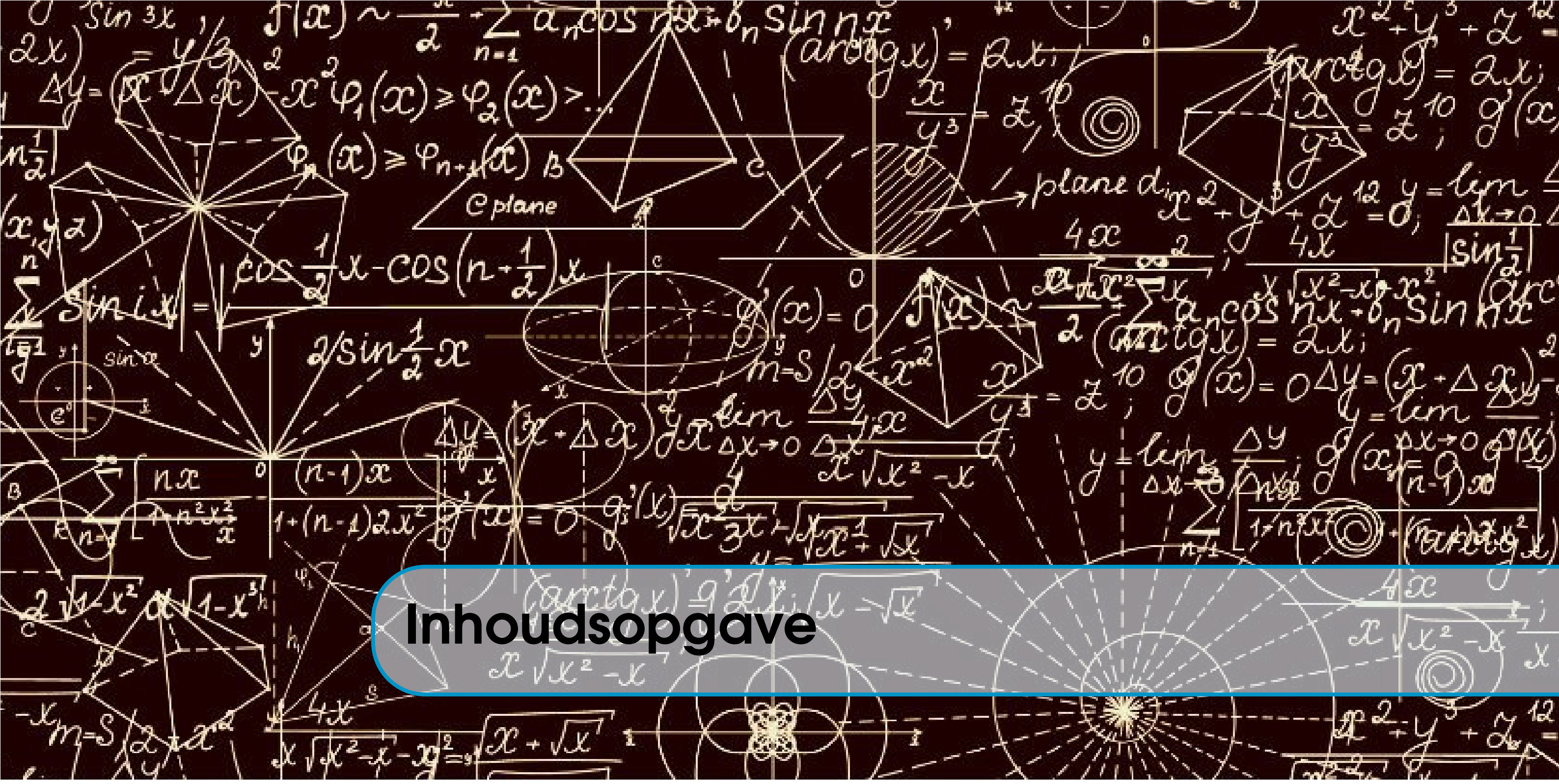
Analytical Skills

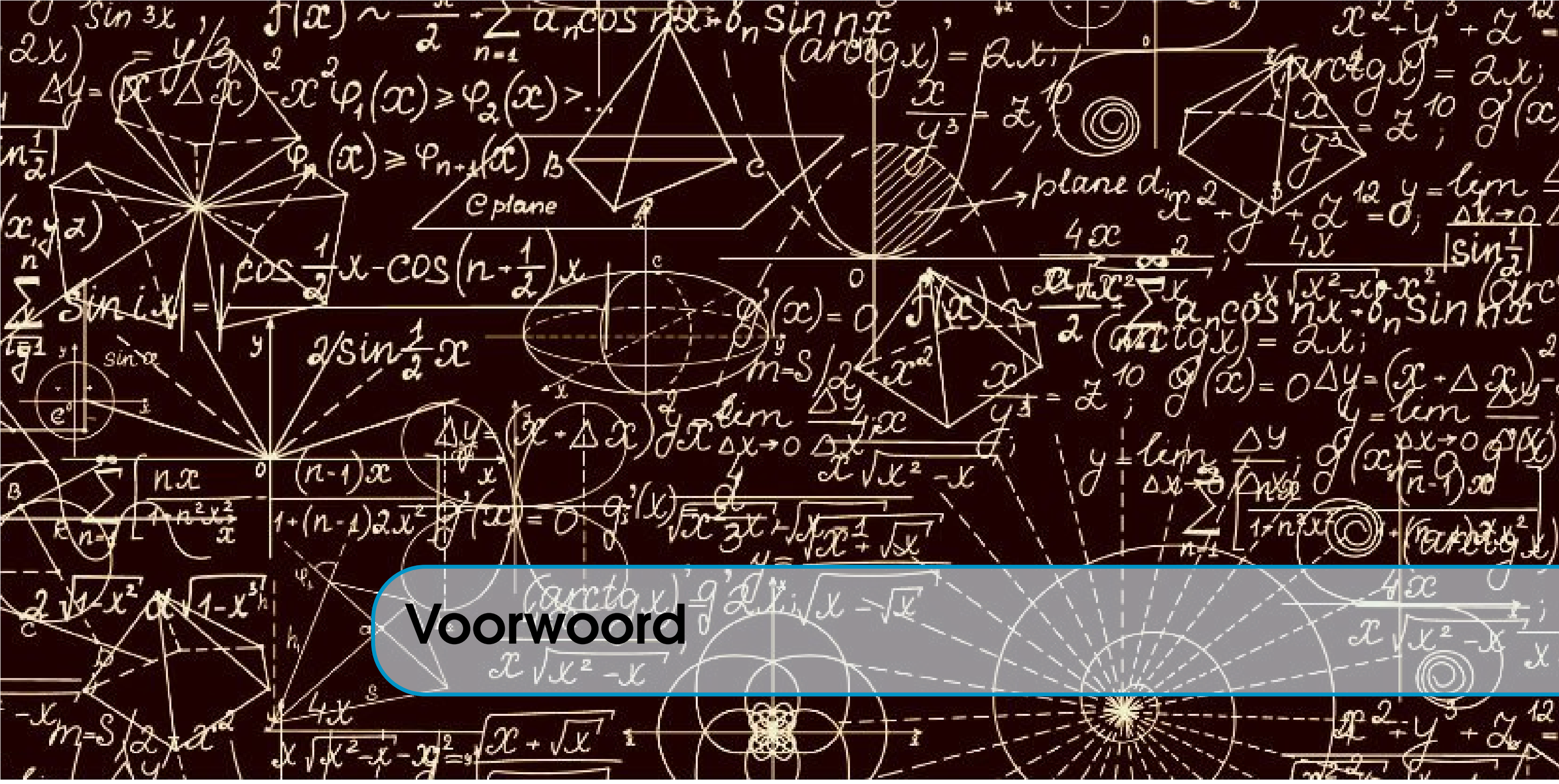
Logica & Verzamelingen

Huib Aldewereld

First release, August 2018



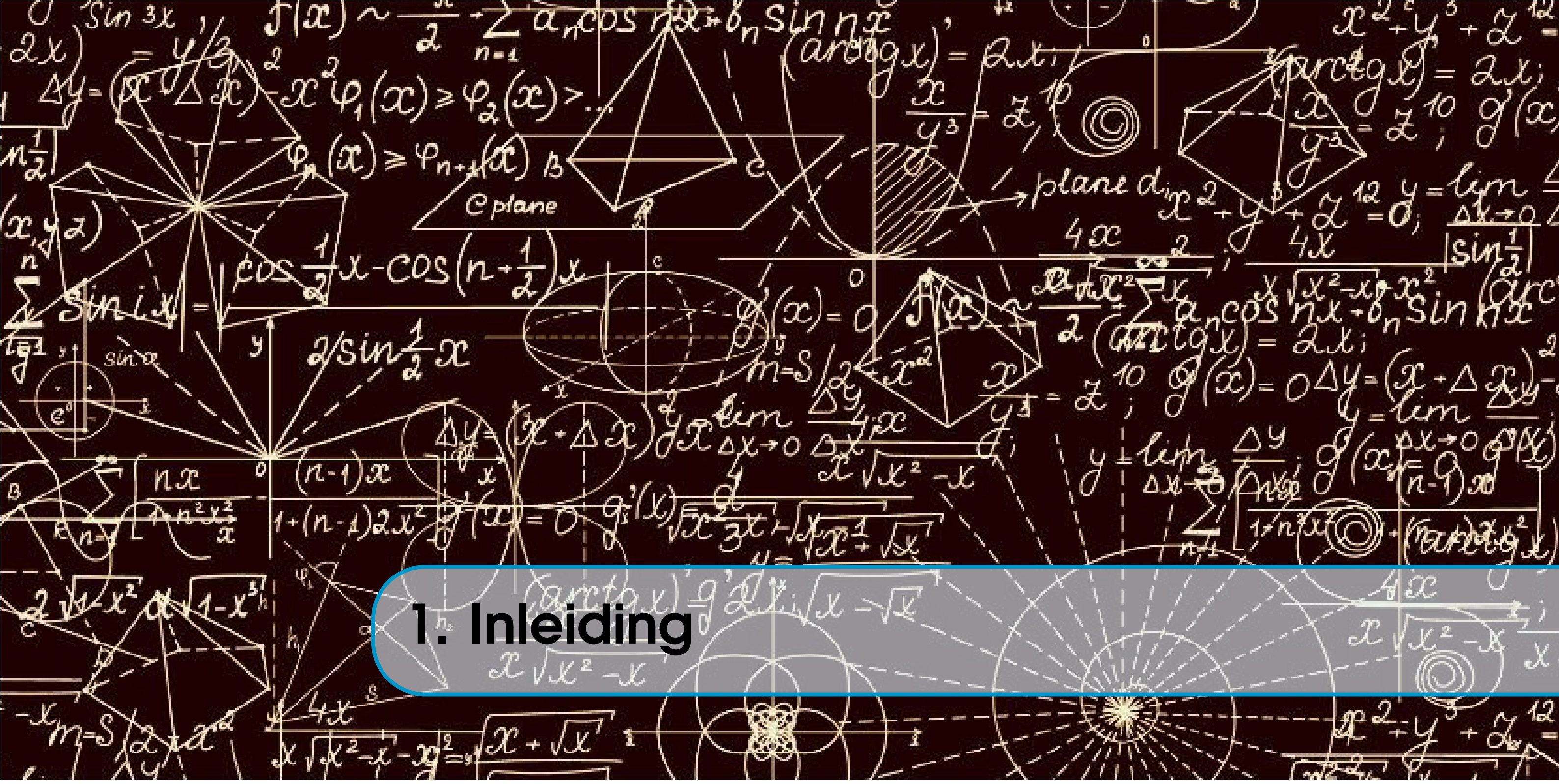
Inhoudsopgave



Voorwoord

Deze reader is bedoelt voor de cursus “Analytical Skills” (TICT-V1ASK-18) van de Hogeschool Utrecht. Dit materiaal is gebaseerd op het onder Creative Commons gepubliceerde werk van van Benthem, van Ditmarsch en van Eijck, 2009. Tevens is er, voor het deel over Verzamelingen, gebruik gemaakt van de OpenCourseWare cursus “Redeneren en Logica” van de TU Delft[1] en het dictaat “Beschrijven en Bewijzen” van Zantema en Lemmens, 1999.

[1] `https://ocw.tudelft.nl/courses/redeneren-en-logica/`



1. Inleiding

Historisch gezien onstond de logica zo'n 2500 jaar geleden in verschillende culturen, Griekenland, India en China. In al die gevallen was de oorsprong het inzicht dat in een gewoon gesprek, openbaar debat, of juridische procedures vaste patronen zitten die we kunnen zien als geldige of ongeldige manieren om de discussie te winnen. Een geldige manier om jouw bewering A te bestrijden is er een consequentie B uit af te leiden waarvan jijzelf moet toegeven dat die onwaar is. Een ongeldige manier om jouw A te bestrijden is daarentegen de 'drogreden' om hem af te leiden uit een andere B, en dan die B te bestrijden. We zien in deze voorbeelden een essentiële rol voor meerdere personen die op elkaar reageren, inclusief een spelelement (debatten kun je winnen of verliezen), en een duidelijke koppeling aan praktisch redeneren zoals mensen dat doen.

Maar de logica als wetenschap ontstond door daar nog een ander paradigma aan toe te voegen, en wel van bewuste wiskundige systeembouw. De patronen die we in het redeneren zien vormen een systeem dat op zich wiskundig beschreven kan worden. Dat aspect werd in de Griekse traditie opgemerkt, en later overgenomen en verder gebracht in de Islamitische (met name Perzische) en onze eigen Europese cultuur. Door die belangrijke rol van de wiskunde denken veel logici, dat wiskundig redeneren eigenlijk de mooiste, meest zuivere vorm van redeneren is: de gouden standaard voor hun werk. Een wiskundig bewijs blijft geldig, hoe mensen ook in het echt redeneren – en zelfs al schreven de Verenigde Naties een wereldwijd referendum uit waarbij iedereen de bovengenoemde drogreden accepteerde, dan nog zal een logicus deze verwerpen. Bovendien zijn voor het nagaan van deze geldigheid in principe geen andere mensen nodig: wiskundige bewijzen kunnen door een computer worden gelezen, en soms zelfs gevonden.

We hebben hier dus twee sporen: één van menselijk redeneren en interactie, en een tweede met wiskundige structuur waarbij helemaal geen handelende persoon nodig is. Die twee gezichtspunten van wiskundig systeem en dialoog bepalen voor ons de logica.

Deze twee gezichtspunten lijken met elkaar in spanning met elkaar, en soms lijkt het zuiver wiskundige beeld te hebben gewonnen, maar ze werkten in de geschiedenis harmonieus samen, en deze cursus brengt beide met klem naar voren. Beroemd op dit vlak is Leibniz' ideaal van een ideale taal waarmee meningsverschillen zouden kunnen worden beslecht door zuiver rekenen, "Calculemus" ("laat ons rekenen"). Zoals deze cursus laat zien is een simplistische *reductie* van dialoog tot wiskunde van communicatie niet plausibel, gezien de rijkdom van verschijnselen die informatie doen stromen als mensen communiceren. Dat er wel en serieuze wiskunde van communicatie over en weer is, blijkt bijvoorbeeld uit de moderne speltheorie, waar interactief gedrag en 'formeel systeem' weer harmonieus samenkomen.

In de 19de eeuw ontstond de moderne logica in Frege's boek "*Begriffsschift*", bedoeld als formeel instrument om de grondslagen van de wiskunde te analyseren. Dat leidde tot in de 20ste eeuw tot een stormachtige ontwikkeling van nieuwe logische begrippen en technieken, culminerend in 'Gödel's Stellingen" over bewijskracht en beperkingen van formele systemen.

Nu over de inhoud van deze cursus. Twee systemen komen overal voor in de zuivere en toegepaste logica, te weten de propositielogica en predikaatlogica. De eerste zullen wij in deze cursus behandelen, van de tweede zullen wij alleen aantonen dat deze benodigd is. De propositielogica bevat de kern van redeneren zoals dat wordt gedaan door digitale computers. De veel rijkere predikaatlogica is sterk genoeg om grote delen van de wiskunde, informatica, en natuurlijke taal te beschrijven.

Deze cursus is een voorportaal. Ze introduceert een klein aantal centrale ideeën en vaardigheden, zonder enige hang naar volledigheid in thema's en interdisciplinaire connecties.

1.1 Redeneren en bewijzen

Jan en Johan zijn net in Dunedin gearriveerd en Hans neemt ze mee naar een terrasje. "Wat willen jullie hebben?" "Koffie!" De bediening komt langs (Matt). "Two long black please and a flat white." Dat begrijpt Matt wel, maar Jan en Johan begrijpen niet meteen waarom deze bestelling correct is. Ze concluderen dat een gewoon kopje koffie kennelijk in Nieuw-Zeeland 'long black' heet. Inderdaad: een 'long black' is een 'short black' met extra water. En een 'short black' is een espresso. Terwijl een 'flat white' slaat op een koffie met melk; net zo'n lokale benaming als bij ons 'koffie verkeerd'. Matt komt terug met een dienblad waarop drie kopjes staan. "Who's got the flat white?" Hans reageert. Daarna worden de andere twee kopjes bij Jan en Johan neergezet. "Thanks, Matt!"

Bij zo'n scenario zien we al heel wat logica in actie. Hans weet dat 'kopje koffie' lokaal 'long black' heet. En dat daarom de bediening dat ook weet, en dat het niet uitmaakt dat Jan en Johan dat niet weten. Jan en Johan bestelden hetzelfde. In de bestelling komt *twee* keer iets van hetzelfde voor. Hieruit volgt dus, concluderen ze, dat 'long black' overeenkomst met het gewone kopje koffie, en 'flat white' niet.
Matt is ook niet dom. Hij vraagt namelijk niet wie long black heeft maar wie de flat white heeft. Hij krijgt dus maar één antwoord in plaats van twee antwoorden. Voor drie personen is dat nog te overzien, maar vraag nu eens 'who's got the beer?' aan

een tafel met tien personen; terwijl je net zo goed met die ene gin tonic had kunnen beginnen. En na Hans de flat white gegeven te hebben, kan hij de rest van de bestelling in willekeurige volgorde bij Hans' tafelgenoten neerzetten, zonder daar verder over te hoeven nadenken. Voor Hans' antwoord weet hij dat alle drie gasten een long black of flat white hebben. Omdat Hans flat white heeft en er één flat white was, hebben Johan en Jan niet flat white. Uit 'niet flat white' en 'long black of flat white' volgt logisch 'long black'. Johan en Jan hebben dus allebei een long black.

Van oudsher is de logica de leer van dit soort correcte redeneringen. Nog steeds is het herkennen van correcte en incorrecte redeneringen een belangrijke doelstelling van de logica, en het beschrijven van methoden om te bewijzen dat een conclusie volgt uit een verzameling aannames. Natuurlijk speelt in ons openingsvoorbeeld veel meer dan alleen bewijzen, want er worden bijvoorbeeld ook vragen gesteld, met antwoorden die informatie overdragen. De bredere rol van de moderne logica als studie van iedere correcte vorm van informatieoverdracht zal aan bod komen in deze cursus.

2. Propositielogica

We hebben al gezien dat voor een logicus het verhevene heel dicht kan liggen bij het alledaagse. Misschien beter gezegd: een logicus ziet het verhevene in het alledaagse... Om een aantal logische kernbegrippen uit te leggen gaan we nu terug van bewijzen in de wiskunde naar een meer elementair niveau van correct redeneren. Waarom is de ene redenering correct en de andere niet? Een eenvoudig voorbeeld van een correcte redenering is:

> “De afstandsbediening is kapot of de tv werkt niet goed. Maar de tv werkt wel goed. Dus de afstandsbediening is kapot.”

Daarentegen is de volgende redenering niet correct.

> “Het schilderij hangt hier niet als het gestolen is. Het schilderij hangt hier niet. Dus is het gestolen.”

Waarin zit nu het verschil? Beide redeneringen bestaan uit een conclusie (‘Dus ...’), voorafgegaan door twee Nederlandse zinnen, dus daar zit het niet in. Maar bij de eerste redenering *moet* de conclusie (‘Dus ...’) wel juist zijn als de uitgangspunten (de beide voorafgaande zinnen) waar zijn. Met andere woorden: er lijkt geen situatie te verzinnen waarin de eerste twee zinnen waar zijn en de derde niet. Bij de tweede redenering ligt dat heel anders. De beide uitgangspunten kunnen hier heel goed waar zijn zonder dat de vermeende conclusie dat is, denk maar aan een situatie waarin het schilderij net gerestaureerd wordt. Dan hangt het er inderdaad niet en we kunnen nog steeds beamen dat het er ook niet hangt als het gestolen is. Maar het is helemaal niet gestolen, het wordt immers gerestaureerd.

Bij voorgaande voorbeeldredeneringen ziet u misschien meteen al of ze correct zijn of niet. Voor meer ingewikkelde betogen hoeft dat helemaal niet zo simpel te zijn. En zelfs al zouden we voor iedere concrete redenering kunnen beargumenteren of die al dan niet correct is, dan blijft dat een moeizame onderneming. Bovendien: wie zegt ons dat die argumentatie weer correct is? Daarom is het beter eerst een andere weg in te slaan: welke kenmerken van de zinnen zorgen er nu voor dat een redenering correct is? Allereerst kunnen we opmerken dat de eerste redenering dezelfde vorm (maar een heel andere inhoud) heeft als de volgende, die ook correct is:

> "Onze export stagneert of de dollar staat niet hoog. De dollar staat echter wel hoog. Dus stagneert onze export."

Kennelijk zijn het vooral de woordjes 'of' en 'niet' en de plaats waar ze voorkomen, die bepalen dat deze redenering correct is – van de rest mogen we abstraheren. We stuiten hier echter op een ander probleem: wil een redenering correct zijn, dan moet ze in elke situatie juist zijn, maar woordjes als 'of' betekenen niet steeds hetzelfde. Bij het eerste voorbeeld zal een monteur die de uitspraak 'De afstandsbediening is kapot of de tv werkt niet goed' doet, waarschijnlijk bij de diagnose rekening houden met de mogelijkheid dat zowel de afstandsbediening als tv kapot kunnen zijn, terwijl een beursanalist die 'Onze export stagneert of de dollar staat niet hoog' bezigt, vermoedelijk bedoelt dat ofwel onze export stagneert, ofwel de dollar niet hoog staat, maar niet allebei. En ouders die tegen hun kinderen zeggen 'Voor je 18de verjaardag krijg je een spelcomputer of een serie autorijlessen' zullen vrijwel nooit bedoelen dat ze ook beide zullen krijgen.

Kortom, willen we iets definitiefs kunnen zeggen over de correctheid van redeneringen, dan zullen we een logisch 'of' moeten maken dat aanzienlijk preciezer is dan het vage en dubbelzinnige woordje uit de gewone taal. Dit kan in een eenvoudige, maar precieze en compacte logisch taal: die van de propositielogica.

2.1 Wat is propositielogica?

Een *propositie* is een uitspraak die waar of onwaar kan zijn. Voorbeelden zijn ware uitspraken als 'Er is geen grootste priemgetal' en onware als 'Kopenhagen ligt in Nederland'. Afgezien van filosofische spitsvondigheden (hoe kunnen we bewijzen dat Kopenhagen niet in Nederland ligt?), is het waarheidsgehalte van deze proposities onomstreden.

Bij minder algemene uitspraken speelt de context vrijwel altijd een rol. Of 'het regent' waar is, hangt duidelijk af van de situatie waarin we ons bevinden. Toch noemen we ook 'Het regent' een propositie, want het is in elke situatie óf waar óf onwaar. Dat is zelfs het geval als we niet in staat zijn het waarheidsgehalte van een uitspraak hier en nu te bepalen. 'Het regent morgen', 'De snel stijgende olieprijzen zijn de oorzaak van de crisis' en 'Er bestaan zwarte gaten' zijn dus wel degelijk proposities. Waar het om gaat, is dat deze uitspraken in elke situatie waar of onwaar zijn, en niet zowel waar als onwaar.

Als de enige eis aan proposities is dat ze in iedere omstandigheid een waarheidswaarde (waar of onwaar) moeten hebben, dan lijkt dit zo algemeen dat we ons kunnen afvragen wat dan in hemelsnaam géén proposities zijn. Andere zinstypen zoals vraagzinnen of zinnen in de gebiedende wijs drukken in de regel geen proposities uit. De volgende voorbeelden, twee gewone zinnen, een wiskundig probleem en een programmeeropdracht zijn *geen* proposities:

- Hoe laat is het?
- Kijk uit bij het oversteken!
- Zijn er natuurlijke getallen x,y,z,n met $n > 2$ waarvoor $x^n + y^n = z^n$?
- Als $x > 0$, dan $x := x+1$.

Bij vragen kunnen de antwoorden wel waar of onwaar zijn, maar de vragen zelf niet. Het laatste voorbeeld is misschien wel verrassend: de vorm lijkt immers veel op die van een gewone als-dan-uitspraak. Maar voor een programmeeropdracht geldt niet dat die waar of onwaar is. Een programmeeropdracht is een instructie om de computer iets te laten doen, en als zodanig vergelijkbaar met de gewone gebiedende wijs ('Doe ...!'). De voorwaarde van een als-dan-opdracht is wél een propositie, en de instructie na 'dan' wordt alleen uitgevoerd als de voorwaarde waar is. Dit betekent dat wanneer deze opdracht deel uitmaakt van een 'lus' in het programma, de waarheidswaarde tijdens het uitvoeren van het programma kan veranderen – dat is juist de bedoeling van de voorwaarde. Uiteindelijk heeft de moderne logica iets te zeggen over al deze genres, maar wij beperken ons hier tot de bron: waarheidsdragende zinnen.

Het is niet de taak van de logica om de werkelijkheid te bestuderen en zo de waarheidswaarde van een propositie in een bepaalde situatie te achterhalen, zo dit al mogelijk is. De logica houdt zich ermee bezig of de waarheidswaarde is af te leiden uit die van andere proposities. Kenmerkend voor de propositielogica is dat de waarheidswaarde van een uitspraak is af te leiden uit de waarheidswaarden van haar delen. Met een mooi woord wordt de propositielogica daarom wel waarheidsfunctioneel genoemd.

2.2 Hoe analyseren we natuurlijke taal formeel?

In de propositielogica kunnen we uitspraken analyseren die zijn opgebouwd met behulp van het woordje niet en voegwoorden (en, of, als, mits, ...). In het begin van dit hoofdstuk zagen we daarvan al diverse voorbeelden (de woorden waar het hier om gaat zijn gecursiveerd):

> De afstandsbediening is kapot *of* de tv werkt *niet* goed.
>
> Het schilderij hang hier *niet als* het gestolen is.

Zoals gezegd is de taal van alledag echter vaak dubbelzinnig en te vaag om dergelijke proposities goed mee te analyseren. We vervangen de woordjes als 'niet' en 'of' daarom door symbolen die we een heel precieze betekenis gaan geven.

In plaats van 'Het schilderij hangt hier niet.' schrijven we:

> $\neg$ Het schilderij hangt hier.

Het symbool $\neg$ (het logische 'niet') gaat anders dan het 'niet' in de gewone taal *vooraf* aan de uitspraak waar het betrekking op heeft. De propositie 'Het schilderij hangt hier' korten we vervolgens af tot de letter p, zodat we ten slotte uitkomen op de uitdrukking $\neg p$. Het symbool $\neg$ noemen we het *negatieteken*. De uitdrukking $\neg p$ noemen we de *negatie* van p.

In plaats van: 'De afstandsbediening is kapot of de tv werkt niet goed.' schrijven we:

De afstandsbediening is kapot $\vee$ de tv werkt niet goed.

Het symbool $\vee$ (het logische 'of') staat hier op de plaats waar het gewone 'of' ook staat. De overgebleven uitspraken 'De afstandsbediening is kapot' en 'De tv werkt goed' korten we af tot respectievelijk p en q, zodat we ten slotte uitkomen op $p \vee \neg q$.

Het symbool $\vee$ is de schreefloze letter 'v', afkomstig van het Latijnse woord 'vel' voor 'of'. Het symbool $\vee$ wordt het *disjunctieteken* genoemd. Door $\vee$ worden twee proposities verbonden: het resultaat (zoals $p \vee \neg q$) heeft een *disjunctie* en de proposities die door $\vee$ verbonden worden (zoals p en $\neg q$ in $p \vee \neg q$), heten *disjuncten*. Hierna zullen we zien dat we met $\vee$ de zogenaamde *inclusieve* disjunctie op het oog hebben: $p \vee q$ is dan ook het geval als zowel p als q het geval zijn. De propositielogica wijkt hierin af van de 'betekenis' van 'of' in de natuurlijke taal, waar een 'of' meestal als *exclusieve of* wordt beschouwd (als je ouders zeggen 'je krijgt een spelcomputer of een serie autolessen voor je verjaardag', bedoelen ze meestal niet dat je ze allebei gaat krijgen).

De uitspraak 'Gabriela tennist en Judith schaakt' kan in propositielogica worden weergegeven door $p \wedge q$, waarbij p staat voor 'Gabriela tennist' en q voor 'Judith schaakt'.

Keren we het disjunctieteken om, dan krijgen we $\wedge$, het logisch 'en'. Het $\wedge$ symbool wordt het *conjunctieteken* genoemd. Door $\wedge$ worden twee proposities verbonden: het resultaat (zoals $p \wedge q$ hiervoor) heet een *conjunctie* en de proposities die door $\wedge$ verbonden worden, heten *conjuncten*.

Het 'en' uit de gewone taal bevat eigenaardigheden die we niet in de propositielogica willen opnemen. Zo betekent 'Ze kwam binnen en ze deed het licht uit' iets anders dan 'Ze deed het licht uit en ze kwam binnen'. Het 'en' uit de gewone taal betekent vaak dat de gebeurtenis uit de tweede zinshelft *later* plaatsvindt dan die uit de eerste zinshelft. Dit soort bijzonderheden kunnen we niet uitdrukken in de propositielogica.

De uitspraak 'Als er stroom loopt, (dan) wordt de draad warm' kan in propositielogica worden weergegeven als $p \to q$, waarbij p staat voor 'Er loopt stroom' en q voor 'De draad wordt warm'.

Het symbool $\to$ wordt het *implicatieteken* genoemd. Door $\to$ worden twee proposities verbonden: het resultaat (zoals $p \to q$ hiervoor) heet een *implicatie*.

De uitspraak '$A \subset B$ desda $A \cap B = A$' wordt in propositielogica weergegeven als $p \leftrightarrow q$, waarin p staat voor '$A \subset B$' en q voor '$A \cap B = A$'. De afkorting 'desda' staat voor 'dan en slechts dan als', een standaardterm in wiskundige bewijzen.

Het symbool $\leftrightarrow$ wordt het *equivalentieteken* genoemd. Door $\leftrightarrow$ worden twee proposities verbonden: het resultaat (zoals $p \leftrightarrow q$ hiervoor) noemen we een *equivalentie*.

De speciale symbolen van de propositielogica ($\neg, \vee, \wedge, \to, \leftrightarrow$) worden *connectieven* (logische voegwoorden) genoemd. In tabel 2.1 vatten we de schrijfwijze, de uitspraak en de naam van de connectieven samen. Er zijn ook andere notaties in omloop, zoals de u misschien wel bekende & voor $\wedge$ en $\supset$ voor $\to$, maar de symbolen in de tabel zijn het meest gangbaar.

Naast de connectieven bevatten de uitdrukkingen van de propositielogica letters en haakjes. De letters geven (niet verder deelbare) proposities aan, en heten daarom *propositieletters*. We gebruiken hier meestal de letters $p, q, r, \ldots$ voor, soms vergezeld

Tabel 2.1 Logische connectieven.

connectief	*uitspraak*	*naam*
$\neg$	niet	negatieteken
$\wedge$	en	conjunctieteken
$\vee$	of	disjunctieteken
$\rightarrow$	als ..., (dan)	implicatieteken
$\leftrightarrow$	desda	equivalentieteken

van een index $(p_1, p_2, \ldots)$. Bij de vertaling van concrete uitspraken uit de wiskunde of de gewone taal in propositielogica moeten we wel steeds aangeven welke propositieletter bij welke propositie hoort. Daarnaast zijn er *haakjes* nodig, omdat anders bijvoorbeeld $p \vee \neg q \wedge p$ op meerdere manieren gelezen zou kunnen worden, en dat willen we natuurlijk niet. Met haakjes erbij hebben we dit probleem niet: $p \vee (\neg q \wedge p)$ en $(p \vee \neg q) \wedge p)$ zijn wel goede uitdrukkingen. Misschien denkt u dat ook $\neg p \vee q$ geen goede uitdrukking is, maar hier werkt een spelregel die zegt dat negatietekens sterker binden dan de overige connectieven, net zoals in de gewone rekenkunde het negatieteken voorafgaat aan de overige bewerkingen. Dus als we toch haakjes hadden willen zetten, dan bedoelden we met $\neg p \vee q$ alleen $\neg(p) \vee q$ en niet $\neg(p \vee q)$[1].

2.3 Opgaven

Opgave 2.1
Bepaal voor elke zin of de zin wel of geen propositie is:

1. Ruimtewezens hebben me ontvoerd en namen me mee om Elvis te ontmoeten.
2. Denk erom dat je vandaag je paraplu meeneemt.
3. Het brutonationaal product is afgelopen jaar gestegen.
4. Ben je klaar met het diner?
5. Holy moly!
6. Brazilie is een land in Afrika.
7. De regen in Spanje valt voornamelijk op de velden.
8. Ik houd van detective verhalen.
9. Aloha!
10. Deze zin is onwaar.

Opgave 2.2 Vertaal het volgende naar propositielogica; onderstreep de voegwoorden die je tegenkomt om de proposities met elkaar te verbinden.

> De president van de VS is rechtvaardig of de president kiest altijd de beste rechters voor het hooggerechtshof. Het bouwen van een muur

[1] Vergelijk met $-2+8$ versus $-(2+8)$ of -10^2 versus $-(10^2)$.

tussen Mexico en de VS is onwettig als de president onrechtvaardig is. Als het onrechtmatig is om een inreisverbod uit te vaardigen naar landen als Iran dan kiest de president niet de beste rechters. Als het wettig is om een muur te bouwen of een inreisverbod rechtmatig is, dan is de president onrechtvaardig. Het inreisverbod is rechtmatig of de president kiest de juiste rechters voor het hooggerechtshof. Daarom is de president onrechtvaardig.

In een volgende les zullen we de waarheid van deze uitspraken analyseren.

Opgave 2.3
Welke van de volgende rijtjes symbolen zijn formules en welke niet? Als een rijtje geen formule is, geef dan aan waarom. Als een rijtje wel een formule is, schrijf dan op hoe deze formule moet worden uitgesproken.
1. $\wedge p \wedge q$
2. $p \vee p$
3. $(p \to q) \leftrightarrow \neg(\neg q \to \neg p)$
4. $p \wedge \vee q$

Opgave 2.4 Beschouw de volgende proposities:

$$p = \text{“de baby huilt”},\ q = \text{“de baby lacht”},$$

$$r = \text{“de baby heeft honger”},\ s = \text{“de baby is moe”}$$

Vertaal de volgende zinnen naar propositielogica:
1. De baby huilt en heeft honger.
2. De baby huilt en heeft honger of is moe.
3. De baby heeft geen honger, hij lacht.
4. De baby huilt, is moe en heeft honger.
5. De baby is moe of heeft honger, en hij lacht niet.
6. De baby huilt en heeft honger, of hij is moe.
7. De baby lacht en is niet moe, of hij heeft honger en huilt.
8. Het is niet zo dat de baby moe is en honger heeft.
9. De baby heeft honger of is moe, en huilt en lacht niet.
10. De baby lacht, of de baby heeft geen honger en is moe en huilt.

Opgave 2.5
Beschouw de volgende proposities:

$$p = \text{“het paard is weg”},\ q = \text{“het hek is dicht”},$$

$$r = \text{“de koe loeit”},\ s = \text{“de schemering valt”}$$

Vertaal de volgende proposities terug naar natuurlijke taal.

1. $p \wedge q$
2. $\neg p \wedge q$
3. $r \vee s$
4. $p \wedge \neg q \wedge r$
5. $r \vee (p \wedge s)$
6. $(r \vee p) \wedge s$
7. $\neg(p \wedge \neg q)$
8. $(s \wedge p) \vee \neg q$
9. $(\neg r \vee q) \wedge \neg s$
10. $(p \wedge s) \vee (q \wedge \neg r)$
11. $\neg q \vee \neg p \vee r$
12. $q \wedge \neg(r \wedge s)$

Opgave 2.6 Welke van de volgende gebruiken van ‘of’ is *inclusief*:
1. Dit blad is van een eik of van een beuk.
2. Ik hoop dat 6 of een 7 kan halen voor dit vak.
3. Morgen zal het regenen of de zon zal schijnen.
4. Ik heb altijd groente of fruit bij me voor de lunch.
5. Jim houdt van films met superhelden of met enge monsters.

Opgave 2.7 Beschouw de volgende proposities:

$$p = \text{“Fido blaft”},\ q = \text{“Felix springt”},\ r = \text{“Mickey rent”},\ s = \text{“Tweety zingt”}$$

Vertaal de volgende zinnen naar propositielogica:
1. Als Tweety zingt dan blaft Fido.
2. Als Felix niet springt, dan blaft Fido niet.
3. Als Felix springt, dan rent Mickey en zingt Tweety niet.
4. Mickey rent alleen als Felix springt.
5. Mickey rent niet en Fido blaft niet, als Tweety zingt.
6. Als Felix springt, dan rent Mickey of blaft Fido.
7. Als Fido blaft en Mickey rent en Tweety zingt, dan springt Felix.

En vertaal de volgende proposities naar natuurlijke taal:
1. $p \to q$
2. $q \to \neg s$
3. $r \to (p \wedge q)$
4. $(s \vee r) \to q$
5. $\neg p \to s$
6. $s \to (r \wedge q \wedge p)$
7. $\neg p \to (\neg r \wedge s)$
8. $(\neg s \wedge \neg r) \to p$
9. $(r \wedge q) \to (p \wedge \neg s)$
10. $(q \wedge \neg r) \to (p \vee s)$

Opgave 2.8 — Pittig.
Welke van de volgende zinnen zijn proposities? Welke zijn atomair en welke samengesteld? Onderstreep in de samengestelde proposities de samenstellende proposities.

1. Vanochtend werd gezegd dat het morgen eindelijk weer lekker weer zal worden.
2. Hoewel het KNMI over buitengewoon geavanceerde apparatuur beschikt, heb ik toch de indruk dat de weersvoorspellingen vaak niet uitkomen.
3. Zou het eigenlijk wel leuk zijn om altijd precies te weten wat voor weer het de volgende dag wordt?
4. De fundamentele ongedetermineerdheid van het leven is juist dat wat het leven de moeite waard maakt.
5. Als alles voorspelbaar was, dan zou er nooit meer iets onverwachts gebeuren en zouden we vervallen in een saai ‘wachten op dat wat toch gaat gebeuren’.
6. Het is precies deze ongedetermineerdheid die zorgt dat de mens vrij is om keuzes te maken en het is ook precies deze ongedetermineerdheid die het mogelijk maakt om iets te leren.
7. Het kunnen maken van keuzes houdt in dat er lijden wordt veroorzaakt.
8. Ook de Boeddha zei al dat het leven lijden is.
9. Kan er dan geen lijden zijn als de mens niet vrij zou zijn om te kiezen?
10. Dat hangt waarschijnlijk af van je opvatting van lijden, maar ik denk dat binnen het boeddhisme lijden en keuze samengaan.
11. We moeten wel uitkijken dat we niet in een soort theologische discussie verzeild raken, want daar zijn logica-syllabi niet voor bedoeld, hoewel het natuurlijk helemaal geen kwaad kan om deze onderwerpen eens aan de orde te stellen, ook al zou dat misschien beter op een ander plaats kunnen gebeuren.
12. Zo’n verhandeling is tenminste weer eens iets anders dan Angelsaksische filosofie.
13. Filosofen verzanden vaak in het ‘spijkers op filosofisch laag water zoeken’, terwijl er toch voldoende betekenisvolle vragen te stellen zijn, maar waarschijnlijk zijn filosofen zelf niet de schuldigen, maar ligt het probleem in de gehanteerde ‘wetenschappelijke methode’.
14. Men vergeet dat het rationele denken slechts een hoogontwikkeld stuk gereedschap is dat behulpzaam kan zijn bij het stellen en beantwoorden van bepaalde vragen, maar dat dit denken niet een doel op zich is, noch de ultieme methode belichaamt om iedere denkbare vraag mee te lijf te gaan.
15. Zoals zo veel is ook het menselijk denken begrensd en dus zal het terrein van toepassing ook begrensd zijn, evenals de validiteit van de verkregen antwoorden.
16. Dit is de zestiende zin en zestien is twee tot de vierde en omdat dat een mooi getal is, stoppen we hier maar.
17. Nou ja, nog een laatste dan.

Opgave 2.9 — Pittig.
Vertaal de volgende twee zinnen zo goed mogelijk naar formules van de propositielogica. Geef in beide gevallen de vertaalsleutel. Let op, je kan hier niet 'letterlijk' vertalen!

1. Als de toets kort is dan is de zaal na twee uur leeg tenzij de opgaven veel werk zijn.
2. Mits de PVV en de VVD het eens worden krijgen we een regering die zowel een bedreiging vormt voor Nederland als een rechts rotbeleid voert.

Opgave 2.10 — Pittig.
Over een misdaad zijn de volgende gegevens over de (enig) mogelijke daders Arno, Huib en Rik bekend:

φ Als Rik het gedaan heeft, dan óf Arno óf Huib ook (maar niet allebei).
ψ Er is een oneven aantal daders.

Vertaal deze twee beweringen naar proposities. Kies hierbij zelf een passende vertaalsleutel (propositieletters); merk op dat het vertalen (van de tweede zin) niet 'letterlijk' kan, je zal deze informatie moeten verwerken in een formule die hetzelfde uitdrukt!

Kunnen Arno en Huib handlangers zijn, d.w.z. kunnen ze tegelijkertijd dader zijn?

Opgave 2.11 Beschouw nogmaals de final assignment uit week 6 van het vak Programmeren[a]. In die opgave moest je de korting op een NS-kaartje berekenen met de volgende regels:

- Op werkdagen reizen kinderen (onder 12 jaar) en ouderen(65 en ouder) met 35% korting.
- In het weekend reist deze groep met 35% korting.
- De overige leeftijdsgroepen reizers betalen de gewone prijs, behalve in het weekend, dan reist deze leeftijdsgroep met 40% korting.

Vertaal de hierboven gegeven informatie naar propositielogica. Kies daarvoor voor een geschikte vertaalsleutel (= propositieletters).

[a] `https://canvas.hu.nl/courses/889/assignments/6266`.

3. Waarheidstabellen

In het vorige hoofdstuk hebben we de *vorm* van de propositielogische formules bekeken, nu gaan we hun *betekenis* onderzoeken. Net als voor de zinnen in de gewone taal is die betekenis voor logische formules gelegen in de waarheidswaarde: we weten wat een formule betekent als we kunnen zeggen in welke situaties de formule waar is. Maar hoe wordt de waarheidswaarde van een formule nu berekend?

Om vlot met waarheidswaarden te kunnen rekenen is het handig 'waar' weer te geven door 1 en 'onwaar' door 0, net als in digitale computers, waarvan de bits ook met nullen en enen wordt voorgesteld. De berekening van de waarheidswaarde van samengestelde formules vindt plaats in de vorm van tabellen, de zogenaamde waarheidstabellen. We laten nu de connectieven één voor één de revue passeren om hun effect op de waarheidswaarde vast te stellen.

Negatie

De formule $\neg p$ is waar wanneer p onwaar is, en omgekeerd. Omdat proposities óf waar óf onwaar zijn, volgt hier meteen uit wanneer $\neg p$ onwaar is: als p waar is. We vatten dit samen in de volgende waarheidstabel.

p	$\neg p$
0	1
1	0

Dit gedrag van de negatie vertoont grote overeenkomst met dat van het woordje 'niet' in de gewone taal. 'Het regent niet' is immers precies dan waar als 'Het regent' onwaar is. Voor de logische negatie geldt hetzelfde, en dat blijft zo als de we negatie voor een samengestelde formule zetten. Meer in het algemeen is dus voor een willekeurige φ de formule $\neg\varphi$ waar precies als φ onwaar is[1].

[1] In het vervolg zullen we de Griekse letters φ en ψ gebruiken voor het aanduiden van willekeurige

Hierdoor krijgt de waarheidstabel voor negatie de volgende vorm:

φ	$\neg\varphi$
0	1
1	0

Voorbeeld 3.1 Met de waarheidstabel van de negatie kunnen we de waarheidswaarden van sommige samengestelde formules uitrekenen. De waarheidstabel voor de formule $\neg\neg p$ is:

p	$\neg p$	$\neg\neg p$
0	1	0
1	0	1

Deze tabel komt als volgt tot stand. De waarheidswaarde van $\neg\neg p$ wordt bepaald door de waarheidswaarde van p: we zetten p linksboven in de tabel. Nu kan p onwaar of waar zijn: deze waarden zetten we in de linkerkolom onder p. Vervolgens berekenen we de waarheidswaarden van de deelformule $\neg p$. De waarheidstabel voor $\neg$ levert dat $\neg p$ waarheidswaarde 1 (waar) heeft als p waarheidswaarde 0 heeft, en 0 (onwaar) als p waarheidswaarde 1 heeft. Deze waarden schrijven we in de middelste kolom, onder $\neg p$. Ten slotte verkrijgen we hieruit, weer met de waarheidstabel voor negatie, de waarheidswaarden voor de hele formule, nu in de rechterkolom.

Conjunctie

De formule $p \wedge q$ is alleen waar als zowel p en q waar zijn. Algemener: een conjunctie $\varphi \wedge \psi$ is waar als zowel φ als ψ waar zijn, en in alle andere gevallen onwaar. Dit wordt weergegeven door de volgende waarheidstabel (φ en ψ zijn weer willekeurige formules):

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

In de gewone taal heeft ‘en’ vaak een vergelijkbaar effect. ‘Marie werkt en Kees zorgt voor de kinderen’ is waar als ‘Marie werkt’ en ‘Kees zorgt voor de kinderen’ beide waar zijn, en ook alleen dan waar.

formules; spreek φ uit als *phi* en ψ als *psi*.

Voorbeeld 3.2 Hoe vinden we nu met behulp van de waarsheidstabel van $\wedge$ de waarheidstabel voor een ingewikkeldere formule als, zeg, $p \wedge \neg q$? De formule $p \wedge \neg q$ bevat twee verschillende propositieletters, p en q: die zetten we weer linksboven in de tabel. Elk van die propositieletters kan twee waarheidswaarden krijgen, dus er zijn in totaal $2 \times 2 = 4$ combinaties van waarheidswaarden mogelijk. Hierdoor krijgen we een tabel met vier rijen van waarheidswaarden. Voor elke deelformule gaan we nu de waarheidswaarde berekenen, te beginnen met de kleinste deelformules. Dat zijn de propositieletters, waarvan we de waarheidswaarden al kennen. Daarna komt de deelformule $\neg q$. Dat komt neer op het 'omdraaien' van de waarheidswaarde van q. Ten slotte vinden we de waarheidswaarde van de hele formule door (rij voor rij) de waarheidswaarden die onder p en onder $\neg q$ staan te combineren (we selecteren de toepasselijke rij uit de waarheidstabel van $\wedge$ hierboven, waarbij we p invullen voor φ en $\neg q$ invullen voor ψ). De waarheidstabel voor $p \wedge \neg q$ wordt dus:

p	q	$\neg q$	$p \wedge \neg q$
0	0	1	0
0	1	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0

Het resultaat is dat $p \wedge \neg q$ waar is als p waar en q onwaar is. In alle andere gevallen is $p \wedge \neg q$ onwaar.

Disjunctie

De waarheidstabel voor een disjunctie $\varphi \vee \psi$ is:

φ	ψ	$\varphi \vee \psi$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Het logisch 'of' is de zogenaamde inclusieve disjunctie, die we al zijn tegengekomen in gevallen als 'De afstandsbediening of de tv is kapot'. In de gewone taal wordt de inclusieve disjunctie ook wel door 'en/of' uitgedrukt. Hierbij kan het een of het ander het geval zijn, of beide.

De exclusieve disjunctie ('óf ... óf ... '), die we zagen in een zin als 'Voor je verjaardag krijg je een spelcomputer of autorijlessen', waarbij of het een of het ander het geval is, maar niet beide, kan overigens ook in de propositielogica worden weergegeven (maar valt buiten de scope van deze cursus).

Wanneer de formules langer worden, groeit het aantal deelformules ook, zodat de methode om alle deelformules apart in een kolom te zetten van de waarheidstabel, erg bewerkelijk kan worden. Handiger is het dan een compactere notatie te gebruiken. In plaats van de deelformules steeds opnieuw op te schrijven, plaatsen we de enen en nullen onder het connectief dat bereik heeft over de rest van deze deelformule. De volgorde waarin de waarheidswaarden zijn berekend, geven we voor de duidelijkheid met kleine cijfertjes aan.

Voorbeeld 3.3 De waarheidstabel voor $(p \wedge \neg q) \vee q$ op de nieuwe manier is:

p	q	$(p$	$\wedge$	$\neg$	$q)$	$\vee$	q
0	0	0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	0	1	0
1	1	1	0	0	1	1	1
		(1)	(3)	(2)	(1)	(4)	(1)

Implicatie

De waarheidstabel voor een implicatie $\varphi \to \psi$ ziet er zó uit:

φ	ψ	$\varphi \to \psi$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Een implicatie vertoont overeenkomst met als-dan-zinnen uit de gewone taal. De zin ‘Als het regent, dan worden de straten nat’ is duidelijk onwaar als het enerzijds regent en anderzijds de straten niet nat worden. Daarom geven we $\varphi \to \psi$ de waarheidswaarde 0 in het geval φ waar en ψ onwaar is. Dit is ook het enige geval waarin de implicatie onwaar wordt. Als φ en ψ beide waar zijn, dan is de implicatie waar, zoals aan het voorbeeld te zien is.

Lastiger is het geval waarin φ onwaar is. Als φ onwaar is, dan is de implicatie altijd waar, onafhankelijk van de waarheid van ψ. De implicatie kan dan nooit onwaar zijn, want een *tegenvoorbeeld* kunnen we in dat geval niet vinden: voor een tegenvoorbeeld moet φ waar en ψ onwaar zijn.

Dat een implicatie $\varphi \to \psi$ waar is als φ onwaar is stuit veel mensen tegen de borst (en al heel lang). Dit komt omdat het een conflict kan opleveren met de gewone taal, waarin we gewend zijn ‘als ..., dan ...’ in een oorzaak-gevolg-situatie te gebruiken. Als de oorzaak onwaar is, lijkt het irrelevant om over het gevolg na te denken, en in zo’n geval vinden we implicatie dus onwaar! ‘Als de maan van groene kaas is, dan zakken de beurskoersen’ is onzin, en zou daarom niet waar zijn. De beurskoersen blijven niettemin zakken. In de propositielogica noemen we zo’n implicatie daarom *wel* waar.

Logici zijn overigens lang niet uitgedacht over andere vormen van implicatie, want een zekere spanning met de natuurlijke taal is vaak een bijzonder effectieve bron van interessante onderzoeksvragen.

Voorbeeld 3.4 De waarheidstabel voor de formule $(p \to q) \to (\neg p \to \neg q)$ is:

p	q	$(p$	$\to$	$q)$	$\to$	$(\neg$	p	$\to$	$\neg$	$q)$
0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0
0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0
1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1
		(1)	(2)	(1)	(4)	(2)	(1)	(3)	(2)	(1)

Deze formule is dus alleen onwaar als p onwaar is en q waar.

Equivalentie

We willen uiteraard dat een equivalentie $\varphi \to \psi$ juist dan waar is als φ en ψ dezelfde waarheidswaarde hebben, dat wil zeggen óf allebei waar óf allebei onwaar. Hiermee ligt de waarheidstabel voor equivalentie voor de hand:

φ	ψ	$\varphi \leftrightarrow \psi$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

In de gewone taal wordt 'als' ook vaak in de betekenis van 'desda' gebruikt, bijvoorbeeld in 'Je mag tv kijken als je huiswerk af is'. Volgens sommigen heeft ook 'mits' deze betekenis. Wanneer we expliciet willen aangeven dat we met een equivalentie en niet met een implicatie te maken hebben, moeten we onze toevlucht nemen tot min of meer moeizame constructies als 'precies dan als' en 'dan en slechts dan als' (desda). Die laatste formulering is in de wiskunde heel gebruikelijk.

Voorbeeld 3.5 De waarheidstabel voor de formule $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ is:

p	q	$\neg$	$(p$	$\wedge$	$q)$	$\leftrightarrow$	$(\neg$	p	$\wedge$	$\neg$	$q)$
0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0
1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	0	1
		(3)	(1)	(2)	(1)	(4)	(2)	(1)	(3)	(2)	(1)

3.1 De kracht van propositielogica

De propositielogica is hiervoor omschreven als een spel met waarheidswaarden en als een taaltje gebaseerd op (preciseringen van) woorden als 'niet' en 'of'. Dit lijkt allemaal nogal bescheiden. Hoewel we krachtigere logica's kennen, zoals de predikaatlogica (buiten de scope van deze cursus), moet hier toch op een paar sterke punten gewezen worden. In de eerste plaats is de propositielogica de basis voor veel logische systemen en als zodanig al heel belangrijk. Bovendien wordt de propositielogica universeel toegepast. Met name is het de basis van het ontwerpen van en redeneren over Boolse schakelingen en binair tellen en rekenen, en als zodanig een bouwsteen van iedere computer.

Samenvatting

Een formele taal is van belang om precisie te krijgen in het formuleren en verwerken van informatie, voor het geven van een glasheldere grammatica. Dit leidt tot een helder wiskundig systeem waarvan de soms verrassende eigenschappen op zichzelf bestudeerd kunnen worden. Dit is een belangrijk methodologisch idee, dat ook in andere disciplines, zoals de wiskunde, de informatica en de taalkunde, grote invloed heeft gekregen.

De taal van de propositielogica wordt gevormd door formules. Zulke formules zijn opgebouwd uit propositieletters ($p,q,\ldots$), haakjes en connectieven. De connectieven zijn:

connectief	*uitspraak*	*naam*
$\neg$	niet	negatieteken
$\wedge$	en	conjunctieteken
$\vee$	of	disjunctieteken
$\rightarrow$	als ..., (dan)	implicatieteken
$\leftrightarrow$	desda	equivalentieteken

Behalve het negatieteken, dat maar met één formule combineert tot een nieuwe formule $\neg\varphi$, combineren de connectieven altijd twee formules: $(\varphi \wedge \psi)$ noemen we een *conjunctie*, $(\varphi \vee \psi)$ een *disjunctie*, $(\varphi \rightarrow \psi)$ een *implicatie* en $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ een *equivalentie*.

De betekenis van de formules is gelegen in hun waarheidstabellen. Waarheidstabellen classificeren situaties. Die waarheidstabellen zijn op systematische wijze op te stellen wanneer de waarheidstabellen van de connectieven bekend zijn. Deze zijn:

φ	ψ	$\neg\varphi$	$\varphi \wedge \psi$	$\varphi \vee \psi$	$\varphi \rightarrow \psi$	$\varphi \leftrightarrow \psi$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

3.2 Opgaven

Opgave 3.1

Neem aan dat p en q **waar** zijn, en r en s **onwaar**. Bepaal de waarheidswaarde van de volgende formules:

1. $p \wedge r$
2. $q \vee s$
3. $p \rightarrow s$
4. $(\neg p \wedge s) \vee q$
5. $(q \vee r) \wedge \neg s$
6. $(p \wedge r) \rightarrow s$
7. $(q \vee \neg s) \wedge (r \vee \neg p)$
8. $\neg s \wedge (p \vee \neg q)$
9. $(\neg s \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow \neg p)$
10. $\neg(s \rightarrow q)$
11. $(s \wedge p) \vee \neg(r \wedge q)$
12. $\neg r \rightarrow (q \vee s)$
13. $(\neg p \wedge s) \vee (p \wedge q \wedge r)$
14. $\neg(\neg q \vee r) \wedge (s \vee p \vee \neg r)$
15. $[(p \rightarrow \neg q) \vee (\neg s \wedge q)] \rightarrow (r \rightarrow \neg p)$

Opgave 3.2

Maak een waarheidstabel voor:

1. $p \vee \neg q$
2. $\neg p \wedge q$
3. $p \wedge (q \vee \neg p)$

Opgave 3.3

Gegeven zijn de volgende proposities:

- p: Jan gaat naar het feest.
- q: Marie gaat naar het feest

Zet nu de volgende uitspraken om in formules van de propositielogica:

- Marie noch Jan gaat naar het feest.
- Óf Marie óf Jan gaat naar het feest.
- Jan gaat naar het feest, tenzij Marie er naar toe gaat.

Opgave 3.4

Maak de waarheidstabellen voor de formule $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$ en voor de formule $((p \vee \neg q) \wedge r) \leftrightarrow (\neg(p \wedge r) \vee q)$.

Opgave 3.5

Gegeven is de volgende uitspraak die in een bepaalde situatie waar is:
‘Als Jan gaat, gaat Marie in ieder geval, en Piet gaat alleen als Jan niet gaat.’
Wie gaan er nu?

Zet de uitspraak eerst om in een formule en stel de waarheidstabel van deze formule op.

Opgave 3.6
Een politicus beloofde: “Ik zal stemmen voor lagere belasting of voor fiscale hervorming, en ik zal niet voor fiscale hervormingen stemmen.”
Wat moet deze politicus doen om zich aan zijn woord te houden?
Maak een waarheidstabel om je antwoord te checken.

Opgave 3.7
Meneer Chen zei tegen zijn vrouw: "Als het vandaag niet regent, dan maai ik het gras."
Toen mevrouw Chen thuis kwam en het overal nat was, was het gras netjes gemaaid.
Heeft meneer Chen de waarheid gesproken?
Maak een waarheidstabel om je antwoord te checken.

Opgave 3.8
Maak een waarheidstabel van de formules die je vertaald hebt in opgave 2.9.

Opgave 3.9
Maak een waarheidstabel om aan te tonen dat je antwoord op opgave 2.10 (of Arno en Huib handlangers kunnen zijn), inderdaad klopt. Hoe kan je dat zien aan de hand van de waarheidstabel van de gegeven formules?

4. Wie *A* zegt moet *B* zeggen

Logici ontwerpen niet alleen systemen om bestaande vormen van redeneren te analyseren, ze bestuderen ook de eigenschappen van die systemen op zich. De propositielogica is daarvan een uitstekend voorbeeld, want ze kunnen dit systeem gebruiken om nu stelselmatige wetmatigheden aan het licht te brengen.

Eén zo'n wetmatigheid heeft te maken met redeneringen. Een redenering in de vorm 'uit $p \vee \neg q$ en q kan men p afleiden' vonden we al correct (geldig), en we kunnen uitzoeken welke eigenschap van de waarheidstabellen van de formules in kwestie hiervoor verantwoordelijk is. Door op een wiskundige manier te denken kunnen we dus precies definiëren wat geldigheid is.

4.1 Logisch gevolg

Met de hier ontwikkelde begrippen zijn we nu in staat om een precieze logische definitie te geven van wat we intuïtief een correcte redenering noemen. Welke eigenschap van de waarheidstabellen van de betrokken formules is hiervoor verantwoordelijk?

Om dit te achterhalen, beschouwen we een eenvoudige redenering: uit 'Jan is een goede schaker en Karin een goede dammer' kan worden geconcludeerd: 'Jan is een goede schaker'. Het uitgangspunt is 'Jan is een goede schaker en Karin is een goede dammer' en de conclusie is 'Jan is een goede schaker'. Hier is geen speld tussen te krijgen: de redenering is correct. Zij nu $p =$ 'Jan is een goede schaker' en $q =$ 'Karin is een goede dammer'. We maken vervolgens de waarheidstabellen van het uitgangspunt (premisse) $(p \wedge q)$ en de conclusie p:

p	q	p	$\wedge$	q	p
0	0	0	$\boxed{0}$	0	$\boxed{0}$
0	1	0	$\boxed{0}$	1	$\boxed{0}$
1	0	1	$\boxed{0}$	0	$\boxed{1}$
1	1	1	$\boxed{1}$	1	$\boxed{1}$

We scheiden het uitganspunt (of de uitgangspunten) van de conclusie door een onderbreking in de tabel. Vergelijken we de aangegeven kolommen, dan valt op dat het uitgangspunt en de conclusie niet altijd waar zijn, en niet dezelfde waarheidswaarde hoeven te hebben, maar dat, en dit is essentieel:

> als het uitgangspunt waar is, dan is ook de conclusie waar.

We spreken van *logisch gevolg* of van 'geldige gevolgtrekking'.

Definitie 4.1 — Logisch gevolg. De formule ψ is een logisch gevolg van $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ als elke waardering die alle $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ waar maakt, ook ψ waar maakt.
We schrijven hiervoor $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \Rightarrow \psi$ of $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \therefore \psi$.

Voorbeeld 4.1 De redenering in het vorige voorbeeld kunnen we weergeven als $p \wedge q \therefore p$, dat wil zeggen: p is een logisch gevolg van $p \wedge q$. Immers, er was blijkens de tabel maar één waardering die $p \wedge q$ waar maakte (de laatste regel), en die maakt inderdaad de conclusie p ook waar.
In dit voorbeeld is $n = 1$ en φ_1 de formule $p \wedge q$.

Voorbeeld 4.2 We herhalen de redenering van het begin van hoofdstuk 2:

> 'De afstandsbediening is kapot of de tv werkt niet goed. Maar de tv werkt wel goed. Dus de afstandsbediening is kapot.'

We kiezen nu $p =$ 'De afstandsbediening is kapot' en $q =$ 'De tv werkt goed'. We gaan nu kijken of p een logisch gevolg is van $p \vee \neg q$ en q samen.

p	q	p	$\vee$	$\neg$	q	q	p
0	0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	0	1	1	0
1	0	1	1	1	0	0	1
1	1	1	$\boxed{1}$	0	1	$\boxed{1}$	1

Uit de tabel blijkt dat de beide uitgangspunten alleen tegelijk waar zijn (omrandde enen) als p en q waar zijn (laatste regel). Met andere woorden: we hoeven slechts naar de laatste rij waarheidswaarden te kijken, en daar is de conclusie ook waar.

Kortom: $p \vee \neg q, q \therefore p$. In dit voorbeeld is $n = 2$, φ_1 de formule $p \vee \neg q$ en φ_2 de formule q.

Merk op dat in de definitie van geldig gevolg staat: *elke* waardering die de uitgangspunten waar maakt, moet de conclusie waar zijn. Het is niet voldoende dat er *een* waardering bestaat die zowel uitgangspunten als conclusie waar maakt.

Voorbeeld 4.3 Uit 'Er komen meer wegen in Nederland precies dan als Nederland geasfalteerd raakt' is niet correct te concluderen dat er meer wegen in Nederland komen. Formeel $p \leftrightarrow q \not\therefore p$, dat wil zeggen, p is geen logisch gevolg van $p \leftrightarrow q$. Er is *een* waardering die het uitgangspunte en de conclusie waarmaakt, namelijk de waardering die p en q allebei waarmaakt. Maar er is ook een waardering die $p \leftrightarrow q$ waarmaakt, maar niet de conclusie, namelijk de waardering die p en q allebei onwaar maakt.

Een aantal bekende vormen van gevolgtrekkingen zijn:

naam	*vorm van de gevolgtrekking*
uitgesloten derden	$\neg\neg\varphi \therefore \varphi$
modus ponens	$\varphi, \varphi \to \psi \therefore \psi$
contrapositie	$\varphi \to \psi \therefore \neg\psi \to \varphi$
hypothetisch syllogisme	$\varphi \to \psi, \psi \to \chi \therefore \varphi \to \chi$

Deze regels worden (vaak stilzwijgend) gebruikt bij wiskundige bewijzen. In de tabel hebben we een derde Griekse letter ingevoerd voor willekeurige formules: χ, spreek uit 'chi'.

4.2 Feitelijk redeneren

Hoe verhoudt de logica zich tot de realiteit van ons gedrag? Behalve de leer van correcte informatieve handelingen is er dan in elk geval ook de analyse van incorrecte redeneringen. Er zijn immers allerlei redeneringen die in natuurlijke taal wel correct lijken, maar dat toch niet zijn. Een goed logisch systeem moet ook fouten kunnen analyseren, en voorspellen waar deze optreden, de zogenaamde *drogredenen* (in het Engels: 'fallacies'). Met name de *argumentatietheorie* houdt zich bezig met de analyse van drogredenen. We volstaan met een aantal voorbeelden.

Voorbeeld 4.4 — Bevestiging van het gevolg.
We gaan weer terug naar het voorbeeld in het begin van hoofdstuk 2:

> 'Het schilderij hangt hier niet als het gestolen is. Het schilderij hangt hier niet. Dus het is gestolen.'

Deze ongeldige redenering heeft de vorm $p \to \neg q, \neg q \therefore p$. De redenering is ongeldig omdat de waardering die p en q onwaar maakt, de uitgangspunten waarmaakt maar niet de conclusie. De redenering *lijkt* geldig omdat deze lijkt op 'modus ponens' hierboven (maar is dat dus niet!).

Voorbeeld 4.5 — Verborgen aanname.
"De tweede voornaam van Barack Obama is Hussein. Hij is dus moslim! Je moet dus niet op hem stemmen bij de presidentsverkiezingen."
Deze redenering bevat twee verborgen aannames. De eerste is 'Iemand die Hussein als voornaam heeft is een moslim.' Deze aanname is niet gerechtvaardigd, want dit hoeft niet het geval te zijn. En president Obama is in feite geen moslim. De tweede verborgen aanname is 'Als iemand moslim is dan kan hij/zij geen kandidaat zijn voor de presidentsverkiezingen' of (het blijft gissen ...) 'Als iemand moslim is dan zou hij/zij geen kandidaat mogen zijn voor de presidentsverkiezingen'. Het eerste is wederom onwaar, omdat in de Amerikaanse grondwet is vastgelegd dat geloofsovertuiging politiek niet in de weg mag staan. Het tweede lijkt ons ook onwaar – de vraag is natuurlijk of de meerderheid van de Amerikaanse bevolking in 2009 zo over denkt. We wachten tot de presidentsverkiezingen in 2020, en de eerste islamitische Amerikaanse presidentskandidaat.

Voorbeeld 4.6 — Cirkelredenering.
De cirkelredenering staat bekend onder de Latijnse naam 'petitio principii'. De algemene vorm van een cirkelredenering is $\varphi_1 \to \varphi_2, \varphi_2 \to \varphi_3, \ldots, \varphi_n \to \varphi_1 \therefore \varphi_1$, en het kortst door de bocht is hier $\varphi_1 \to \varphi_1 \therefore \varphi_1$: uit de triviale implicatie dat een bewering zichzelf impliceert volgt de bewering zelf. Bijvoorbeeld: "Ik ben de baas omdat ik het hier voor het zeggen heb." Of anders deze: "Waar je die kerktoren ziet staan moet het centrum van Venlo wel zijn, want dat is echt zo'n centrumkerk.' In het Engels staat deze drogreden bekend als 'Begging the Question'.

4.3 Opgaven

Opgave 4.1
Toon door middel van waarheidstabellen aan dat de volgende redeneringen geldige gevolgtrekkingen zijn:

1. $p \to (q \wedge r), q \to \neg r \therefore \neg p$;
2. $\neg p \to (q \wedge \neg r), \neg q \to \neg r \therefore p$;
3. $p \to q, \neg q \therefore \neg p$ (ook bekend onder de naam 'modus tollens').

Opgave 4.2
Wat is er mis met de volgende redenering: "Papa, waarom gaat de zon onder?" "Omdat de zon om de aarde draait, jongen." "En waarom is dat dan?" "Ja, anders zou 'ie toch stilstaan boven ons, niet?"

Opgave 4.3 Beschrijf de volgende redeneringen symbolisch op en bepaal of de conclusie logisch volgt uit de premissen:

1. Wij zijn Siamezen, als u wilt.
   Wij zijn Siamezen, als u niet wilt.
   Daarom zijn wij Siamese.

2. Wij zijn Siamese, of we zijn tijgers.
   Wij zijn geen Siamezen.
   Dus kijk uit - wij zijn tijgers!
3. Als we Siamees zijn, dan doen we dat graag.
   Als we Siamese zijn, dan doen we dat niet graag.
   Dus je ziet, we zijn geen Siamezen!

Opgave 4.4 Bekijk nogmaals je vertaling van opgave 2.2 (over de president van de VS). Bepaal met behulp van een waarheidstabel de waarheid van de uitspraak.

Opgave 4.5 Beschouw de volgende puzzel van Lewis Carroll:
1. Geen van de onopgemerkte dingen, ontmoet op zee, waren zeemeerminnen.
2. Dingen die in het logboek zijn ingevoerd, zoals ontmoet op zee, zijn zeker de moeite waard om te onthouden.
3. Tijdens een reis heb ik nog nooit iets meegemaakt dat het waard is om te onthouden.
4. Dingen die op zee worden ontmoet, die worden opgemerkt, worden zeker in het logboek vastgelegd.

Als je 'dingen die je ontmoet op zee' als domein beschouwd waar deze proposities over gaan, laat zien dat je kan afleiden dat Lewis Carroll nog nooit een zeemeermin heeft ontmoet.

Opgave 4.6 Beschouw de volgende puzzel van Lewis Carroll:
1. Interessante poëzie is populair bij mensen met echte smaak.
2. Geen enkele moderne poëzie is vrij van hartstocht.
3. Al jouw gedichten gaan over zeepbellen.
4. Geen van de poëzie populair bij mensen met echte smaak heeft hartstocht.
5. Geen enkel klassiek gedicht heeft te maken met zeepbellen.

Als we beschouwen dat deze proposities allen over poëzie gaan, wat is dan een opvallende, maar gegronde conclusie?

Opgave 4.7 Vertaal de volgende redenering en analyseer of deze geldig is:

> De post brengt een brief, tenzij Anna opbelt of zelf komt. Als Anna opbelt dan brengt de post geen brief. Anna komt zelf alleen als de post een brief brengt. Dus Anna komt.

Geef een tegenvoorbeeld als ze niet geldig is.

Opgave 4.8 Vertaal de volgende redenering en analyseer of deze geldig is:

> Nederlanders zoeken naar wettelijke mogelijkheden voor fiscale aftrekposten als ze naar fiscale aftrekposten zoeken. Als Nederlanders

> voor extra pensioenvoorzieningen kiezen, dan zijn ze rijk. Als Nederlanders niet rijk zijn en niet naar fiscale aftrekposten zoeken, dan kiezen ze niet voor extra pensioenvoorzieningen. Dus als Nederlanders niet voor extra pensioenvoorzieningen kiezen, dan zoeken ze niet naar wettelijke mogelijkheden voor fiscale aftrekposten of zijn ze niet rijk.

Geef een tegenvoorbeeld als ze niet geldig is.

Opgave 4.9 Vertaal de volgende redenering en analyseer of deze geldig is:

> Als Dirk lacht, dan lachen Marc en Albert. Als Karst lacht of Dirk niet lacht, lacht Albert niet. Als Frans lacht, lacht Karst. Dus als Frans lacht, lacht Dirk niet.

Geef een tegenvoorbeeld als ze niet geldig is.

5. Verzamelingen

In de meest uiteenlopende omstandigheden kan het handig zijn om een stel objecten, elementen, of wat dan ook, samen een naam te geven. Het resultaat noemen we dan een *verzameling*. Zo'n verzameling bestaat alleen maar bij de gratie van de elementen die erin zitten.

Het fundamentele verband tussen een verzameling en objecten is dat van elk object vast ligt of het behoort tot die verzameling of niet. Synoniemen voor "behoren tot" zijn "lid zijn van" en "element zijn van". Deze zullen door elkaar worden gebruikt, maar betekenen hetzelfde.

We gebruiken het *esti-teken* $\in$ als afkorting voor "is element van", zoals in $x \in A$, waarmee we dus uitdrukken dat "x een element is van (verzameling) A". Als iets geen element is van een verzameling, dan gebruiken we $\notin$, bijv. $y \notin A$ om uit te drukken dat y niet in de verzameling A zit.

Heeft een verzameling slechts eindig veel elementen, dan kunnen we die elementen allemaal *opsommen*, en daardoor de verzameling definiëren. De standaardnotatie die we daarvoor gebruiken is het achter elkaar opschrijven van de elementen, gescheiden door komma's, en het geheel afsluiten met accoladen. Bijvoorbeeld

$$V = \{3,4,9,1\}$$

$$W = \{\text{maandag}, \text{dinsdag}, \text{woensdag}, \text{donderdag}, \text{vrijdag}, \text{zaterdag}, \text{zondag}\}$$

Merk op dat het er niet toe doet in welke volgorde de elementen tussen de accoladen staan. Ook tellen dubbele elementen als hetzelfde element:

$$\{3,4,9,3,1\} = \{3,4,9,1\} = \{1,3,4,9\}$$

Soms gebruiken we ook een suggestieve notatie zoals in

$$A = \{1,2,\dots,10\} \qquad B = \{3,4,5,\dots\}$$

Een waarschuwing is hier wel op zijn plaats: in zijn algemeenheid is het niet precies duidelijk wat '. . . ' betekent, en is het aan te raden dit alleen te gebruiken als iedereen er dezelfde betekenis aan hecht. Wat zou bijvoorbeeld

$$\{1,2,4,8,16,\ldots\}$$

betekenen? De meeste mensen zullen dit rijtje wel voortgezet denken op de manier waarin elk getal door verdubbelen uit het vorige verkregen is, maar andere interpretaties zijn ook mogelijk. Voor grotere verzamelingen, waarbij de neiging bestaat om puntjes te gebruiken hebben we behoefte aan een andere notatie, deze zullen we hier maar beperkt introduceren omdat ze verder buiten de scope van deze cursus valt.

Om te beginnen, spreken we voor een aantal veel gebruikte verzamelingen af dat we ze altijd met een vast teken zullen introduceren. De belangrijkste voor deze cursus is $\varnothing$ welke de verzameling zonder elementen aanduidt (de *lege verzameling*). Andere voorbeelden zijn $\mathbb{N}$ (de natuurlijke getallen: $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,\ldots\}$), $\mathbb{Z}$ (de gehele getallen: $\mathbb{Z} = \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$) en de overige wiskundige getalverzamelingen ($\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$), maar worden hier verder niet meer behandelt.

Vaak stoppen we objecten in een verzameling omdat ze alle een specifieke eigenschap hebben die ons interesseert. Zo schrijven we bijvoorbeeld

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \wedge x \leq 10\}$$

om aan te geven dat A bestaat uit alle natuurlijke getallen tussen (inclusief) 1 en 10. Dit is dus dezelfde verzameling als

$$A = \{1,2,3,\ldots,10\},$$

maar we behoeven niet te raden wat de puntjes betekenen, en we hoeven ook niet alle elementen op te sommen. In zijn algemeenheid kunnen we altijd eigenschappen gebruiken om een verzameling te definiëren. Normaliter definiëren we verzamelingen binnen een bepaalde *context*; het *universum* U.

Een verzameling A het een *deelverzameling* van een verzameling B als elk element in A ook een element is van B. We gebruiken hiervoor de notatie $A \subseteq B$, en soms ook wel $B \supseteq A$. Dus:

$A \subseteq B$ betekent dat voor alle elementen x, als $x \in A$ dan $x \in B$.

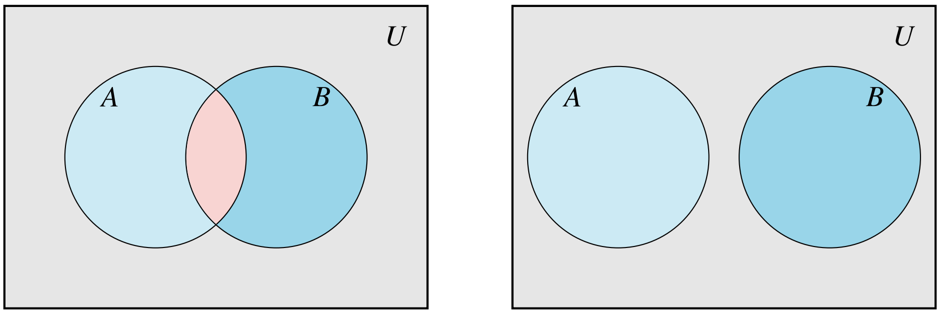
De relatie $\subseteq$ heet ook wel *inclusie*. Een verzameling A heet een *echte deelverzameling* van een verzameling B als $A \subseteq B$ én er een element van B is dat niet een element van A is. Hiervoor wordt wel de notatie $A \subset B$ gebruikt, en soms ook wel $B \supset A$.

Twee verzamelingen A en B zijn *gelijk* (notatie $A = B$) als ze dezelfde elementen bevatten, dus precies dan als $A \subseteq B$ en $B \subseteq A$.

$A = B$ betekent dat voor alle elementen x, $x \in A$ dan en slechts dan als $x \in B$.

5.1 Venn-diagram

Het is eenvoudiger om over dingen na te denken als je er een plaatje van kan maken. Visuele stimuli kunnen je brein helpen om problemen op te lossen, wat de reden is waarom, als je aan een wiskundig probleem werkt, het vaak helpt om eerst een plaatje te tekenen. Het maken van een plaatje alleen voorkomt dat je zit te dagdromen en dat je gedachten, tijdens het oplossen van het probleem, wendingen nemen die je niet helpen bij het nadenken. De Engelsman John Venn (1834 – 1923) introduceerde een systematisch manier om schetsen te maken als visueel hulpmiddel voor het nadenken over verzamelingen (en logica); we noemen dergelijke diagrammen *Venn-diagrammen*.



Figuur 5.1 Overlappende (links) en disjoint (rechts) verzamelingen.

Hierboven zijn twee Venn-diagrammen getekend voor de verzamelingen A en B. We stellen ons voor dat A bestaat uit alle punten in de cirkel A[1] en we maken dezelfde aanname over B. De grote rechthoek waar beide verzamelingen inzitten representeerd het universum U. Het linker diagram toont dat A en B een *overlap* hebben, terwijl het rechter toont dat A en B *disjunct* zijn. (Over het algemeen worden cirkels of ovalen gebruikt om verzamelingen aan te duiden, maar andere vormen, zoals rechthoeken, mogen ook worden gebruikt. Tevens is het gebruik van kleur niet noodzakelijk, maar het maakt de diagrammen wel mooier).

Merk op dat, omdat we abstraheren van de specifieke individuen (d.w.z., we tekenen de elementen in de verzamelingen niet), het nog steeds zo kan zijn dat de overlap tussen A en B in de linkerkant van de figuur leeg is. Alleen als we alle elementen zouden tekenen, en er daadwerkelijk elementen in het rode gebied zouden zitten, kunnen we stellen dat A en B een *niet-lege* overlap hebben.

5.2 Operatoren op verzamelingen

Bij twee verzamelingen A en B die niet gelijk zijn, kunnen we een hele serie nieuwe verzamelingen definiëren. Dat gaan we nu doen.

Met $A \cap B$ duiden we de *doorsnede* van A en B aan: de verzameling die bestaat uit alle objecten die zowel in A als in B zitten, oftewel

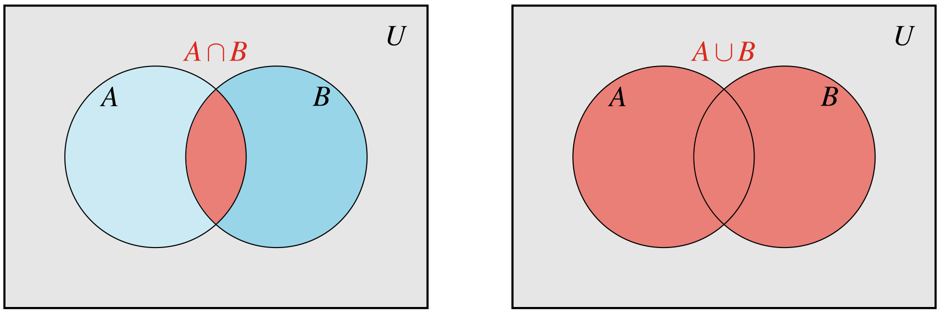
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

Twee verzamelingen heten *disjunct* als hun doorsnede leeg is.

Met $A \cup B$ duiden we de *vereniging* van A en B aan: de verzameling die bestaat uit alle objecten van A en alle objecten van B, oftewel

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

[1]Merk op dat in veel gevallen, Venn-diagrammen *abstraheren* van de specifieke inhoud van de getekende verzamelingen; dat wil zeggen, de objecten/individuen die in een verzameling worden meestal niet getekend om het plaatje overzichtelijker te maken.

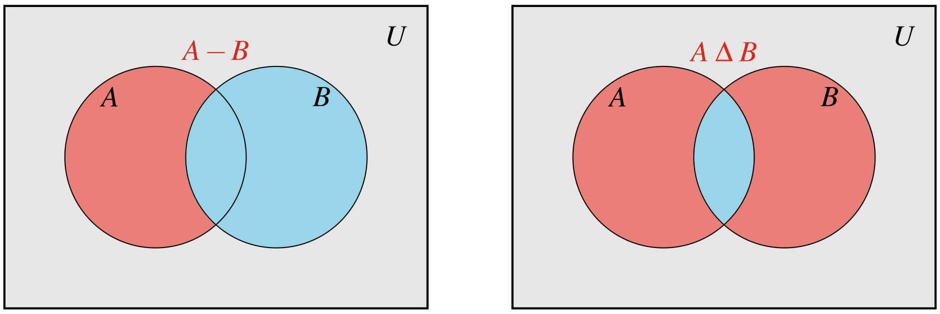


Figuur 5.2 De *doorsnede* van A en B: $A \cap B$ (links) en de *vereniging* van A en B: $A \cup B$ (rechts).

Met $A - B$, het *verschil* van A en B, bedoelen we de verzameling bestaande uit alle objecten die wel tot A behoren, maar niet tot B, oftewel

$$A - B = \{x \mid x \in A \land x \notin B\}.$$

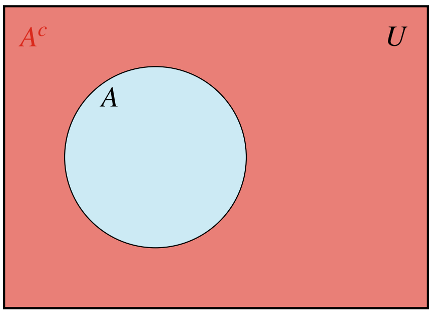
De verzameling $(A \cup B) - (A \cap B)$ staat bekend als *symmetrisch verschil* van A en B. Deze is gelijk aan $(A - B) \cup (B - A)$. Hiervoor wordt ook wel de notatie $A \Delta B$ gebruikt.



Figuur 5.3 Het *verschil* van A en B: $A - B$ (links) en het *symmetrische verschil* van A en B: $A \Delta B$ (rechts).

Zoals gezegd komt het vaak voor dat we het uitsluitend willen hebben over objecten in een vast *universum* U. Dat houdt tevens in dat alle verzamelingen waarover we dan kunnen spreken deelverzamelingen zijn van U. Is U het universum, dan heet $U - A$ het *complement* van A, ook wel korter genoteerd als A^c:

$$A^c = \{x \mid x \notin A\}.$$



Figuur 5.4 Het *complement* van verzameling A: A^c.

Zoals al deels te begrijpen valt uit de definities van de operatoren hierboven, is er een sterke analogie tussen propositielogica en verzamelingenleer. Deze analogie is nog sterker in een uitbreiding van de propositielogica: de predikatenlogica, maar deze valt buiten de scope van deze cursus.

Voor de operatoren die hierboven beschreven zijn, zijn ook rekenregels te definieren, analoog aan hoe er, bijvoorbeeld in de wiskunde, met de $+$- en $\times$-operatoren wordt omgegaan.

Stelling 5.2.1
Voor alle verzamelingen A, B en C gelden de volgende regels:

1. $A \cup \varnothing = A$
2. $A \cap \varnothing = \varnothing$
3. $A \cup B = B \cup A$
4. $A \cap B = B \cap A$
5. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
6. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
7. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
8. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

Hierin drukt regel 1 uit dat $\varnothing$ een *neutraal element* is met betrekking tot de vereniging. Regels 3 en 4 geven aan dat vereniging en doorsnede *commutatief* zijn. Regels 5 en 6 geven aan dat vereniging en doorsnede *associatief* zijn. Regel 7 geeft aan dat doorsnede *distribueert over* vereniging en regel 8 geeft aan dat vereniging distrubeert over doorsnede.

5.3 Opgaven

Opgave 5.1 Beschrijf (schrijf uit) de volgende verzamelingen:

1. GP: de verzameling van gezamenlijke vakken in de propedeuse van HBO-ICT (van de HU);
2. VN: de verzameling van (voornamen van) docenten van je vakken van afgelopen half jaar;
3. $\mathbb{H}$: de verzameling van hexadecimale symbolen (waarmee je hexadecimale getallen kan vormen);
4. $\mathbb{M}$: de verzameling van mathematische (basis)operaties;
5. $\mathbb{L}$: de verzameling van (propositie)logische (basis)operaties.

Opgave 5.2 Bepaal de cardinaliteit van elk van de verzamelingen van de vorige opgave.

Opgave 5.3 Teken een Venn-diagram voor twee overlappende verzamelingen A en B. Kleur de volgende onderdelen:

1. $A \cap B^c$;
2. $A^c \cup B$.

Opgave 5.4 Laat zien (d.m.v. een Venn-diagram) dat de volgende beweringen gelden:

1. Voor alle verzamelingen A en B geldt $A \subseteq (A \cup B)$;
2. Stel dat $A \subseteq C$ en $B \subseteq C$, dan geldt $(A \cup B) \subseteq C$;
3. Stel dat $A \subseteq B$ en $B \subseteq C$, dan geldt $A \subseteq (B \cap C)$.

Opgave 5.5 Gebruik een Venn-diagram om aan te tonen dat de volgende beweringen gelden:

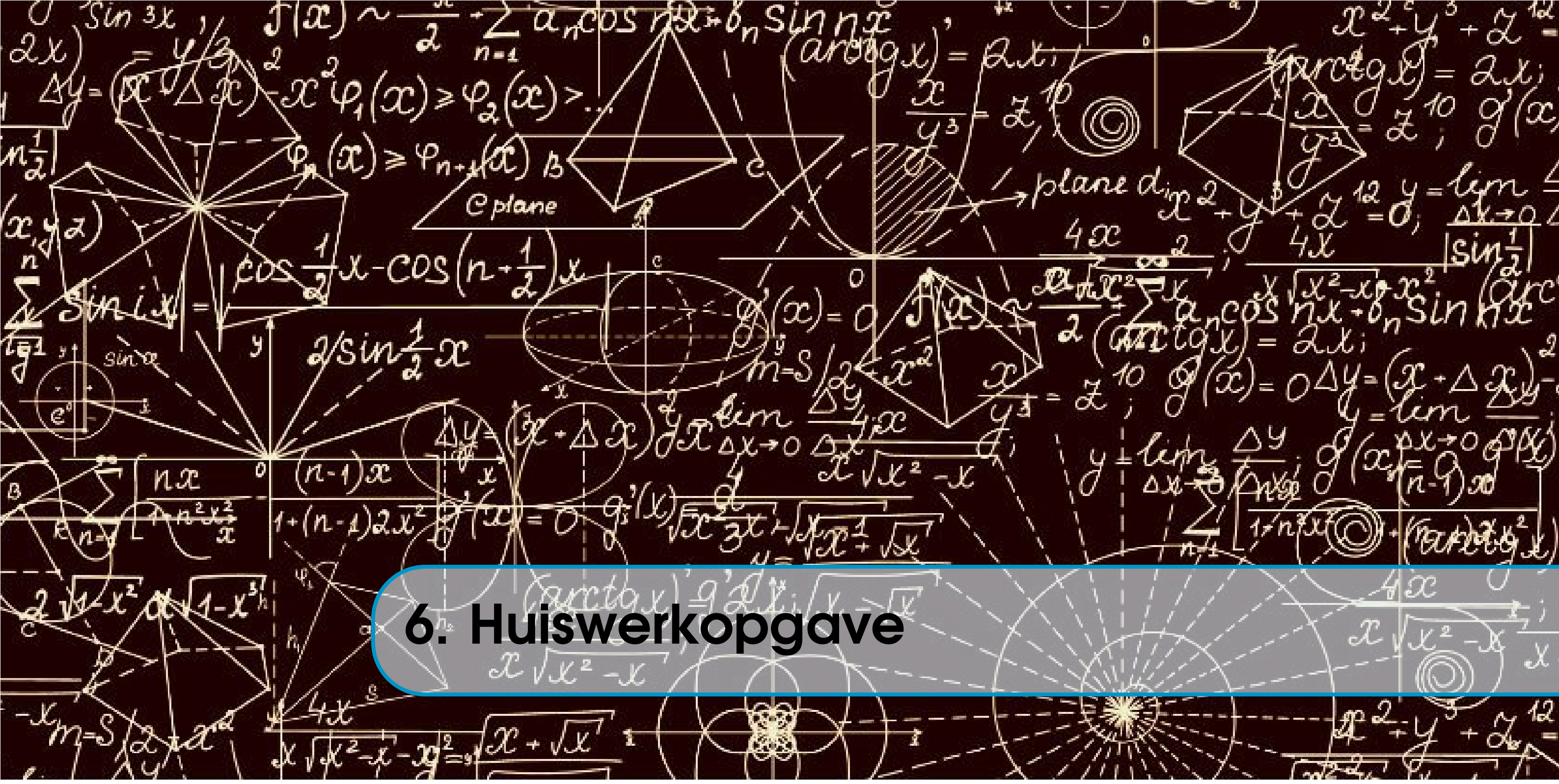
1. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$;
2. $(A \cap B) \cup (A \cap B^c) = A$.

Opgave 5.6 Teken Venn-diagrammen voor drie verzamelingen A, B en C, zodanig dat:

1. $A \subseteq B \subseteq C$;
2. $A \cap B = \varnothing$ en $A \subseteq C$ en $B \subseteq C$;
3. $A \cap B \neq \varnothing$ en $A \not\subseteq B$ en $B \not\subseteq A$ en $A \subseteq C$ en $B \subseteq C$;
4. $A \subseteq B$ en $A \subseteq C$, maar $B \not\subseteq C$ en $C \subseteq B$.

Opgave 5.7 Teken een Venn-diagram met drie overlappende verzamelingen A, B en C en kleur:

1. $A^c \cap B \cap C$;
2. $A^c \cap B \cap C^c$;
3. $(B \cup C) \cap A^c$;
4. $A \cup (B^c \cap C)$;
5. $C^c \cap (B^c \cup A)$.



6. Huiswerkopgave

Gegeven is de volgende informatie[1]:

i. Ten minste één van Frodo, Gollum, Bilbo, en Sméagol heeft de ring.
ii. Hoogstens één van Frodo, Gollum en Bilbo heeft de ring.
iii. Als Sméagol de ring niet heeft, dan hebben Frodo en Bilbo de ring ook niet.
iv. Sméagol heeft de ring dan en slechts dan als Gollum de ring heeft.

Opgave 6.1 Vertaal de zinnen naar propositielogica door een passende vertaalsleutel te kiezen (d.w.z., atomaire proposities) en de zinnen om te zetten naar propositielogische formules. Merk op dat natuurlijke taal veel efficienter is in het uitdrukken van sommige informatie dan de propositielogica!

Lever in:

- de gebruikte vertaalsleutel;
- de vertaling van de hierboven genoemde zinnen in propositielogica.

Opgave 6.2 Bepaal de mogelijke combinaties van waarheidswaarden van de atomaire proposities in het bovenstaande, d.w.z. die combinaties die alle zinnen waar maken, en beantwoord daarmee de vraag wie de ring heeft. Maak hiervoor een waarheidstabel.

De ringen van macht zijn gemaakt door de heerser van het kwaad, Sauron. Er zijn 20 ringen gemaakt, 3 voor de elven, 7 voor de dwergen, 9 voor de mensen, en 1, de meesterring, die alle andere ringen aan zich bindt. Aangezien de ringen oorspronkelijk alleen bedoeld waren voor de elven, hebben deze een eigenaardige bijwerking; ze geven de drager een oneindige levenspan, iets wat de elven sowieso al hebben, maar mensen en dwergen niet.

[1] Deze informatie is een vrije interpretatie van een bekende boekenreeks. Kennis van de verhalen in die boekenreeks kan je niet gebruiken voor het beantwoorden van deze vragen!

Opgave 6.3 Teken op basis van de informatie hierboven, de volgende verzamelingen in het universum van inwoners van middel-aarde:

- inwoners met een oneindig leven (O);
- inwoners die elf zijn (E);
- inwoners die een ring van macht dragen (R).

Laat vervolgens, door middel van ven-diagrammen zien dat:

> De inwoners van middel-aarde die géén oneindig leven hebben een deelverzameling is van de doorsnede van niet-elven en niet-ringdragers.

Bibliografie

van Benthem, Johan, Hans van Ditmarsch en Jan van Eijck (2009). *Logica in actie*. Den Haag Academic Service.

Zantema, H. en P.W.H Lemmens (1999). *Beschrijven en Bewijzen*. Delft University Press.