1. 求 $\sqrt{3+4i}$ 的值为___、___。

2. 已知 $f(z)=u(x,y)+i(2xy+y)$ 是解析函数，求 $f(z)=$ ___

3. 求 $Ln(-3+4i)$ 的主值为___。

4. 求 $\int_{-\pi i}^{3\pi i} e^{2z}dz=$ ___。

5. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+i)^n}{2^{\frac{n}{2}}\cos in}$ 是否收敛？是否绝对收敛？___

6. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(1+i)^n z^n$ 的收敛半径 $R=$ ___

7. 求 $z=0$ 为 $\frac{z\sin z}{(e^z-z-1)^2}$ 的孤立奇点类型 ___

8. 求 $2\pi\delta(\omega-\omega_0)$ 的傅里叶逆变换为___

9. 已知 $f(t)$ 的傅里叶变换为 $F(\omega)$，求 $f(2t-5)$ 的傅里叶变换为___

10. 利用拉氏变换性质求 $\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 t}{t^2}dt$ ___。

1. 计算 $I=\oint_c(1+i-2\bar{z})dz$，其中 c 为折线方向 z_1 到 z_2 到 z_3 到 z_1，$z_1=0$，$z_2=1$，$z_3=1+i$

2. 计算积分 $\oint_c\frac{z}{(1+z^2)}\frac{1}{e^z}dz$，其中 c 为正向圆周 $|z|=r$ $(r>1)$

3. $\int_0^{+\infty}\frac{\cos 2x}{1+x^2}dx$.

4. 求调和函数 $u(x,y)=y^3-3x^2y$ 的共轭调和函数 $v(x,y)$ 和由他们构成的解析函数.

5. 求函数 $f(z)=\frac{z(z+1)}{z^2+2z-3}$ 在以 $z=0$ 为中心的不同圆环域内的洛朗级数展开式

6. 求下列积分方程的解 $y(t)+\int_0^t y(t-\tau)e^{\tau}d\tau=2t-3$

18年题：

一.

1. 求 $\sqrt{3+4i}$ 的值 $\underline{\sqrt{5}e^{i\frac{\operatorname{arctg}\frac{4}{3}}{2}}}$. $\underline{\sqrt{5}e^{i(\frac{\arctan\frac{4}{3}}{2}+k\pi)}}$

$(3+4i)^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}[\ln 5+i(\arg(3+4i)+2k\pi)]}$

$u_x \quad u_y$

$v_x \quad v_y$

$\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}$

2. 已知 $f(z)=u(x,y)+i(2xy+y)$ 解析. 求 $f'(z)=$ $\underline{2z+1}$

$\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}$ $\quad \frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}$

3. 求 $\operatorname{Ln}(-3+4i)$ 主值 $\underline{\ln 5+i(\pi-\operatorname{arctg}\frac{4}{3})}$

$\ln 5+i(\arctan-\frac{4}{3}+\pi)$

4. 求 $\int_{-\pi i}^{3\pi i} e^{2z}dz=$ $\underline{0}$. $\quad \frac{1}{2}e^{2z}\Big|_{-\pi i}^{3\pi i}=0$

5. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+i)^n}{2^{\frac{n}{2}}\cos in}$ 是否收敛.(绝对收敛). $\underline{绝对收敛}$.

6. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(1+i)^n z^n$ 的收敛半径. $\underline{\frac{\sqrt{2}}{2}}$. $\quad (\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|C_n|}=\lambda.\ R=\frac{1}{\lambda})$

$z^2 \quad \sin z=z-\frac{z^3}{3!} \quad e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}$

7. 求 $z=0$ 为 $\frac{z\sin z}{(e^z-z-1)^2}$ 的孤立奇点类型. $\underline{=级极点}$.

$e^z-z-1=\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{3!}z^3+\cdots+\frac{1}{n!}z^n+\cdots$

8. 求 $2\pi\delta(\omega-\omega_0)$ 的傅立叶逆变换为 $\underline{e^{j\omega_0 t}}$. $\quad \mathscr{F}[1]=2\pi\delta(\omega)$ $\quad \mathscr{F}[1\cdot e^{j\omega_0 t}]=2\pi\delta(\omega-\omega_0)$

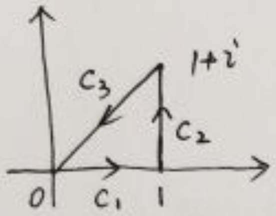
9. 已知 $f(t)$ 的傅立叶变换为 $F(\omega)$. 求 $f(2t-5)$ 的傅立叶变换 $\underline{\frac{1}{2}e^{-\frac{5}{2}j\omega}F(\frac{\omega}{2})}$.

10. $$\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 t}{t^2}dt=\int_0^{+\infty}\sin^2 t\, d(-\tfrac{1}{t})=-\sin^2 t\cdot(\tfrac{1}{t})\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}2\sin t\cdot\cos t\cdot\frac{1}{t}dt$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2t}{t}dt \xlongequal{L-变换性质}\int_0^{+\infty}\frac{2}{s^2+4}ds=\arctan\frac{s}{2}\Big|_0^{+\infty}$$

$$=\frac{\pi}{2}$$

二. 1.计算 $I=\oint_C (1+i-2\bar{z})dz$. C: $z_1=0$ 到 $z_2=1$ 到 $z_3=1+i$ 到 z_1.



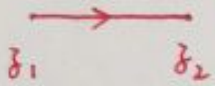
解:(注意,因 $\bar{z}$ 处处不解析,所以只能用参数方程法.)

$C=C_1+C_2+C_3$

$C_1:\ z=t,\ 0\le t\le 1.\quad dz=dt$

$C_2:\ z=1+it,\ 0\le t\le 1.\quad dz=i\,dt$

$C_3:\ z=1+i+(-1-i)t=1-t+i(1-t),\ 0\le t\le 1.\quad dz=(-1-i)dt$



两点间线段方程:
$z=z_1+(z_2-z_1)t$.
$0\le t\le 1$.

则 $I=\oint_C=\int_{C_1}+\int_{C_2}+\int_{C_3}$

$$=\int_0^1(1+i-2t)dt+\int_0^1[1+i-2(1-it)]i\,dt$$
$$+\int_0^1[1+i-2(1-t-i(1-t))](-1-i)dt$$
$$=i+(-2-i)+(4-2i)=2-2i.$$

2. $\oint_C \frac{z}{(1+z^2)e^{z}}dz \qquad C: |z|=r \quad (r>1)$.

$e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2 2!}$

解:(为了降低难度,老师改成 $\frac{1}{e^z}$,否则是 $e^{\frac{1}{z}}$,大家考虑怎么算)

令设 $f(z)=\frac{z}{(1+z^2)\frac{1}{e^z}}=\frac{ze^z}{(1+z^2)}$ 有奇点 $\pm i$,且都在 C内.

所以 $\oint_C \frac{z}{(1+z^2)\frac{1}{e^z}}dz=\oint_C\frac{ze^z}{(1+z^2)}dz=2\pi i\left\{Res\left[\frac{ze^z}{1+z^2},i\right]+Res\left[\ \ ,-i\right]\right\}$

$$=2\pi i\cdot\left\{\frac{e^i}{2}+\frac{e^{-i}}{2}\right\}=2\pi i\cos 1.$$

~~实部~~

$\cancel{=Re}$

3. $\int_0^{+\infty}\frac{\cos 2x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 2x}{1+x^2}dx = Re\left[\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 2x + i\sin 2x}{1+x^2}dx\right]$

偶函数 实部

$$= Re\left[\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{2ix}}{1+x^2}dx\right]$$

其中. $R(z)=\frac{1}{1+z^2}$. 分子比分母次数少2. 实轴无奇点. 有奇点 $\pm i$. 其中 i 在上半平面

则. $Re\left[\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{2ix}}{1+x^2}dx\right] = Re\left[\frac{1}{2}\cdot 2\pi i\left\{Res\left[\frac{e^{2iz}}{1+z^2}, i\right]\right\}\right]$

$$= Re\left[\pi i\cdot\frac{e^{-2}}{2i}\right] = \frac{\pi}{2}e^{-2}$$

4. 调和函数 $u(x,y)=y^3-3x^2y$. 求共轭调和函数 $v(x,y)$. 使 $f=u+iv$. 解析.

解: $\frac{\partial u}{\partial x} = -6xy$. $\frac{\partial u}{\partial y} = 3y^2-3x^2$.

因为 $f=u+iv$ 解析. 所以 $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$.

$$= -6xy - i(3y^2-3x^2)$$

$$= i(3x^2+i6xy-3y^2)$$

$$= 3i(x+iy)^2 = 3iz^2$$

$\therefore f(z) = \int f'(z)dz = \int 3iz^2 dz = iz^3 + C$.

5. 求函数 $f(z)=\dfrac{z(z+1)}{z^2+2z-3}$ 在以0为圆心的各圆环域内的洛朗展式.

各圆环域

解：$f(z)=\dfrac{z(z+1)}{z^2+2z-3}=\dfrac{z(z+1)}{(z+3)(z-1)}=\dfrac{z}{2}\left[\dfrac{1}{z+3}+\dfrac{1}{z-1}\right]$

$f(z)$ 有奇点 1 和 -3. 则将复平面分成以 0 为圆心的圆环域：

$0<|z|<1$. $1<|z|<3$ 和 $|z|>3$.

① $0<|z|<1$.

$$\frac{1}{z+3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{z}{3}}=\frac{1}{3}\left(1-\frac{z}{3}+\left(\frac{z}{3}\right)^2-\left(\frac{z}{3}\right)^3+\cdots\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}z^n$$

$$\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{1-z}=-(1+z+z^2+\cdots)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)z^n$$

$$\therefore f(z)=\frac{z}{2}\left(\frac{1}{z+3}+\frac{1}{z-1}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{2\cdot 3^{n+1}}+\left(\frac{-1}{2}\right)\right]z^{n+1}$$

② $1<|z|<3$. 则 $\left|\frac{1}{z}\right|<1$. 及 $\left|\frac{z}{3}\right|<1$

则 $\dfrac{1}{z+3}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{1+\frac{z}{3}}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}z^n$.

$$\frac{1}{z-1}=\cancel{-\frac{1}{1-z}}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$$

$$\therefore f(z)=\frac{z}{2}\left(\frac{1}{z+3}+\frac{1}{z-1}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\cdot z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2\cdot 3^{n+1}}z^{n+1}.$$

③ $|z|>3$. 则 $\left|\frac{3}{z}\right|<1$. 且 $\left|\frac{1}{z}\right|<1$.

则 $\dfrac{1}{z+3}=\dfrac{1}{z}\cdot\dfrac{1}{1+\frac{3}{z}}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{3^n}{z^{n+1}}$

$$\frac{1}{z-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}.$$

则 $f(z)=\dfrac{z}{2}\left(\dfrac{1}{z+3}+\dfrac{1}{z-1}\right)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n\cdot 3^n}{2}+\frac{1}{2}\right)\cdot z^{-n}$