概率论第二次作业

黄之豪

20110980005

Oct 28th, 2020

P66 18

设 $A = \{$第 k 张是前 k 张中最大的$\}$， $B = \{$第 k 张是 m$\}$, 显然 B 发生一定能推出 A 发生
$\mathbb{P}(A)$: 从 m 中随机抽 k 个，第 k 个位置放置最大数，前 k-1 个位置随意放置 (排列)。$\mathbb{P}(B)$: 从 m-1 中随机抽 k-1 个，第 k 个位置放置 m，前 k-1 个位置随意放置 (排列)。

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{\binom{m-1}{k-1}(k-1)!}{\binom{m}{k}k!}}{\frac{\binom{m}{k}(k-1)!}{\binom{m}{k}k!}} = \frac{k}{m}$$

P66 20

两独立 Possion 分布随机变量之和也服从 Possion 分布且参数为两者之和

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\xi_1 + \xi_2 = n) &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\xi_1 = k)\mathbb{P}(\xi_1 + \xi_2 = n|\xi_1 = k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\xi_1 = k)\mathbb{P}(\xi_2 = n-k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda_2} \\
&= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_1^k \lambda_2^{n-k}}{k!(n-k)!} \\
&= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}\lambda_1^k \lambda_2^{n-k}}{n!} \\
&= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}
\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(\xi_1 = k|\xi_1 + \xi_2 = n) = \frac{\mathbb{P}(\xi_1 = k, \xi_1 + \xi_2 = n)}{\mathbb{P}(\xi_1 + \xi_2 = n)} = \frac{\mathbb{P}(\xi_1 = k)\mathbb{P}(\xi_1 + \xi_2 = n)}{\mathbb{P}(\xi_1 + \xi_2 = n)} = \frac{\binom{n}{k}\lambda_1^k \lambda_2^{n-k}}{(\lambda_1+\lambda_2)^n}$$

P67 24

起始状态 (状态 A)：白白白黑黑黑
第二步状态 (状态 B)：白白黑黑黑白

从上面可以发现，状态 B 除非同时抽到唯一的黑和唯一的白做交换会回到状态 A(概率值为 1/3 * 1/3 = 1/9)，否则其余情况都是回到状态 B(最终只关心颜色一致，并不关心一致的颜色在哪个盒子)

转移概率矩阵 T 为：

$$\begin{array}{ccc} & A & B \\ A & 0 & 1 \\ B & 1/9 & 8/9 \end{array}$$

n 次之后仍然颜色相同，也即 n 次之后回到状态 A 的概率，这一概率值其实是转移矩阵 n 次幂之后位于 (1,1) 位置 (矩阵的左上角) 的数

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{9} & \frac{8}{9} \end{pmatrix}^n$ 求解则可通过特征分解方法

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{9} & \frac{8}{9} \end{pmatrix}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -\frac{1}{9}$, 对应特征向量为 $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^T$，$\xi_2 = \begin{pmatrix} -9 & 1 \end{pmatrix}^T$

$$T^n = \begin{pmatrix} 1 & -9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{9} \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{9}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} + \frac{9}{10}(-\frac{1}{10})^n & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

因此 n 次之后颜色仍然相同概率为 $\frac{1}{10} + \frac{9}{10}(-\frac{1}{10})^n$

P67 26

掷两个骰子共有 6*6=36 种可能，和为 7 的概率为 6/36；和为 11 的概率 2/36；和为 2，3，12 的概率 1/36，2/36，1/36；和为 6，8 的概率都为 5/36；和为 5，9 的概率都为 4/36；和为 4，10 的概率都为 3/36

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(win) = & \frac{2}{9} && (1)\\
& + 2 \times \frac{5}{36}(\frac{5}{36} + \frac{25}{36} \times \frac{5}{36} + \frac{25}{36} \times \frac{25}{36} \times \frac{5}{36} + \cdots) && (2)\\
& + 2 \times \frac{4}{36}(\frac{4}{36} + \frac{26}{36} \times \frac{4}{36} + \frac{26}{36} \times \frac{26}{36} \times \frac{4}{36} + \cdots) && (3)\\
& + 2 \times \frac{3}{36}(\frac{3}{36} + \frac{27}{36} \times \frac{3}{36} + \frac{27}{36} \times \frac{27}{36} \times \frac{3}{36} + \cdots) && (4)\\
& = \frac{2}{9} + \frac{10}{36} \times \frac{5}{36} \times \frac{1}{1 - \frac{25}{36}} + \frac{8}{36} \times \frac{4}{36} \times \frac{1}{1 - \frac{26}{36}} + \frac{6}{36} \times \frac{3}{36} \times \frac{1}{1 - \frac{27}{36}} \\
& = \frac{244}{495}
\end{aligned}$$

分析：上式 (1) 代表第一次就赢 (即掷到 7，11) 概率为 8/36=2/9，上式 (2) 代表第一次和为 6 或 8，进入下一次投掷，比如第一次和为 6，第二次投掷 5/36 的概率赢，1-5/36-6/36=25/36 的概率进入第三轮投掷，一直持续下去，同理，上式 (3) 代表第一次和为 5 或 9，上式 (4) 代表第一次和为 4 或 10，最终得到赌徒获胜概率为 244/495。