Résolution numéique de problème elliptique avec diverses conditions aux limites

Qingqing Hu

15 octobre 2020

Table des matières

1 Conditions de type Neumann

1.1 Description du problème

Soit Ω ouvert borné à frontière polygonale de $\mathbb{R}^2$. A un tenseur qui est uniformément borné

$$\exists C > 0, \forall (x,y) \in \Omega, \forall i,j, A_{i,j}(x,y) \leq C$$

et satisfait l'hypothèse de coercivité uniforme

$$\exists c > 0, \forall (x,y) \in \Omega, \forall \xi \in \mathbb{R}^2, A(x,y)\xi \cdot \xi \geq |\xi|^2$$

et $f \in L^2(\Omega)$. On s'intéresse à la solution numérique du problème de Poisson avec condition aux limites de Neumann :

Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que :

$$\begin{cases} u - \nabla \cdot (A(x,y)\nabla u) = f \quad dans \quad \Omega \\ A(x,y)\nabla u \cdot n = 0 \quad sur \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

1.2 Formulation variationnelle du problème

Trouver $u \in H^1(\Omega)$, pour toutes les fonctions $v \in H^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \int_\Omega uv - \int_\Omega \nabla \cdot (A(x,y)\nabla u) v &= \int_\Omega fv \quad dans\Omega \\ \int_\Omega uv + \int_\Omega A(x,y)\nabla u \nabla v - \int_{\partial\Omega} (A(x,y)\nabla u \cdot n) v &= \int_\Omega fv \\ \int_\Omega uv + \int_\Omega A(x,y)\nabla u \nabla v &= \int_\Omega fv \\ a(u,v) &= \int_\Omega uv + \int_\Omega A(x,y)\nabla u \nabla v \\ l(v) &= \int_\Omega fv \end{aligned} \tag{2}$$

On obtient donc bien la formulation variationnelle. On vérifie maintenant les hypothèses du théorème de Lax-Milgram pour montrer que le problème est bien posé.

- $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.
- a est continue :

$$\begin{aligned} \forall u,v \in H^1(\Omega), \qquad |a(u,v)| &\leq |\int_\Omega uv| + |\int_\Omega A(x,y)\nabla u \nabla v| \\ &\overset{CS}{\leq} ||u||_{L^2(\Omega)}||v||_{L^2(\Omega)} + C||\nabla u||_{L^2(\Omega)}||\nabla v||_{L^2(\Omega)} \\ &\leq max(1,C)||u||_{H^1(\Omega)}||v||_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

- a est coercive :

$$\begin{aligned} \forall u \in H^1(\Omega), \qquad |a(u,u)| &= |\int_\Omega uu| + |\int_\Omega A(x,y)\nabla u \nabla u| \\ &\geq |\int_\Omega uu| + c|\int_\Omega \nabla u \nabla u| \\ &\geq min(1,c)||u||^2_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

- l est linéaire par linéarité de l'intégrale, et l est continue.

$$\begin{aligned}\forall v \in H^1(\Omega), \qquad |l(v)| &= |\int_\Omega f v| \\ &\overset{CS}{\leq} ||f||_{L^2(\Omega)}||v||_{L^2(\Omega)} \\ &\leq ||f||_{L^2(\Omega)}||v||_{H^1(\Omega)}\end{aligned}$$

Le problème est bien posé et qu'il admet une unique solution.

1.3 Discrétisation et maillage

Soit T_h une triangulation du domaine Ω, et V_h l'approximation de $H^1(\Omega)$ par des éléments finis P^1 associés à la triangulation T_h. On note $(T_l)_{l=1,L}$ les triangles de T_h, $(S_I)_{I=1,N}$ les sommets des triangles et $(\omega_I)_{I=1,N}$ la base de V_h définie par $\omega_I(S_J) = \delta_{I,J}$, $1 \leq I, J \leq N$.
La formulation variationnelle discrète est :

Trouver $u_h \in V_h$ telle que pour tout v_h dans V_h :

$$a(u_h, v_h) = l(v_h) \tag{3}$$

La solution approchée s'écrit sous la forme :

$$u_h(x,y) = \sum_{I=1}^{N} u_h(S_I)\omega_I(x,y), \quad \forall (x,y) \in \overline{\Omega}$$

Soit $(\omega_I)_{I=1,N}$ la base de V_h définie par $\omega_I(S_J) = \delta_{I,J}$ donc, en décomposant u_h dans cette base $u_h = \sum_{i=1}^{N} u_j\omega_j$.

$$\begin{aligned} & a(u_h, v_h) = l(v_h) \\ \Leftrightarrow\ & a(u_h, \omega_i) = l(\omega_i) \\ \Leftrightarrow\ & a(u_h, \omega_i) = \sum_{j=1}^{N} u_j a(\omega_j, \omega_i) = l(\omega_i)\end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^{N} (\int_\Omega \omega_j\omega_i d\Omega + \int_\Omega A(x,y)\nabla\omega_j\nabla\omega_i d\Omega)u_j = \int_\Omega f\omega_i d\Omega$$

$$(\mathbb{M}+\mathbb{K})\vec{U} = \vec{L}$$

On obtient :

$$\begin{cases} \vec{L}_i = l(\omega_i) = \int_\Omega f\omega_i d\Omega \\ \vec{U}_i = u_i \\ \mathbb{K}_{ij} = \int_\Omega A(x,y)\nabla\omega_j\nabla\omega_i d\Omega \\ \mathbb{M}_{ij} = \int_\Omega \omega_j\omega_i d\Omega \end{cases} \tag{4}$$

La formulation variationnelle discrète sous la forme d'un système linéaire équivalent :

$$(\mathbb{M}+\mathbb{K})\vec{U} = \vec{L}$$

où la $I^{ème}$ composante du vecteur $\vec{U} \in R^N$ vaut $u_h(S_I)$, avec $\mathbb{M}$ est la matrice de masse et $\mathbb{K}$ est la matrice de rigidité. Les matrices $\mathbb{M}$ et $\mathbb{K}$ sont symétriques et définies positives.
On veut résoudre le problème dans un ouvert Ω qui est un carré.

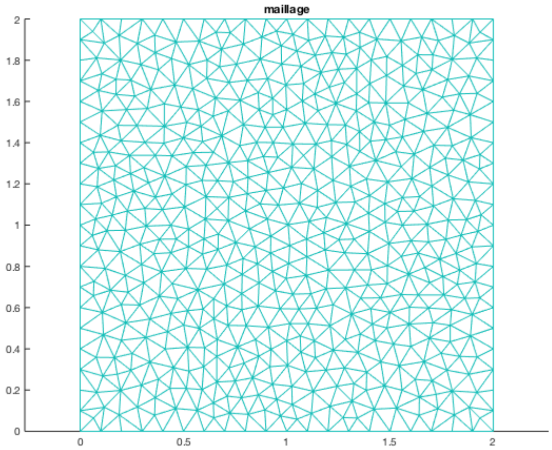


FIGURE 1 – Maillage

1.4 Calcul des Matrices élémentaires, cas constant

On considère pour l'instant le cas où A = 1. Comme les fonctions de base locales $\omega_i \in \mathbb{P}^1$, on a donc $\omega_i\omega_j \in \mathbb{P}^2, \nabla\omega_i\nabla\omega_j \in \mathbb{P}^0$. On peut utiliser les formules de quadrature suivantes :

$$\int_{T_l} F d\Omega = aire(T_l)(F(\frac{S_1+S_2+S_3}{3})), F \in \mathbb{P}^0$$

$$\int_{T_l} F d\Omega = \frac{aire(T_l)}{3}(F(\frac{S_1+S_2}{2}) + F(\frac{S_2+S_3}{2}) + F(\frac{S_3+S_1}{2}), F \in \mathbb{P}^2$$

Si i = j, $\mathbb{M}^{ele}ij = \int_{T_l}\omega_i\omega_i = \frac{aire(T_l)}{3}(F(\frac{S_1+S_2}{2}) + F(\frac{S_2+S_3}{2}) + F(\frac{S_3+S_1}{2}) = \frac{aire(T_l)}{3}(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+0) = \frac{aire(T_l)}{6} = \frac{D}{12}$.
Si $i \neq j$, $\mathbb{M}^{ele}ij = \frac{aire(T_l)}{3}(\frac{1}{4}+0+0) = \frac{aire(T_l)}{12} = \frac{D}{24}$.
On défine une matrice norm :

$$norm = \begin{pmatrix} y_{23} & x_{32} \\ y_{31} & x_{13} \\ y_{12} & x_{21} \end{pmatrix}$$

Alors, K^{ele}_{ij}=$aire(T_l)(F(\frac{S_1+S_2+S_3}{3})) = \frac{1}{D^2}\frac{D}{2}norm(i,:) * norm(j,:)^T = \frac{1}{2D}norm(i,:) * norm(j,:)^T$
Le code pour assembler les matrices $\mathbb{k}, \mathbb{M}$ est le suivant :

```
for l=1:Nbtri
  S1=Coorneu(Numtri(l,1),:);
  S2=Coorneu(Numtri(l,2),:);
  S3=Coorneu(Numtri(l,3),:);
  Kel=matK_elem(S1, S2, S3);
  Mel=matM_elem(S1, S2, S3);
  for i = 1:3
    for j = 1:3
        MM(Numtri(l,i),Numtri(l,j)) = MM(Numtri(l,i),Numtri(l,j)) + Mel(i,j);
        KK(Numtri(l,i),Numtri(l,j)) = KK(Numtri(l,i),Numtri(l,j)) + Kel(i,j);
    end % for j
  end  % for i
end % for l
```

En utilisant la méthode d'intrepolation, si $f \in C^0(\Omega)$, on l'approche par son interpolée :

$$\pi_h f = \sum_{j=1}^n f(S_j)\omega_j$$

donc,

$$\mathbb{L}_i \approx \int_\Omega \pi_h f \omega_i d\Omega = \sum_{j=1}^n f(S_j)\int_\Omega \omega_i\omega_j d\Omega = (MF)_i \quad \text{où} \quad F_i = f(S_i)$$

1.4.1 Validation et estimation de l'erreur

On va vérifier que le code calcule une solution approchée u_h correcte. Pour $(x,y) \in \overline{\Omega}$, on choisit :

$$u(x,y) = cos(\pi x)cos(2\pi y)$$

Avec A = 1, la donnée f correspondante :

$$\begin{gathered} u - div(\nabla u) = f \quad dans \quad \Omega \\ div(\nabla u) = \Delta u = -5\pi^2 u \\ f = (1+5\pi^2)u \end{gathered}$$

L'erreur de la norme $L^2(\Omega)$ entre la solution exacte et la solution approchée :
On assimile u à son interpolée $\pi_h u$

$$\begin{aligned} eurL2 = ||u-u_h||_{L^2(\Omega)} &\approx ||\pi_h u - u_h||_{L^2(\Omega)} \\ &= ||\sum_{j=1}^n u_{(S_j)}\omega_j - \sum_{j=1}^n u_{h(S_j)}\omega_j||_{L^2(\Omega)} \\ &= \sqrt{\int_\Omega [\sum_{i=1}^n (u_{(S_i)} - u_{h(S_i)})\omega_i][\sum_{j=1}^n (u_{(S_j)} - u_{h(S_j)})\omega_j] d\Omega} \\ &= \sqrt{(U-U^{ex})'\mathbb{M}(U-U^{ex})} \end{aligned} \tag{5}$$

et où

$$U_i = u_h(S_i) \qquad U_i^{ex} = u(S_i)$$

Maintenant, on peut estimer l'erreur de $L_2(\Omega)$ en modifiant h. Ici on trace $log(1/h)$ et $log(||u-u_h||_{L^2(\Omega)}/||u||_{L^2(\Omega)})$. Car $||u||_{L^2(\Omega)} = 1$, on peut tracer $log(1/h)$ et $log(||u-u_h||_{L^2(\Omega)})$.
Pour l'erreur de la semi-norme $H_1(\Omega)$ entre la solution exacte et la solution approchée, car $||\nabla u||_{L^2(\Omega)} = \sqrt{5}\pi$, on peut tracer $log(1/h)$ et $log(||\nabla u - \nabla u_h||_{L^2(\Omega)}/\sqrt{5}\pi)$. De la même façon qu'on utilise pour estimer l'erreur de $L_2(\Omega)$,

$$eurH1 = |u-u_h|_{H_1} = \sqrt{(U-U^{ex})'\mathbb{K}(U-U^{ex})}$$

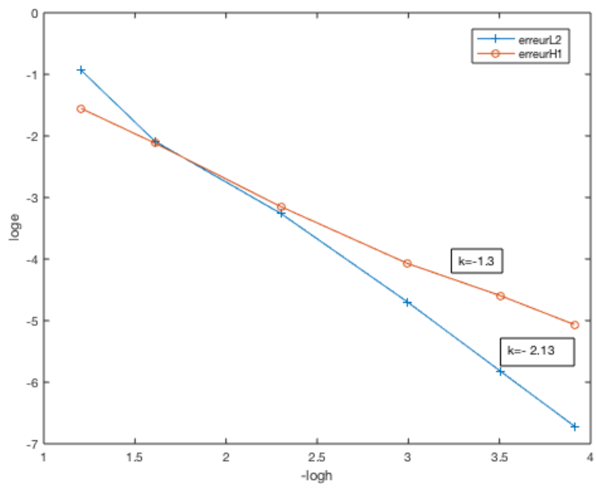


FIGURE 2 – $loge - log(1/h)$

D'après le lemme Aubin-Nitsche et le lemme Céa, on a la relation entre l'erreur de $L_2(\Omega)$ et h :

$$||u-u_h||_{L^2(\Omega)} \propto h^2$$

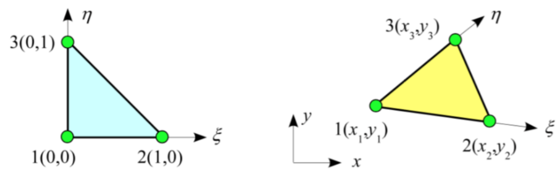
L'erreur de $H_1(\Omega)$, on a :

$$||\nabla u-\nabla u_h||_{L^2(\Omega)} \propto h$$

Les résultats numérique est $||u-u_h||_{L^2(\Omega)} \propto h^{2.13}$, $||\nabla u-\nabla u_h||_{L^2(\Omega)} \propto h^{1.3}$ correspondant aux lemmes.

1.5 Calcul des Matrices élémentaires, cas variable

On considère maintenant le cas général A = A(x, y).
On se place sur un triangle T_l. Pour calculer les matrices élémentaires associées à ce triangle, nous allons utiliser une méthode de calcul, plus générale que les coordonnées barycentriques. Pour calculer les intégrales volumiques sur le triangle T_l (composé des points M_1, M_2 *et* M_3), on se ramène tout d'abord au triangle de référence $\hat{T}$ (composé des points
$\hat{M}_1 = (0,0), \hat{M}_2 = (1,0)$ *et* $\hat{M}_3 = (0,1)$.



La transformation géométrique qui permet de passer de l'élément de référence (à gauche) à l'élément réel (à droite) est de la forme :
La transformation $F_l : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\forall \hat{M} \in \mathbb{R}^2, \quad F_l(\hat{M}) = B_l\hat{M} + S_l, \quad B_l \in M_2(\mathbb{R}^2), \quad S_l \in \mathbb{R}^2$$

Où

$$dF_l(\hat{M}) = B_l = \begin{pmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ y_2-y_1 & y_3-y_1 \end{pmatrix}$$

$$S_l = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

La matrice élémentaire de rigidité assoicée au triangle T_l :

$$\int_{T_l} A(M)\nabla\omega_i(M) \bullet \nabla\omega_j(M) d\Omega = \int_{\hat{T}} A(F_l(\hat{M}))[(B_l^T)^{-1}\nabla\hat{\omega}_i(\hat{M})][(B_l^T)^{-1}\nabla\hat{\omega}_j(\hat{M})]|detB_l|d\hat{\Omega}$$

Où

$$(B_l^T)^{-1} = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} y_3-y_1 & y_1-y_2 \\ x_1-x_3 & x_2-x_1 \end{pmatrix}$$

Quand les coefficients sont variables, il n'est pas toujours possible de calculer ces intégrales exactement. On approche alors ces intégrales à l'aide de formules de quadratures dites à N points : pour G une fonction continue par morceaux de T_l :

$$\int_{T_l} F d\Omega \approx \sum_{q=1}^{N} \omega_l^q F(M_l^q)$$

On utilisera ici la formule de quadrature à 4 points de Gauss Lobatto qui est d'ordre 3 et qui est définie sur le triangle de référence $\hat{T}$ par

$\hat{M}^q$	$(1/3, 1/3)$	$(1/5, 1/5)$	$(1/5, 3/5)$	$(3/5, 1/5)$
$\hat{\omega}^q$	$-9/32$	$25/96$	$25/96$	$25/96$

On obtiendra la matrice élémentaire de rigidité assoicée au triangle T_l :

```
Bl = [x2-x1 x3-x1; y2-y1 y3-y1];
Sl = [x1 ; y1];
D = ((x2-x1)*(y3-y1) - (y2-y1)*(x3-x1));
BL = 1/abs(D)*[y3-y1 y1-y2; x1-x3 x2-x1];
norm = [-1 -1;1 0;0 1];
M = zeros(4,2);
M(1,:) = Bl*[1/3;1/3]+Sl;
M(2,:) = Bl*[1/5;1/5]+Sl;
M(3,:) = Bl*[1/5;3/5]+Sl;
M(4,:) = Bl*[3/5;1/5]+Sl;
W = [-9/32,25/96,25/96,25/96];
Kel = zeros(3,3);
for i=1:3
  for j=1:3
    for k =1:4
     Kel(i,j) = Kel(i,j)+W(k)*(A(M(k,:))*(BL*norm(i,:)'))'*(BL*norm(j,:)')*abs(D);
    end %k
  end % j
end % i
```

1.5.1 Validation et estimation de l'erreur

On va vérifier que le code calcule une solution approchée u_h correcte. Pour $(x, y) \in \overline{\Omega}$, on choisit :

$$u(x,y) = cos(2\pi x)$$

Avec $A(x, y) = sin(2\pi x)sin(2\pi y)+2$, seulement diagonale, la donnée f correspondante :
D'après équation(1),

$$u - div(A(x,y)\nabla u) = f \quad dans \quad \Omega$$
$$div((A(x,y)\nabla u) = -4\pi^2 sin4\pi x sin2\pi y - 8\pi^2 cos2\pi x$$
$$f = 4\pi^2 sin4\pi x sin2\pi y + (1+8\pi^2)cos2\pi x$$

L'erreur de la norme $L^2(\Omega)$ et l'erreur de la semi-norme $H_1(\Omega)$ entre la solution exacte et la solution approchée (dans ce cas $||u||_{L^2(\Omega)} = \sqrt{2}$ et $||\nabla u||_{L^2(\Omega)} = 4\pi$) :

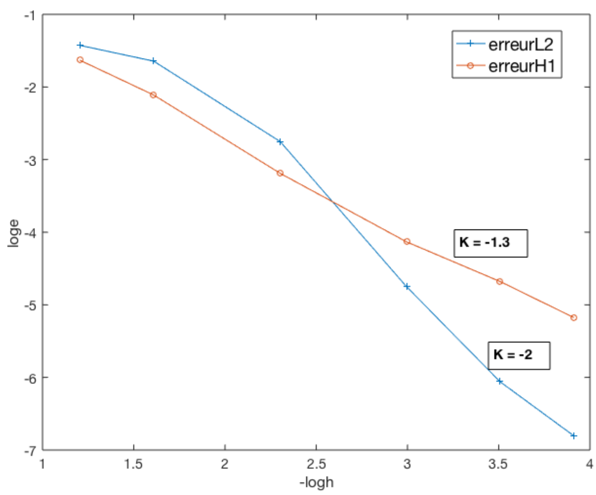
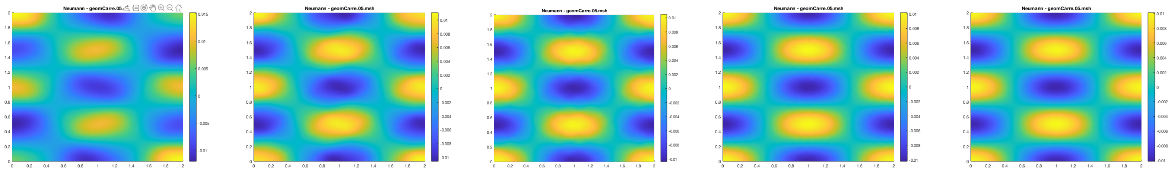


FIGURE 3 – $loge - log(1/h)$

Les résultats numérique est $||u - u_h||_{L^2(\Omega)} \propto h^2$, $||\nabla u - \nabla u_h||_{L^2(\Omega)} \propto h^{1.3}$ correspondant au Aubin-Nitsche et au lemme Céa.
Pour étudier son comportement en modifiant la période de la tenseur A, on choisit un terme source quelconque. L'évoulution est le suivant :



(a) T(A) = 1 (b) T(A) = 1/2 (c) T(A) = 1/4 (d) T(A) = 1/8 (e) T(A) = 1/16

FIGURE 4 – L'évoulution de la solution en modifiant la période de la tenseur A

On observe que son comportement macroscopique ne change pas lors de la diminution de la période de la tenseur A diminue à condition que la période de la tenseur A est suffisamment petite.

2 Conditions de type Dirichlet

On s'intéresse à la solution numérique du problème de Poisson avec condition aux limites de Dirichlet :
Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que :

$$\begin{cases} u - \nabla \cdot (A(x,y)\nabla u) = f \quad dans \quad \Omega \\ u = 0 \quad sur \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{6}$$

2.1 Formulation variationnelle du problème

Trouver $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H_0^1(\Omega)}$, pour toutes les fonctions $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H_0^1(\Omega)}$,

$$\begin{gathered} \int_\Omega uv - \int_\Omega \nabla \cdot (A(x,y)\nabla u)v = \int_\Omega fv \quad dans\Omega \\ \int_\Omega uv + \int_\Omega A(x,y)\nabla u \nabla v - \int_{\partial\Omega} (A(x,y)\nabla u \cdot n)v = \int_\Omega fv \\ \int_\Omega uv + \int_\Omega A(x,y)\nabla u \nabla v = \int_\Omega fv \end{gathered} \tag{7}$$

On obtient donc bien la formulation variationnelle. On peut vérifier les hypothèses du théorème de Lax-Milgram pour montrer que le problème est bien posé de la même façon précédente.

2.2 Discrétisation

La solution approchée s'écrit sous la forme :

$$u_h(x,y) = \sum_{I=1, Refneu(S_I)=0}^{N_0} u_h(S_I)\omega_I(x,y), \quad \forall (x,y) \in \overline{\Omega}$$

La formulation variationnelle discrète sous la forme d'un système linéaire équivalent :

$$(\mathbb{M}^0 + \mathbb{K}^0)\vec{U}^0 = \vec{L}^0 \tag{8}$$

où la $I^{ème}$ composante du vecteur $\vec{U} \in R^{N_0}$ vaut $u_h(S_I)$, avec $\mathbb{M}$ est la matrice de masse et $\mathbb{K}$ est la matrice de rigidité, de taille $N_0 \times N_0$.

Dans la pratique, on ne peut pas assembler directement la matrice intervenant dans (8). On introduit une matrice (creuse/sparse) de projection $\mathbb{P}$ de V_h dans V_h^0, de taille $N_0 \times N$ (qui ne contient que des 1 et des 0). On a donc :

$$\mathbb{A}^0 = \mathbb{P}\mathbb{A}\mathbb{P}^t, \quad \vec{L}^0 = \mathbb{P}\vec{L}, \quad et \quad \vec{U} = \mathbb{P}^t \vec{U}^0$$

Le code de la construction de la matrice $\mathbb{P}$:

```
[J]=find(Refneu == 0);
PP = sparse(length(J),Nbpt);
for i = 1:length(J)
    PP(i,J(i)) = 1;
end
```

2.3 Validation et estimation de l'erreur

On va vérifier que le code calcule une solution approchée u_h correcte. Pour $(x, y) \in \overline{\Omega}$, on choisit :

$$u(x, y) = sin(\pi x) sin(\pi y)$$

Avec A = 1, la donnée f correspondante : $f = (1 + 2\pi^2)u$
L'erreur de la norme $L^2(\Omega)$ et l'erreur de la semi-norme $H_1(\Omega)$ entre la solution exacte et la solution approchée (dans ce cas $||u||_{L^2(\Omega)} = 1$ et $||\nabla u||_{L^2(\Omega)} = \sqrt{2}\pi$) :

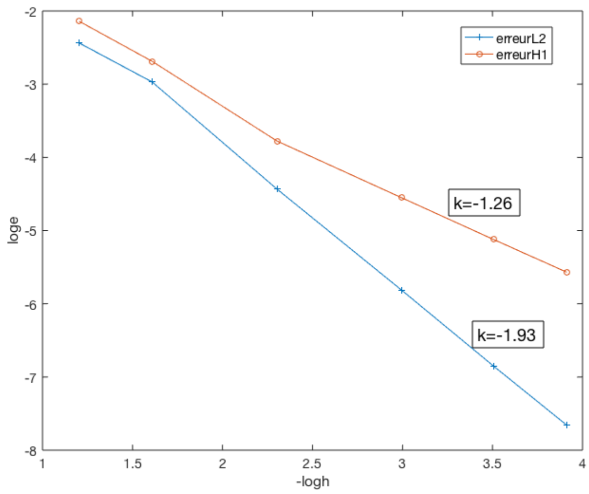


FIGURE 5 – $loge - log(1/h)$

Les résultats numérique est $||u - u_h||_{L^2(\Omega)} \propto h^{1.93}$, $||\nabla u - \nabla u_h||_{L^2(\Omega)} \propto h^{1.26}$ correspondant au Aubin-Nitsche et au lemme Céa.

3 Condition périodique

Soit $\Omega = [0, L^2]$, on s'intéresse à la solution numérique du problème de Poisson avec condition aux limites périodique
Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que :

$$\begin{cases} u - \nabla \cdot (A(x, y)\nabla u) = f \quad dans \quad \Omega \\ u|_{x=0} = u|_{x=L} \quad et \quad u|_{y=0} = u|_{y=L} \\ A(x, y)\nabla u \cdot e_x|_{x=0} = A(x, y)\nabla u \cdot e_x|_{x=L} \quad et \quad A(x, y)\nabla u \cdot e_y|_{y=0} = A(x, y)\nabla u \cdot e_y|_{y=L} \end{cases} \tag{9}$$

3.1 Formulation variationnelle du problème

Trouver $\boldsymbol{u \in H^1_\sharp(\Omega)}$, pour toutes les fonctions $\boldsymbol{v \in H^1_\sharp(\Omega)}$ ($H^1_\sharp(\Omega) \subset H^1(\Omega)$),

$$\begin{aligned} \int_\Omega uv - \int_\Omega \nabla \cdot (A(x,y)\nabla u) v = \int_\Omega f v \quad dans \Omega \\ \int_\Omega uv + \int_\Omega A(x,y)\nabla u \nabla v - \int_{\partial\Omega} (A(x,y)\nabla u \cdot n) v = \int_\Omega f v \\ \int_\Omega uv + \int_\Omega A(x,y)\nabla u \nabla v = \int_\Omega f v \end{aligned} \tag{10}$$

On obtient donc bien la formulation variationnelle. On peut vérifier les hypothèses du théorème de Lax-Milgram pour montrer que le problème est bien posé de la même façon précédente.

3.2 Discrétisation

La solution approchée s'écrit sous la forme :

$$u_h(x,y) = \sum_{I=1}^{N_\sharp} u_h(S_I)\omega_I(x,y), \quad \forall (x,y) \in \overline{\Omega}$$

La formulation variationnelle discrète sous la forme d'un système linéaire équivalent :

$$(\mathbb{M}^\sharp + \mathbb{K}^\sharp)\vec{U}^\sharp = \vec{L}^\sharp \tag{11}$$

où la $I^{ème}$ composante du vecteur $\vec{U} \in R^{N_\sharp}$ vaut $u_h(S_I)$, avec $\mathbb{M}^\sharp$ est la matrice de masse et $\mathbb{K}^\sharp$ est la matrice de rigidité, de taille $N_\sharp \times N_\sharp$.
Dans la pratique, on ne peut pas assembler directement la matrice intervenant dans (11). On introduit une matrice (creuse/sparse) de projection $\mathbb{Q}$ de V_h dans $V_h^\sharp$, de taille $N_\sharp \times N$ (qui ne contient que des 1 et des 0). On a donc :

$$\mathbb{A}^\sharp = \mathbb{Q}\mathbb{A}\mathbb{Q}^t, \quad \vec{L}^\sharp = \mathbb{Q}\vec{L}, \quad et \quad \vec{U} = \mathbb{Q}^t\vec{U}^\sharp$$

Le code de la construction de la matrice $\mathbb{Q}$:

```
[J]=find(Refneu == 0);
[K]=find(Refneu == 5);%%% Trouver les quatre coins du carré
[Z]=find(Refneu == 1);%%% Trouver les points du bord en bas
[Z1]=find(Refneu == 3);%%% Trouver les points du bord en haut
[Z2]=find(Refneu == 2);%%% Trouver les points du bord à gauche
[Z3]=find(Refneu == 4);%%% Trouver les points du bord à droite
PP = sparse(N_#,Nbpt);
for i = 1:length(K)
  PP(1,K(i))= 1;
end
for  i= 2:N_#-length(J)
    if i<=length(Z)+1
         trouver deux points Z(j), Z1(k) qui ont la même abscisse
         PP(i,Z(j))= 1;PP(i,Z1(k))= 1;
    else
        trouver deux points Z2(j), Z3(k) qui ont la même ordonnée
         PP(i,Z2(j))= 1;PP(i,Z3(k))= 1;
    end
end
for i = N_#-length(J)+1: N_#
    PP(i,J(i-n+1)) = 1;
end
```

3.3 Validation et estimation de l'erreur

On va vérifier que le code calcule une solution approchée u_h correcte. Pour $(x, y) \in \overline{\Omega}$, on choisit :

$$u(x, y) = sin(\pi x) sin(\pi y)$$

Avec A = 1, la donnée f correspondante : $f = (1 + 2\pi^2)u$
L'erreur de la norme $L^2(\Omega)$ et l'erreur de la semi-norme $H_1(\Omega)$ entre la solution exacte et la solution approchée (dans ce cas $||u||_{L^2(\Omega)} = 1$ et $||\nabla u||_{L^2(\Omega)} = \sqrt{2}\pi$) :

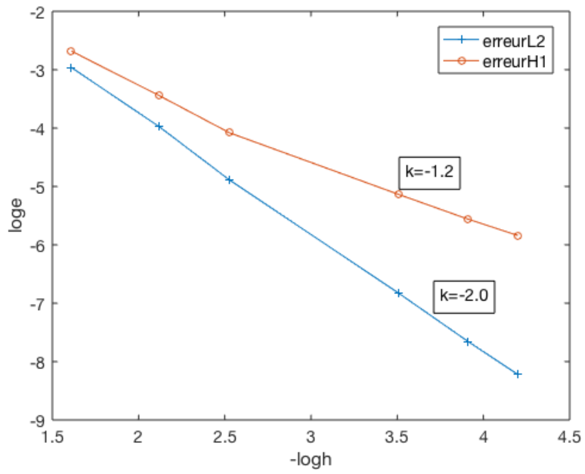


FIGURE 6 – $loge - log(1/h)$

Les résultats numérique est $||u - u_h||_{L^2(\Omega)} \propto h^2$, $||\nabla u - \nabla u_h||_{L^2(\Omega)} \propto h^{1.2}$ correspondant au Aubin-Nitsche et au lemme Céa.