概率论第一次作业

黄之豪
20110980005
2020 年 10 月 16 日

作业题号

应坚刚教授 概率论 (第二版)：
本次作业一共 10 题：
P48 2, 3, 6, 8, 10, 12, 20, 21, 23, 24

第 2 题

解：
下面的定义解读和灰色框是本题关键
由定义

$$f^{-1}(\mathscr{B}) := \{f^{-1}(B) \colon B \in \mathscr{B}\}$$

即 $f^{-1}(B) \in \mathscr{B} \iff B \in \mathscr{B}$

(1) 补运算

要证：
给定条件：$B \in \mathscr{B}$, 则 $B^{\mathrm{c}} \in \mathscr{B}$
能否得出：若 $f^{-1}(B) \in f^{-1}(\mathscr{B})$, 则 $\left(f^{-1}(B)\right)^{\mathrm{c}} \in f^{-1}(\mathscr{B})$

由定义：

$$B \in \mathscr{B} \iff f^{-1}(B) \in f^{-1}(\mathscr{B}) \tag{1}$$

$$B^c \in \mathscr{B} \iff f^{-1}(B^c) \in f^{-1}(\mathscr{B}) \tag{2}$$

由 $\mathscr{B}$ 对补运算封闭:

$$B \in \mathscr{B} \Rightarrow B^c \in \mathscr{B} \tag{3}$$

综合 (1)(2)(3)

$$f^{-1}(B) \in f^{-1}(\mathscr{B}) \Rightarrow f^{-1}(B^c) \in f^{-1}(\mathscr{B})$$

由逆运算与补集交换性 (课本 P40 定理 2.3.1(2)): $f^{-1}(B^c) = \left(f^{-1}(B)\right)^c$, 可得：

$$f^{-1}(B) \in f^{-1}(\mathscr{B}) \Rightarrow \left(f^{-1}(B)\right)^c \in f^{-1}(\mathscr{B})$$

(2) 并运算

要证：
给定条件：$A, B \in \mathscr{B}$, 则 $A \cup B \in \mathscr{B}$
能否得出：若 $f^{-1}(A), f^{-1}(B) \in f^{-1}(\mathscr{B})$, 则 $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \in f^{-1}(\mathscr{B})$

由定义：

$$A, B \in \mathscr{B} \iff f^{-1}(A), f^{-1}(B) \in f^{-1}(\mathscr{B}) \tag{1}$$

$$A \cup B \in \mathscr{B} \iff f^{-1}(A \cup B) \in f^{-1}(\mathscr{B}) \tag{2}$$

由 $\mathscr{B}$ 对并运算封闭:

$$A, B \in \mathscr{B} \Rightarrow A \cup B \in \mathscr{B} \tag{3}$$

综合 (1)(2)(3)

$$f^{-1}(A), f^{-1}(B) \in f^{-1}(\mathscr{B}) \Rightarrow f^{-1}(A \cup B) \in f^{-1}(\mathscr{B})$$

由逆运算与并集交换性 (课本 P40 定理 2.3.1(3)): $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$, 可得：

$$f^{-1}(A), f^{-1}(B) \in f^{-1}(\mathscr{B}) \Rightarrow f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \in f^{-1}(\mathscr{B})$$

(3) 交运算

要证：
给定条件：$A, B \in \mathscr{B}$, 则 $A \cap B \in \mathscr{B}$
能否得出：若 $f^{-1}(A), f^{-1}(B) \in f^{-1}(\mathscr{B})$, 则 $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \in f^{-1}(\mathscr{B})$

由定义：

$$A, B \in \mathscr{B} \iff f^{-1}(A), f^{-1}(B) \in f^{-1}(\mathscr{B}) \tag{1}$$

$$A \cap B \in \mathscr{B} \iff f^{-1}(A \cap B) \in f^{-1}(\mathscr{B}) \tag{2}$$

由 $\mathscr{B}$ 对交运算封闭:

$$A, B \in \mathscr{B} \Rightarrow A \cap B \in \mathscr{B} \tag{3}$$

综合 (1)(2)(3)

$$f^{-1}(A), f^{-1}(B) \in f^{-1}(\mathscr{B}) \Rightarrow f^{-1}(A \cap B) \in f^{-1}(\mathscr{B})$$

由逆运算与交集交换性 (课本 P40 定理 2.3.1(3)): $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$, 可得：

$$f^{-1}(A), f^{-1}(B) \in f^{-1}(\mathscr{B}) \Rightarrow f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \in f^{-1}(\mathscr{B})$$

第 3 题

解：
与 2 解题几乎一致
由定义

$$\mathscr{B} := \{B \subset Y : f^{-1}(B) \in \mathscr{A}\}$$

即 $B \in \mathscr{B} \iff f^{-1}(B) \in \mathscr{A}$

(1) 补运算

要证：
给定条件：$f^{-1}(B) \in \mathscr{A}$, 则 $(f^{-1}(B))^c \in \mathscr{A}$
能否得出：若 $B \in \mathscr{B}$, 则 $B^c \in \mathscr{B}$

由定义：

$$f^{-1}(B) \in \mathscr{A} \iff B \in \mathscr{B} \tag{1}$$

$$f^{-1}(B^c) \in \mathscr{A} \iff B^c \in \mathscr{B} \tag{2}$$

由 $\mathscr{A}$ 对补运算封闭:

$$f^{-1}(B) \in \mathscr{A} \Rightarrow \left(f^{-1}(B)\right)^c \in \mathscr{A} \tag{3}$$

综合 (1)(2)(3)

$$B \in \mathscr{B} \iff f^{-1}(B) \in \mathscr{A} \Rightarrow \left(f^{-1}(B)\right)^c \in \mathscr{A}$$

由逆运算与补集交换性 (课本 P40 定理 2.3.1(2)): $f^{-1}(B^c) = \left(f^{-1}(B)\right)^c$, 再由 (2) 可得：

$$B \in \mathscr{B} \Rightarrow B^c \in \mathscr{B}$$

(2) 并运算

要证：
给定条件：$f^{-1}(A), f^{-1}(B) \in \mathscr{A}$, 则 $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \in \mathscr{A}$
能否得出：若 $A, B \in \mathscr{B}$, 则 $A \cup B \in \mathscr{B}$

由定义：

$$f^{-1}(A), f^{-1}(B) \in \mathscr{A} \iff A, B \in \mathscr{B} \tag{1}$$

由 $\mathscr{A}$ 对并运算封闭:

$$f^{-1}(A), f^{-1}(B) \in \mathscr{A} \Rightarrow f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \in \mathscr{A} \tag{2}$$

由逆运算与并集交换性 (课本 P40 定理 2.3.1(3)): $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$, 结合 (1)(2) 可得：

$$A, B \in \mathscr{B} \iff f^{-1}(A), f^{-1}(B) \in \mathscr{A} \Rightarrow f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cup B) \in \mathscr{A}$$

又由定义：

$$A \cup B \in \mathscr{B} \iff f^{-1}(A \cup B) \in f^{-1}(\mathscr{B})$$

得：

$$A, B \in \mathscr{B} \Rightarrow A \cup B \in \mathscr{B}$$

(3) 交运算

要证：
给定条件：$f^{-1}(A), f^{-1}(B) \in \mathscr{A}$, 则 $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \in \mathscr{A}$
能否得出：若 $A, B \in \mathscr{B}$, 则 $A \cap B \in \mathscr{B}$

由定义：

$$f^{-1}(A), f^{-1}(B) \in \mathscr{A} \iff A, B \in \mathscr{B} \tag{1}$$

由 $\mathscr{A}$ 对并运算封闭:

$$f^{-1}(A), f^{-1}(B) \in \mathscr{A} \Rightarrow f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \in \mathscr{A} \tag{2}$$

由逆运算与交集交换性 (课本 P40 定理 2.3.1(3)): $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$, 结合 (1)(2) 可得：

$$A, B \in \mathscr{B} \iff f^{-1}(A), f^{-1}(B) \in \mathscr{A} \Rightarrow f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cap B) \in \mathscr{A}$$

又由定义：

$$A \cap B \in \mathscr{B} \iff f^{-1}(A \cap B) \in f^{-1}(\mathscr{B})$$

得：

$$A, B \in \mathscr{B} \Rightarrow A \cap B \in \mathscr{B}$$

第 6 题

解：
设：

$$\forall n,\ \mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2 \cdots \mathscr{F}_n \text{ 是 } \sigma \text{ 域}$$

(1)
显然：

$$\varnothing \in \mathscr{F}_1 \cap \mathscr{F}_2 \cdots \cap \mathscr{F}_n \tag{a}$$

由 σ 域定义：

$$\Omega \in \mathscr{F}_1, \Omega \in \mathscr{F}_2 \cdots \Omega \in \mathscr{F}_n$$

得：

$$\Omega \in \mathscr{F}_1 \cap \mathscr{F}_2 \cdots \cap \mathscr{F}_n \tag{b}$$

(2)
设 $\forall A$ ：

$$\forall A \in \mathscr{F}_1 \cap \mathscr{F}_2 \cdots \cap \mathscr{F}_n$$

得：

$$A \in \forall \mathscr{F}_i, i = 1, 2, \cdots, n$$

由 σ 域定义可得：

$$A^{\mathrm{c}} \in \forall \mathscr{F}_i, i = 1, 2, \cdots, n$$

即

$$A^{\mathrm{c}} \in \mathscr{F}_1 \cap \mathscr{F}_2 \cdots \cap \mathscr{F}_n \tag{c}$$

(3)
设：

$$A_k \in \mathscr{F}_1 \cap \mathscr{F}_2 \cdots \cap \mathscr{F}_n, k \geq 1$$

则：

$$\bigcup_k A_k \in \mathscr{F}_1, \bigcup_k A_k \in \mathscr{F}_2, \cdots \bigcup_k A_k \in \mathscr{F}_n, k \geq 1$$

可得：

$$\bigcup_k A_k \in \mathscr{F}_1 \cap \mathscr{F}_2 \cdots \cap \mathscr{F}_n, k \geq 1 \tag{d}$$

由 (a)(b)(c)(d) 得证

第 8 题

解：

其实 $(b) \Rightarrow (a)$ 也又看到证明，$(c) \Rightarrow (a)$ 不一定对

使用 $(a)\Rightarrow(b)\Rightarrow(c)\Rightarrow(a)$ 思路

$(a)\Rightarrow(b)$:

显然，将 n+1 之后的集合都设为空集，便从可列可加性 $\Rightarrow$ 有限可加

现证下连续：

设 $\{S_n\}$ 是 $\mathscr{F}$ 中一个单调不减的集序列，那么：

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i = \lim_{n\to+\infty} S_n$$

若定义 $S_0=\varnothing$，则

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i = \sum_{i=1}^{\infty}(S_i - S_{i-1})$$

这里的 $(S_i - S_{i-1}), i=1,2,\cdots$ 由于 S_i 单调性，两两互不相容，因此由可列可加性得

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i) = \sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}(S_i - S_{i-1}) = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(S_i - S_{i-1})$$

又由

$$\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(S_i - S_{i-1}) = \mathbb{P}(\sum_{i=1}^{n}(S_i - S_{i-1})) = \mathbb{P}(S_n)$$

因此

$$\mathbb{P}(\lim_{n\to+\infty} S_n) = \lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(S_n)$$

下连续性得证

$(b)\Rightarrow(c)$:

下连续性 $\Rightarrow$ 次可列可加：

利用一般加法定理 (容斥原理)

$$\mathbb{P}(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(A_k) - \sum_{1\le i<j\le n}\mathbb{P}((A_i\cap A_j) + \sum_{1\le i<j<k\le n}\mathbb{P}((A_i\cap A_j\cap A_k) - \cdots + (-1)^{n-1}\mathbb{P}(A_1\cap\cdots\cap A_n)$$

对 n 作数学归纳可得，对 $\forall n\ge 1$ 有

$$\mathbb{P}(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \le \sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(A_k)$$

令 $n\to+\infty$，根据下连续性可得

$$\mathbb{P}(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \le \sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_k)$$

$(c)\Rightarrow(a)$:

由条件可得 $\mathbb{P}$ 首先是外测度，设 $\{A_i\}$ 是一列互不相交的可测集，由 $(\Omega,\mathscr{F})$ 是可测空间可得，$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, A_i\in\mathscr{F}$ 是可测集，根据外测度性质，对 $\forall T$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T) &= \mathbb{P}\left[T\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)\right] + \mathbb{P}\left[T\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^{\mathrm{c}}\right]\\
&\ge \mathbb{P}\left[T\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)\right] + \mathbb{P}\left[T\cap\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)^{\mathrm{c}}\right]\\
&= \sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(T\cap A_i) + \mathbb{P}\left[T\cap\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)^{\mathrm{c}}\right] \qquad (*)
\end{aligned}$$

其中 (*) 用到了有限可加性，令 $n\to\infty$ 得

$$\mathbb{P}(T) \ge \sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}(T\cap A_i) + \mathbb{P}\left[T\cap\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)^{\mathrm{c}}\right] \qquad (**)$$

在 (**) 中，令 $T=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$，这时由于 $(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\cap A_i=A_i)$，便得

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)\geq\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_i)$$

另一方面由次可列可加性

$$\mathbb{P}(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k)\leq\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_k)$$

最终可得可列可加性

第 10 题

解：

由 $A\cap B\subset B$ 以及概率单调性，得出 $\mathbb{P}(A\cap B)\leq 1/3$

再由 $1\geq\mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)$, 得 $\mathbb{P}(A\cup B)\geq 1/12$

第 12 题

解：

用数学归纳法证明:

当 $n=2$ 时，$\mathbb{P}(A_1\cup A_2)=\mathbb{P}(A_1)+\mathbb{P}(A_2)-\mathbb{P}((A_1\cap A_2)$, 显然成立：$\mathbb{P}(A_1\cup A_2)\geq\mathbb{P}(A_1)+\mathbb{P}(A_2)-\mathbb{P}((A_1\cap A_2)$

设当 $n=k-1$ 时，

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{k-1}A_i)\geq\sum_{i=1}^{k-1}\mathbb{P}(A_i)-\sum_{i<j\leq k-1}\mathbb{P}((A_i\cap A_j)$$

当 $n=k$ 时,

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{k}A_i)=\mathbb{P}((\bigcup_{i=1}^{k-1}A_i)\cup A_k)=\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{k-1}A_i)+\mathbb{P}(A_k)-\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{k-1}A_i\cap A_k)\tag{1}$$

其中，利用 $n=k-1$ 假设，

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{k-1}A_i)\geq\sum_{i=1}^{k-1}\mathbb{P}(A_i)-\sum_{i<j\leq k-1}\mathbb{P}((A_i\cap A_j)\tag{2}$$

使用概率分配率和次可加性

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{k-1}A_i\cap A_k)=\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{k-1}(A_i\cap A_k)\leq\sum_{i=1}^{k-1}\mathbb{P}(A_i\cap A_k)\tag{3}$$

将 (2)(3) 代入 (1) 便得证

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{k}A_i)\geq\sum_{i=1}^{k}\mathbb{P}(A_i)-\sum_{i<j\leq k}\mathbb{P}((A_i\cap A_j)$$

第 20 题

解：

> 这题前半小题有点麻烦，要证明连续分布函数 F 可测 (可测函数为啥是随机变量李贤平 P158 具体不清楚)
> PS: 好像记忆中甚至可以不用连续这一条件，可测还是比连续要弱一点的

(1) 证明 $F(x)$ 是可测函数 (一元 Borel 函数)，即 $F(\xi)$ 是随机变量

对 $\forall a$, 记 $E=\{x\in\mathbb{R}\colon F(x)>a\}$

现在证明 E 是开集：$\forall x_0\in E$，则 $F(x_0)>a$ 由于 $F(x)$ 在 x_0 处连续，$\exists\delta>0$，使得 $x\in U(x_0,\delta)$ 时，$F(x)>a$，即

x_0 是内点，E 是开集，当 $a \geq 1$ 或 $a \leq 0$ 时，E 分别是 $\varnothing$ 和 $\mathbb{R}$ 也都为开集，开集是可测集，因此 $F(x)$ 是可测函数，故 $F(\xi)$ 是随机变量。

(2) 证明 $[0,1]$ 均匀分布, 连续单调函数有逆函数
$Y=F(\xi)$ 分布：$\mathbb{P}(Y \leq y)=\mathbb{P}(F(\xi) \leq y)=\mathbb{P}(\xi \leq F^{-1}(y))=F(F^{-1}(y))=y$，因此是 $[0,1]$ 均匀分布

第 21 题

解：

这题也麻烦，广义逆 (教材 P97)

(1) 至少存在中点
广义逆定义：

$$F^{-1}(x) \triangleq inf\{y \colon F(y) \geq x\}$$

反证法，取 $m=F^{-1}(\frac{1}{2})$，若 $\mathbb{P}(\xi<m)>\frac{1}{2}$，由 F^{-1} 左连续性，$\exists m_0$ 使 $\mathbb{P}(\xi \leq m_0) \geq \frac{1}{2}$，与 m 是下确界矛盾

(2) 中点集合闭区间
首先不会出现中点集合为多段区间情况 (否则与概率单调不减矛盾)，反证法，不妨设中点区间为 $(a,b]$，则

$$\exists N, n>N, \mathbb{P}(\xi<a+\frac{1}{n}) \leq \frac{1}{2} \leq \mathbb{P}(\xi \leq a+\frac{1}{n})$$

上式两边取极限 $n \to +\infty$，$\xi<a+\frac{1}{n}$ 为单调递减集合，由概率上连续性得

$$\mathbb{P}(\xi<a) \leq \frac{1}{2} \leq \mathbb{P}(\xi \leq a)$$

此时 a 符合中点定义，即与中点集合为 (a,b] 矛盾

第 23 题

解：

思路是利用概率减法性质把两个概率相减变为一个

不妨设 $\mathbb{P}(\xi \in I) \geq \mathbb{P}(\eta \in I)$，则

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\xi \in I)-\mathbb{P}(\eta \in I) &\leq \mathbb{P}(\xi \in I)-\mathbb{P}(\eta \in I, \xi \in I) \\
&= \mathbb{P}(\eta \in I, \xi \notin I) \\
&\leq \mathbb{P}(\eta \neq \xi)
\end{aligned}$$

第 24 题

解：

(1) 联合连续 $\Rightarrow$ 边缘连续：
联合分布连续 $\Rightarrow$ 每个分量连续，则显然 $F(x,+\infty)$ 和 $F(+\infty,y)$ 连续

(2) 边缘连续 $\Rightarrow$ 联合连续

边缘连续，则 $\forall x_0, \forall \varepsilon, \exists \delta > 0$，使得当 $|x - x_0| < \delta$ 时，有 $|F_\xi(x) - F_\xi(x_0)| < \varepsilon$ 和 $|F_\eta(x) - F_\eta(x_0)| < \varepsilon$

$\Rightarrow$ 对于 $\forall x_0, y_0$，满足 $|x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta$ 时，有

$$\begin{aligned}
|F(x,y) - F(x_0,y_0)| &\le |F(x,y) - F(x_0,y)| + |F(x_0,y) - F(x_0,y_0)| \\
&= \mathbb{P}(min(x,x_0) < \xi \le max(x,x_0), \eta \le y) + \mathbb{P}(min(y,y_0) < \eta \le max(y,y_0), \xi \le x_0) \\
&\le \mathbb{P}(min(x,x_0) < \xi \le max(x,x_0), \eta \le +\infty) + \mathbb{P}(min(y,y_0) < \eta \le max(y,y_0), \xi \le +\infty) \\
&= |F_\xi(x) - F_\xi(x_0)| + |F_\eta(x) - F_\eta(x_0)| < 2\varepsilon
\end{aligned}$$