sơ đồ Hasse cho (S, $\prec$) rồi toàn phần hóa (sắp xếp topo) các thứ tự bán phần $\prec$ sau:
a) S = { a, b, c, d, e, f, g, h, i } với d $\prec$ a, b $\prec$ e, g $\prec$ e, h $\prec$ f, i $\prec$ e và h $\prec$ d.
b) S = { 1, 2, 4, 5, 12, 15, 20 } với $\prec$ là quan hệ | (ước số) .
c) S = { 2, 3, 6, 7, 8, 9, 12, 16 } với $\prec$ là quan hệ ⋮ (bội số) .
d) S = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 } với $\prec$ là quan hệ | (ước số) .

11/ Viết các phần tử sau dưới dạng chuẩn trong $\mathbf{Z_n}$ (n = 25 và 38):
a) $\overline{\pm 95}$. b) $\overline{\pm 378}$. c) $\overline{\pm 5124}$. d) $\overline{\pm 68047}$. e) $\overline{\pm 815691}$.

12/ Làm các phép tính sau rồi viết kết quả dưới dạng chuẩn trong $\mathbf{Z_n}$ (n = 28 và 43) :

a) $\overline{52} \pm \overline{-94}$. b) $\overline{52}.\overline{-94}$. c) $\overline{-341} \pm \overline{926}$. d) $\overline{-341}.\overline{926}$.
e) $\overline{-7083} \pm \overline{-8646}$. f) $\overline{7083}.\overline{8646}$. g) $\overline{9}.\overline{9245}$. h) $\overline{9245}^2$.

13/ Xác định các phần tử khả nghịch và tìm nghịch đảo của chúng trong $\mathbf{Z_n}$ (n = 29 và 60).

14/ Giải các phương trình sau trong $\mathbf{Z_n}$ tương ứng:

a) $\overline{3}.\overline{x} = \overline{7}$ (n = 16). b) $\overline{41}.\overline{x} - \overline{51} = \overline{-19}.\overline{x} + \overline{24}$ (n = 105). c) $\overline{78}.\overline{x} - \overline{13} = \overline{35}$ (n = 666).
d) $\overline{3}.\overline{x} + \overline{9} = \overline{8}.\overline{x} + \overline{61}$ (n = 64). e) $\overline{21}.\overline{x} + \overline{24} = \overline{108}$ (n = 63). f) $\overline{5}.\overline{x} + \overline{7} = \overline{6}$ (n = 23).
g) $\overline{68}.(\overline{x} + \overline{24}) = \overline{102}$ (n = 492). h) $\overline{4}.\overline{x} + \overline{3} = \overline{7}.\overline{x} + \overline{12}$ (n = 11).

15*/ Giải các hệ phương trình sau trong $\mathbf{Z_n}$ tương ứng:

a) $\begin{cases} \overline{3x} + \overline{2y} = \overline{1} \\ \overline{2x} - \overline{5y} = \overline{-3} \end{cases}$ (n = 7). b) $\begin{cases} \overline{4x} + \overline{y} = \overline{-2} \\ \overline{7x} + \overline{3y} = \overline{7} \end{cases}$ (n = 8). c) $\begin{cases} \overline{5x} - \overline{3y} = \overline{3} \\ \overline{-4x} + \overline{5y} = \overline{-4} \end{cases}$ (n = 6).

d) $\begin{cases} \overline{x} + \overline{2z} = \overline{1} \\ \overline{y} + \overline{2z} = \overline{2} \\ \overline{z} + \overline{2x} = \overline{1} \end{cases}$ (n = 3 và 5).

<u>CHƯƠNG 7 :</u> HÀM BOOLE

1/ Tìm dạng nối rời chính tắc cho các hàm Boole sau đây:

a) $f(x, y, z) = \overline{x} \vee \overline{y} \vee x(y \vee z)$.

b) $f(x, y, z, t) = (xy \vee zt)(x \vee z)\ )(xz \vee yt)(xt \vee yz)$.

c) $f(x, y, z) = (\overline{x} \vee \text{yz})(\overline{y} \vee \text{xz})(\overline{z} \vee \text{xy})$.

d) $f(x, y, z, t) = yz \vee zt \vee xt \vee (xy \vee y\overline{z} \vee x\overline{t}\ )xyt$.

e) $f(x, y, z, t) = xyz \vee \overline{y}zt \vee [\ x\overline{t}\,(x \vee y)\ (z \vee t)\ ] \vee [\ (x \vee z)\ (y \vee t)\ ] \vee [\ (x \vee t)(y \vee z)\ ]$.

2/ Tìm các công thức đa thức tối tiểu cho các hàm Boole f có 4 biến rồi viết dạng nối rời chính tắc cho f và $\overline{f}$ biết rằng $S = \text{Kar}(f)$ hay $\overline{S}$ = (Phần bù của S trong bảng mã của B^4) như sau:

a) S = { (1,1), (1,3), (2,2), (2,4), (3,1), (3,3), (4,2), (4,4) }.

b) $\overline{S}$ = { (1,2), (1,3), (2,1), (2,3), (3,4), (4,3) }.

c) $\overline{S}$ = { (1,2), (1,3), (2,1), (3,1), (4,2), (4,3) }.

d) S = { (1,1), (1,4), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3), (4,1) }.

e) S = { (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,3), (4,1), (4,4) }.

f) $\overline{S}$ = { (1,1), (2,2), (2,3), (3,1), (4,1) }.

g) $\overline{S}$ = { (2,2), (2,3), (2,4), (3,4), (4,1), (4,2) }.

h) $\overline{S}$ = { (1,3), (2,1), (2,2), (3,4) }.

3/ Ký hiệu **x’ =** $\overline{x}$ **, y’ =** $\overline{y}$ **, z’ =** $\overline{z}$ **và t’ =** $\overline{t}$.

Tìm các công thức đa thức tối tiểu cho các hàm Boole f có 4 biến rồi viết dạng nối rời chính tắc cho f và $\overline{f}$ biết rằng f có dạng đa thức như sau:

a) f(x, y, z, t) = **yt’ ∨ xyz’ ∨ x’yz ∨ xy’z t’ ∨ x’y’z’t’**.
b) f(x, y, z, t) = **xzt’ ∨ y’z’t’ ∨ xyt ∨ x’yz ∨ x’y’z’t’ ∨ x’yz’t**.
c) f(x, y, z, t) = **x’y’z’t’ ∨ yzt ∨ xy’z ∨ xyz’t ∨ yzt’ ∨ x’y’t**.
d) f(x, y, z, t) = **x’yz ∨ xy’ ∨ xz’t’ ∨ x’yt’ ∨ xyzt’ ∨ y’zt**.
e) f(x, y, z, t) = **xy’zt’ ∨ yz’t ∨ x’y’zt’ ∨ yz’t’ ∨ x’yz ∨ xy’z’t’**.
f) f(x, y, z, t) = **x’z’t’ ∨ xyzt ∨ xy’z’t’ ∨ xy’t ∨ x’zt’ ∨ x’yz’t**.
g) f(x, y, z, t) = **xyzt ∨ x’y’ ∨ xz’t ∨ yz’t’**.
h) f(x, y, z, t) = **z’t’ ∨ xyt’ ∨ x’yz’ ∨ x’y’zt’ ∨ xy’z’t ∨ y’zt**.

4/ Vẽ mạng các cổng tổng hợp hàm Boole f trong bài **2** và **3** (dùng một công thức đa thức tối tiểu của nó).

5*/ a) Có bao nhiêu hàm Boole 6 biến lấy giá trị 1 tại các vector Boole có đúng 2 biến là 1 (và lấy giá trị tùy ý tại các vector Boole khác) ?

b) Có bao nhiêu hàm Boole 6 biến lấy giá trị 1 tại các vector Boole có ít nhất 2 biến là 1(và lấy giá trị tùy ý tại các vector Boole khác) ?

c) Có bao nhiêu hàm Boole 6 biến không phụ thuộc biến thứ nhất ?

d) Có bao nhiêu hàm Boole 6 biến không phụ thuộc 3 biến đầu tiên ?

<u>**GHI CHÚ:**</u> Các bài tập có dấu * là các bài *tương đối khó* hoặc *để làm thêm mở rộng kiến thức*.
Các bài tập còn lại *phù hợp với nội dung cơ bản* của môn học.