(door Marius Versteegen, 2022)

Karnaugdiagrammen

Voor snelle logische analyse en design

Introductie

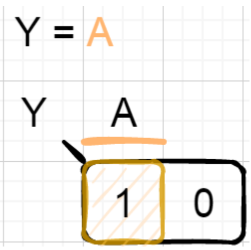
Het karnaughdiagram is een uitvinding van Maurice Karnaugh, uit 1953. Het is een compacte, handige manier om een waarheidstabel weer te geven. Met een karnaughdiagram kan zonder wiskunde snel en eenvoudig een compacte vorm van een complexe logische formule worden afgeleid. Zo'n logische formule kan weer 1-op-1 worden vertaald naar een logisch circuit. Als extra bonus maakt het karnaughdiagram het makkelijk om te zorgen dat die logische circuits vrij zijn van een zogenaamd "race-risico".

Kortom, wie karnaughdiagrammen beheerst kan eenvoudig en in weinig tijd complexe logische circuits ontwerpen.

Een eerste voorbeeld

Weergave van een logische formule met een karnaughdiagram

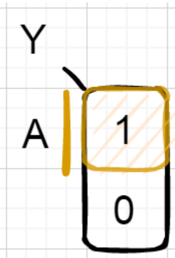
Een karnaughdiagram geeft een compacte visuele weergave van een logische formule. Onderstaand vind je een voorbeeld van een eenvoudige formule, met een bijbehorend karnaughdiagram:



Het **resultaat** van de formule, de **uitgangsvariabele** staat aan de linkerkant van het gelijkheidsteken. In dit geval is dat de logische variabele Y *(een logische variabele is een variabele die 2 mogelijke toestanden kan aannemen: 1 of 0)*. Aan de rechterkant van het gelijkheidsteken staat een logische expressie waar 1 of meer **ingangsvariabelen** in voorkomen. In dit geval is dat alleen de logische variabele A.

Kortom, als A de waarde 1 heeft, krijgt Y de waarde 1, en als A de waarde 0 heeft, krijgt Y de waarde 0. Het karnaughdiagram heeft 1 vakje voor elke mogelijke combinatie van de ingangswaarden. Het **getal in het vakje** is **de uitgangswaarde** die hoort bij die combinatie van ingangswaarden. De Y staat via een schuin streepje linksboven afgebeeld, om duidelijk te maken dat dat de uitgangsvariabele is. Elke ingangsvariabele kan 0 of 1 zijn. Dus voor de helft van de logische combinaties is het 0, en bij de andere helft 1. De helft waarvoor het 1 is wordt aangegeven door een of meerdere streepjes aan de rand van het diagram, bij de betreffende ingangsvariabele. In het bovenstaande voorbeeld staat het streepje van ingangsvariabele A boven de eerste kolom van het karnaughdiagram. Dat betekent dat de variabele A in alle vakjes van die eerste kolom de waarde 1 heeft, en elders de waarde 0.

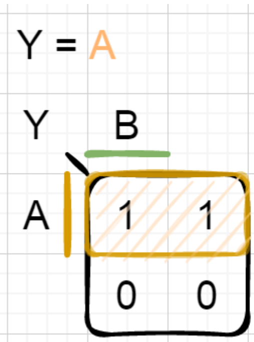
Er kan ook voor gekozen worden om de waarde van A met rijen in plaats van met kolommen weer te geven. In dat geval ziet het karnaughdiagram van dezelfde formule er zo uit:

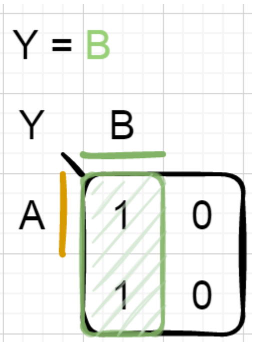


2x2 diagrammen

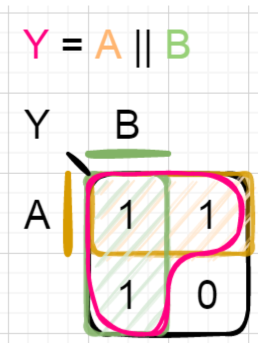
Een weergave van logische formules

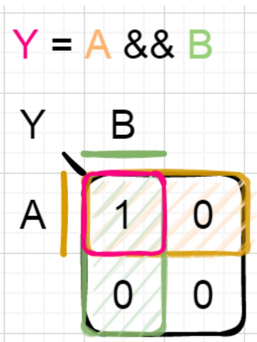
Wat nu als er meerdere ingangsvariabelen zijn? Ingangsvariabelen A en B kunnen bijvoorbeeld als volgt worden weergegeven in een 2x2 karnaughdiagram:





In de praktijk is dit nog niet zinvol: bij een karnaughdiagram zet je alleen die ingangsvariabelen waar de uitgang van afhankelijk is. Bij de onderstaande voorbeelden is de uitgang wel van beide ingangen afhankelijk:





Notatie van logische operaties:

- **||** is "logical or", ofwel "en/of", ofwel "**vereniging** van gebieden"
- **&&** is "logical and", ofwel "en", ofwel "**doorsnede** van gebieden"

In het geval van de formule Y = A || B bestaat het gebied waarvoor Y de waarde 1 krijgt uit de vereniging van de gebied waar A de waarde 1 heeft met het gebied waar B de waarde 1 heeft.

In het geval van de formule Y = A && B bestaat het gebied waarvoor Y de waarde 1 krijgt uit de doorsnede van het gebied waar A de waarde 1 heeft met het gebied waar B de waarde 1 heeft.

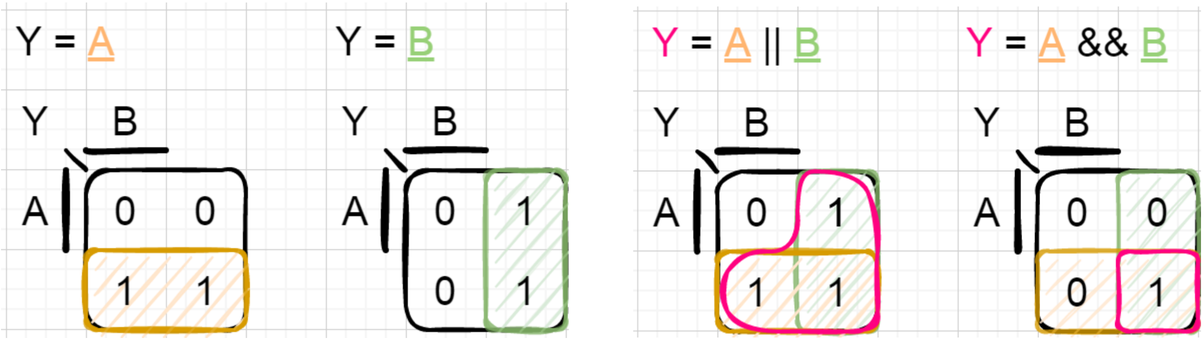
Inversie

Een inversie is een omkering. Een 1 wordt een 0 of een 0 wordt een 1.
In de logica zijn er verschillende manieren om een inversie te noteren. In dit document beperken we ons tot de volgende notaties:

- !A
- $\underline{A}$

Je kunt het uitspreken als "not". $\underline{A}$ is dus "not A". Het inversie-streepje wordt traditioneel ook vaak boven de letter gezet, maar dat is wat minder praktisch binnen MS Word.

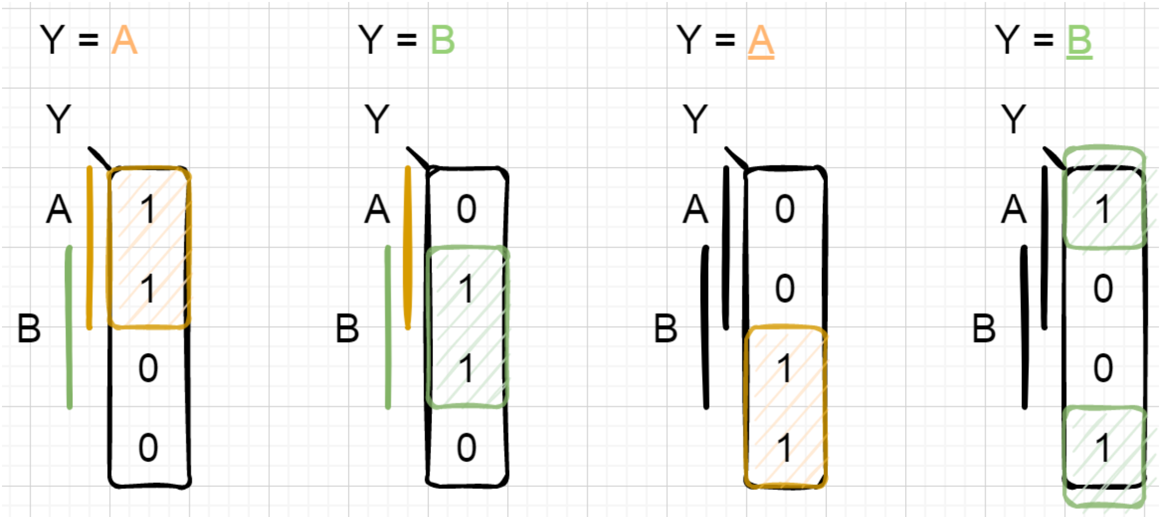
Onderstaand worden voorbeelden getoond waarbij inversies zijn gebruikt:



4x1 diagrammen

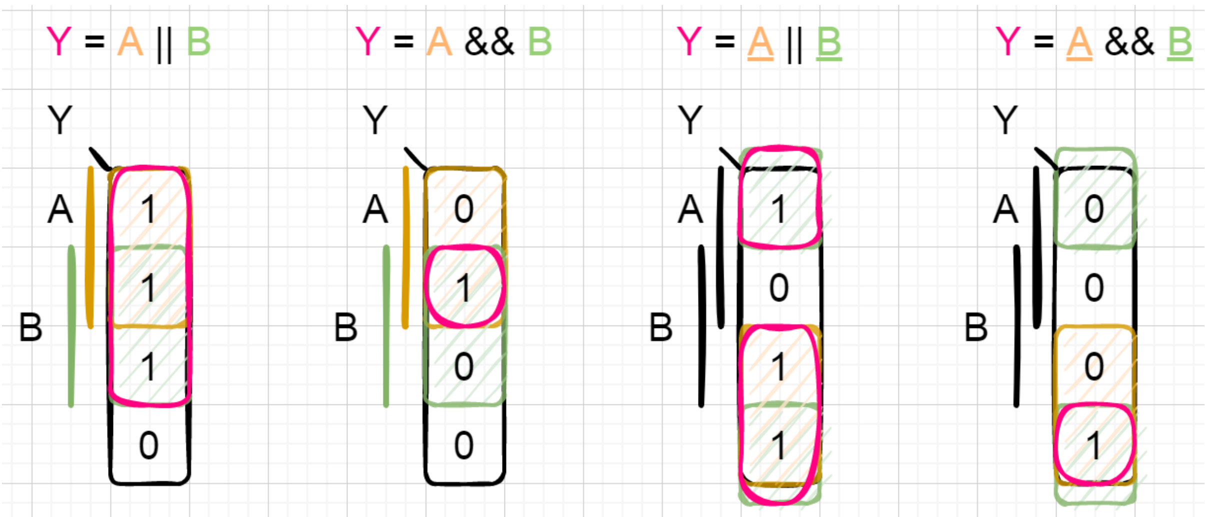
De wereld is rond

In plaats van met 2x2 diagrammen kunnen we hetzelfde weergeven met 4x1 diagrammen:



Bij de eerste drie diagrammen zie je gebieden die bestaan uit steeds twee vakjes die aan elkaar grenzen. Tussen twee vakjes die aan elkaar grenzen is de waarde van precies 1 van de ingangsvariabelen anders. Bij het laatste diagram zal je iets vreemds opvallen: het gebied B lijkt in twee stukken te zijn verdeeld. Maar beide vakjes verschillen ook hier alleen voor wat betreft de waarde van een enkele ingangsvariabele (die van A, in dit geval). Dus die twee vakjes grenzen ook aan mekaar. Vergelijk het met een wereldkaart.

Voor de volledigheid zijn de 4x1 alternatieven van de overige situaties die we eerder al als 2x2 diagram zijn tegengekomen onderstaand weergegeven:

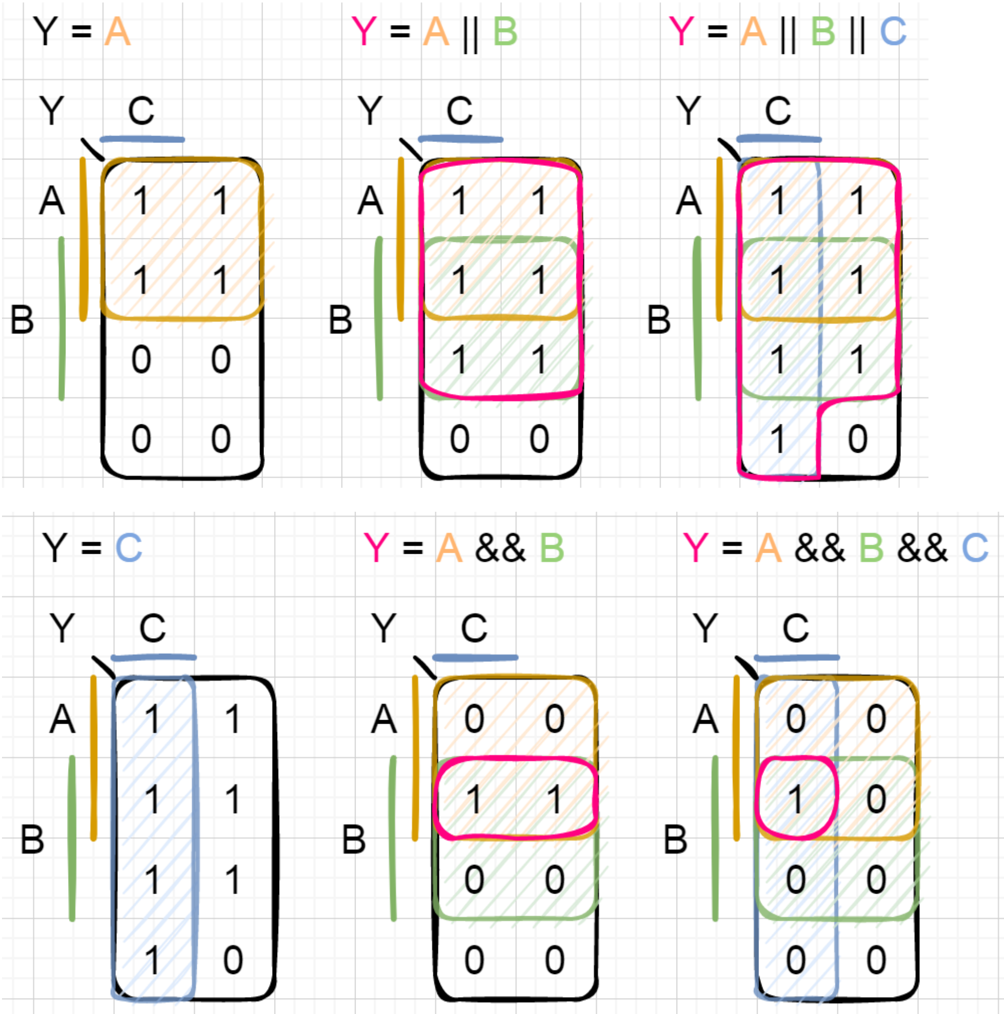


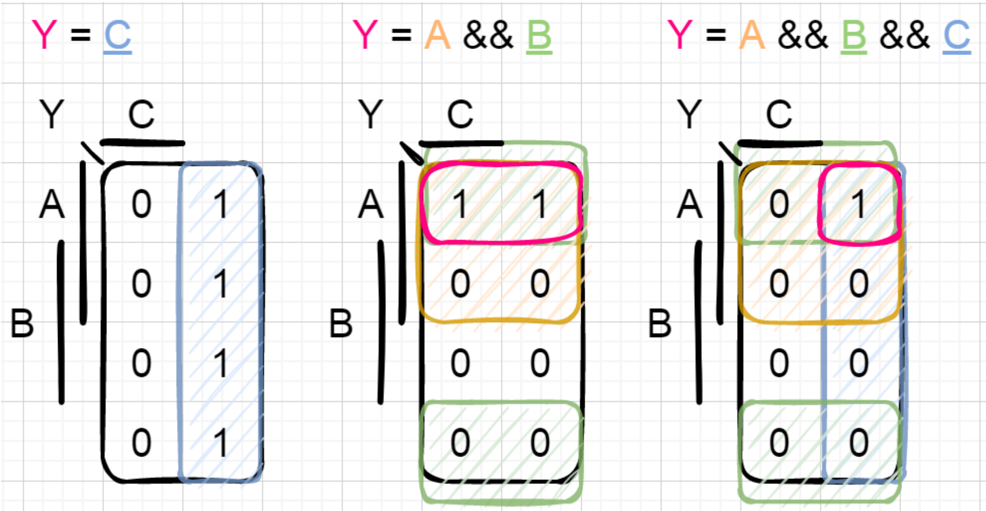
Op zich maakt het bij karnaughdiagrammen niet uit of je variabelen aan rijen of kolommen alloceert. Het werkt altijd. Maar omwille van compactheid en overzicht wordt er in het algemeen naar gestreefd om het aantal rijen en kolommen zo gelijk mogelijk te houden. 2x2 heeft dus de voorkeur boven 4x1 of 1x4.

4x2 diagrammen

Laten we nu nog een ingangsvariabele toevoegen. Het aantal ingangsvariabelen komt daarmee op 3. Het aantal combinaties van 1en en 0en dat daarbij hoort is $2^3 = 8$. Er zijn dus 8 vakjes nodig. Ik kies er nu voor om variabelen A en B langs de rijen te zetten en variabele C langs de kolommen.

Onderstaand vind je er een aantal voorbeelden mee:



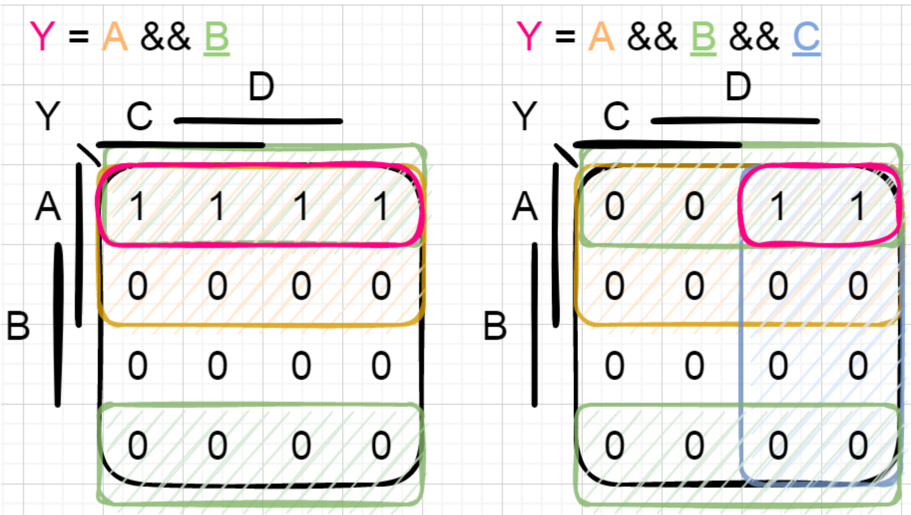


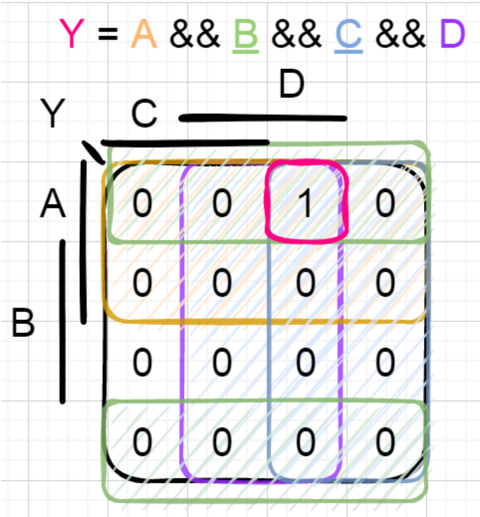
Priemtermen

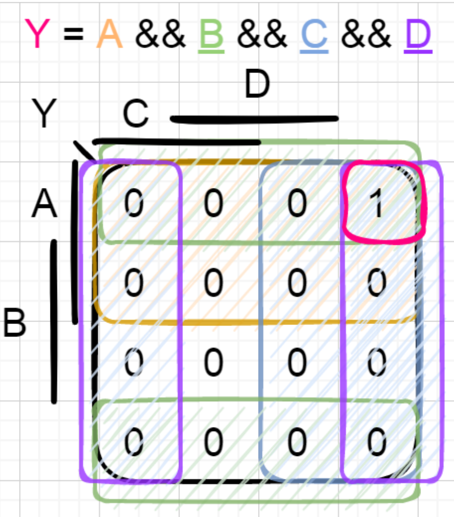
De onderste 2 rijen voorbeelden bevatten formules die alleen bestaan uit && (en eventueel nog inversie-) operaties. Zo'n (sub-) formule die alleen uit && operaties bestaat noemen we een **priemterm**. Een losse (geinverteerde-) variabele, zoals C wordt mede wel met het woord priemterm benoemd. Priemtermen zijn altijd "aaneengesloten gebieden van vakjes" (zie de discussie bij 4x1 diagrammen voor wat er met aaneengesloten wordt bedoeld).

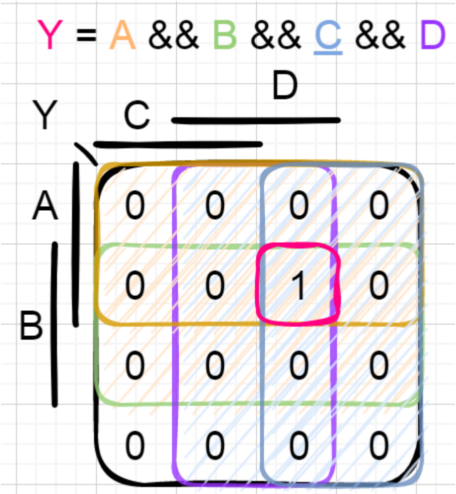
4x4 diagrammen

Onderstaand vind je voorbeelden van priemtermen in karnaughdiagrammen met 4 ingangsvariabelen:









Afmetingen van priemtermen

De priemtermen staan in de 4 bovenstaande plaatjes in het roze afgebeeld. Je kunt snel een sanity-check doen op je priemtermen door de volgende regels te checken:

- In elke richting is de afmeting van een priemterm een macht van 2. 1, 2, 4 of 8 is dus prima. 3, 5 of 6 kan niet.
- Het aantal vakjes waaruit een priemterm bestaat is het totaal aantal vakjes van het diagram (namelijk $2^{\text{"aantal ingangsvariabelen"}}$) gedeeld door $2^{\text{"aantal ingangsvariabelen van de priemterm"}}$.
  Voorbeeld: in het tweede voorbeeld zitten er in de priemterm 3 van de 4 variabelen uit het karnaughdiagram. Het aantal vakjes waar de priemterm uit bestaat moet dus zijn: $2^4/2^3 = 2$.
  (Een soortgelijke regel kun je ook formuleren voor de rijen en de kolommen apart – probeer dat zelf te doen)

4x4 diagrammen – enen groeperen

Combinaties van priemtermen

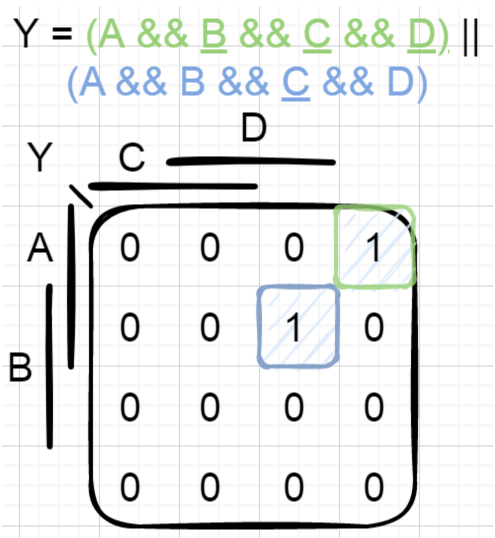
Logische formules afleiden uit karnaughdiagrammen

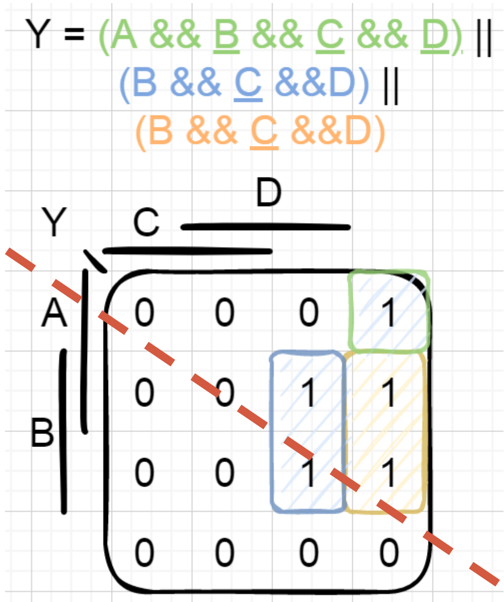
In het voorgaande zag je steeds logische formules met de bijbehorende karnaughdiagrammen. Je kunt de enen van zo'n karnaughdiagram invullen door voor elk vakje de logische formule toe te passen. Gebruikelijker is het omgekeerde gebruik: de nullen en enen vul je in het karnaughdiagram in. Je gebruikt het karnaughdiagram dus als een soort van compacte waarheidstabel waarmee je het gewenste gedrag vastlegt. Vervolgens leidt je de bijbehorende formule af door het **herkennen en combineren van priemtermen**.

Eerder hebben we al gezien dat je priemtermen kunt herkennen als **aaneengesloten "rechthoekige" gebieden van 1en met afmetingen in machten van 2**.

Je kunt vervolgens die priemtermen middels || operaties verenigen tot een formule die alle 1-gebieden afdekt.

Kijk door die bril eens naar de volgende voorbeelden:

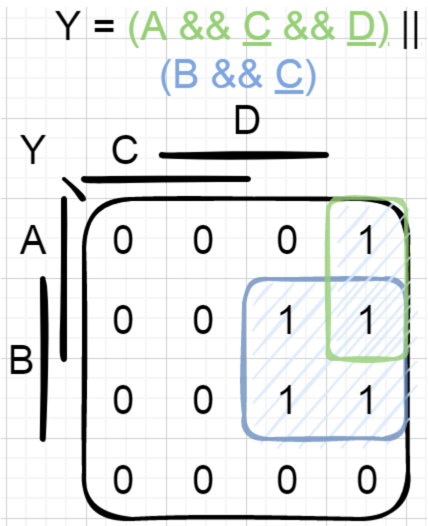




In beide voorbeelden zie je priemtermen (de gekleurde gebieden) die middels een || operatie verenigd worden. Bij het tweede diagram is dat niet optimaal gedaan. Vandaar dat die met rood is doorgehaald.

De resulterende formule (met in totaal 7 && en 2 || operaties) geeft weliswaar het gewenste gedrag, maar kan veel compacter. In het diagram zijn 3 kleine priemtermen gebruikt: 2 met een oppervlak van slechts 2 vlakjes en een met een oppervlak van slechts 1 vlakje. **Zoek voor de meest compacte formule altijd de grootst mogelijke priemtermen**.

Bij het gegeven 1en-patroon is dat:



Het blijkt dat alle 1en te vangen zijn in twee grotere priemtermen: eentje met een oppervlak van 4 en eentje met een oppervlak van 2. Des te groter het oppervlak van een priemterm, des te kleiner bijbehorende formule is. In dit geval volstaat een formule met slechts 3 && operaties en 1 || operatie.

De formule bepalen van een priemterm

Na eenmaal een **priemterm** te hebben gelokaliseerd – een "**rechthoekig aaneengesloten gebied met afmetingen van een macht van 2**", kan met de volgende stappen de bijbehorende formule worden bepaald:

Ga **voor elke input X** na tot welk van de 3 volgende categorien ze behoort:

1. ALS die variabele de waarde 1 heeft voor het hele priemtermgebied: (&&) X
2. ANDERS ALS de variabele de waarde 0 heeft voor het hele priemtermgebied: (&&) $\underline{X}$
3. ANDERS negeer X

Voorbeeld:

Kijk eens naar het blauwe priemtermgebied in de voorgaande karnaughdiagram.

Voor elk van de inputs A, B, C en D doorlopen we het bovenstaande stappenplan.

- We zien dat input A voor een deel van het priemtermgebied de waarde 1 heeft, en voor een ander deel 0. A valt dus in de derde categorie, en kunnen we negeren.
- We zien dat input B voor het gehele priemtermgebied de waarde 1 heeft. B valt dus in de eerste categorie. We mogen B opschrijven: B. Omdat het de eerste input is, hoeven we geen && ervoor te zetten.
- We zien dat input C voor het gehele priemtermgebied de waarde 0 heeft. C valt dus in de tweede categorie. We mogen && $\underline{C}$ toevoegen: B && $\underline{C}$.
- We zien dat input D voor een deel van het priemtermgebied de waarde 1 heeft, en voor een ander deel 0. D valt dus in de derde categorie, en kunnen we negeren.

De resulterende formule voor deze priemterm is dus B && $\underline{C}$.

Nog een voorbeeld:

Kijk nu eens naar het groene priemtermgebied in de voorgaande karnaughdiagram.

Voor elk van de inputs A, B, C en D doorlopen we het bovenstaande stappenplan.

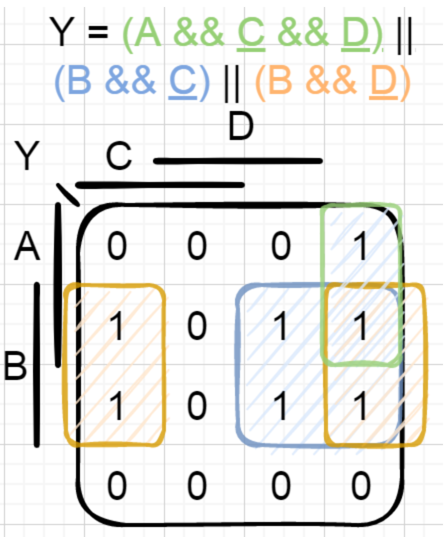
- We zien dat input A voor het gehele priemtermgebied de waarde 1 heeft. A valt dus in de eerste categorie. We mogen A opschrijven: A. Omdat het de eerste input is, hoeven we geen && ervoor te zetten.
- We zien dat input B voor een deel van het priemtermgebied de waarde 1 heeft, en voor een ander deel 0. B valt dus in de derde categorie, en kunnen we negeren.
- We zien dat input C voor het gehele priemtermgebied de waarde 0 heeft. C valt dus in de tweede categorie. We mogen && $\underline{C}$ toevoegen: A && $\underline{C}$.
- We zien dat input D voor het gehele priemtermgebied de waarde 0 heeft. D valt dus in de tweede categorie. We mogen && $\underline{D}$ toevoegen: A && $\underline{C}$ && $\underline{D}$.

De resulterende formule voor deze priemterm is dus A && $\underline{C}$ && $\underline{D}$.

Overlappende priemtermen

In het bovenstaande voorbeeld zie je dat de twee gekozen priemtermen elkaar overlappen. Dat is **niet erg**. Dankzij de overlap kan de groene priemterm een twee keer zo groot oppervlak afdekken, waardoor zijn formule een variabele minder nodig heeft.

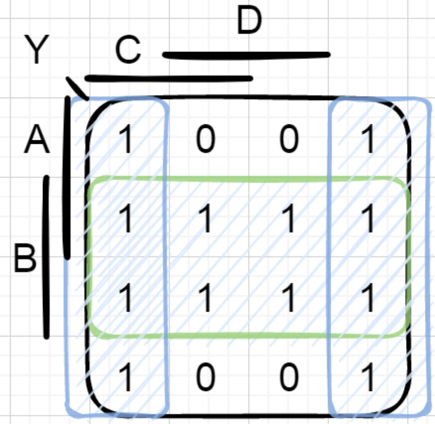
In het onderstaande voorbeeld zijn er nog twee 1en toegevoegd, en een extra priemterm (de gele) om die te verdisconteren:



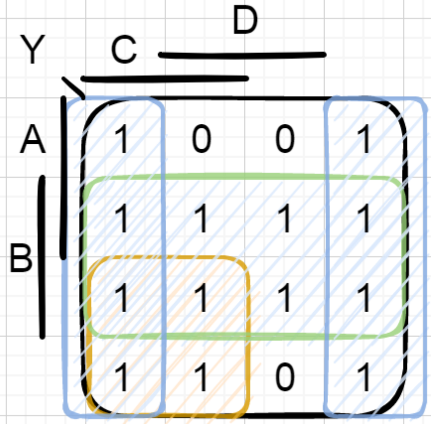
Meer 4x4 voorbeelden

Onderstaand vind je meer voorbeelden van 4x4 karnaughdiagrammen met daarbij de via zo groot mogelijk gekozen priemtermen afgeleide formules. Ga bij jezelf na of je op dezelfde priemtermen zou zijn uitgekomen.

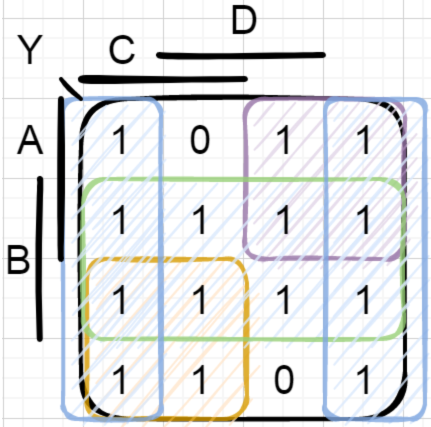
$Y = B \,||\, \underline{D}$



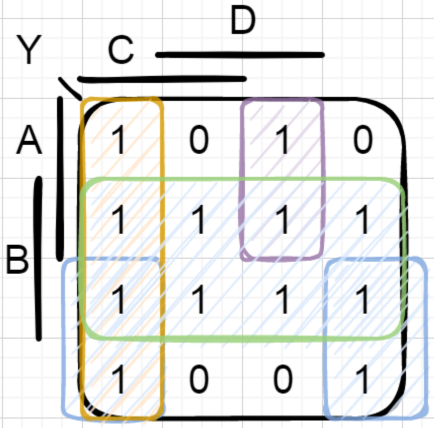
$Y = B \,||\, \underline{D} \,||\, (\underline{A} \,\&\&\, C)$



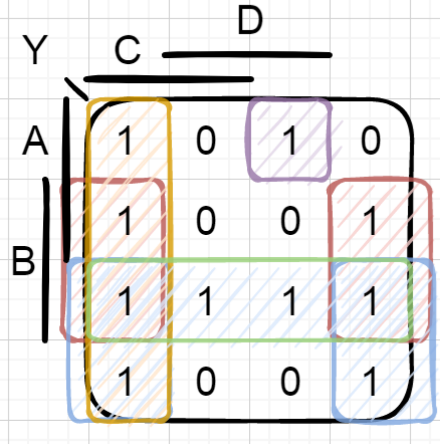
$Y = B \,||\, \underline{D} \,||\, (\underline{A} \,\&\&\, C) \,||\, (A \,\&\&\, \underline{C})$



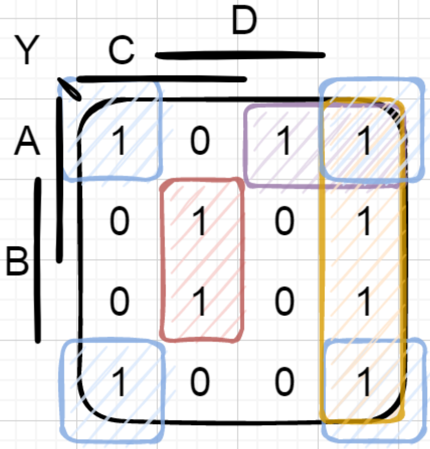
$Y = (C \,\&\&\, \underline{D}) \,||\, (\underline{A} \,\&\&\, \underline{D}) \,||\, (A \,\&\&\, \underline{C} \,\&\&\, D) \,||\, B$



$Y = (C \,\&\&\, \underline{D}) \,||\, (\underline{A} \,\&\&\, \underline{D}) \,||\, (A \,\&\&\, \underline{B} \,\&\&\, \underline{C} \,\&\&\, D) \,||\, (\underline{A} \,\&\&\, B) \,||\, (B \,\&\&\, \underline{D})$

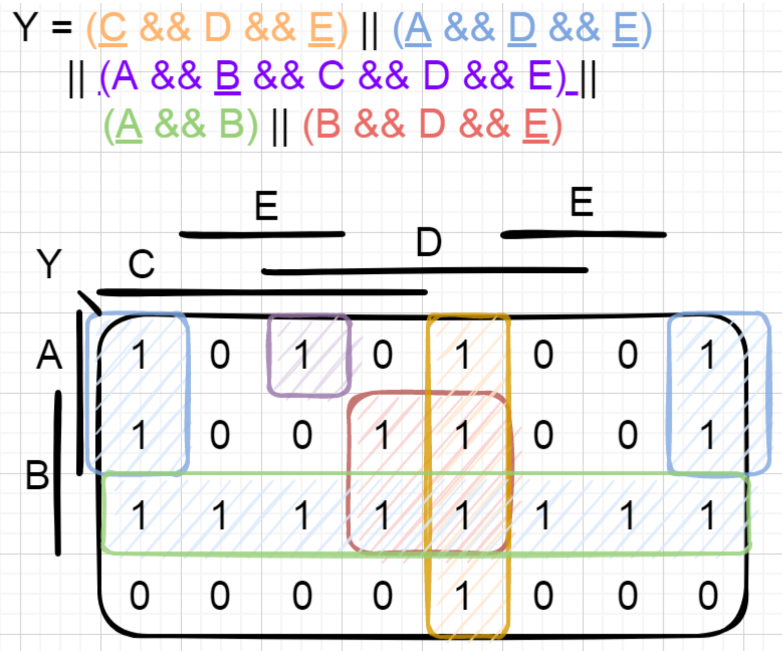


$Y = (\underline{C} \,\&\&\, \underline{D}) \,||\, (\underline{B} \,\&\&\, \underline{D}) \,||\, (A \,\&\&\, \underline{B} \,\&\&\, \underline{C}) \,||\, (B \,\&\&\, C \,\&\&\, D)$



4x8 diagram

Onderstaand vind je een voorbeeld van een 4x8 diagram:



De positie van de streepjes

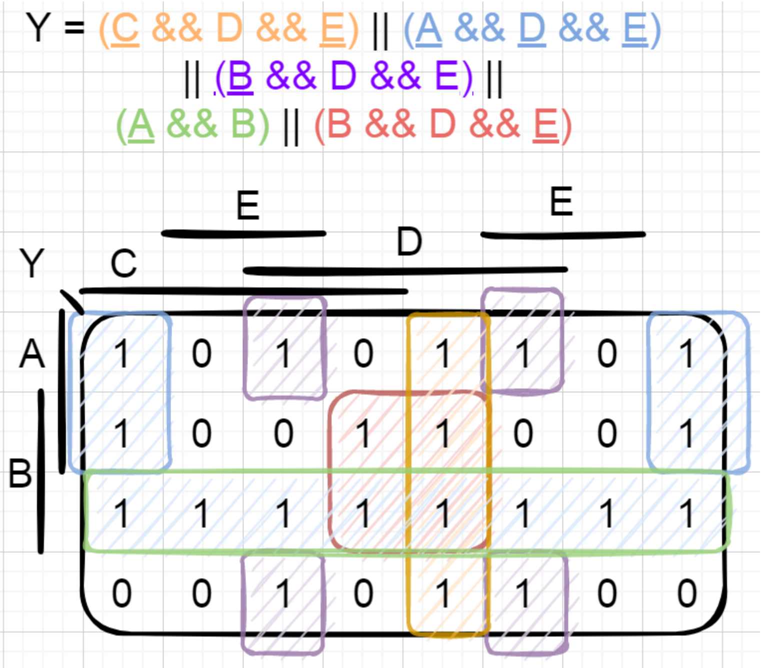
Merk op dat de streepjes met ingangsvariabelen langs de randen altijd volgens hetzelfde protocol kunnen worden toegevoegd. Aan de hand van het bovenstaande voorbeeld voor de kolommen:

1. Stel vast **hoeveel kolommen breed** de karnaughdiagram gaat worden.
   We kiezen er in dit geval voor om 3 ingangsvariabelen langs de kolommen te zetten. In totaal kunnen daarmee 2^3 combinaties gemaakt worden. Er zijn dus 2^3=8 kolommen nodig.
2. Stel vast **hoeveel "totale streeplengte"** elke ingangsvariabele langs de kolommen in totaal moet hebben. Elke ingangsvariabele moet voor de helft van de kolommen "1" kunnen zijn. De "totale streeplengte" per variabele moet in dit geval dus 8/2 = 4 vakjes lang zijn.
3. Representeer de **eerste ingangsvariabele** van de kolommen (C, in het bovenstaande voorbeeld) met een **continue streep vanuit de oorsprong** naar de helft van de diagram. In dit geval dus met een breedte van 4 vakjes.
   Die eerste streep raakt dus met het linker uiteinde de oorsprong. Dat noem ik voor het gemak het "gesloten uiteinde". Zijn andere uiteinde, het "**open uiteinde**" zit halverwege de tabel.
4. **Verdeel de streeplengte van de volgende ingangsvariabele (D) symmetrisch over de open uiteinden van de vorige** (C). In dit geval had C maar 1 open uiteinde, dus kan de volledige streeplengte van D daar worden getekend.

5. **Herhaal stap 4**. Dit keer heeft de vorige ingangsvariabele (D) twee open einden. De streeplengte van E moet dus over beide open einden verdeeld worden. Dat worden dus twee streepjes ter lengte van 2.
6. Als er meer variabelen langs de kolommen zouden staan, zou voor elk van hen stap 4 herhaald kunnen worden.

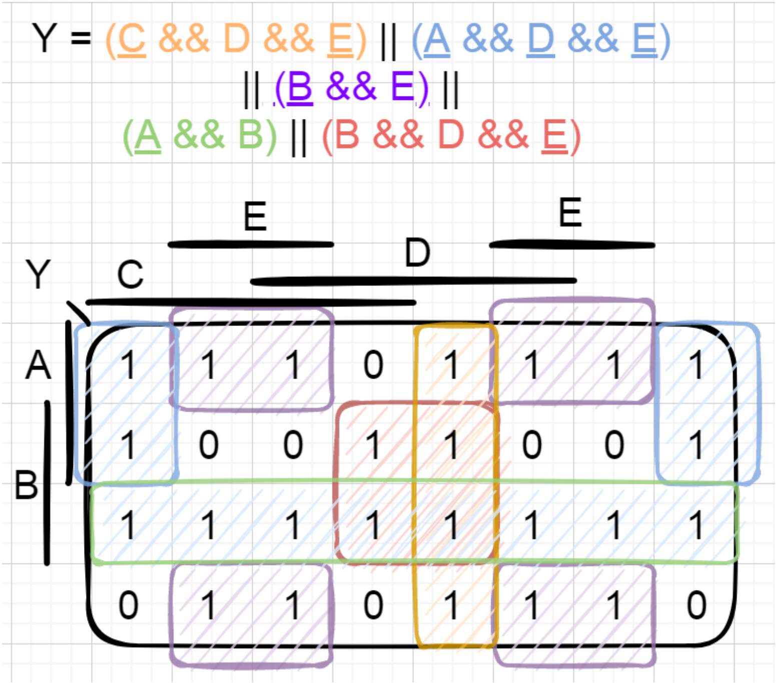
In zichzelf gevouwen werelden

Onderstaand zie je nog een voorbeeld van een 4x8 diagram. Let daarbij speciaal op de paarse priemterm:



Je ziet het goed, de 4 paarse enen vormen samen een aaneengesloten gebied: aangrenzende 1en verschillen slechts in de waarde van 1 ingangsvariabele. De metafoor van een wereldkaart, zoals bij 4x4diagrammen is hier ontoereikend. Er zijn nu een soort van "**symmetrische wormgaten**" bijgekomen. Een manier om ertegenaan te kijken, is dat je (na uitprinten) het rechter 4x4 deel kan **terugvouwen** boven het linker 4x4 deel. De zich dan boven elkaar bevindende vakjes verschillen dan alleen in de waarde van C, en grenzen dus aan elkaar.

Onderstaand is een afgeleid voorbeeld te vinden:



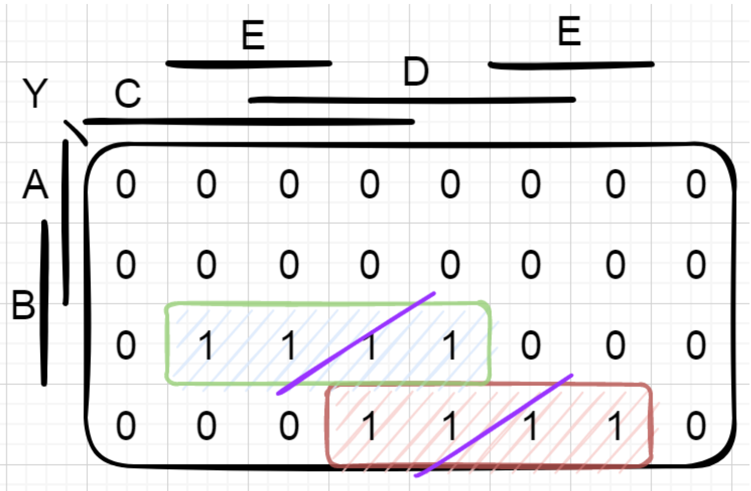
In dit geval is het oppervlak van de paarse priemterm 2x zo groot, en kan er dus een variabele uit die subformule weg.

Priemterm-alignment

Bij karnaughdiagrammen met een dimensie die groter is dan 4, moeten we oppassen voor een zekere valkuil. Voor compacte priemterm-formules moet immers nog worden voldaan aan een extra regel:

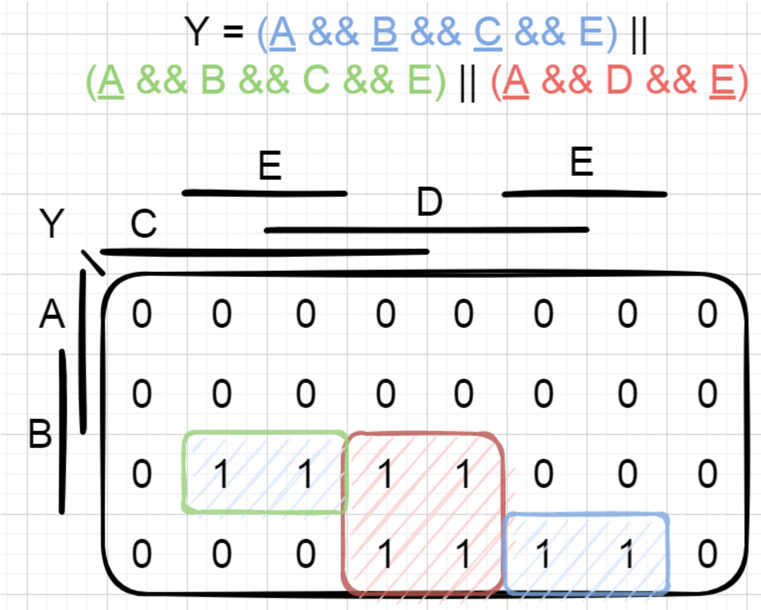
- **Priemtermen met een "lengte" van 2^n moeten startpositie hebben op een veelvoud van $2^{(n-1)}$**

Bijvoorbeeld de onderstaande opdeling voldoet niet aan die eis:



Immers: de breedte van de gekozen gebieden is $2^2=4$. Dat betekent dat ze zouden moeten beginnen op veelvouden van $2^1=2$, dus op even posities. De twee gebieden beginnen echter op oneven posities. Daardoor is er geen compacte formule voor mogelijk.

Onderstaand staat een oplossing voor hetzelfde karnaughdiagram welke wel voldoet aan de eis van priemterm-alignment:

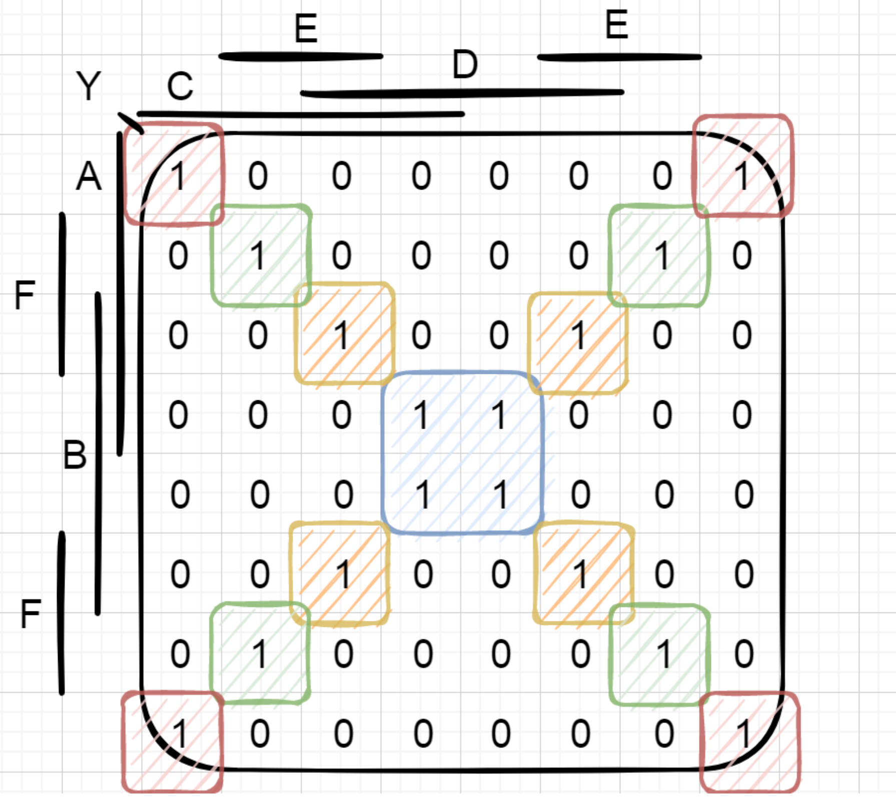


NB: priemtermen met dimensies kleiner dan 4 mogen op zowiezo op elke positie staan, en geven dus per definitie een valide resultaat. Maar in verband met compactheid van je formule wil je als het even kan toch zo groot mogelijke priemtermen gebruiken.

8x8 diagram

Onderstaand is nog een voorbeeld te zien met vier priemtermen in een 8x8 diagram. Zo’n 8x8 diagram kun je zowel horizontaal als vertikaal “dubbelvouwen” (zie de analyse van het dubbelvouwen bij het 4x8 diagram).

$Y = (B \ \&\& \ \underline{F} \ \&\& \ D \ \&\& \ \underline{E}) \ || \ (\underline{B} \ \&\& \ \underline{D} \ \&\& \ E \ \&\& \ F) \ || \ (\underline{B} \ \&\& \ \underline{F} \ \&\& \ \underline{D} \ \&\& \ \underline{E}) \ || \ (B \ \&\& \ F \ \&\& \ D \ \&\& \ E)$



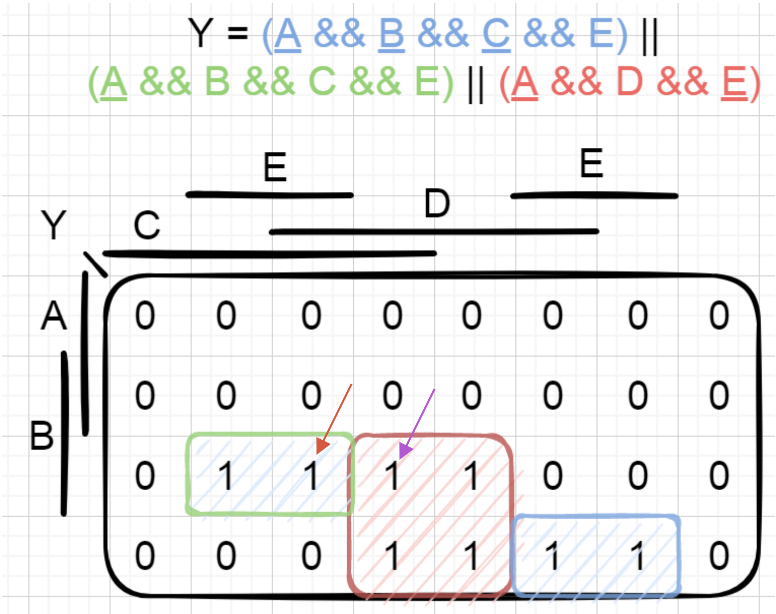
Appendix

Voorkomen van races

Als je met gesynchroniseerde logica werkt, mag alles lekker uitrammelen voordat de volgende klokpuls aankomt, en maakt het niet uit wat voor waarden de uitgangen van de logische poorten tussendoor hebben.

Maar als je niet met gesynchroniseerde logica werkt, of die synchronisatieelementen (flipflops) zelf ontwerpt, dan wordt het anders.

In het onderstaande karnaugh diagram zijn rechttoe-rechtaan de aangegeven priemtermen in gebruik:



Het bijbehorende elektronische circuit bouwen we op uit twee 4-input AND poorten (een voor de groene en een voor de blauwe priemterm) en een 3-input AND poort (voor de rode priemterm).

De uitgangen van die 3 AND poorten combineren we met een 3 input OR poort.

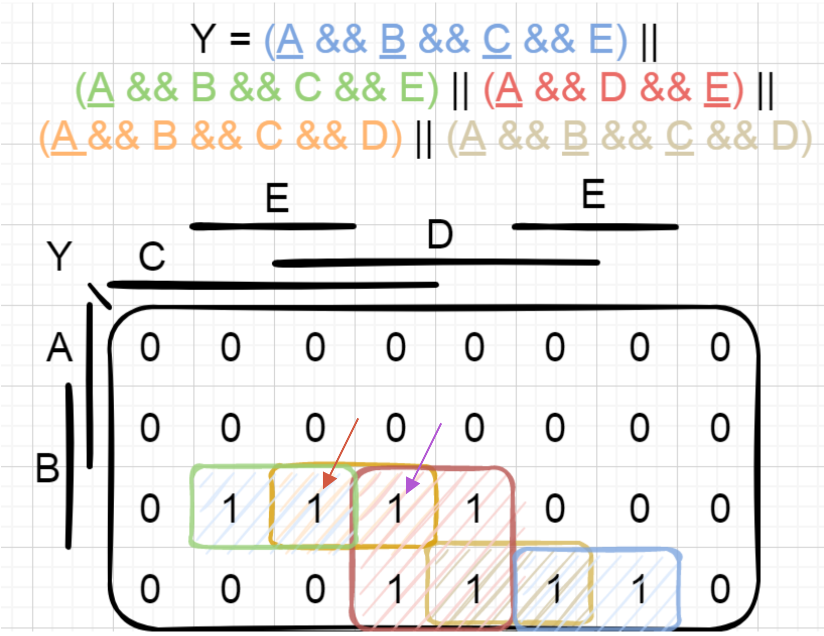
Stel nu dat (A,B,C,D,E) == (0,1,1,1,0) (het paarse pijl-vakje), en dat input E verandert naar een 1. Dan geldt dus (A,B,C,D,E)==(0,1,1,1,1) (het rode pijl-vakje).

In beide vakjes staat een 1. Output Y was dus een 1, en wordt een 1. Kortom: gegeven het karnaugh-diagram zou je willen dat output Y 1 blijft.

Echter: bij het paarse pijl-vakje levert de AND-poort van de rode priemterm als enige 1, terwijl bij het rode pijl-vakje AND-poort van groene priemterm als enige 1 levert. Kortom: bij de transitie gaat de "rode" AND poort naar 0 en de "groene" AND poort naar 1. Niets in het heelal gebeurt gelijktijdig. Wat er met de uitgang Y gebeurt, hangt af van welke AND poort het snelst is (vandaar de naam “race conditie). Stel nu dat de “rode” AND poort iets eerder op 0 staat dan de “groene” AND poort op 1, dan zijn tijdelijk alle inputs van de OR-poort 0, en zal gedurende die (korte) tijd uitgang Y dus een spike hebben naar 0.

Of dat acceptabel is, hangt van de toepassing van je circuit af. Stel dat dat risico niet acceptabel is, dan biedt het karnaugh diagram een eenvoudige en elegante manier om dat op te lossen: **zorg ervoor dat alle priemtermen via overlap met elkaar verbonden zijn**.

In het bovenstaande geval kan je dat bereiken door 2 priemtermen toe te voegen:



Er weer vanuit gaande dat bij elke priemterm een AND poort met de bijbehorende kleur hoort, kunnen we dus zeggen dat als we nu van het “paarse pijl vakje” naar het “rode pijl vakje” gaan met de ingangsvariabelen, dat de “oranje” AND poort 1 was en 1 blijft. Daardoor blijft uitgang Y van de OR poort 1, zelfs als de groene AND poort en de rode AND poort tijdelijk tegelijkertijd 0 als uitgang hadden.