

# Master 272 – M2

## Projet de Gestion Quantitative I

**RéPLICATION ET EXTENSIONS DE Pairs trading with general state space models,  
Zhang (2021) (1)**

Çağla Naz Amiklioğlu, Hugo Rocha Mondragon, Sacha Guerin, Marius Calaque

### Résumé

Ce projet réplique et évalue empiriquement les résultats de (1), qui propose un cadre général de pairs trading fondé sur des modèles espace d'état avec volatilité dépendante de l'état. Nous reproduisons la sélection des seuils optimaux par simulation, estimons les modèles sur données de marché réelles et analysons les performances de différentes stratégies de trading.

Les résultats de simulation confirment la supériorité de la stratégie C en termes de ratio de Sharpe, en particulier lorsqu'elle est combinée au modèle hétéroscédastique. Sur données réelles, cette configuration surperforme les approches classiques sur les paires PEP-KO et EWT-EWH, en améliorant principalement le contrôle du risque plutôt que le rendement brut. Ces résultats se généralisent à un univers élargi de banques américaines cotées au NYSE, aussi bien in-sample qu'out-of-sample, mais ne demeurent pas robustes sur une extension temporelle couvrant des conditions de marché plus récentes.

Le projet propose également plusieurs extensions. Des règles de sortie flexibles montrent que l'optimisation du timing de clôture peut renforcer les performances sous hétéroscédasticité. Des tests roulants mettent en évidence une persistance limitée de la cointégration, motivant une sélection dynamique des paires par apprentissage non supervisé. Enfin, un modèle à changement de régime basé sur le filtre de Kim fournit un indicateur de stress utile pour la gestion du risque, tout en révélant des limites lorsqu'il est combiné à des règles de trading directionnelles.

Dans l'ensemble, ce travail confirme la pertinence du cadre state-space de (1) et souligne l'importance d'adapter les règles de trading au risque conditionnel et à l'instabilité des relations de long terme afin d'améliorer le compromis rendement-risque des stratégies de pairs trading.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Cadre méthodologique de Zhang (2021)</b>	<b>4</b>
2.1	Modèle espace d'état du spread . . . . .	4
2.2	Estimation et filtrage du spread latent . . . . .	5
2.3	Règles de décision et calibrage des seuils . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Résultats de simulation</b>	<b>6</b>
3.1	Cadre de simulation . . . . .	6
3.2	Illustration des règles sur une trajectoire simulée . . . . .	6
3.3	Résultats principaux . . . . .	7
3.4	Conclusion . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Résultats empiriques</b>	<b>8</b>
4.1	Données et construction du spread . . . . .	8
4.2	Estimation des modèles espace d'état (Table 2) . . . . .	9
4.3	Performances des règles de trading (Table 3) . . . . .	9
<b>5</b>	<b>Application aux banques américaines cotées au NYSE</b>	<b>10</b>
<b>6</b>	<b>Extension : règles de sortie flexibles (Stratégies D et E)</b>	<b>11</b>
6.1	Principe : une borne de clôture flexible . . . . .	11
6.2	Stratégies D et E : définitions . . . . .	11
6.3	Illustration (figures) . . . . .	12
6.4	Optimisation par simulation (Table S1) . . . . .	12
<b>7</b>	<b>Extension : persistance temporelle de la cointégration</b>	<b>13</b>
<b>8</b>	<b>Extension : sélection dynamique des paires par apprentissage non supervisé et construction d'un portefeuille dynamique</b>	<b>13</b>
8.1	Sélection des paires : clustering + cointégration . . . . .	14
8.2	Performances in-sample vs out-of-sample . . . . .	14
8.3	Portefeuille dynamique rolling . . . . .	14
<b>9</b>	<b>Extension : modèle à changement de régime via le filtre de Kim</b>	<b>15</b>
9.1	Motivation théorique et Formalisation du modèle MS-SSM . . . . .	15
9.2	L'hétéroscléasticité discrète et conditionnelle . . . . .	16
9.3	La persistance via la Chaîne de Markov . . . . .	16
9.4	Implémentation Algorithmique : Le Filtre de Kim . . . . .	17
9.4.1	L'étape de Collapsing . . . . .	17
9.5	Application au Trading : Bandes Adaptatives . . . . .	17
9.6	Analyse des Résultats Empiriques . . . . .	18
9.7	Validation Statistique et Limites (Test de Kupiec) . . . . .	18

<b>10 Conclusion</b>	<b>18</b>
<b>A Illustration empirique des stratégies ; application sur la paire PEP-KO</b>	<b>21</b>
<b>B Surfaces de performance : recherche sur grille des seuils</b>	<b>21</b>
<b>C RéPLICATION DES TABLES EN ANNEXES (Zhang, 2021) : Banking pairs</b>	<b>27</b>
C.1 Extension temporelle de la réPLICATION (2012–2025) . . . . .	31
<b>D Extension : stratégies D et E</b>	<b>33</b>
<b>E Extension : Persistance temporelle de la cointégration</b>	<b>34</b>
E.1 Illustrations graphiques . . . . .	34
E.2 Tableau de synthèse . . . . .	35
E.3 Performances agrégées . . . . .	35
E.4 Performances par classe d'actifs . . . . .	36
E.5 Paires sélectionnées . . . . .	37
E.6 Illustration du rebalancement . . . . .	37
E.7 Résultat simulation portefeuille . . . . .	38
<b>F Extension : Filtre de Kim</b>	<b>39</b>
F.1 Paramètres estimés du modèle Markov-switching . . . . .	39
F.2 Performances : comparaison avec Zhang (2021) . . . . .	39
F.3 Détection des régimes : illustrations . . . . .	39

# 1 Introduction

Le *pairs trading* est une stratégie d'arbitrage statistique qui consiste à prendre simultanément une position longue sur un actif et une position courte sur un autre, dans le but d'exploiter le retour à la moyenne d'un *spread* entre leurs prix. Sa mise en œuvre repose sur deux briques essentielles : (i) une modélisation fiable de la dynamique du spread (stationnarité, vitesse de retour à la moyenne, volatilité), et (ii) des règles de décision (seuils d'entrée/sortie) capables de transformer ce signal en performance ajustée du risque.

Dans (1), Zhang propose un cadre général fondé sur des modèles *espace d'état* dans lesquels le spread est une variable latente filtrée à chaque date. L'apport principal de l'article est de montrer que l'amélioration de la performance ne vient pas seulement d'une meilleure estimation du spread, mais surtout d'une prise en compte explicite du *risque conditionnel*. Deux spécifications sont centrales : un modèle homoscédastique de référence (*Model I*) et un modèle hétéroscédastique (*Model II*) où la variance dépend de l'état du spread. En combinant ce second modèle avec une règle de trading plus sélective (*Stratégie C*), l'article obtient un gain marqué en ratio de Sharpe sur plusieurs univers d'actifs.

L'objectif de ce projet est double. Premièrement, nous répliquons les résultats clés de (1) : (i) l'optimisation des seuils par simulation, (ii) l'estimation des modèles sur données réelles, et (iii) l'évaluation des performances des stratégies sur les paires PEP-KO et EWT-EWH, puis sur un univers élargi de banques américaines cotées au NYSE. Deuxièmement, nous étudions la robustesse et les limites économiques de ce cadre en proposant plusieurs extensions : (i) des règles de sortie flexibles (stratégies D et E), (ii) une analyse de persistance temporelle de la cointégration via tests roulants, (iii) une sélection dynamique des paires par clustering et rebalancement, et (iv) un modèle à changement de régime via filtre de Kim, utilisé comme indicateur de stress pour adapter les bandes de trading.

Le rapport est organisé comme suit. La Section 2 présente le cadre state-space de Zhang (2021) et les règles de trading. La Section 3 réplique les résultats de simulation. La Section 4 rapporte les résultats empiriques sur les paires principales, et la Section 5 étend l'analyse aux banques américaines et à une extension temporelle jusqu'en 2025. Enfin, les Sections d'extension analysent l'impact de règles de sortie flexibles, de la persistance de la cointégration, de la sélection dynamique des paires, et de l'introduction d'un changement de régime via le filtre de Kim, avant de conclure.

## 2 Cadre méthodologique de Zhang (2021)

Ce rapport réplique l'approche de (1), qui formalise le trading de paires dans un cadre de modèles espace d'état afin d'estimer un *spread latent* (mean-reverting) et d'en déduire des règles de décision. L'apport central est la comparaison d'un modèle de référence homoscédastique (Model I) à une extension hétéroscédastique (Model II), et l'évaluation de trois stratégies de trading (A, B, C).

### 2.1 Modèle espace d'état du spread

(1) propose un cadre espace d'état général pour le trading de paires, où la relation de prix observée est linéaire et le spread latent suit une dynamique potentiellement non linéaire et hétéroscédastique.

Plus précisément, l'équation d'observation s'écrit

$$P_{A,t} = \lambda + \gamma P_{B,t} + x_t + \varepsilon_t,$$

où  $x_t$  représente le spread latent (déviation transitoire autour de la relation de long terme), et  $\varepsilon_t$  un bruit de mesure. L'équation d'état décrit l'évolution du spread latent :

$$x_{t+1} = f(x_t; \theta) + g(x_t; \theta) \eta_t,$$

où  $f$  capture la dynamique conditionnelle (retour à la moyenne) et  $g$  la volatilité conditionnelle. Les spécifications utilisées dans la suite (Model I et Model II) sont des cas particuliers de ce cadre.

Deux spécifications du spread latent sont considérées, comme dans (1).

**Modèle homoscédastique (Model I).** Le Model I suppose que le spread latent suit une dynamique autorégressive linéaire à variance constante. Il constitue le cadre standard de référence : les seuils de décision sont fixes et exprimés en multiples de l'écart-type de long terme.

**Modèle hétéroscléastique (Model II).** Le Model II autorise une variance dépendante de l'état : lorsque le spread s'éloigne de sa moyenne de long terme, sa volatilité conditionnelle augmente. Cette propriété permet d'introduire des bandes de décision adaptatives, particulièrement pertinentes pour la stratégie C.

## 2.2 Estimation et filtrage du spread latent

Les paramètres sont estimés par maximum de vraisemblance à partir des observations. Dans le Model I, la structure linéaire et gaussienne permet l'utilisation du filtre de Kalman standard. Dans le Model II, la variance dépendant de l'état impose un filtre plus général ; nous utilisons le *Quasi Monte Carlo Kalman Filter* (QMCKF) proposé par (1).

Le filtrage fournit à chaque date une estimation du spread latent, utilisée ensuite comme variable de décision pour les règles de trading. Les calculs intensifs (simulation et filtrage) sont accélérés via Numba.

## 2.3 Règles de décision et calibrage des seuils

Les Stratégie A, B et C sont implémentées conformément à (1). Les positions sont déclenchées à partir du spread latent filtré et de seuils ( $U, L$ ) définis autour de sa moyenne de long terme :

- **Stratégie A** : ouverture lorsque le spread franchit un seuil ; clôture au retour à la moyenne.
- **Stratégie B** : comme A, avec possibilité d'inversion directe lorsque le spread franchit le seuil opposé.
- **Stratégie C** : ouverture uniquement lors d'un franchissement *directionnel* depuis l'extérieur vers l'intérieur, ce qui réduit les signaux transitoires et la sur-activité de trading ; dans le cadre hétéroscléastique, les seuils sont liés à la volatilité conditionnelle.

Les seuils optimaux sont sélectionnés par recherche sur grille (cadre de simulation), en maximisant soit le *rendement cumulé* (CR), soit le *ratio de Sharpe* (SR). Sauf mention contraire, les

coûts de transaction sont fixés à **20 points de base** par actif et par transaction, conformément à l'article original ; le taux sans risque est supposé nul.

### 3 Résultats de simulation

Avant l'application sur données réelles, nous validons la mécanique des règles de trading dans un cadre contrôlé, en simulant un spread mean-reverting comme dans (1). Ce cadre permet (i) d'illustrer clairement les signaux A–C et (ii) d'évaluer leurs performances moyennes après optimisation des seuils.

#### 3.1 Cadre de simulation

Dans un premier temps, nous utilisons un spread simulé afin de disposer d'un environnement sans bruit microstructurel et totalement maîtrisé. À titre illustratif, certaines figures reposent sur un processus CIR (Cox–Ingersoll–Ross), défini par  $dS_t = \kappa(\theta - S_t) dt + \sigma\sqrt{S_t} dW_t$ . Ce choix garantit la positivité du spread et introduit une volatilité dépendante du niveau, ce qui produit des trajectoires现实的 tout en restant simples à simuler.

Ce cadre simulé sert uniquement à visualiser la logique des stratégies et à comprendre le rôle des seuils. Pour la réPLICATION quantitative des résultats de (1), les trajectoires du spread latent sont ensuite générées à partir des spécifications de l'article (modèles 1–5), incluant des dynamiques homoscédastiques et hétéroscédastiques. Pour chaque modèle, les stratégies A, B et C sont appliquées mécaniquement avec des seuils optimisés par recherche sur grille, et les performances sont évaluées via le rendement cumulé (CR) et le ratio de Sharpe annualisé (SR), moyennés sur un grand nombre de trajectoires.

#### 3.2 Illustration des règles sur une trajectoire simulée

Avant de comparer les performances agrégées (Table 1), nous illustrons les trois règles sur une trajectoire simulée, conformément à la démarche de (1).



FIGURE 1 – Stratégie A sur trajectoire simulée.



FIGURE 2 – Stratégie B sur trajectoire simulée.

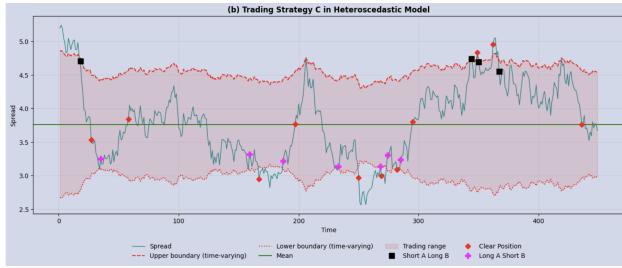


FIGURE 3 – Stratégie C sur trajectoire simulée (bornes variables, modèle hétérosclélastique).

Les Figures 1–3 mettent en évidence la différence de logique entre des bandes fixes (A/B) et des bornes adaptatives en hétérosclélasticité (C).

### 3.3 Résultats principaux

Le Tableau 1 reporte la réplication de la Table 1 de (1). Dans l’ensemble, les résultats sont proches de l’article original, tant en ordres de grandeur qu’en hiérarchie des performances.

Trois points ressortent. Premièrement, la **stratégie C** domine généralement A et B en ratio de Sharpe, ce qui confirme l’intérêt de la règle de ré-entrée et du contrôle du risque en cas de breakout. Deuxièmement, les **meilleures performances** apparaissent dans le cadre **hétérosclélastique** (modèle 3), où l’adaptation des seuils au régime de volatilité améliore le compromis rendement–risque. Troisièmement, les **seuils optimaux** dépendent fortement de la spécification et de l’objectif d’optimisation (CR vs SR), ce qui souligne l’importance de calibrer les règles de trading de manière cohérente avec l’objectif de gestion.

TABLE 1 – RéPLICATION de la Table 1 de Zhang (2021) : règles de trading optimales

Modèle	Stratégie	$U_{\text{CR}}^*$	$L_{\text{CR}}^*$	CR	$U_{\text{SR}}^*$	$L_{\text{SR}}^*$	SR
Model 1	A	0.7	-0.7	0.3895	1.2	-1.2	0.1009
Model 1	B	0.6	-0.6	0.4318	0.6	-0.6	0.0896
Model 1	C	1.1	-1.1	0.2983	0.9	-0.9	0.1303
Model 2	A	0.7	-0.7	0.5583	1.1	-1.1	0.1459
Model 2	B	0.6	-0.6	0.6322	0.5	-0.6	0.1320
Model 2	C	1.2	-1.2	0.3280	1.2	-1.1	0.1429
Model 3	A	0.2	-0.2	3.9971	0.2	-0.3	0.0771
Model 3	B	0.1	-0.1	4.0676	0.1	-0.1	0.0756
Model 3	C	0.5	-0.5	4.2953	0.4	-0.4	<b>0.2064</b>
Model 4	A	0.6	-0.6	0.3817	1.1	-1.1	0.1016
Model 4	B	0.5	-0.5	0.4173	0.5	-0.5	0.0891
Model 4	C	1.1	-1.1	0.2139	1.2	-1.2	0.1024
Model 5	A	0.6	-0.7	0.5327	1.1	-1.1	0.1447
Model 5	B	0.5	-0.6	0.5962	0.4	-0.5	0.1286
Model 5	C	1.2	-1.2	0.2268	1.4	-1.4	0.1176

Note : Conformément à (1), les modèles 1, 2, 4 et 5 correspondent à des processus de spread simulés sous une spécification homoscédastique (Model I), tandis que le modèle 3 est généré sous une spécification hétérosclélastique (Model II), dans laquelle la variance dépend de l'état du spread.

### 3.4 Conclusion

Les écarts quantitatifs par rapport à (1) restent limités et ne modifient pas les conclusions. Ils peuvent provenir de choix numériques (grille de seuils, paramétrisation des simulations, tirages aléatoires). Dans l'ensemble, la réPLICATION confirme le résultat central : **l'hétérosclélastité, combinée à la stratégie C, améliore le compromis rendement–risque des stratégies de trading de paires.**

## 4 Résultats empiriques

Conformément à (1), l'analyse empirique procède en deux temps : (i) construction du spread à partir des données de marché, estimation des modèles espace d'état (Table 2), puis (ii) évaluation des performances des stratégies A, B et C (Table 3).

### 4.1 Données et construction du spread

L'article de (1) s'appuie sur des prix journaliers ajustés des dividendes et des fractionnements. Dans cette réPLICATION, nous retenons les prix de clôture journaliers PX\_LAST issus de *Bloomberg*. Ce choix repose sur des tests préliminaires sur différentes bases, pour lesquels cette construction s'est révélée la plus stable et la plus cohérente empiriquement. Des écarts quantitatifs mineurs peuvent en résulter, sans remettre en cause les conclusions qualitatives.

Trois ensembles d'actifs sont considérés, conformément à (1) :

- la paire d'actions **PEP–KO** (PepsiCo et Coca-Cola) ;
- la paire d'ETF **EWT–EWH**, représentant respectivement Taïwan et Hong Kong ;
- un univers de **banques américaines cotées au NYSE** (5 plus grandes capitalisations et 5 plus petites), afin d'évaluer la robustesse sur un ensemble plus large de paires.

Pour chaque paire  $(A, B)$ , le spread observé est construit à partir des log-prix :

$$y_t = \log(P_{A,t}) - \beta \log(P_{B,t}),$$

où  $\beta$  est le ratio de couverture estimé par régression linéaire sur la période considérée. Le spread observé constitue l'entrée du modèle espace d'état ; le spread latent filtré sert ensuite de variable de décision.

## 4.2 Estimation des modèles espace d'état (Table 2)

La Table 2 présente les estimations des paramètres des modèles homoscédastique (Model I) et hétéroscléastique (Model II) obtenues sur les paires PEP–KO et EWT–EWH. Ces résultats sont comparés à (1) et constituent une étape préalable à l'analyse des performances.

TABLE 2: Estimation des paramètres des modèles espace d'état (PEP–KO et EWT–EWH)

	Panel A : PEP–KO		Panel B : EWT–EWH	
	Model I	Model II	Model I	Model II
$\gamma$	1.9964	1.9964	1.0062	1.0062
$\sigma_\varepsilon^2$	0.000000	0.005000	0.000000	0.005000
$\theta_0$	-0.0512	-0.1000	0.0062	0.0455
$\theta_1$	0.9824	0.9641	0.9816	0.8500
$q_{\text{base}}$	0.000197	0.000001	0.000077	0.000001
$q_{\text{het}}$	—	0.0500	—	0.0500

Pour PEP–KO, le ratio de couverture est voisin de deux et le spread latent est très persistant dans les deux spécifications, ce qui implique un retour à la moyenne lent. Pour EWT–EWH, la persistance est proche de l'unité dans le modèle homoscédastique et diminue dans le modèle hétéroscléastique, la volatilité dépendante de l'état absorbant une partie de la dynamique. Dans les deux cas, les paramètres hétéroscléastiques sont positifs, indiquant que l'incertitude augmente lorsque le spread s'éloigne de son niveau d'équilibre. Les écarts avec (1) peuvent s'expliquer par la construction des données (prix PX\_LAST) et par des choix numériques de filtrage, sans affecter l'interprétation économique.

## 4.3 Performances des règles de trading (Table 3)

La Table 3 reporte les performances empiriques des stratégies A, B et C. Les indicateurs incluent le **rendement annualisé**, la **volatilité annualisée**, le **ratio de Sharpe annualisé**, ainsi que, lorsque pertinent, le **ratio de Calmar** et le **pain index**. Le taux sans risque est supposé nul.

TABLE 3: Performances annualisées des stratégies de trading de paires

Stratégie et Modèle	Return	Std Dev	Sharpe	Calmar	Pain index
<b>Panel A : PEP–KO</b>					
Strategy A, Model I	0.0456	0.1189	0.2152	0.2272	0.0202
Strategy B, Model I	0.1916	0.2240	0.7662	0.9548	0.0499
Strategy C, Model I	0.1846	0.1310	1.2563	2.0252	0.0159
Strategy A, Model II	0.0372	0.0616	0.2795	0.5831	0.0089
Strategy B, Model II	0.1897	0.2216	0.7658	0.9484	0.0484
Strategy C, Model II	<b>0.1812</b>	<b>0.1259</b>	<b>1.2807</b>	<b>1.9161</b>	<b>0.0137</b>
<b>Panel B : EWT–EWH</b>					
Strategy A, Model I	0.0521	0.0873	0.3677	0.4195	0.0127
Strategy B, Model I	0.0936	0.1399	0.5258	0.6233	0.0396
Strategy C, Model I	0.0974	0.0567	1.3648	2.8201	0.0077
Strategy A, Model II	0.0579	0.0655	0.5784	0.5978	0.0132
Strategy B, Model II	0.0675	0.0909	0.5225	0.5006	0.0369
Strategy C, Model II	<b>0.0562</b>	<b>0.0376</b>	<b>0.9637</b>	<b>1.6461</b>	<b>0.0095</b>

## 5 Application aux banques américaines cotées au NYSE

Nous répliquons l’analyse de (1) sur un univers de banques américaines cotées au NYSE, en distinguant les paires composées exclusivement de banques de grande capitalisation, de banques de petite capitalisation, ainsi que les paires mixtes. L’objectif est double : vérifier la robustesse des résultats obtenus sur des paires individuelles et confirmer empiriquement les conclusions de Zhang sur un échantillon plus large et hétérogène.

Les résultats reportés dans les Tables 4 à 11 en Annexe C sont pleinement cohérents avec ceux de (1). En particulier, nous retrouvons que la combinaison du modèle hétéroscédastique (Model II) et de la stratégie C surperforme systématiquement le benchmark standard (Model I avec stratégie A), tant en termes de rendement annualisé que de ratio de Sharpe, pour la majorité des paires considérées.

Premièrement, les gains de performance sont déjà visibles pour les paires de banques de grande capitalisation (Table 6, Panel A), mais restent relativement modérés en moyenne. À l’inverse, comme dans (1), les paires composées de banques de petite capitalisation (Table 4) affichent des améliorations nettement plus marquées, avec des ratios de Sharpe souvent multipliés par deux, voire davantage. Ce résultat confirme que la modélisation hétéroscédastique est particulièrement adaptée à des spreads plus volatils et bruités.

Deuxièmement, les paires mixtes associant grandes et petites banques (Table 5) présentent les gains relatifs les plus élevés, tant en rendement qu’en Sharpe, ce qui correspond exactement aux conclusions de Zhang. Ces paires combinent des dynamiques de prix hétérogènes et bénéficient pleinement de la flexibilité du modèle state-space hétéroscédastique.

Troisièmement, l’analyse in-sample et out-of-sample (Tables 6 à 11) met en évidence une

amélioration robuste du compromis rendement–risque. En échantillon, les gains sont généralisés et importants (Tables 6, 8 et 10), tandis qu’hors échantillon, bien que les rendements moyens diminuent, la stratégie basée sur le Model II conserve des ratios de Sharpe significativement supérieurs à ceux du benchmark (Tables 7, 9 et 11). Ce point est central : comme dans (1), l’approche hétéroscédastique améliore principalement la gestion du risque plutôt que la seule performance brute.

Dans l’ensemble, ces résultats confirment que notre implémentation reproduit fidèlement les conclusions empiriques de Zhang (2021). Ils constituent une base solide pour l’extension proposée dans les sections suivantes.

**Extension temporelle de la réPLICATION.** Bien que les performances hors échantillon apparaissent plus hétérogènes sur la période récente, la modélisation hétéroscédastique demeure globalement avantageuse. L’augmentation de la volatilité observée entre 2020 et 2025 accroît les fluctuations du spread et entraîne des franchissements de seuils plus fréquents, ce qui se traduit par une intensification de l’activité de trading. Cette fréquence accrue génère davantage d’opportunités d’arbitrage et contribue, dans la majorité des cas, à de meilleures performances par rapport à l’étude entre 2012 et 2019, comme le montre la table 16

## 6 Extension : règles de sortie flexibles (Stratégies D et E)

Dans (1), les stratégies A, B et C diffèrent principalement par leurs **règles d’entrée**, tandis que la **règle de sortie** reste relativement simple (retour du spread vers un niveau central, typiquement la moyenne). L’extension proposée dans l’Online Appendix (2) pose la question suivante : *que gagne-t-on à rendre la règle de sortie elle-même flexible et optimisable, à règles d’entrée inchangées ?*

### 6.1 Principe : une borne de clôture flexible

On considère un spread latent  $x_t$  (observé ou filtré) et un niveau central  $C$ . Les stratégies D et E introduisent un paramètre  $\delta \in [-0.5, 1]$  qui définit un **décalage de sortie**

$$\Delta = \delta(U - C), \quad C_- = C - \Delta, \quad C_+ = C + \Delta,$$

où  $U$  (resp.  $L$ ) désigne la borne supérieure (resp. inférieure) d’entrée. Dans l’appendice de simulation, on impose en plus la symétrie  $L = 2C - U$  (et en pratique  $C \approx 0$ , donc  $L \approx -U$ ).

Intuition : au lieu de fermer systématiquement *au centre*, on ferme lorsque le spread franchit un *niveau central déplacé*  $C_-$  (position short) ou  $C_+$  (position long). Cela modifie la durée de détention et la fréquence des transactions, donc le couple rendement–risque.

### 6.2 Stratégies D et E : définitions

Les stratégies D et E partagent la même règle de **sortie flexible**, mais se distinguent par leur **règle d’entrée**, héritée respectivement des stratégies A et C.

**Stratégie D (extension de A : entrée aux bornes, sortie flexible).** La règle d'entrée est identique à celle de la stratégie A : une position *short* est ouverte lorsque  $x_t \geq U$ , tandis qu'une position *long* est ouverte lorsque  $x_t \leq L$ . La nouveauté réside dans la règle de sortie : la position *short* est clôturée lorsque  $x_t$  franchit  $C_-$  à la baisse (crossing down), et la position *long* est clôturée lorsque  $x_t$  franchit  $C_+$  à la hausse (crossing up).

**Stratégie E (extension de C : ré-entrée + stop-loss, sortie flexible).** La règle d'entrée reprend celle de la stratégie C : une position *short* est ouverte lorsque le spread *ré-entre* dans la bande par  $U$  (franchissement de  $U$  de haut en bas), et une position *long* est ouverte lorsqu'il *ré-entre* par  $L$  (franchissement de  $L$  de bas en haut). La prise de profit suit la même logique de sortie flexible que pour D : la position *short* est clôturée sur franchissement de  $C_-$  de haut en bas, et la position *long* sur franchissement de  $C_+$  de bas en haut. Enfin, comme dans la stratégie C, un *stop-loss* est déclenché si le spread franchit à nouveau la borne d'entrée dans le « mauvais sens » (breakout).

**Cas particuliers (interprétation de  $\delta$ ).** Lorsque  $\delta = 0$ , on a  $\Delta = 0$  et donc  $C_- = C_+ = C$ , ce qui implique que la stratégie D se réduit à A et que la stratégie E se réduit à C. À l'opposé, lorsque  $\delta = 1$ , on obtient  $\Delta = U - C$  : la sortie est alors déplacée d'une distance égale à celle séparant le centre des bornes d'entrée, correspondant au cas limite discuté dans l'appendice.

### 6.3 Illustration (figures)

Les Figures 11 et 12 illustrent, sur une trajectoire de spread, l'effet du paramètre  $\delta$  sur le timing de clôture : à règle d'entrée identique, la règle de sortie flexible modifie sensiblement la durée des trades et la fréquence des transactions.

### 6.4 Optimisation par simulation (Table S1)

L'Online Appendix propose une sélection optimale de  $(U, \delta)$  par **simulation Monte Carlo**, en gardant la structure des règles (D ou E) fixée. Pour chaque modèle de dynamique du spread (A1, A2, A3), on simule  $N$  trajectoires de longueur  $T$ , puis on évalue la performance de la stratégie sur une grille :

$$U \in \{0.1\sigma, \dots, 2.5\sigma\}, \quad \delta \in \{-0.5, -0.4, \dots, 1.0\},$$

avec coûts de transaction calibrés comme dans (1). On retient ensuite, séparément, le couple  $(U, \delta)$  maximisant le **cumulative return** (CR) et celui maximisant le **Sharpe ratio** (SR).

Dans notre implémentation, on utilise les correspondances :

$$A1 \equiv \text{Modèle 1}, \quad A2 \equiv \text{Modèle 3}, \quad A3 \equiv \text{Modèle 5},$$

et l'on reporte les résultats dans la Table 17.

Premièrement, l'optimal  $\delta$  de la stratégie E est très souvent proche de 1, ce qui suggère que la sortie « déplacée » tend à se confondre avec un niveau extrême dans les scénarios simulés. Deuxièmement, l'hétéroscléasticité (modèle A2) amplifie fortement les performances en niveau

(CR), et la stratégie E y obtient le meilleur couple rendement–risque (SR élevé), indiquant que la flexibilité de sortie est particulièrement utile lorsque la volatilité du spread varie dans le temps.

## 7 Extension : persistance temporelle de la cointégration

La littérature montre que la cointégration entre deux actifs n'est pas nécessairement stable dans le temps (3). Or, les stratégies de pairs trading supposent un spread stationnaire et mean-reverting. Dans le modèle state-space de Zhang (2021), le spread est explicitement modélisé comme un processus autorégressif stable, ce qui revient à supposer la **cointégration des prix**. Si cette relation disparaît, le spread cesse d'être mean-reverting et la stratégie perd son fondement statistique. D'ailleurs, les valeurs estimées de  $\theta_1$ , proches de 1, suggèrent déjà un retour à la moyenne faible.

Nous évaluons donc la **persistance temporelle de la cointégration** via des tests roulants inspirés de Clegg et Krauss (2018).

**Méthodologie.** Des fenêtres roulantes de 252 jours (pas 63 jours) sont utilisées. Sur chaque période d'entraînement, le hedge ratio  $\beta$  est estimé par OLS (Engle–Granger), puis un test ADF est appliqué au spread. La stationnarité est ensuite testée sur la fenêtre suivante selon : (i) **refit** : ré-estimation de  $\beta$  (biais look-ahead) ; (ii) **out-of-sample (OOS)** :  $\beta$  figé (cas réaliste). La persistance correspond à la proportion de fenêtres où une paire cointégrée en formation ( $p < 5\%$ ) reste cointegrée en test.

**Résultats.** Sur quatre paires (PEP–KO, EWT–EWH, JPM–BAC, WFC–C) entre 2012 et 2019, les taux OOS varient entre

$$11\% \text{ et } 33\% \quad (\text{moyenne } \approx 23\%),$$

bien en dessous du seuil de viabilité usuel (50–60%). La majorité des relations détectées disparaît donc rapidement. Les graphiques de  $p$ -values montrent des alternances fréquentes entre stationnarité et ruptures, confirmant le caractère local et instable de la cointégration.

**Implications pour(1).** Cette instabilité justifie des approches adaptatives : l'estimation dynamique via filtre de Kalman et des seuils variables permet d'ajuster en continu le hedge ratio et la volatilité, améliorant la robustesse face aux ruptures structurelles.

**Conclusion.** La cointégration historique ne garantit pas la performance future ; les hedge ratios statiques et tests ponctuels sont fragiles. Cela motive l'usage de modèles state-space adaptatifs et d'une sélection dynamique des paires.

## 8 Extension : sélection dynamique des paires par apprentissage non supervisé et construction d'un portefeuille dynamique

Cette extension complète permet entre autre d'ajouter une étape explicite de **sélection ex ante des paires**. Le papier de référence (1) modélise dynamiquement le spread *conditionnellement*

à une paire donnée, mais ne propose pas de méthode systématique de formation des paires. Nous avons d'abord cherché à faire cette sélection dans 3 univers de classe d'actifs via une procédure de sélection non supervisée.

## 8.1 Sélection des paires : clustering + cointégration

La sélection suit deux étapes :

1. **Clustering** des actifs à partir de séries normalisées afin de regrouper des dynamiques proches et réduire l'espace de recherche ;
2. **Tests de cointégration intra-cluster** (Engle–Granger), avec exclusion des séries quasi parfaitement corrélées. Pour les cryptos, le seuil est relâché ( $\alpha = 0.15$ ) afin de conserver suffisamment de candidats.

La procédure est appliquée séparément aux univers *crypto*, *commodities* et *equities tech*. Les paires retenues sont ensuite évaluées via les modèles de Zhang.

## 8.2 Performances in-sample vs out-of-sample

Trois paires par classe sont sélectionnées. Les modèles I (homoscédastique) et II (hétéroscédistique) sont estimés sur 2019–2023 puis évalués hors échantillon sur 2024–2025 sans ré-estimation.

Au regard du tableau de résultat en annexe (table 19, les Sharpe ratios sont élevés en in-sample (1.5-2.1) mais chutent proche de zéro, voire négatifs out of sample ; seule une paire (XRP–XMR) reste légèrement positive. Le Model II surperforme en in-sample (Sharpe moyen 1.56) mais perd presque tout son avantage en OOS, tandis que le Model I devient négatif.

Cette dégradation s'explique par : instabilité des relations de cointégration, changements de régime macro-financier, sensibilité des seuils calibrés in-sample, biais de sélection résiduel et limites des tests statistiques. Ainsi, la combinaison « sélection + Zhang » stabilise les pertes mais ne génère pas d'alpha robuste hors échantillon.

## 8.3 Portefeuille dynamique rolling

Pour améliorer la robustesse, nous construisons un **portefeuille multi-actifs dynamique** où les paires sont périodiquement re-sélectionnées.

**Cadre :** Univers : 21 cryptos, 29 commodities, 44 tech. Backtest : 2023–2024 (afin d'avoir une période relativement stable, sans grosse crise) Tous les deux mois, nous : (i) re-sélectionnons au plus 3 paires par classe sur une fenêtre rolling de 252 jours, (ii) estimons les paramètres sur la même fenêtre, (iii) tradons jusqu'au rééquilibrage suivant. Portefeuille équipoisé, coûts de transaction 20 bps. Cela permet de garantir au maximum la cointégration dans les paires d'actifs sélectionnés.

Par ailleurs, les paires désélectionnées ne prennent plus de nouvelles positions mais ferment naturellement leurs trades ouverts.

### Comparaison des moteurs.

- **Benchmark : Model I + Strategy A** (seuils fixes) ;

- **Avancé : Model II + Strategy C** (volatilité conditionnelle, seuils adaptatifs, règle de maintien liée à la demi-vie).

**Résultats portefeuille.** La stratégie C (Model II) surperforme le benchmark A (Model I) en performance absolue et ajustée du risque : *Total Return* 11.86% vs 6.43% et *Annualized Return* 5.56% vs 3.05%. Cette surperformance s'accompagne d'un risque plus élevé (volatilité 8.32% vs 4.28%, drawdown -8.11% vs -5.34%), mais le *Sharpe* reste supérieur (0.43 vs 0.25), ce qui indique une meilleure efficacité rendement/risque globale.

En gestion active, la surperformance correspond à un **alpha annualisé** de 2.68% pour un **tracking error** de 8.62%, soit un **Information Ratio**  $IR = 0.31$ . La stratégie génère donc bien de la valeur ajoutée, mais d'ampleur modérée.

**Analyse par la loi fondamentale.** Selon la loi fondamentale,

$$IR \approx IC\sqrt{BR},$$

où l'IC mesure la capacité prédictive du signal et la BR le nombre de paris indépendants. L'IC, défini comme la corrélation entre le forecast hebdomadaire du portefeuille et le rendement actif futur  $r_t^C - r_t^A$ , vaut 0.136, indiquant un signal directionnel positif mais bruité. La breadth est approximée par le nombre de trades annuels ( $BR = 18.5$ ).

Ces valeurs impliquent un IR théorique de 0.586, supérieur à l'IR observé (0.311). L'écart suggère que les paris ne sont pas réellement indépendants (trades corrélés, expositions communes, ré-entrées sur les mêmes régimes) et/ou que l'IC est instable dans le temps. La breadth effective implicite,

$$(IR/IC)^2 \approx 5,$$

indique qu'en pratique le portefeuille ne réalise qu'environ cinq paris indépendants par an.

**Conclusion.** Le rebalancing dynamique et la modélisation hétéroscléastique améliorent donc la performance ajustée du risque, mais l'alpha reste limité par un signal peu informatif et une diversification effective faible. Nous voyons tout de même une superperformance de la stratégie C modèle II comparée à la stratégie A modèle I.

## 9 Extension : modèle à changement de régime via le filtre de Kim

### 9.1 Motivation théorique et Formalisation du modèle MS-SSM

La modélisation du spread dans une stratégie de *Pairs Trading* repose traditionnellement sur l'hypothèse d'un processus de retour à la moyenne stationnaire. Si les travaux récents de (1) ont permis d'intégrer l'hétéroscléasticité via des modèles de diffusion continus (tels que le modèle de racine carrée ou des structures de type GARCH), ces approches postulent une évolution fluide et graduelle de la volatilité. Or, l'analyse empirique des séries financières révèle une réalité plus complexe : les marchés sont structurellement sujets à des **ruptures structurelles brutales**.

Ces ruptures, souvent déclenchées par des chocs exogènes tels que des crises de liquidité ou des annonces macroéconomiques majeures, ne se manifestent pas par une dérive lente de la variance, mais par un **basculement de paradigme instantané**. Dans un tel contexte, un modèle à volatilité continue risque de réagir avec un retard préjudiciable (inertie de l'estimation), là où une approche par changement d'état permet une adaptation immédiate du profil de risque dès la détection statistique du nouveau régime.

Pour capturer cette nature bimodale, nous formalisons un modèle *Markov-Switching State-Space* (MS-SSM) développé par (5). Ce cadre théorique suppose que la dynamique du spread transite entre  $M$  états inobservables, ou "régimes", notés  $S_t$ . Dans notre étude, nous restreignons l'espace des phases à deux régimes ( $S_t \in \{1, 2\}$ ) afin de garantir la parcimonie du modèle et la stabilité de l'estimation :

- **Régime 1 ( $S_t = 1$ ) - État de "Convergence Calme"** : Ce régime correspond aux périodes de fonctionnement efficient du marché. La variance de l'innovation est faible ( $Q_1$ ), et le spread manifeste une forte propension à revenir vers son équilibre de long terme.
- **Régime 2 ( $S_t = 2$ ) - État de "Stress Structurel"** : Ce régime capture les phases de dé-corrélation où le lien statistique entre les deux actifs se distend. La variance y est significativement plus élevée ( $Q_2 \gg Q_1$ ), reflétant une incertitude accrue qui invalide souvent les signaux de trading classiques.

La structure mathématique du modèle s'articule autour d'un système d'équations couplées dépendantes de l'état discret  $S_t$  :

$$x_t = \theta_0 + \theta_1 x_{t-1} + \eta_t, \quad \eta_t \sim \mathcal{N}(0, Q_{S_t}) \quad (\text{Équation d'état}) \quad (1)$$

$$y_t = x_t + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, r) \quad (\text{Équation d'observation}) \quad (2)$$

Où  $x_t$  représente le spread latent (l'état) et  $y_t$  la série temporelle observée des prix de la paire. La spécification de ce système repose sur deux innovations stochastiques majeures :

## 9.2 L'hétéroscédasticité discrète et conditionnelle

Contrairement aux modèles de Zhang où la variance est une fonction continue de l'état, ici la matrice de variance-covariance de l'innovation  $Q_{S_t}$  est une variable aléatoire discrète. Ce choix permet au modèle de "commuter" instantanément entre un régime de précision et un régime de prudence. Cette flexibilité est cruciale pour la gestion du risque : elle autorise une dilatation immédiate des bandes de confiance lors d'un choc, évitant ainsi des signaux d'entrée prématurés dans un marché devenu instable.

## 9.3 La persistance via la Chaîne de Markov

Le basculement entre les états n'est pas aléatoire, mais suit une logique de mémoire de court terme régie par une chaîne de Markov d'ordre 1. La dynamique de transition est définie par la

matrice stochastique  $\mathbf{P}$  :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(S_t = 1|S_{t-1} = 1) & P(S_t = 2|S_{t-1} = 1) \\ P(S_t = 1|S_{t-1} = 2) & P(S_t = 2|S_{t-1} = 2) \end{pmatrix} \quad (3)$$

Cette matrice est le cœur de la dynamique temporelle : elle permet de quantifier la **persistance des régimes**. Un coefficient  $p_{22}$  élevé indique que si le spread entre dans une phase de stress, il est fort probable qu'il y demeure sur plusieurs périodes consécutives. L'enjeu de l'estimation sera alors de calculer la probabilité filtrée  $P(S_t = j|\mathcal{Y}_t)$  afin d'ajuster l'exposition du portefeuille en temps réel.

## 9.4 Implémentation Algorithmique : Le Filtre de Kim

L'estimation exacte de ce modèle se heurte au problème de *Path Dependence* : la distribution optimale à l'instant  $t$  dépend de tout l'historique des régimes, générant  $2^t$  trajectoires possibles, ce qui est computationnellement intractable.

Nous avons donc implémenté l'algorithme d'approximation de (5). Notre code exécute à chaque pas de temps une procédure en quatre étapes, dont la plus critique est le **Collapsing** (réduction de mélange).

### 9.4.1 L'étape de Collapsing

Pour éviter l'explosion combinatoire, l'algorithme réduit les  $M^2 = 4$  densités a posteriori (correspondant aux transitions  $i \rightarrow j$ ) en  $M = 2$  densités finales. Cette réduction ne se fait pas par une simple moyenne, mais par un *matching* des deux premiers moments. Concrètement, la variance  $\hat{P}_t^{(j)}$  calculée inclut explicitement un terme de dispersion des moyennes :

$$\hat{P}_t^{(j)} = \sum_{i=1}^2 \tilde{\mu}_{i,j} \left[ P_t^{(i,j)} + (\hat{x}_t^{(i,j)} - \hat{x}_t^{(j)}) (\hat{x}_t^{(i,j)} - \hat{x}_t^{(j)})^\top \right]$$

Ce terme quadratique est fondamental : il augmente mécaniquement l'incertitude estimée lorsque les filtres parallèles divergent. En période de transition incertaine, le modèle "gonfle" la variance pour refléter ce risque de modèle, ce qui est une propriété désirable pour la gestion du risque.

## 9.5 Application au Trading : Bandes Adaptatives

Le filtre fournit une probabilité de régime  $P(S_t = 2|\mathcal{Y}_t)$ . Nous exploitons ce signal pour rendre les seuils de trading dynamiques. L'objectif est de filtrer le "mauvais bruit" :

$$U_t = \mu + n_\sigma \sigma \cdot (1 + \alpha \cdot P(S_t = 2|\mathcal{Y}_t))$$

$$L_t = \mu - n_\sigma \sigma \cdot (1 + \alpha \cdot P(S_t = 2|\mathcal{Y}_t))$$

Lorsque la probabilité de stress augmente, les bandes s'écartent, suspendant temporairement les entrées en position sur des mouvements erratiques.

## 9.6 Analyse des Résultats Empiriques

L’application du modèle sur les paires PEP-KO et EWT-EWH révèle une dichotomie de performance instructive :

**1. Amélioration des stratégies A et B :** Sur les stratégies classiques, le filtre de Kim améliore significativement le ratio de Sharpe. En identifiant les régimes de haute variance  $Q_2$ , le modèle évite d’ouvrir des positions ”contre la tendance” lors des chocs violents, réduisant ainsi les *drawdowns*.

**2. L’échec structurel de la Stratégie C :** La stratégie C, pourtant performante avec le modèle Zhang, échoue ici. L’analyse révèle une **incohérence temporelle**. La stratégie C repose sur la détection séquentielle d’un *breakout* ( $t - 1$ ) suivi d’un retour ( $t$ ). Avec des bandes adaptatives, il arrive fréquemment que  $U_t > U_{t-1}$  lors d’un pic de stress. Le prix peut alors ”réintégrer” les bandes non pas parce qu’il a bougé, mais parce que les bandes se sont écartées. Ce phénomène détruit le signal de trading valide, rendant la stratégie inopérante.

## 9.7 Validation Statistique et Limites (Test de Kupiec)

Pour valider la robustesse de nos estimations de variance, nous avons conduit un test de couverture inconditionnelle de la Value-at-Risk (VaR) à 95%.

L’analyse des résultats révèle deux comportements opposés selon la nature des paires :

- **PEP-KO (Sous-estimation du risque)** : Le test rejette l’hypothèse nulle avec un taux de violations excessif ( $\approx 50\%$  contre 5% attendus). Le modèle échoue ici à capturer les queues de distribution lors des chocs. L’approximation gaussienne inhérente au filtre écrase la leptokurticité réelle des rendements en période de crise, conduisant à une VaR trop optimiste.
- **EWT-EWH (Sur-protection)** : À l’inverse, pour cette paire d’ETF, le taux de violations observé n’est que de 1,74%, bien en deçà du seuil théorique de 5%. Le modèle se révèle ici sur-protecteur (trop conservateur). Le filtre identifie trop fréquemment des régimes de stress ou estime une variance de régime  $Q_2$  très élevée, ce qui dilate excessivement l’enveloppe de la VaR.

Ces résultats mettent en lumière une limite théorique fondamentale de l’approximation de Kim. La distribution réelle du spread en régime de commutation est un **mélange de gaussiennes**, souvent multimodal et leptokurtique. L’étape de *Collapsing*, bien que correcte sur la variance totale, force cette distribution complexe à rentrer dans une **gaussienne unique**.

Cette approximation lissee les extrêmes : elle sous-estime le risque quand la distribution est très pointue (PEP-KO) et peut le surestimer quand la variance du second régime est très large (EWT-EWH). Ainsi, bien que le filtre de Kim soit un excellent outil de *signal* (pour le timing), il s’avère être un estimateur de risque prudentiel (VaR) imparfait sans ajustements supplémentaires.

## 10 Conclusion

La réPLICATION CONFIRME LE RÉSULTAT CENTRAL DE L’ARTICLE : LA COMBINAISON **Model II (hétéroscédastique) + stratégie C** AMÉLIORE LE COMPROMIS RENDEMENT-RISQUE PAR RAPPORT AU BENCHMARK **Model I**

+ **stratégie A.** Le gain observé provient principalement d'une **meilleure gestion du risque** (volatilité et drawdowns plus contenus, timing d'entrée plus sélectif) plutôt que d'une augmentation systématique du rendement brut. Sur l'univers des banques, la surperformance est particulièrement marquée pour les paires impliquant des petites capitalisations, ce qui suggère que l'approche hétéroscédastique est plus utile lorsque les spreads sont plus bruités et plus instables.

Les extensions apportent toutefois un éclairage important sur les conditions de validité de ces résultats. Premièrement, les stratégies à **sortie flexible** (D et E) montrent que l'optimisation du *timing* de clôture peut renforcer la performance lorsque la volatilité est dépendante de l'état, en ajustant le trade-off entre fréquence de trading et captation du retour à la moyenne. Deuxièmement, les tests roulants mettent en évidence une **persistent limitée de la cointégration** hors échantillon, ce qui fragilise les approches statiques et justifie l'idée d'une **sélection dynamique des paires**. Troisièmement, l'extension par clustering et rebalancement suggère qu'une sélection périodique améliore la stabilité du portefeuille : le modèle hétéroscédastique conserve un avantage en performance ajustée du risque, même si l'alpha reste d'ampleur modérée et dépend d'un signal partiellement instable.

Enfin, l'introduction d'un modèle à changement de régime via le **filtre de Kim** met en évidence un point clé : un signal de stress peut améliorer certaines stratégies de mean-reversion (A/B) en évitant des entrées durant les phases de volatilité extrême, mais il peut aussi entrer en conflit avec des règles *séquentielles* comme la stratégie C lorsque les bandes deviennent endogènes au régime. Cette extension illustre ainsi une limite générale : un modèle plus adaptatif n'est pas nécessairement dominant s'il modifie la structure même du signal de trading.

Au total, ce travail confirme la pertinence du cadre state-space de (1) et met en avant deux enseignements pratiques. D'une part, la performance du pairs trading est largement une question de **gestion du risque conditionnel** plutôt que de prédiction directionnelle. D'autre part, la robustesse dépend de la **cohérence** entre (i) la dynamique statistique supposée (cointégration/mean reversion, régimes) et (ii) la règle de trading utilisée.

## Références

- [1] Zhang, G. *Pairs trading with general state space models*. Quantitative Finance, 21(9) :1567–1587, 2021. Disponible sur : <https://doi.org/10.1080/14697688.2021.1890806>.
- [2] Zhang, G. *Online Appendix : Additional Results and Figures for “Pairs Trading with General State Space Models”*. Online appendix, 2020. Disponible sur : [https://gzhang46.github.io/home/online\\_appendix\\_24Nov\\_2020\\_Github.pdf](https://gzhang46.github.io/home/online_appendix_24Nov_2020_Github.pdf).
- [3] Clegg, Matthew. *On the Persistence of Cointegration in Pairs Trading*. Social Science Research Network (SSRN), January 28 2014. Disponible sur : <https://ssrn.com/abstract=2491201>.
- [4] Shuo Yang, Ke Huang. *Research on Hierarchical Futures Pair Trading Strategy Based on Machine Learning and Kalman Filtering* research on *Hierarchical Futures Pair Trading Strategy Based on Machine Learning and Kalman Filtering*. Social Science Research Network (SSRN), 12 June 2024. Disponible sur : <https://ssrn.com/abstract=4863414>.
- [5] Kim, C.-J. *Dynamic Linear Models with Markov-Switching*. Journal of Econometrics, 60(1–2) :1–22, 1994. Disponible sur : [https://www.researchgate.net/profile/Chang-Jin-Kim/publication/223036114\\_Dynamic\\_Linear\\_Model\\_with\\_Markov\\_Switching/links/5acc76524585151e80ab98be/Dynamic-Linear-Model-with-Markov-Switching.pdf](https://www.researchgate.net/profile/Chang-Jin-Kim/publication/223036114_Dynamic_Linear_Model_with_Markov_Switching/links/5acc76524585151e80ab98be/Dynamic-Linear-Model-with-Markov-Switching.pdf).
- [6] Kim, C.-J. and Nelson, C. R. *State-Space Models with Regime Switching*. MIT Press, Cambridge, 1999. Disponible sur : <https://mitpress.mit.edu/9780262535502/state-space-models-with-regime-switching/>
- [7] Hamilton, J. D. *A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle*. Econometrica, 57(2) :357–384, 1989. Disponible sur : <https://doi.org/10.2307/1912559>.

## A Illustration empirique des stratégies ; application sur la paire PEP-KO



FIGURE 4 – Illustration empirique de la stratégie C (modèle hétérosclélastique) sur la paire PEP–KO. Le spread filtré est comparé à des bornes variables et les marqueurs indiquent les ouvertures et fermetures de position.



FIGURE 5 – Illustration empirique de la stratégie C (modèle hétérosclélastique) sur la paire PEP–KO. Le spread filtré est comparé à des bornes variables et les marqueurs indiquent les ouvertures et fermetures de position.

## B Surfaces de performance : recherche sur grille des seuils

Afin d'illustrer la procédure de sélection optimale des seuils  $(U, L)$ , nous représentons les surfaces de performance obtenues par recherche sur grille pour chaque modèle. Pour une grille de valeurs  $(U, L)$  exprimées en multiples de  $\sigma$ , nous calculons par simulation Monte Carlo la performance associée à chaque stratégie, en termes de rendement cumulé (CR) et de ratio de Sharpe (SR). Les Figures 6–10 reproduisent qualitativement les figures d'annexe (A1–A5) de (1).

### Performance of Strategy A, B and C, based on Model 1

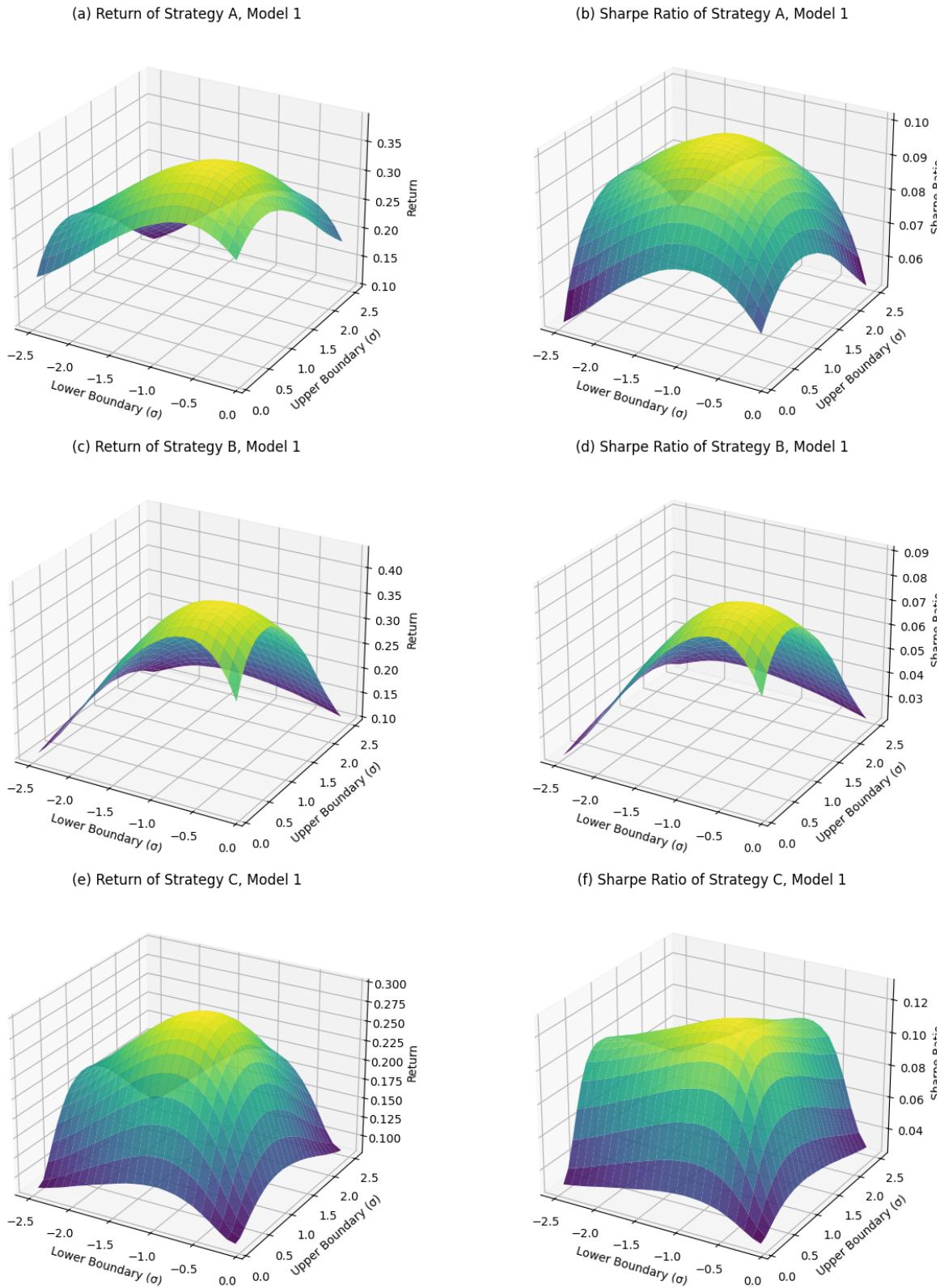
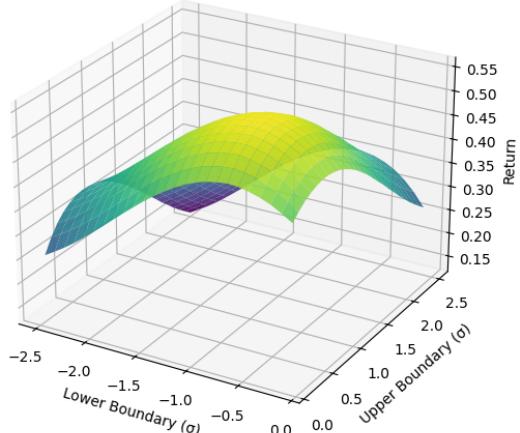


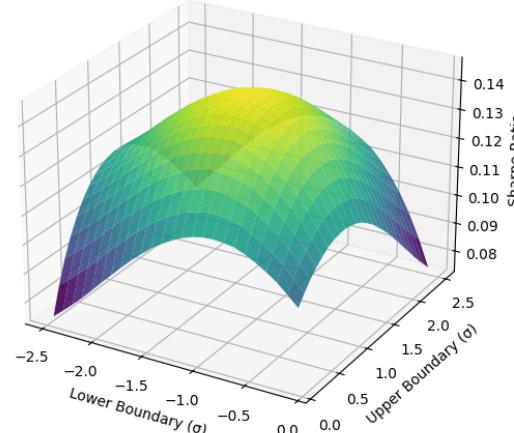
FIGURE 6 – Surfaces CR et SR pour les stratégies A, B et C — Modèle 1.

Performance of Strategy A, B and C, based on Model 2

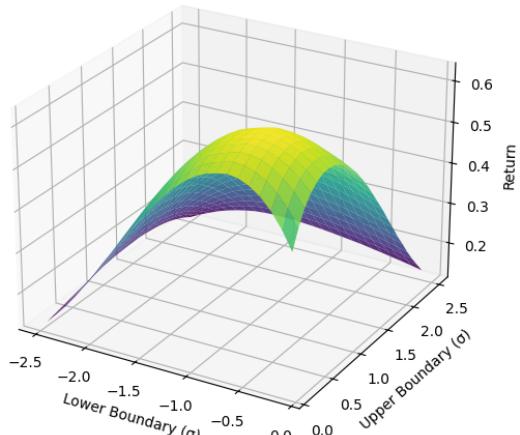
(a) Return of Strategy A, Model 2



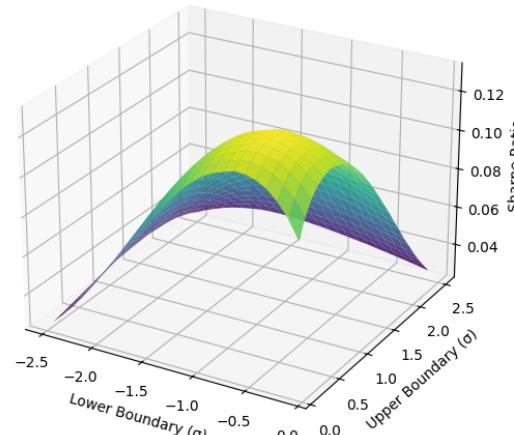
(b) Sharpe Ratio of Strategy A, Model 2



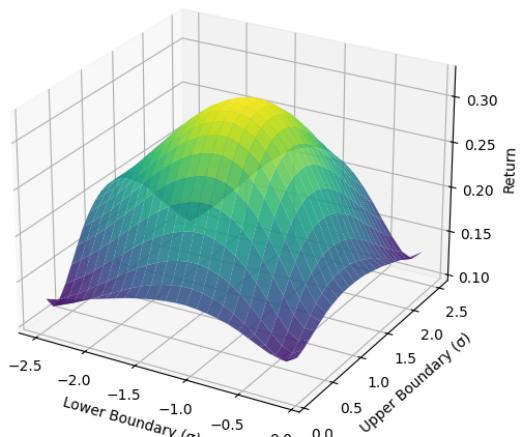
(c) Return of Strategy B, Model 2



(d) Sharpe Ratio of Strategy B, Model 2



(e) Return of Strategy C, Model 2



(f) Sharpe Ratio of Strategy C, Model 2

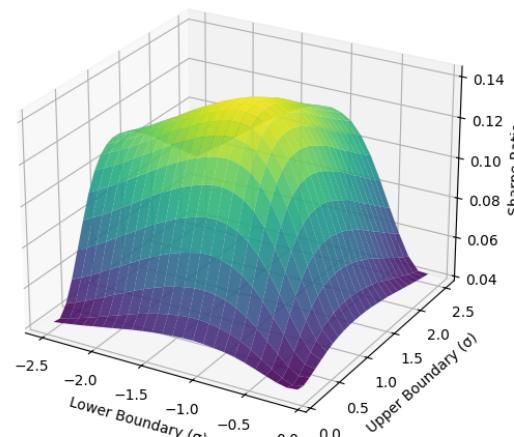


FIGURE 7 – Surfaces CR et SR pour les stratégies A, B et C — Modèle 2.

### Performance of Strategy A, B and C, based on Model 3

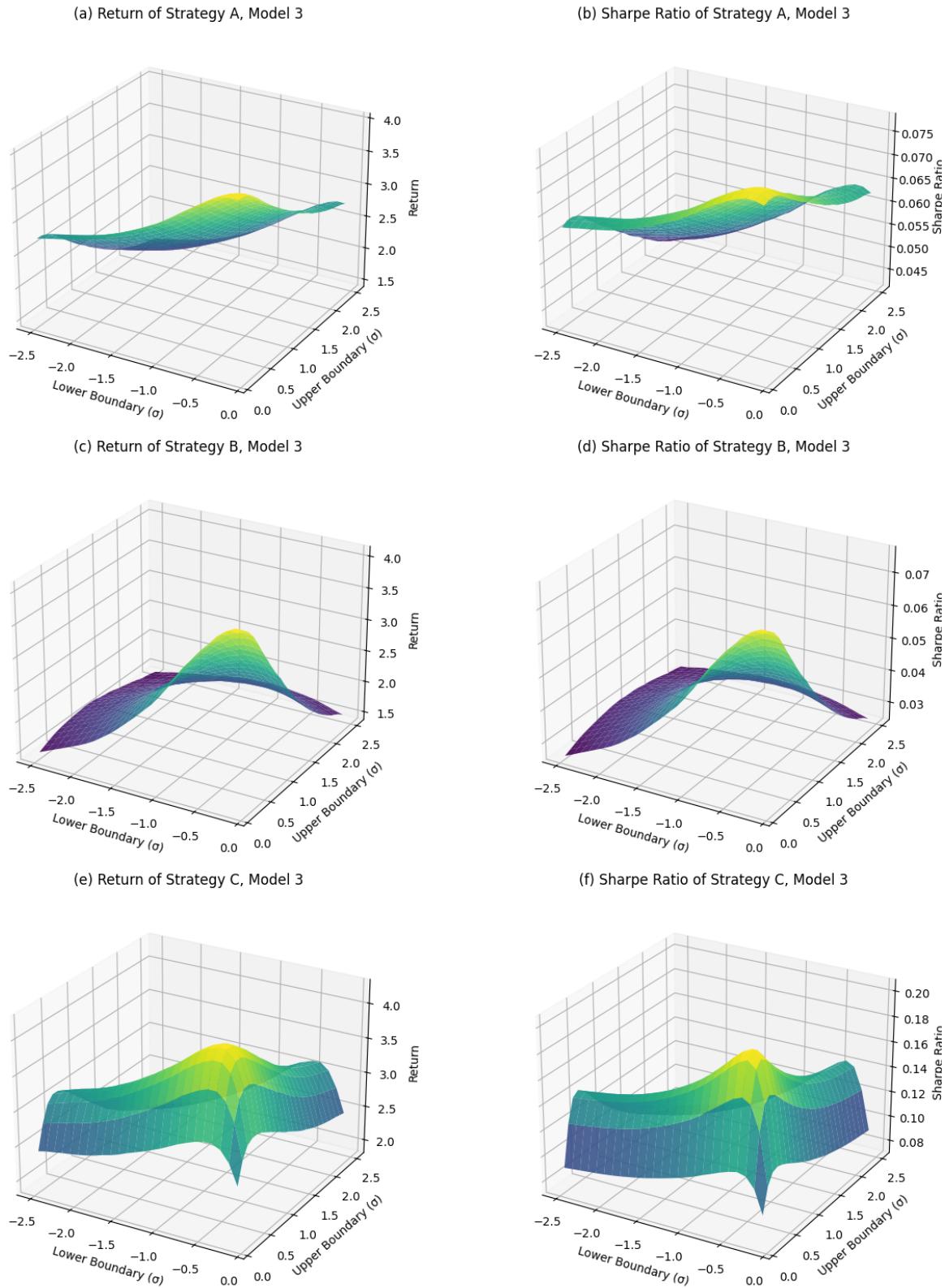
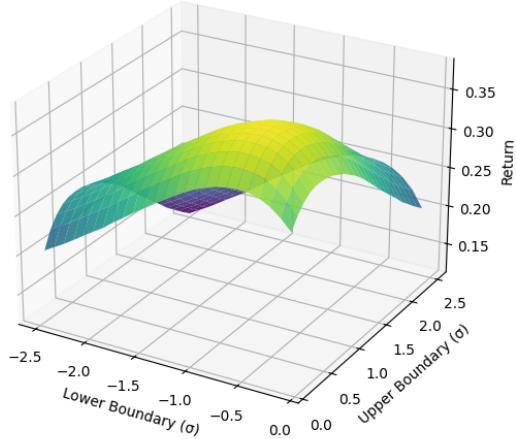


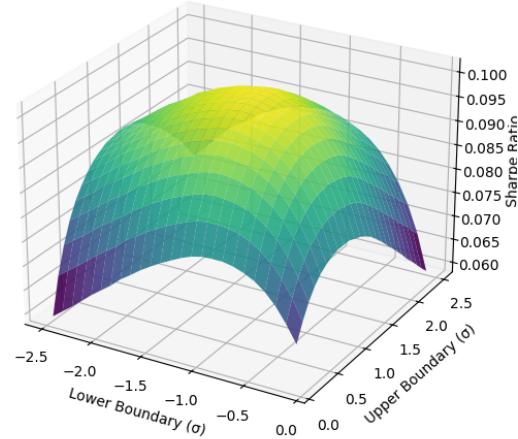
FIGURE 8 – Surfaces CR et SR pour les stratégies A, B et C — Modèle 3 (hétéroscédastique).

### Performance of Strategy A, B and C, based on Model 4

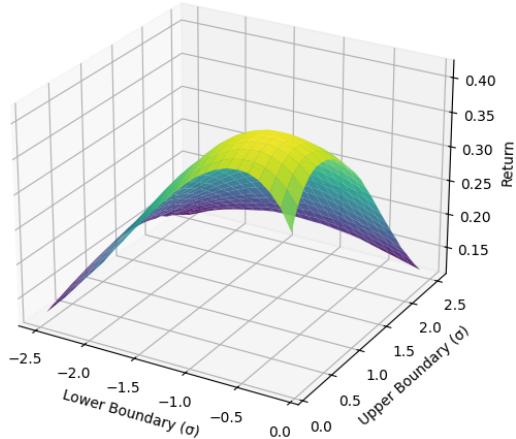
(a) Return of Strategy A, Model 4



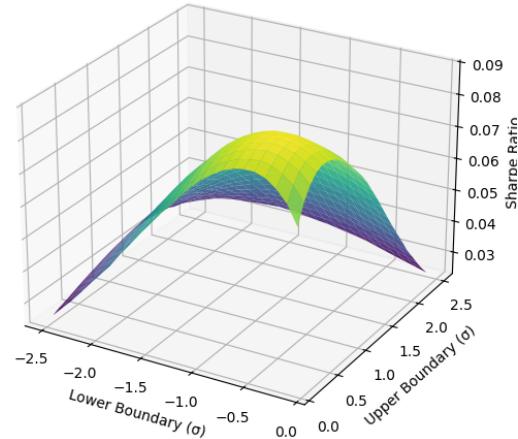
(b) Sharpe Ratio of Strategy A, Model 4



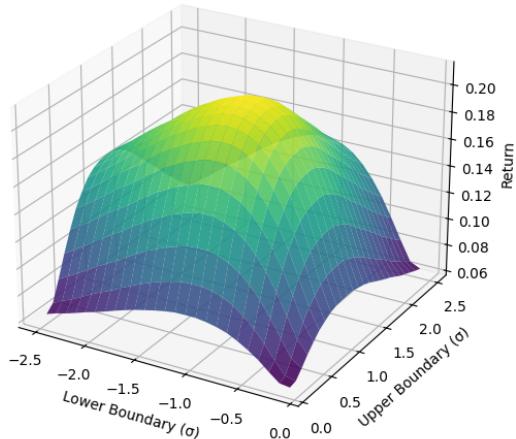
(c) Return of Strategy B, Model 4



(d) Sharpe Ratio of Strategy B, Model 4



(e) Return of Strategy C, Model 4



(f) Sharpe Ratio of Strategy C, Model 4

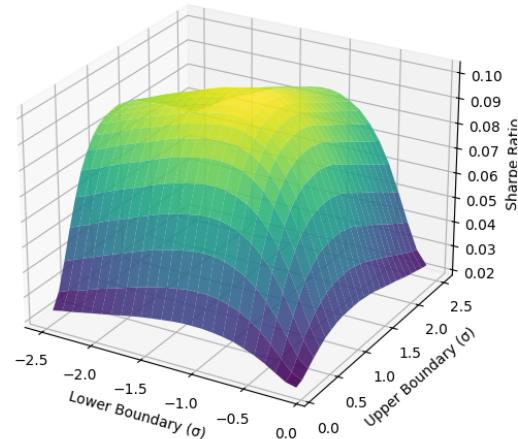
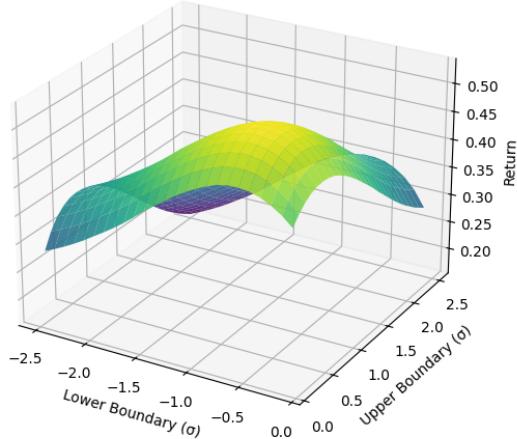


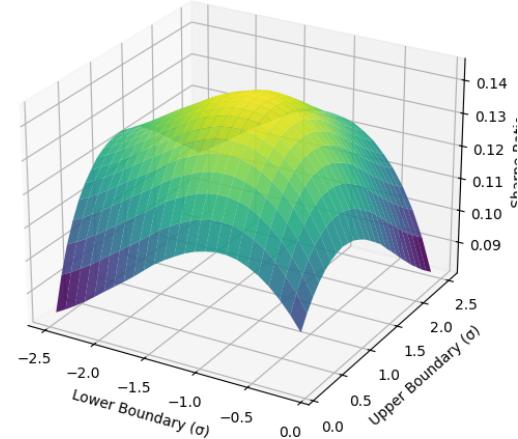
FIGURE 9 – Surfaces CR et SR pour les stratégies A, B et C — Modèle 4.

### Performance of Strategy A, B and C, based on Model 5

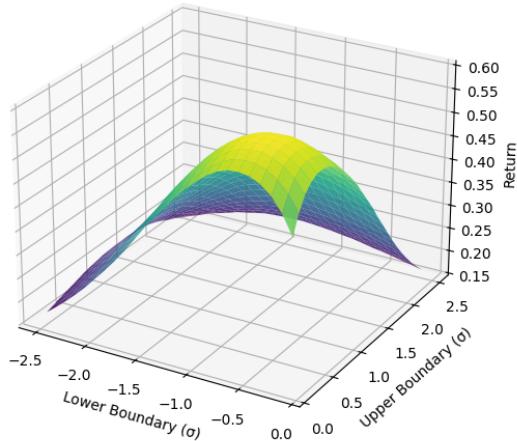
(a) Return of Strategy A, Model 5



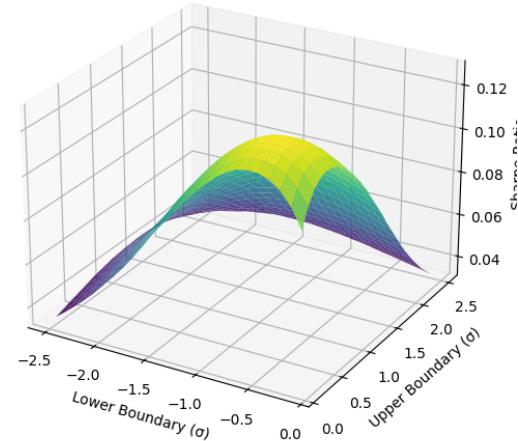
(b) Sharpe Ratio of Strategy A, Model 5



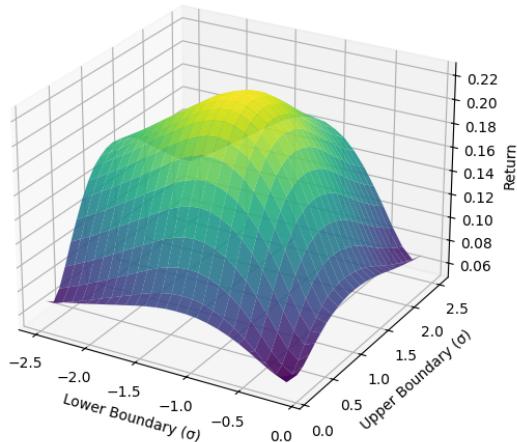
(c) Return of Strategy B, Model 5



(d) Sharpe Ratio of Strategy B, Model 5



(e) Return of Strategy C, Model 5



(f) Sharpe Ratio of Strategy C, Model 5

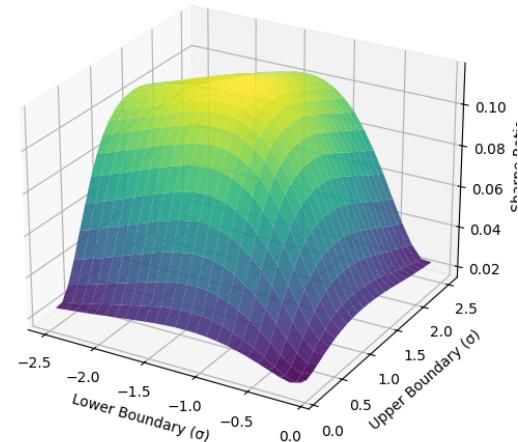


FIGURE 10 – Surfaces CR et SR pour les stratégies A, B et C — Modèle 5.

## C RéPLICATION DES TABLES EN ANNEXES (Zhang, 2021) : Banking pairs

TABLE 4 – Table A1 – Panel B : Pairs of Small Banks

#	Pair		Model I + Strategy A		Model II + Strategy C		Improvement (%)	
	Stock #1	Stock #2	Return	Sharpe	Return	Sharpe	Return	Sharpe
1	CPF	BANC	0.0858	0.4346	0.1217	1.4414	41.82	231.69
2	CPF	CUBI	0.0581	0.2455	0.1761	1.5663	203.24	538.01
3	CPF	NBHC	0.1033	0.7210	0.0822	1.0260	-20.39	42.31
4	CPF	FCF	0.0762	0.4552	0.1100	1.2666	44.41	178.23
5	BANC	CUBI	0.1591	0.6502	0.2369	1.5147	48.86	132.94
6	BANC	NBHC	0.0705	0.3448	0.1635	1.2835	132.13	272.28
7	BANC	FCF	0.0850	0.4070	0.2017	1.3768	137.36	238.30
8	CUBI	NBHC	0.1199	0.4980	0.1368	1.1451	14.09	129.93
9	CUBI	FCF	0.0997	0.3313	0.1463	0.9409	46.75	183.99
10	NBHC	FCF	0.0880	0.5937	0.1079	1.4648	22.57	146.74
Mean			0.0945	0.4681	0.1483	1.3026	67.08	209.44
Min			0.0581	0.2455	0.0822	0.9409	-20.39	42.31
Max			0.1591	0.7210	0.2369	1.5663	203.24	538.01
Median			0.0869	0.4449	0.1415	1.3302	45.58	181.11

TABLE 5: Table A2 : Pairs Between Large and Small Banks

#	Pair		Model I + Strategy A		Model II + Strategy C		Improvement (%)	
	Stock #1	Stock #2	Return	Sharpe	Return	Sharpe	Return	Sharpe
1	JPM	CPF	0.0803	0.4254	0.1218	1.2301	51.67	189.17
2	JPM	BANC	0.0948	0.6012	0.1939	1.0845	104.56	80.40
3	JPM	CUBI	0.0205	0.0060	0.1078	0.9446	425.92	15758.39
4	JPM	NBHC	0.1046	1.1577	0.1373	1.4952	31.25	29.14
5	JPM	FCF	0.0701	0.3168	0.1701	1.5338	142.70	384.12
6	BAC	CPF	0.1292	0.6365	0.1485	1.4427	14.89	126.67
7	BAC	BANC	0.1654	0.9263	0.1367	0.9850	-17.37	6.34
8	BAC	CUBI	0.0980	0.4475	0.1120	0.9608	14.28	114.70
9	BAC	NBHC	0.1409	0.8576	0.1952	1.5523	38.53	81.00
10	BAC	FCF	0.1592	0.8640	0.1003	1.4668	-36.97	69.77
11	WFC	CPF	0.0773	0.4333	0.0703	0.9462	-9.16	118.37
12	WFC	BANC	0.1286	1.0897	0.1130	1.0740	-12.15	-1.44
13	WFC	CUBI	0.0944	0.5341	0.1287	1.3322	36.36	149.45
14	WFC	NBHC	0.0944	1.1738	0.0840	1.1533	-11.03	-1.75
15	WFC	FCF	0.0555	0.3850	0.0635	0.7792	14.31	102.39
16	C	CPF	0.1247	0.8814	0.1390	1.5036	11.51	70.60
17	C	BANC	0.0990	0.6291	0.1137	0.9894	14.84	57.26
18	C	CUBI	0.1037	0.5827	0.1051	1.2423	1.34	113.19

Continued on next page

Pair		Model I + Strategy A		Model II + Strategy C		Improvement (%)		
#	Stock #1	Stock #2	Return	Sharpe	Return	Sharpe	Return	Sharpe
19	C	NBHC	0.1187	1.0026	0.1488	1.4609	25.40	45.72
20	C	FCF	0.0987	0.5826	0.1232	1.1415	24.78	95.92
21	USB	CPF	0.0662	0.6241	0.0989	1.1358	49.26	81.99
22	USB	BANC	0.0948	0.7781	0.0954	0.8892	0.64	14.28
23	USB	CUBI	0.0353	0.1251	0.0886	1.0571	150.88	744.77
24	USB	NBHC	0.0656	0.4597	0.0713	0.8442	8.76	83.62
25	USB	FCF	0.0472	0.2922	0.0735	0.8857	55.61	203.13
Mean			0.0947	0.6325	0.1176	1.1652	45.23	748.69
Min			0.0205	0.0060	0.0635	0.7792	-36.97	-1.75
Max			0.1654	1.1738	0.1952	1.5523	425.92	15758.39
Median			0.0948	0.6012	0.1130	1.1358	14.89	83.62

TABLE 6 – Table A3 – Panel A : In Sample (Large Banks)

Pair		Model I + Strategy A		Model II + Strategy C		Improvement (%)		
#	Stock #1	Stock #2	Return	Sharpe	Return	Sharpe	Return	Sharpe
1	JPM	BAC	0.0556	0.4277	0.0506	0.7943	-8.99	85.73
2	JPM	WFC	0.0371	0.2841	0.0834	0.9286	124.68	226.86
3	JPM	C	0.0400	0.2365	0.0311	0.4345	-22.28	83.69
4	JPM	USB	0.0937	0.8440	0.1268	1.2805	35.30	51.71
5	BAC	WFC	0.0679	0.7390	0.1895	1.3250	179.01	79.31
6	BAC	C	0.1007	0.6956	0.1154	1.3175	14.59	89.41
7	BAC	USB	0.0921	0.4238	0.1409	1.7244	53.03	306.87
8	WFC	C	0.0853	1.1464	0.1068	1.2573	25.26	9.68
9	WFC	USB	0.0440	0.3290	0.0191	-0.0425	-56.59	-112.92
10	C	USB	0.0812	0.6367	0.0910	1.2575	12.18	97.50
Mean			0.0698	0.5763	0.0955	1.0277	35.62	91.78
Min			0.0371	0.2365	0.0191	-0.0425	-56.59	-112.92
Max			0.1007	1.1464	0.1895	1.7244	179.01	306.87
Median			0.0745	0.5322	0.0989	1.2574	19.92	84.71

Note : Data : 2012-01-10 to 2018-01-01.

TABLE 7: Table A3 – Panel B : Out of Sample (Large Banks)

Pair		Model I + Strategy A		Model II + Strategy C		Improvement (%)		
#	Stock #1	Stock #2	Return	Sharpe	Return	Sharpe	Return	Sharpe
1	JPM	BAC	-0.0213	-0.5701	0.0000	0.0000	-100.00	-100.00
2	JPM	WFC	-0.1772	-1.7068	0.0000	0.0000	-100.00	-100.00
3	JPM	C	-0.0539	-0.5779	0.0000	0.0000	-100.00	-100.00
4	JPM	USB	-0.0196	-0.2594	0.0000	0.0000	-100.00	-100.00
5	BAC	WFC	-0.1510	-1.1734	0.0000	0.0000	-100.00	-100.00
6	BAC	C	0.0020	-0.0987	0.0000	0.0000	-100.00	-100.00
7	BAC	USB	0.0478	0.1345	0.0000	0.0000	-100.00	-100.00

*Continued on next page*

Pair		Model I + Strategy A		Model II + Strategy C		Improvement (%)		
#	Stock #1	Stock #2	Return	Sharpe	Return	Sharpe	Return	Sharpe
8	WFC	C	-0.0043	-0.2847	0.0142	-0.0598	-431.30	-79.00
9	WFC	USB	-0.0718	-0.7032	-0.0045	-1.1644	-93.67	65.59
10	C	USB	0.0000	0.0000	0.1047	1.3316	0.00	0.00
Mean			-0.0449	-0.5240	0.0114	0.0107	-122.50	-71.34
Min			-0.1772	-1.7068	-0.0045	-1.1644	-431.30	-100.00
Max			0.0478	0.1345	0.1047	1.3316	0.00	65.59
Median			-0.0205	-0.4274	0.0000	0.0000	-100.00	-100.00

Note : OOS uses IS parameters. Data : 2018-01-01 to 2019-12-01.

TABLE 8: Table A4 – Panel A : In Sample (Small Banks)

Pair		Model I + Strategy A		Model II + Strategy C		Improvement (%)		
#	Stock #1	Stock #2	Return	Sharpe	Return	Sharpe	Return	Sharpe
1	CPF	BANC	0.1632	0.9392	0.1541	1.2735	-5.58	35.59
2	CPF	CUBI	0.0756	0.3427	0.2171	1.7639	187.34	414.75
3	CPF	NBHC	0.1403	0.8465	0.0958	1.3074	-31.68	54.44
4	CPF	FCF	0.0930	0.5547	0.1844	1.9088	98.39	244.11
5	BANC	CUBI	0.0589	0.7208	0.2379	1.3778	303.97	91.16
6	BANC	NBHC	0.1250	0.5345	0.0678	0.5201	-45.74	-2.70
7	BANC	FCF	0.1733	0.7378	0.2330	1.6356	34.39	121.68
8	CUBI	NBHC	0.1372	0.5407	0.0980	0.7997	-28.62	47.90
9	CUBI	FCF	0.1162	0.5346	0.1828	1.2452	57.36	132.91
10	NBHC	FCF	0.1030	0.6987	0.1270	1.6888	23.26	141.69
Mean			0.1186	0.6450	0.1598	1.3521	59.31	128.15
Min			0.0589	0.3427	0.0678	0.5201	-45.74	-2.70
Max			0.1733	0.9392	0.2379	1.9088	303.97	414.75
Median			0.1206	0.6267	0.1684	1.3426	28.83	106.42

TABLE 9: Table A4 – Panel B : Out of Sample (Small Banks)

Pair		Model I + Strategy A		Model II + Strategy C		Improvement (%)		
#	Stock #1	Stock #2	Return	Sharpe	Return	Sharpe	Return	Sharpe
1	CPF	BANC	0.0377	0.1535	0.0643	0.6424	70.72	318.59
2	CPF	CUBI	-0.0363	-0.3421	0.0133	-0.1946	-136.80	-43.13
3	CPF	NBHC	-0.0160	-0.2246	0.0000	0.0000	-100.00	-100.00
4	CPF	FCF	-0.0125	-0.1693	0.0334	0.2863	-367.67	-269.09
5	BANC	CUBI	0.0000	0.0000	0.2201	1.8642	0.00	0.00
6	BANC	NBHC	-0.0981	-0.6058	0.0000	0.0000	-100.00	-100.00
7	BANC	FCF	-0.0637	-0.4025	0.0462	0.3259	-172.57	-180.96
8	CUBI	NBHC	-0.0504	-0.3495	0.0021	-1.4722	-104.14	321.19

*Continued on next page*

Pair		Model I + Strategy A		Model II + Strategy C		Improvement (%)		
#	Stock #1	Stock #2	Return	Sharpe	Return	Sharpe	Return	Sharpe
9	CUBI	FCF	-0.0489	-0.2937	0.0000	0.0000	-100.00	-100.00
10	NBHC	FCF	-0.0403	-0.3989	0.0050	-0.5447	-112.29	36.53
Mean			-0.0329	-0.2633	0.0384	0.0907	-112.27	-11.69
Min			-0.0981	-0.6058	0.0000	-1.4722	-367.67	-269.09
Max			0.0377	0.1535	0.2201	1.8642	70.72	321.19
Median			-0.0383	-0.3179	0.0091	0.0000	-102.07	-71.57

TABLE 10: Table A5 : In Sample (Large  $\times$  Small Banks)

Pair		Model I + Strategy A		Model II + Strategy C		Improvement (%)		
#	Stock #1	Stock #2	Return	Sharpe	Return	Sharpe	Return	Sharpe
1	JPM	CPF	0.0692	0.4472	0.1683	1.7906	143.14	300.38
2	JPM	BANC	0.1574	0.8729	0.1898	1.2798	20.64	46.62
3	JPM	CUBI	0.0070	-0.0770	0.1825	1.1355	2515.01	-1574.09
4	JPM	NBHC	0.1035	1.0124	0.1157	1.3657	11.85	34.90
5	JPM	FCF	0.0859	0.4809	0.1845	1.9394	114.93	303.29
6	BAC	CPF	0.1390	1.1161	0.1370	1.4710	-1.41	31.79
7	BAC	BANC	0.1806	1.0564	0.0677	1.0377	-62.50	-1.77
8	BAC	CUBI	0.0946	0.4240	0.1605	1.4439	69.69	240.55
9	BAC	NBHC	0.1403	0.8360	0.1169	1.7457	-16.68	108.81
10	BAC	FCF	0.1699	0.7983	0.0944	1.4311	-44.44	79.27
11	WFC	CPF	0.0808	0.8810	0.1167	0.8442	44.43	-4.18
12	WFC	BANC	0.1105	0.7517	0.1122	1.0421	1.53	38.64
13	WFC	CUBI	0.0793	0.4132	0.0997	1.2455	25.73	201.40
14	WFC	NBHC	0.0839	1.0576	0.0796	0.9480	-5.13	-10.36
15	WFC	FCF	0.0681	0.5246	0.0634	0.8021	-6.82	52.91
16	C	CPF	0.1278	0.6728	0.1760	1.2969	37.63	92.76
17	C	BANC	0.1409	1.0724	0.1392	1.0566	-1.25	-1.47
18	C	CUBI	0.1133	0.6327	0.1313	1.6023	15.86	153.26
19	C	NBHC	0.0997	0.7245	0.1340	1.3456	34.41	85.72
20	C	FCF	0.0966	1.0249	0.1568	1.1307	62.23	10.32
21	USB	CPF	0.0573	0.6787	0.0967	1.1586	68.80	70.71
22	USB	BANC	0.1320	0.8008	0.1367	0.9508	3.56	18.72
23	USB	CUBI	0.0376	0.2388	0.1183	1.2656	214.33	430.06
24	USB	NBHC	0.0533	0.4501	0.0741	1.0023	39.16	122.70
25	USB	FCF	0.0583	0.4387	0.0906	1.2090	55.31	175.57
Mean			0.0995	0.6932	0.1257	1.2616	133.60	40.26
Min			0.0070	-0.0770	0.0634	0.8021	-62.50	-1574.09
Max			0.1806	1.1161	0.1898	1.9394	2515.01	430.06
Median			0.0966	0.7245	0.1183	1.2455	25.73	70.71

TABLE 11: Table A6 : Out of Sample (Large  $\times$  Small Banks)

#	Pair		Model I + Strategy A		Model II + Strategy C		Improvement (%)	
	Stock #1	Stock #2	Return	Sharpe	Return	Sharpe	Return	Sharpe
1	JPM	CPF	-0.1176	-0.7437	0.0000	0.0000	-100.00	-100.00
2	JPM	BANC	-0.2252	-1.1763	0.0000	0.0000	-100.00	-100.00
3	JPM	CUBI	-0.1507	-0.9968	0.0000	0.0000	-100.00	-100.00
4	JPM	NBHC	0.0202	0.0018	0.0682	1.1443	237.94	63781.25
5	JPM	FCF	-0.0993	-0.5491	0.0451	0.6520	-145.42	-218.74
6	BAC	CPF	-0.0673	-0.3994	0.0000	0.0000	-100.00	-100.00
7	BAC	BANC	-0.1593	-0.8984	0.0000	0.0000	-100.00	-100.00
8	BAC	CUBI	-0.1049	-0.6247	0.0000	0.0000	-100.00	-100.00
9	BAC	NBHC	0.1079	1.0305	0.0639	0.9340	-40.77	-9.37
10	BAC	FCF	-0.0103	-0.2956	0.0253	0.2783	-346.34	-194.14
11	WFC	CPF	0.0524	0.5782	0.1633	1.5706	211.87	171.63
12	WFC	BANC	0.0000	0.0000	0.0980	0.9655	0.00	0.00
13	WFC	CUBI	0.0000	0.0000	0.1090	1.2737	0.00	0.00
14	WFC	NBHC	0.0700	0.9880	0.1246	1.0435	78.04	5.62
15	WFC	FCF	0.0044	-0.1124	0.0056	-1.5030	27.08	1237.20
16	C	CPF	0.0889	0.4740	0.1215	0.7905	36.65	66.77
17	C	BANC	-0.0726	-0.7442	0.0501	0.2626	-169.06	-135.29
18	C	CUBI	-0.0169	-0.4420	0.0106	-0.5307	-162.43	20.07
19	C	NBHC	0.0000	0.0000	0.2392	2.1867	0.00	0.00
20	C	FCF	0.0000	0.0000	0.1359	1.0911	0.00	0.00
21	USB	CPF	0.0250	0.0574	0.0983	1.2629	292.71	2101.39
22	USB	BANC	-0.1011	-1.0632	0.0038	-0.4448	-103.77	-58.16
23	USB	CUBI	-0.0844	-0.7504	0.0075	-0.2295	-108.94	-69.42
24	USB	NBHC	0.0661	0.5449	0.0643	1.0284	-2.67	88.75
25	USB	FCF	-0.0142	-0.3428	0.0501	0.2973	-451.94	-186.71
Mean		-0.0316	-0.2186	0.0594	0.4829	-49.88	2640.03	
Min		-0.2252	-1.1763	0.0000	-1.5030	-451.94	-218.74	
Max		0.1079	1.0305	0.2392	2.1867	292.71	63781.25	
Median		-0.0103	-0.2956	0.0501	0.2973	-100.00	-9.37	

Note : OOS uses IS parameters. Data : 2018-01-01 to 2019-12-01.

### C.1 Extension temporelle de la réPLICATION (2012–2025)

Cette sous-section reporte une extension purement temporelle de la réPLICATION de (**author?**) (1) jusqu'à fin 2025. Les résultats confirment que, sur la période complète comme en out-of-sample (2020–2025), le couple (Modèle II + Stratégie C) affiche en moyenne des ratios de Sharpe supérieurs au benchmark (Modèle I + Stratégie A), en particulier pour les paires impliquant des petites banques.

TABLE 12 – Extension 2012–2025 : performances sur les deux paires principales (FULL)

<b>Paire</b>	<b>Modèle I + Stratégie A</b>		<b>Modèle II + Stratégie C</b>	
	Return	Sharpe	Return	Sharpe
PEP-KO	0.0333	0.1229	0.0390	0.3908
EWT-EWH	0.0236	0.0269	0.0527	0.3416

TABLE 13 – Extension 2012–2025 : paires de grandes banques (FULL) — ratios de Sharpe

#	Stock #1	Stock #2	Sharpe (M1+A)	Sharpe (M2+C)
1	JPM	BAC	0.3738	0.6361
2	JPM	WFC	0.4758	0.1625
3	JPM	C	0.4732	0.9507
4	JPM	USB	0.0013	0.4974
5	BAC	WFC	0.9046	0.3581
6	BAC	C	0.2731	0.7012
7	BAC	USB	0.2309	0.7702
8	WFC	C	0.1474	1.0032
9	WFC	USB	0.1892	0.5186
10	C	USB	0.2075	1.2386
Moyenne (10 paires)			0.3277	0.6837

TABLE 14 – Extension 2012–2025 : paires de petites banques (FULL) — ratios de Sharpe

#	Stock #1	Stock #2	Sharpe (M1+A)	Sharpe (M2+C)
1	CPF	BANC	0.4533	1.1490
2	CPF	CUBI	0.5966	1.2283
3	CPF	NBHC	0.5323	0.9942
4	CPF	FCF	0.2752	0.7799
5	BANC	CUBI	0.3623	1.2870
6	BANC	NBHC	0.3083	1.1443
7	BANC	FCF	0.2782	1.1861
8	CUBI	NBHC	0.7027	0.8727
9	CUBI	FCF	0.3588	1.1950
10	NBHC	FCF	0.1730	0.9084
Moyenne (10 paires)			0.4041	1.0745

TABLE 15 – Extension 2012–2025 : synthèse des ratios de Sharpe moyens (FULL)

Univers	Sharpe moyen (M1+A)	Sharpe moyen (M2+C)
Paires principales (2 paires)	0.0749	0.3662
Grandes banques (10 paires)	0.3277	0.6837
Petites banques (10 paires)	0.4041	1.0745
Large × Small (25 paires)	0.3667	1.0410

TABLE 16 – Extension 2012–2025 : ratios de Sharpe moyens in-sample (2012–2019) vs out-of-sample (2020–2025)

Univers	Sharpe moyen IS	Sharpe moyen OOS		
	M1+A	M2+C	M1+A	M2+C
Grandes banques (10 paires)	0.4277	1.0685	0.1621	1.0154
Petites banques (10 paires)	0.5205	1.2387	0.4099	0.9597
Large $\times$ Small (25 paires)	0.5410	1.1892	0.2445	0.9908

## D Extension : stratégies D et E

Cette annexe présente des illustrations graphiques des stratégies D et E introduites dans la Section 6. Les figures sont construites à partir de trajectoires de spread simulées, afin de visualiser clairement l’impact de règles de sortie flexibles sur la dynamique des positions, toutes choses égales par ailleurs.



FIGURE 11 – Illustration de la stratégie D sur un spread simulé. La règle d’entrée est identique à celle de la stratégie A, tandis que la règle de sortie est généralisée via une borne flexible autour de la moyenne.



FIGURE 12 – Illustration de la stratégie E sur un spread simulé. Les règles d’entrée sont inchangées, tandis que les règles de sortie sont symétrisées et définies de manière flexible autour de la moyenne du spread.

TABLE 17 – Optimisation simulation-based des stratégies D et E (Table S1).

Modèle	Strat.	$U^{\text{CR}}$	$\delta^{\text{CR}}$	CR	$U^{\text{SR}}$	$\delta^{\text{SR}}$	SR
A1	D	$0.6\sigma$	0.8	0.4269	$1.2\sigma$	0.0	0.1009
A1	E	$0.8\sigma$	1.0	0.4243	$0.5\sigma$	0.9	0.1392
A2	D	$0.1\sigma$	0.9	4.0305	$0.2\sigma$	0.1	0.0771
A2	E	$0.4\sigma$	1.0	5.5508	$0.2\sigma$	1.0	0.2519
A3	D	$0.6\sigma$	0.7	0.5762	$1.1\sigma$	-0.1	0.1452
A3	E	$1.0\sigma$	1.0	0.3612	$1.2\sigma$	0.3	0.1230

*Notes.* Résultats obtenus par simulation Monte Carlo ( $N = 10,000$ ,  $T = 1,000$ ) et recherche sur grille  $U \in \{0.1\sigma, \dots, 2.5\sigma\}$ ,  $\delta \in \{-0.5, -0.4, \dots, 1.0\}$ , avec coûts de transaction de 20bp par transaction. Les couples  $(U, \delta)$  sont reportés séparément selon l'objectif (maximisation de CR ou de SR).

## E Extension : Persistance temporelle de la cointégration

### E.1 Illustrations graphiques

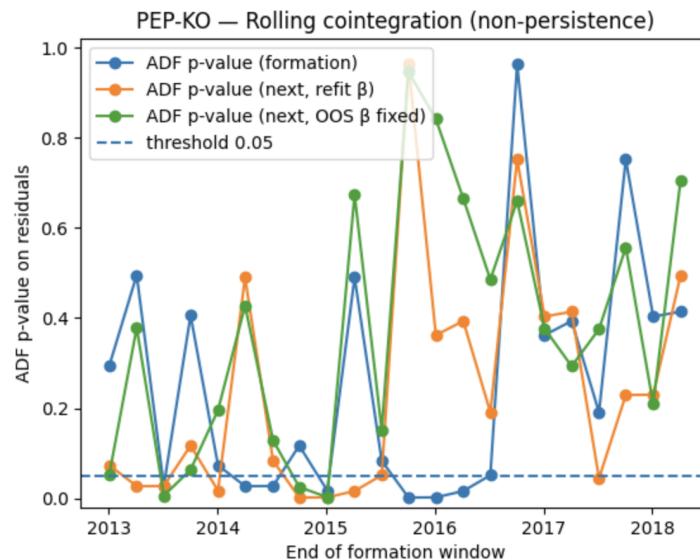


FIGURE 13 – Rolling ADF p-values for the PEP–KO pair

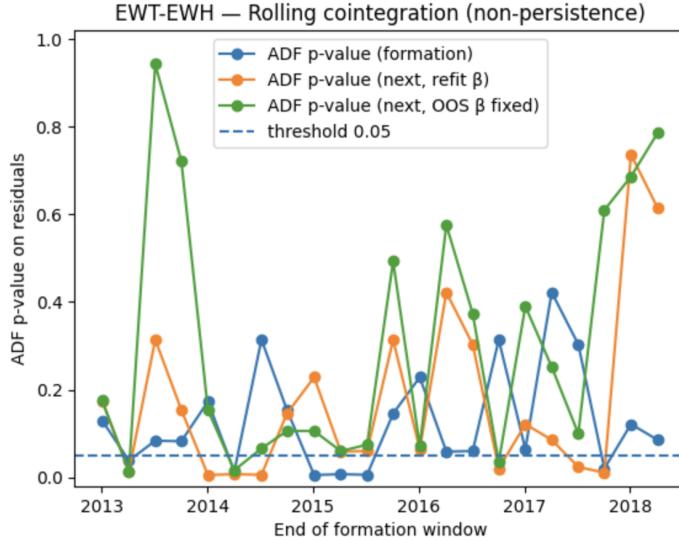


FIGURE 14 – Rolling ADF p-values for the EWT–EWH pair

## E.2 Tableau de synthèse

TABLE 18 – Persistance temporelle de la cointégration sur fenêtres roulantes

Paire	Nombre de fenêtres	Cointégration en formation (5%)	Persistance (re-estimé)	Persistance (fixé OOS)
EWT–EWH	22	6	0.50	0.33
JPM–BAC	22	9	0.44	0.11
PEP–KO	22	7	0.29	0.29
WFC–C	22	5	0.00	0.20

Note : La table rapporte, pour chaque paire, le nombre total de fenêtres roulantes considérées, le nombre de périodes pour lesquelles la cointégration est détectée en formation au seuil de 5%, ainsi que la proportion de cas où cette relation persiste sur la fenêtre suivante. La persistance est évaluée selon deux approches : (i) en ré-estimant le coefficient de cointégration sur la fenêtre suivante, et (ii) en conservant le coefficient estimé en période de formation.

## E.3 Performances agrégées

Le Tableau 20 présente les performances moyennes in-sample et out-of-sample des modèles I et II, calculées sur l’ensemble des paires sélectionnées dynamiquement. Les indicateurs reportés sont le rendement annualisé et le ratio de Sharpe.

TABLE 19 – Ratios de Sharpe in-sample (IS) et out-of-sample (OOS) par paire pour les nouvelles classes d'actifs — Modèle II

Classe d'actifs	Paire	Sharpe (IS)	Sharpe (OOS)
Crypto	XTH / XMN	1.710	0.007
Crypto	XLM / XLC	1.613	0.004
Crypto	XRP / XMR	1.750	0.129
Commodities	CL1 / CO1	0.000	0.000
Commodities	W1 / CT1	1.929	-0.025
Commodities	NG1 / LX1	2.141	0.002
Technologie	ADI / KLAC	1.516	-0.014
Technologie	NXPI / AMAT	1.889	-0.010
Technologie	TXN / HUBS	1.515	-0.001

TABLE 20 – Ratios de Sharpe moyens in-sample (IS) et out-of-sample (OOS) sur l'ensemble des paires sélectionnées dynamiquement

Modèle	Sharpe moyen (IS)	Sharpe moyen (OOS)
Model I	0.519	-3.112
Model II	1.563	0.010

Note : les performances sont calculées sur l'ensemble des paires sélectionnées dynamiquement sur la période 2023–2024. Les stratégies reposent sur la stratégie C, avec des coûts de transaction de 20 points de base par actif.

#### E.4 Performances par classe d'actifs

La Figure 15 compare les ratios de Sharpe moyens in-sample et out-of-sample par classe d'actifs (cryptomonnaies, commodities, taux d'intérêt et actions technologiques).

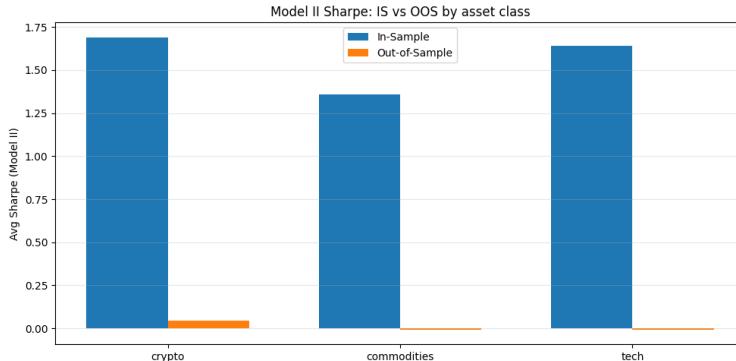


FIGURE 15 – Ratios de Sharpe moyens in-sample et out-of-sample par classe d'actifs. Les performances sont reportées pour le modèle hétéroscléastique (Model II) et la stratégie C.

## E.5 Paires sélectionnées

Le Tableau 21 liste, pour chaque classe d'actifs, les paires retenues par la procédure de clustering et de cointégration, ainsi que leurs performances individuelles in-sample et out-of-sample.

TABLE 21 – Paires sélectionnées dynamiquement et performances associées.

Classe d'actifs	Actif A	Actif B	Sharpe IS	Sharpe OOS
Crypto	XTH	XMN	1.71	0.01
Crypto	XRP	XMR	1.75	0.13
Commodities	NG1	LX1	2.14	0.00
Taux	GFRN10	GFRN30	2.03	0.03
Tech	NXPI	AMAT	1.89	-0.01

Note : Les ratios de Sharpe sont calculés séparément sur les périodes in-sample et out-of-sample.

## E.6 Illustration du rebalancement

Les Figures 16 et 17 illustrent, pour plusieurs paires représentatives, l'évolution du spread filtré et des seuils de trading lors de différents rebalancements hors échantillon.

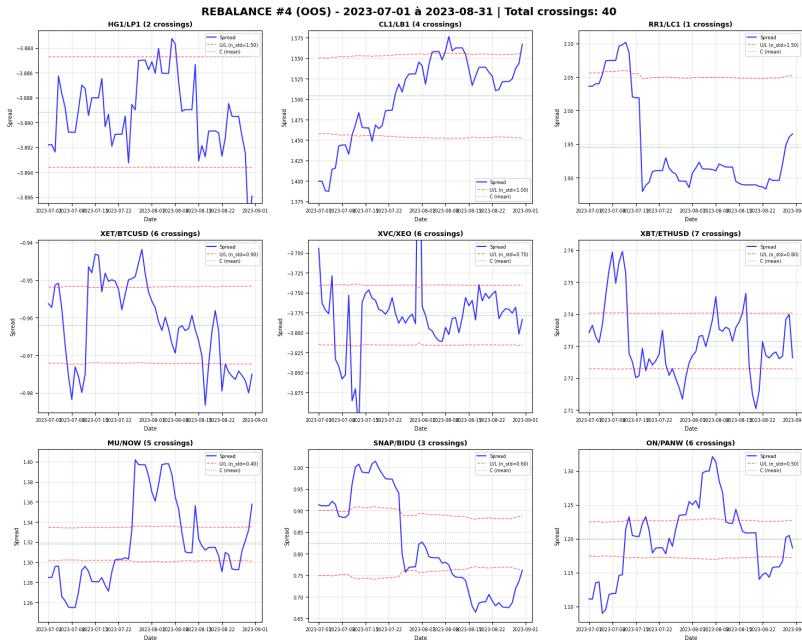


FIGURE 16 – Exemple stratégie C model II : évolution du spread filtré et des seuils hétéroscélastiques pour les 9 paires sélectionnées dynamiquement

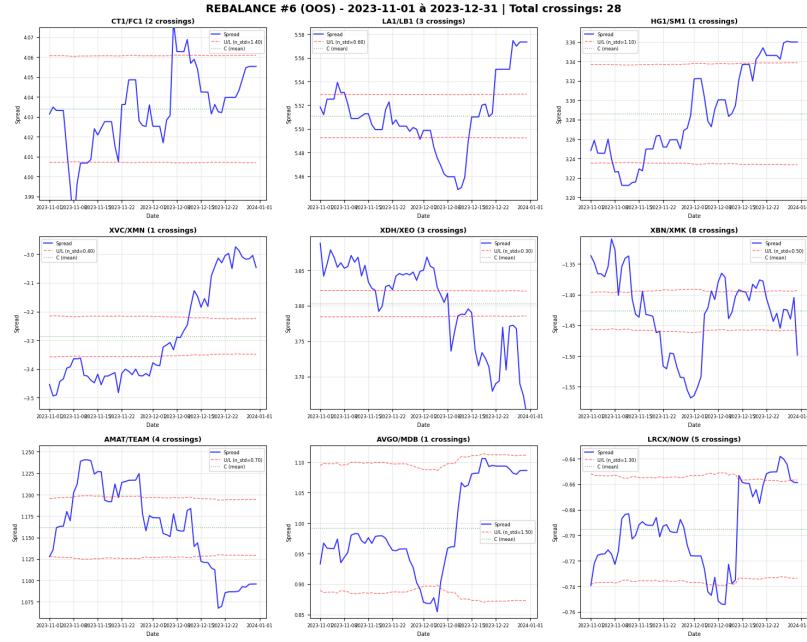


FIGURE 17 – Exemple stratégie A modèle I : évolution du spread filtré et des seuils hétéroscédastiques pour les 9 paires sélectionnées dynamiquement

## E.7 Résultat simulation portefeuille

TABLE 22 – Portfolio performance – Strategy A (benchmark) vs Strategy C (Model II)

Metric	Strategy A	Strategy C
Total Return	6.43%	11.86%
Annualized Return	3.05%	5.56%
Annualized Volatility	4.28%	8.32%
Sharpe Ratio	0.25	0.43
Max Drawdown	-5.34%	-8.11%

TABLE 23 – Active management diagnostics (Strategy C relative to Strategy A)

Metric	Value
Information Coefficient (IC, weekly)	0.1363
Alpha (annualized)	2.68%
Tracking Error (annualized)	8.62%
Information Ratio (IR)	0.3107
Breadth (BR, trades/year)	18.5
IR predicted by FLAM ( $IC\sqrt{BR}$ )	0.5862
FLAM gap ( $IR - IR_{pred}$ )	-0.2755
Implied effective breadth ( $IR/IC$ ) <sup>2</sup>	5.20

## F Extension : Filtre de Kim

### F.1 Paramètres estimés du modèle Markov-switching

TABLE 24 – Paramètres MLE du Model III (Kim filter) sur les deux paires.

Paire	$\theta_1$	$q_1$	$q_2$	$\sigma_2/\sigma_1$	$p_{11}$ (durée $D_1$ )	$p_{22}$ (durée $D_2$ )
PEP–KO	0.9876	$9.60 \times 10^{-5}$	$8.39 \times 10^{-4}$	2.96	0.9459 (18.5j)	0.6225 (2.6j)
EWT–EWH	0.9990	$4.83 \times 10^{-5}$	$2.00 \times 10^{-4}$	2.04	0.9718 (35.5j)	0.7906 (4.8j)

Notes :  $E[D_1] = 1/(1 - p_{11})$  et  $E[D_2] = 1/(1 - p_{22})$ . Le ratio  $\sigma_2/\sigma_1 = \sqrt{q_2/q_1}$ .

### F.2 Performances : comparaison avec Zhang (2021)

### F.3 Détection des régimes : illustrations

TABLE 25 – Performance annualisée : comparaison entre Model I, Model II (Zhang, 2021) et Model III (Kim).

Paire	Strat.	Model I (Zhang)			Model II (Zhang)			Model III (Kim)		
		Ret	Std	SR	Ret	Std	SR	Ret	Std	SR
PEP-KO	A	0.0456	0.1189	0.2152	0.0372	0.0616	0.2795	0.1984	0.1984	0.8992
	B	0.1916	0.2240	0.7662	0.1897	0.2216	0.7658	0.2603	0.2169	1.1079
	C	0.1846	0.1310	1.2563	0.1812	0.1259	1.2807	0.0378	0.1094	0.1626
EWT-EWH	A	0.0521	0.0873	0.3677	0.0579	0.0655	0.5784	0.1121	0.1013	0.9087
	B	0.0936	0.1399	0.5258	0.0675	0.0909	0.5225	0.1144	0.1307	0.7224
	C	0.0974	0.0567	1.3648	0.0562	0.0376	0.9637	0.0358	0.0569	0.2784

Notes : Ret = rendement annualisé, Std = volatilité annualisée, SR = Sharpe (taux sans risque fixé conformément au protocole du notebook). Les valeurs Model III (SR) sont cohérentes avec les variations relatives affichées vs le meilleur benchmark I/II.



FIGURE 18 – PEP-KO : spread observé vs état filtré (Kim), probabilité de stress  $P(S_t = 2 | \mathcal{Y}_t)$ , et validation par volatilité réalisée (21 jours).

TABLE 26 – Tests de validation de la VaR conditionnelle (Kim Filter)

Paire	Violations	Attendu	Kupiec (p-val)	Christoffersen (p-val)
PEP-KO	960 / 1883	94.2	0.000	0.733
EWT-EWH	32 / 1842	92.1	0.000	0.002

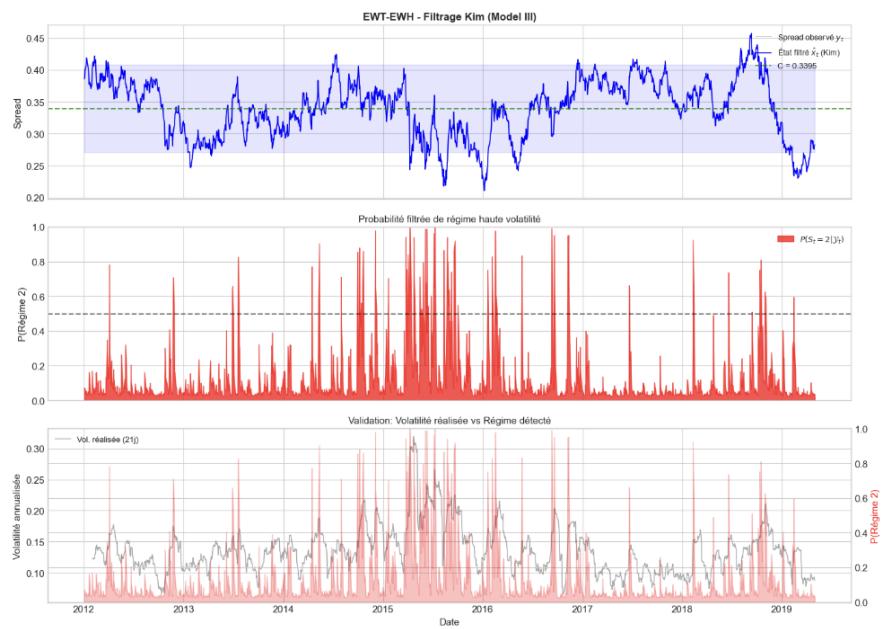


FIGURE 19 – EWT–EWH : spread observé vs état filtré (Kim), probabilité de stress  $P(S_t = 2 | \mathcal{Y}_t)$ , et validation par volatilité réalisée (21 jours).