科目	复变函数与积分变换 B	年级班级		姓名		学号		时间	2017 年 12 月 1 日

题号	一	二	三	四					总分
成绩									

一、计算。（每题 10 分，共 40 分）

1、已知 $z=5-4i$，求 $(z-1)^{\frac{1}{3}}$ 和 $(z-i)^{i}$。

本题得分

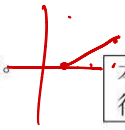
解：由题得 $(z-1)^{\frac{1}{3}}=(4-4i)^{\frac{1}{3}}=e^{\ln(4-4i)\frac{1}{3}}$

$=e^{\frac{1}{3}\ln4\sqrt{2}-(\frac{\pi}{4}+2k\pi)\frac{i}{3}}=e^{\frac{1}{3}\ln4\sqrt{2}-\frac{1}{3}(\frac{\pi}{4}+2k\pi)i}$.

$(z-i)^{i}=(5-3i)^{i}=e^{i\ln(5-3i)}=e^{i(\ln\sqrt{34}+i\arctan\frac{5}{3})}$

$=e^{\arctan\frac{5}{3}+2k\pi}(\cos\ln\sqrt{34}+i\sin\ln\sqrt{34})$

2、已知正△ABC 两个顶点 A 是1，B 是 $3+i$，则 C 在何处。



本题得分

解：$|AB|=\sqrt{(3-1)^2+1^2}=\sqrt{5}$

$C=1+\sqrt{5}e^{i\theta}=1+\sqrt{5}\cos\theta+i\sqrt{5}\sin\theta$

$\vec{AB}=2+i$　　$\vec{AC}=\sqrt{5}e^{i\theta}$

$\cos60^\circ=\frac{\vec{AB}\times\vec{AC}}{\sqrt{AB}\sqrt{AC}}$　　得 C (　　)

$\cos\alpha=\frac{ac+bd}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}}$

3、已知函数 $f(z)=u+iv$ 解析，其中 $u(x,y)=y^3-3x^2y+x$，求 $f(z)$。

本题得分

解：由题得f(z)解析，$u_x=v_y$　$u_y=-v_x$

$u_x=-6xy+1$　　$u_y=3y^2-3x^2$

故　$v=\int u_x dy=-3xy^2+y+g(x)$

得 $v_x=-3y^2+g'(x)=-3y^2+3x^2$　得 $g'(x)=3x^2$ 故 $g(x)=x^3+C$

即 $f(z)=(y^3-3x^2y+x)+i(-3xy^2+y+x^3+C)$

[redacted]

4、求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}(z-2)^{n+1}$ 的收敛半径以及和函数值。

本题得分	

解：由题得 $\rho = \frac{z_{n+1}}{z_n} = \frac{\frac{1}{n+2}}{\frac{1}{n+1}} = 1$ 故 $R = \frac{1}{\rho} = 1$

即收敛半径为1。

$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(z-2)^n$

二、求下列积分。（每题 10 分，共 40 分）

1、求积分 $\int_c z\,\mathrm{Im}(z)dz$，其中 C 为

本题得分	

（1）沿着原点 O 到 $A=1$，再到 $B=1+i$ 的两直线段；

（2）沿着曲线 $y=x^2$，从原点 O 到 $B=1+i$ 的弧。

解(1) $\int_C z\,\mathrm{Im}(z)dz = \int_0^1 x\cdot 0\,dx + \int_1^{1+i}(1+iy)iy\,dy$

$z=(x+ix^2)$

(2) $\int_C z\,\mathrm{Im}(z)dz = \int_0^1 (x+ix^2)x^2(1+2xi)\,dx$

$\frac{2z-5}{(z^2-5z+4)^2}$　　$\frac{5-2z}{z^2-5z+4}$

2、求积分 $\oint_c \frac{1}{(z-1)(z-2)^3(z-4)}dz$，其中 C 为 $|z|=3$ 的正向。

本题得分	

在C为 $|z|=3$ 的正向时，其中 1为1级极点，

2为3级极点，　原式 $=2\pi i(\mathrm{Res}[f(z),1]+\mathrm{Res}[f(z),2])$

$=2\pi i\left(\lim_{z\to 1}\frac{1}{(z-2)^3(z-4)} + \frac{1}{2!}\lim_{z\to 2}\left(\frac{1}{(z-1)(z-4)}\right)''\right)$

$=2\pi i\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\right.$

[redacted]

3、利用 Laplace 变换的性质，求 $\int_0^{\infty}\frac{e^t \sin t}{t}dt$。

本题得分	

4、求函数 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\omega t}\cos kt\,dt$ 的积分。

本题得分	

$0<|z|<1$ 在此 $\frac{1}{1-z}$ 内收敛

三、求函数 $f(z)=\frac{1}{z(z-1)^2}$ 在指定圆环的洛朗(Laurent)展式。(10 分)

(1) $0<|z|<1$

(2) $1<|z-1|<+\infty$

本题得分	

(1) $\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n$ 故 $\left(\frac{1}{1-z}\right)^2=\sum_{n=0}^{\infty}nz^{n-1}$

故 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}nz^{n-2}$

(2) $f(z)=\frac{1}{(z-1)^2}\frac{1}{1+z-1}=\frac{1}{(z-1)^3}\frac{1}{1+\frac{1}{z-1}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-1)^{n+3}}$

四、利用拉普拉斯变换求解方程 $y''(t)-3y'(t)-4y(t)=e^{-2t}$，其中 $y(t)|_{t=0}=0$ ，$y'(t)|_{t=0}=1$。（10 分）

本题得分	