

## Resumen

El presente trabajo de fin de Master tiene como finalidad implementar un prototipo de cuello robótico de dos grados de libertad. Principalmente se pretende investigar, estudiar y diseñar un mecanismo que permita simular los movimientos de un cuello humano concretamente los movimientos de: flexión y extensión, y doblado lateral. Para obtener estos movimientos se realiza el diseño basándose en un mecanismo de cables conductores validándolo en un software CAD, mediante el cual permitirá obtener el bosquejo de los componentes que conforma el cuello flexible y posteriormente su fabricación en una impresora 3D.

Otro aspecto importante para el desarrollo del proyecto es el peso de carga que puede el cuello flexible soportar, para dimensionar los motores que se necesita para el funcionamiento del mecanismo paralelo. Además, se realiza el análisis del modelo matemático para el sistema de control que se implementara en un trabajo futuro.

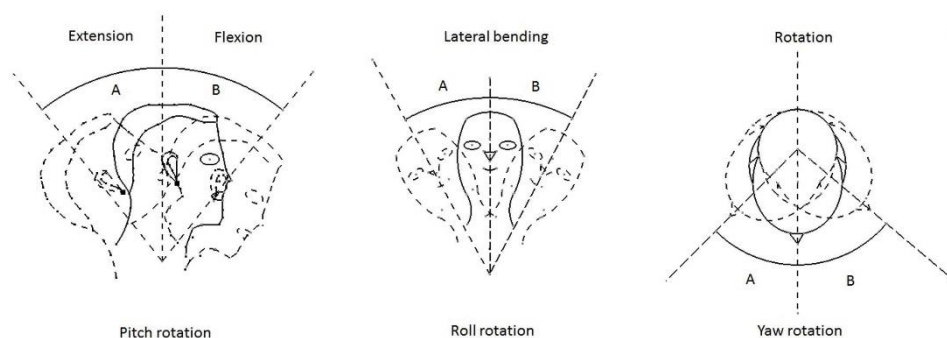
## Capítulo 1

### Introducción

Basándose en los movimientos del cuello humano se realizará un análisis de los diferentes mecanismos que permitirán emular los movimientos de un cuello, dando énfasis que el prototipo debe ser tamaño pequeño, fácil ensamblaje y de fácil trasportabilidad.

#### 1.1 Cuello Humano

La dimensión media del cuello humano lo establece Haley (1988), donde la circunferencia media del cuello varía de 36.5 a 40.6 cm. Mientras tanto, la longitud media del cuello varía de 8,3 a 8,5 cm. Los movimientos del cuello humano que incluyen flexión / extensión (pitch), rotación vertical (yaw) y flexión lateral (roll rotation) (Fitzpatrick, 2010). El movimiento de flexión con un rango canónico de  $50^\circ$  permite que la cabeza se doble hacia adelante, mientras que la extensión tiene un alcance de  $57.5^\circ$  asegura que la cabeza se incline hacia atrás. Estos dos movimientos se pueden permitir la rotación más bajo del cuello. La rotación vertical del cuello se describe como girar el movimiento de la cabeza hacia la derecha y hacia la izquierda. El rango de rotación es de  $70^\circ$ , comenzando desde el eje principal de la cabeza. La flexión lateral es el movimiento que permite que la cabeza se doble hacia el hombro. El ángulo de flexión del movimiento es de  $45^\circ$ . Esto se llama rotación del rodillo. Todos estos movimientos se muestran en la Figura 1.1



**Figura 1.1** Movimientos de cuello humano

## 1.2 Mecanismos accionados por cables

Los manipuladores de robótica, como muchas otras tecnologías, tienen sus raíces en los mecanismos vivientes. La idea del brazo humano debe haber sido una de las primeras motivaciones para que los investigadores desarrollen manipuladores de estructura seriada para mejorar la capacidad de un ser humano para una manipulación más eficiente de los objetos. Además, los errores del actuador, en estos manipuladores, se acumulan y, por lo tanto, la precisión de posicionamiento es relativamente pobre. La naturaleza ya ha resuelto estos problemas con otra configuración en miembros vivos tales como el cuello y el ojo que se controlan con varios músculos que trabajan en paralelo.

Los humanos usan tres dedos en paralelo para movimientos rápidos y de alta precisión, como la escritura. Un manipulador paralelo es una solución alternativa para aplicaciones que requieren una gran capacidad de carga y un posicionamiento preciso. En estos manipuladores, dado que los actuadores funcionan en paralelo, la carga se comparte y el error no se acumula. Además, la rigidez de tales manipuladores es significativamente mejor que la de los robots en serie. Sin embargo, estos manipuladores son más complejos de analizar y diseñar, y tienen una relación de espacio de impresión de área de trabajo relativamente más grande. Los robots basados en cables poseen varias ventajas (Saeed Behzadipour and Amir Khajepour) sobre los mecanismos convencionales de uniones rígidas en serie o paralelo, que incluyen:

1. **Espacio de trabajo grande:** Un torno activo puede proporcionar una gama grande de cambio de longitud sobre los. Esto facilita la construcción de manipuladores para espacios de trabajo muy grandes que otros robots no pueden obtener.
2. **Baja inercia:** los materiales proporcionan su mayor relación de resistencia a masa cuando están bajo carga de tracción. El uso de cables, que solo pueden estar en tensión, maximiza el uso de la resistencia del material y, por lo tanto, reduce la masa y la inercia del manipulador. La baja inercia es deseable en muchas aplicaciones, incluida la robótica de alta velocidad / aceleración.
3. **Simplicidad en la estructura:** los cables simplifican la estructura del robot al utilizar la flexibilidad como uniones cinemáticas reduciendo el costo de fabricación al minimizar el proceso de mecanizado.
4. **Reconfiguración y transportabilidad:** los ensamblajes del mecanismo pueden simplemente reubicarse para reconfigurar y ajustar el espacio de trabajo de un manipulador accionado por cable. La facilidad de montaje / desmontaje de estos manipuladores también facilita su transporte y configuración rápida.
5. **Actuación completamente remota:** utilizando un manipulador totalmente movido por cable, todos los actuadores y partes sensibles están ubicados lejos del efector final y el área de trabajo real. Dichos manipuladores se adaptan mejor a ambientes peligrosos o peligrosos.

## 1.3 Objetivos

Investigar el estado del arte con respecto a los cuellos robóticos existentes.

Diseñar y construir un cuello robótico de 2DOF bajo criterios de simplicidad, flexibilidad y transportabilidad.

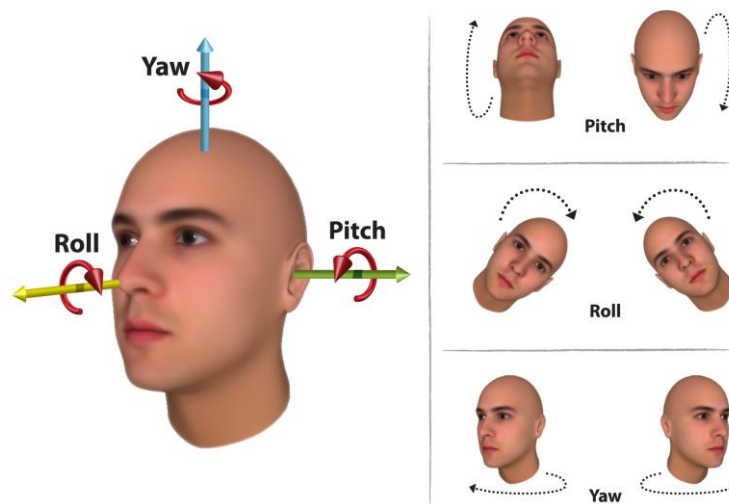
Obtener la cinemática inversa del mecanismo mediante la orientación de los ángulos de Euler

Realizar el montaje y validar el correcto funcionamiento del prototipo, resultados obtenidos deben servir de base para trabajos futuros que permita completar

## Capítulo 2

### Estado del arte

Los principios de los movimientos de la cabeza humana se han estudiado ampliamente en el campo de la biomecánica. Los estudios clínicos muestran que el movimiento de la cabeza se basa en la porción cervical de la columna vertebral humana, que contiene siete vértebras cervicales [1]. Cada vértebra tiene 6DOF, desde el punto de vista práctico, los investigadores toman el cuello general como 3DOF: flexión de la cabeza hacia adelante (flexión) y hacia atrás (extensión), doblando la cabeza hacia la izquierda y derecha, y girando la cabeza hacia la izquierda y derecho, o se puede llamar pitch, roll y yaw, respectivamente. Muchos mecanismos de cuello humanoide se han diseñado en la última década, la mayoría de los cuales se presentan en el contexto de robots humanoides. Los dividimos a todos en dos categorías: serie y paralelo. El cuello en serie es ampliamente utilizado debido a su estructura simple y fácil control, ya que cada DOF del cuello se acciona de forma independiente.



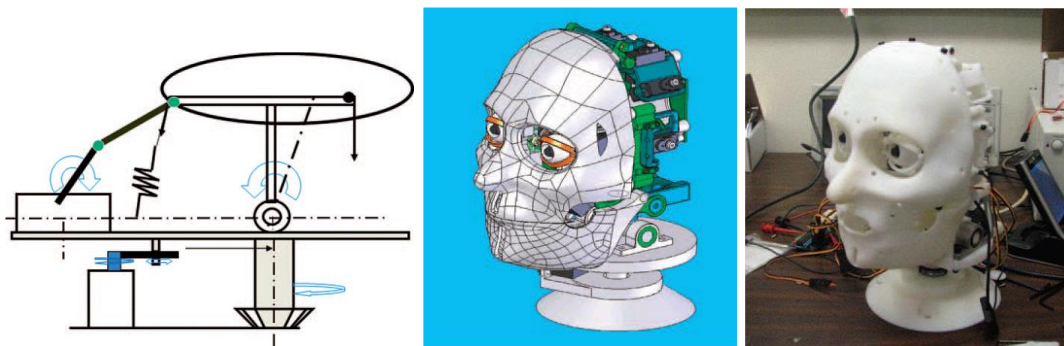
**Figura 2.1** Orientación del cuello humano en términos de pitch, roll and yaw.

### 2.1 Cuellos robóticos en serie

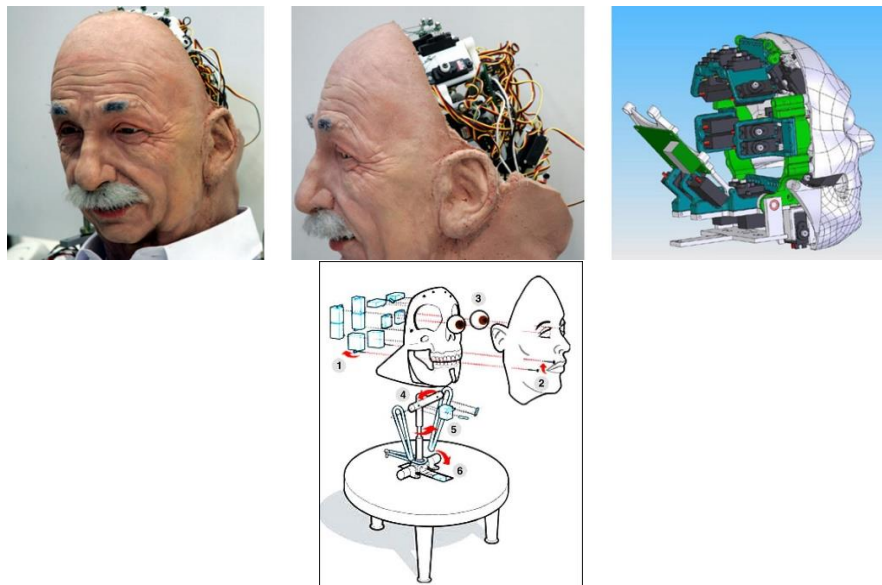
El HRP-4 [2] y Honda ASIMO-2002 [3] tienen cuellos en serie con 2 DOF (pitch, yaw). Un cuello robótico de cuatro barras [4] también tienen dos DOF. El Albert HUBO [5], el Dav [6] y el diseño final de iCub [7] tienen cuellos en serie con 3DOF. Los robots desarrollados en [8-13] tienen cuellos en serie con 4DOF en los que se considera un DOF de cabeceo independiente.



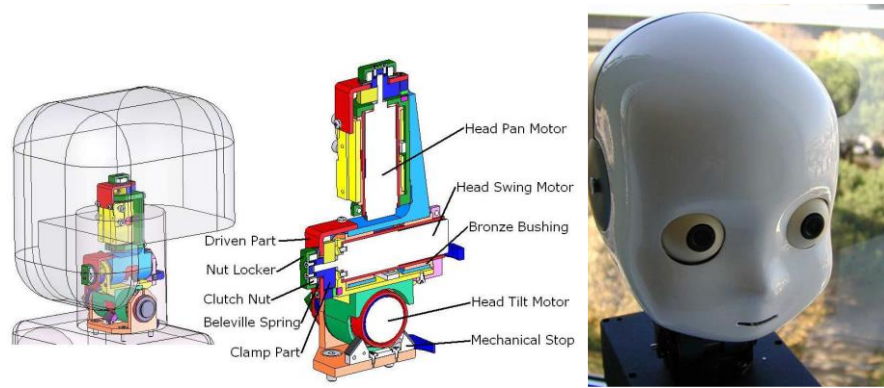
**Figura 2.2** Robot Humanoide con cuello de 2DOF, (a) HRP4 [2], (b) Honda ASIMO [3].



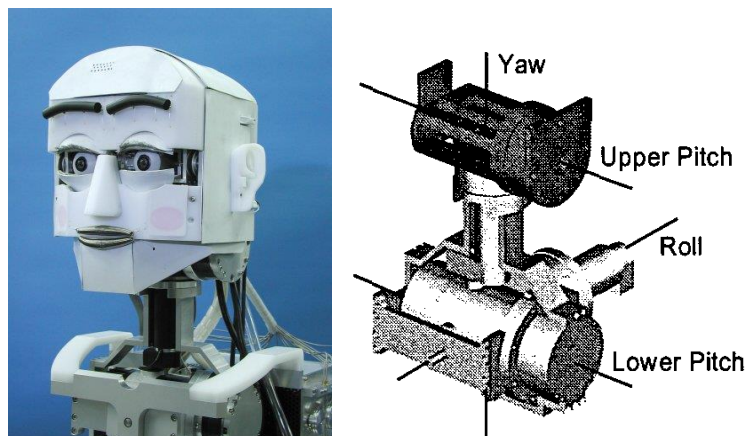
**Figura 2.3** Cuello humanoide de 4 barras de 2 DOF, (a) diagrama esquemático del mecanismo, (b) modelo CAD, (c) prototipo [4].



**Figura 2.4** Cabeza androide de Albert HUBO de 3 DOF[5].

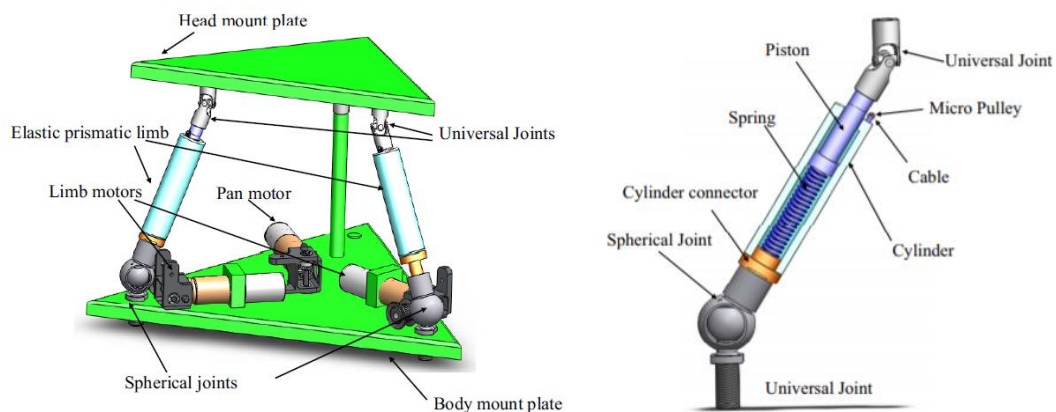


**Figura 2.5** Cabeza del Robot-Cub de 3 DOF [7], (a) modelo CAD del mecanismo en serie, (b) prototipo final de la cabeza.



**Figura 2.6** Cuello del Robot WE-4 con 4DOF [8], (a) Cabeza del robot, (b) Mecanismo del cuello.

El robot iCub tiene dos cuellos paralelos similares serie. El primero usa un resorte como columna y tres cables accionados; el segundo usa un manipulador paralelo 3DOF con una columna pasivo central [7]. El robot humanoide James [16, 17] también tiene una cabeza similar al primer cuello paralelo de iCub. Otro mecanismo de cuello paralelo basado en dos miembros elásticos impulsados por cable y una extremidad pasiva sin columna central se propone en [18].



**Figura 2.7** Cuello humanoide con mecanismo paralelo accionado con cables conductores [18]



Cada miembro activo tiene una conexión de articulación esférica universal-prismática. La Figura 2.7 muestra una representación CAD de una extremidad elástica accionada por cable. Un pistón se inserta en un cilindro hueco y se empuja contra un resorte precargado. El cable (no se muestra) se ejecuta desde la polea motorizada se conecta a la base del pistón interno. Cuando el motor enrolla el cable, el pistón se extiende y cuando el motor suelta el cable, el pistón se retrae. El resorte proporciona la fuerza de retracción. Todos los motores están fijos en la base, por tanto, la inercia de la parte móvil es pequeña.

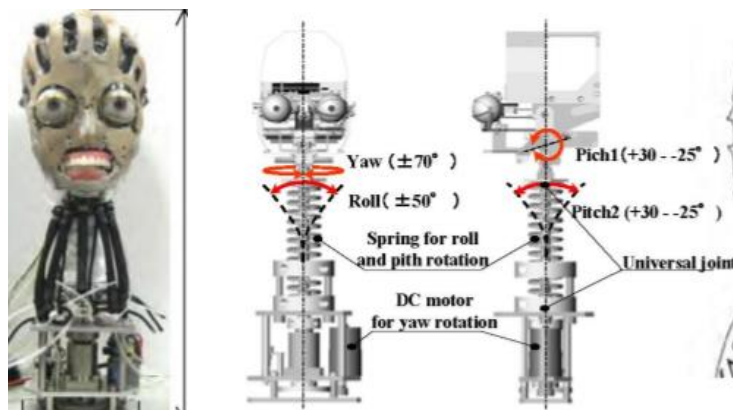
## 2.2 Cuellos Robóticos en paralelo

Estos cuellos están basados en un manipulador paralelo, que consiste en una plataforma móvil, una base fija, varias cadenas activas idénticas y una columna vertebral pasiva si es necesario [14], este mecanismo realiza tiene 4 cables conductores y realiza 2 DOF de un cuello humano (pitch,roll).



**Figura 2.8** Cuello humano inspirado en un mecanismo paralelo conducido por cables, de 2 DOF [14].

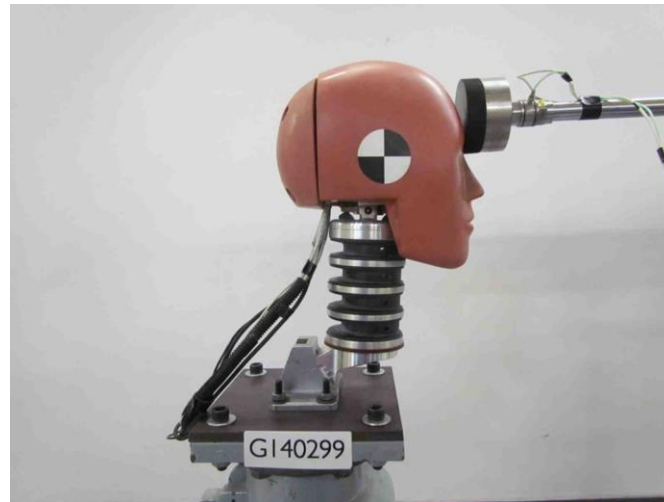
El mecanismo de cabeza de SAYA se basa en un resorte central y varios músculos artificiales neumáticos [15].



**Figura 2.9** Cuello humano del robot SAYA [15].

### 2.3 Aplicaciones

Una aplicación importante del cuello robótica se presenta en el Hybrid III [16] que es un maniquí de prueba de choque más utilizado en el mundo para la evaluación de sistemas de seguridad automotriz en las pruebas de choque frontal. Originalmente desarrollado por General Motors, el diseño Hybrid III ahora es mantenido y desarrollado por Humanetics junto con los Comités de Biomecánica de la Sociedad de Ingenieros Automotrices (SAE) y la Administración Nacional de Seguridad y Transporte de Carreteras (NHTSA) de Estados Unidos.

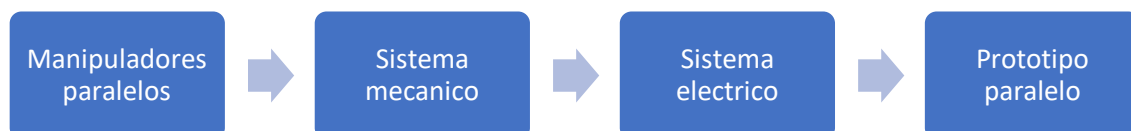


**Figura 2.10** Configuración general de la cabeza y cuello del Hybrid III [16]

## Capítulo 3

### Diseño del prototipo

El prototipo que se presenta a continuación es el resultado de la investigación previa que se realizó sobre robots, enfocando en la configuración de robots paralelos, así como del estado del arte de los cuellos robóticos. Se puede clasificar el desarrollo del prototipo en un diagrama de bloques que incluyen 4 categorías principales, tal como se muestra en la esquema.



### 3.1 Manipuladores paralelos

Un manipulador o mecanismo paralelo en una definición generalización es un mecanismo de cadena cinemática de bucle cerrado cuyo efector final está unido a la base por varias cadenas cinemáticas independientes.

#### 3.1.1 Estructura general del mecanismo paralelo manejado por cable (CDPM)

La estructura general de estos manipuladores incluye una plataforma base, una plataforma móvil o efector final, una columna central extensible o telescópica que conecta la base con la plataforma móvil para aplicar una fuerza de empuje a las plataformas. La columna central puede aplicar la fuerza mediante un actuador (activo) o resorte o pistones (pasivo). Los manipuladores robóticos utilizan una combinación de elementos tensores activos y pasivos (cables), y enlaces rígidos para maximizar los beneficios tanto del cable puro como de los mecanismos paralelos convencionales.

La configuración general de los manipuladores basados en cables estudiados en este artículo. se muestra en la figura 1.2. Los cuatro elementos principales de estos manipuladores son:

1. Base: la parte fija del manipulador al que pertenece el sistema global de coordenadas OXYZ
2. Efector final: el cuerpo móvil que lleva el marco móvil O'X'Y'Z'.
3. Cables: elementos flexibles con masa y diámetro insignificantes conectado de un extremo al efector final en los puntos  $P_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) y tirado del otro extremo en  $Q_i$ . El actuador de tracción produce tensión  $t_i$  dentro del cable y puede ser simplemente un torno que tira y enrolla el cable o un mecanismo separado que mueve el extremo del cable ( $Q_i$ ) sin cambiar su longitud. Los vectores unitarios  $u_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) determinan la dirección de los cables y apuntan hacia la base. Dependiendo de la estructura del manipulador, puede haber algunas poleas adicionales para guiar los cables. El número de cables,  $m$ , es igual a la dimensión del espacio de movimiento del cuerpo móvil.
4. Columna central: elemento que produce una fuerza entre la base y el cuerpo móvil para mantener todos los cables en tensión. La columna vertebral puede ser un elemento activo que genere una fuerza deseada. También puede ser un elemento pasivo, como un cilindro neumático o un resorte de compresión diseñado adecuadamente para proporcionar la fuerza suficiente requerida para mantener la tensión en los cables. La dirección de la columna vertebral se muestra por unidad de vector  $w$  apuntando hacia el efector final.



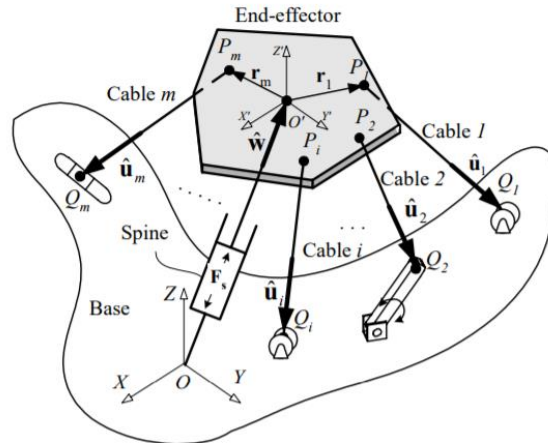


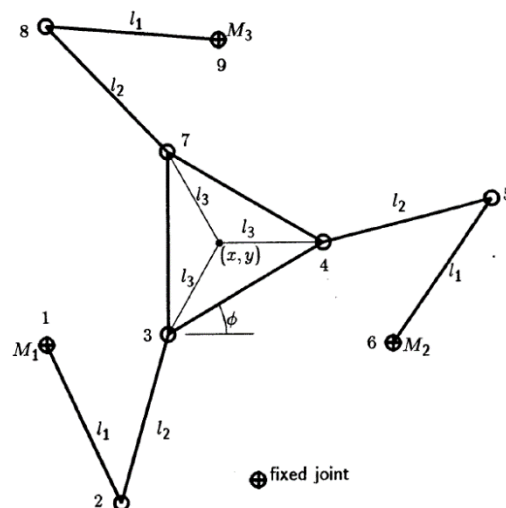
Figura 3.1 Configuración general de un mecanismo conducido por cables

Los diferentes manipuladores robóticos utilizan solo cables activos, solo cables pasivos o combinaciones de cables activos y pasivos. Un cable activo es aquel cuya longitud varía por medio de un cabrestante. Un cable pasivo es una longitud constante y que se utiliza para proporcionar una tensión mecánica constante. Estos mecanismos reducen la inercia móvil de manera significativa para mejorar la velocidad operativa de los robots. También proporcionan una forma más simple y rentable de fabricar mecanismos paralelos para su uso en aplicaciones robóticas.

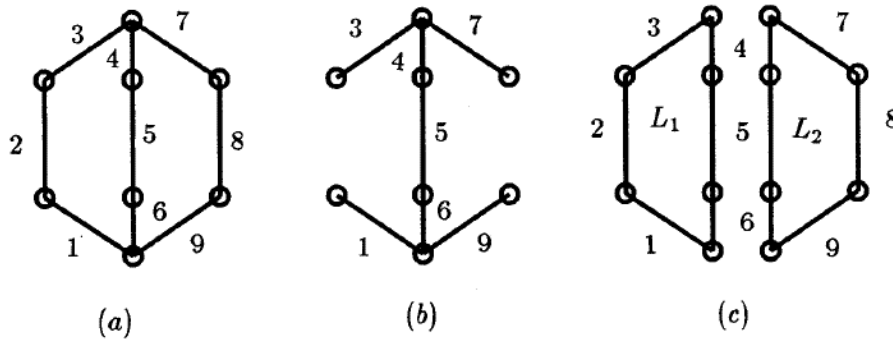
Este tipo de mecanismo es interesante por las siguientes razones:

- un mínimo de dos cadenas nos permite distribuir la carga en las cadenas
- la cantidad de actuadores es mínima.
- la cantidad de sensores necesarios para el control de bucle cerrado del mecanismo es mínima.
- cuando los actuadores están bloqueados, el manipulador permanece en su posición; este es un aspecto de seguridad importante para ciertas aplicaciones, como la robótica médica.

### 3.1.2 Manipuladores totalmente paralelos. [186]



**Figure 3.2** Manipulador paralelo planar de 3DOF.



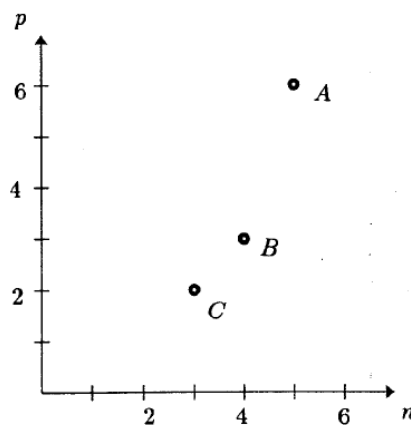
**Figura 3.3** (a) Gráfico asociado con el manipulador que se muestra en la figura 3.4 (b) un árbol de expansión y (c) los bucles independientes correspondientes.

Ante todo, la representación gráfica de los manipuladores paralelos siempre es del tipo que se muestra en la figura 3.3(a). El gráfico está compuesto por un conjunto de caminos paralelos que conectan dos polos, siendo los polos el enlace de base y la pinza. Por lo tanto, estos dos enlaces son los únicos que tienen un grado de conectividad mayor o igual a tres. El número de uniones en cada una de las rutas paralelas y el número de caminos puede variar.

Gosselin caracteriza a los manipuladores completamente paralelos por la ecuación;

$$p(n - 6) = -6p \quad (2.1)$$

donde  $p$  representa el número de grados de libertad (DOF) y  $n$  el número de cuerpos rígidos dentro de una cadena, la solución de esta ecuación es físicamente significativo, es decir, los que corresponden a manipuladores factibles, se muestran en la figura 3.4. El punto A está asociado con el conocido dispositivo paralelo de seis grados de libertad denominado plataforma Stewart (Stewart, 1965). Punto B, a su vez, corresponde a un manipulador de tres grados de libertad como, por ejemplo, la parte paralela del manipulador AR TISAN estudiado en el Capítulo 4. El punto C está asociado con una cadena cinemática cerrada simple de dos grados de libertad.

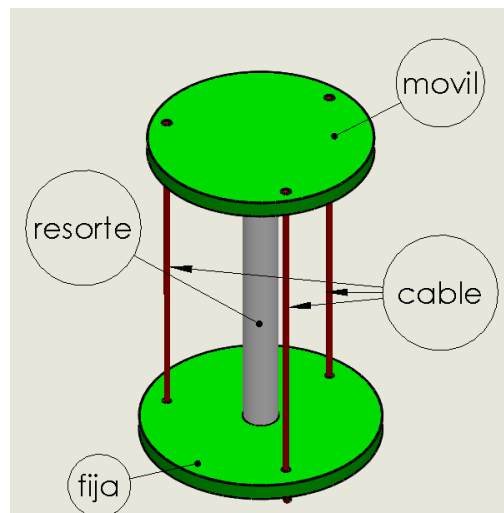


**Figura 3.4** Manipuladores totalmente paralelos.

Ahora, tomando como objetivo del proyecto en alcanzar los 2 DOF del prototipo a desarrollar, se resuelve la ecuación (1.1) para obtener el número de cables conductores del que necesita para obtener un mecanismo paralelo totalmente definido, considerando como  $p=2$ , se obtiene  $n=3$ , por lo tanto, se necesita 3 cables conductores para obtener un manipulador paralelo de 2DOF.

### 3.2 Sistema Mecánico

En el numeral 3.1.2 se concluyó que para un mecanismo paralelo conducido por cables se necesita 3 cables, en la figura 3.5 se presenta un bosquejo general del prototipo a diseñar.



**Figura 3.5** Bosquejo general del mecanismo paralelo.

#### 3.2.1 Diseño del resorte

Se utilizará como columna central un resorte el cual debe estar diseñado adecuadamente para proporcionar la fuerza suficiente requerida para mantener la tensión en los cables.

Primeramente, se realizará el cálculo necesario cuando el resorte tenga que soportar una carga de 1 kg para que el resorte se comprima lo menos posible para obtener el desplazamiento asociado a un resorte helicoidal de compresión se recurre al Teorema de Castigliano, utilizando los aportes energéticos debidos a la torsión y al cortante, y se obtiene la energía de deformación en un resorte de compresión como:

$$U = \frac{T^2 L}{2GJ} + \frac{F^2 L}{2AG} \quad (3.1)$$

Donde

$T$  = momento de torsión

$L$  = Longitud del resorte

$J$  = momento de inercia

$A$  = Área del resorte

$F$  = Fuerza cortante

$G$ = Límite elástico por cortadura

Usando el teorema de Castigliano, se conoce que la deflexión es la derivada de la energía de deformación respecto a la fuerza

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial F} \quad (3.2)$$

Después, de derivar la ecuación (3.1) la ecuación que describe la deflexión del resorte se puede aproximar a la siguiente ecuación.

$$\delta = \frac{8FD^3N_a}{Gd^4} \quad (3.3)$$

Donde:

$\delta$ = deformación de compresión.

$D$ =diámetro del resorte (hélice)

$d$ = diámetro del alambre

$N_a$ =número de espiras

Se tomará en cuenta como material del resorte el Alambre de piano ASTM A228 con sus respectivas características de la tabla 1, y como datos los valores de la tabla 2 y considerando como incógnita a obtener será el diámetro del resorte  $D$ .

Material	Límite elástico, porcentaje de $S_{utr}$ tensión, torsión		Diámetro $d$ , pulg	$E$		$G$	
				Mpsi	GPa	Mpsi	GPa
Alambre de piano A228	65-75	45-60	<0.032	29.5	203.4	12.0	82.7
			0.033-0.063	29.0	200	11.85	81.7
			0.064-0.125	28.5	196.5	11.75	81.0
			>0.125	28.0	193	11.6	80.0
Resorte estirado duro A227	60-70	45-55	<0.032	28.8	198.6	11.7	80.7
			0.033-0.063	28.7	197.9	11.6	80.0
			0.064-0.125	28.6	197.2	11.5	79.3
			>0.125	28.5	196.5	11.4	78.6
Templado en aceite A239	85-90	45-50		28.5	196.5	11.2	77.2
Resorte de válvula A230	85-90	50-60		29.5	203.4	11.2	77.2
Cromo vanadio A231	88-93	65-75		29.5	203.4	11.2	77.2
A232	88-93			29.5	203.4	11.2	77.2
Cromo silicio A401	85-93	65-75		29.5	203.4	11.2	77.2
Acero inoxidable							
A313*	65-75	45-55		28	193	10	69.0
17-7PH	75-80	55-60		29.5	208.4	11	75.8
414	65-70	42-55		29	200	11.2	77.2
420	65-75	45-55		29	200	11.2	77.2
431	72-76	50-55		30	206	11.5	79.3
Bronce fosforado B159	75-80	45-50		15	103.4	6	41.4
Cobre al berilio B197	70	50		17	117.2	6.5	44.8
	75	50-55		19	131	7.3	50.3
Aleación inconel X-750	65-70	40-45		31	213.7	11.2	77.2

Tabla 1. Propiedades mecánicas de algunos alambres para resorte[Shigley]

$\delta$ (m)	$d$ (mm)	$N_a$ (vueltas)	$F$ (N)	$G$ (GPa)	$E$ (GPa)
0,001	3	15,6	9,8	80	200

Tabla 2. Datos para calcular el diámetro del resorte  $D$ .

Despejando de la ecuación 3.3 la variable  $D$  y reemplazando con los datos de la Tabla 1 y 2 se obtiene como diámetro del resorte  $D=30\text{mm}$ , una ilustración en general el resorte a utilizar tendrá un bosquejo como en la figura 3.6

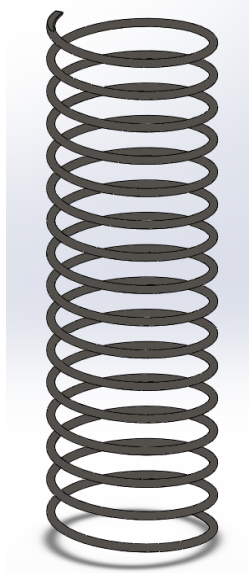


Figura 3.6 Diseño del resorte a utilizar.

### 3.2.2 Validación del resorte

Considerando en el apartado 1.1 el ángulo de flexión máximo de un cuello humano es de 45 grados, por lo que en este proyecto se considerara como ángulo máximo de inclinación de 40 grados.

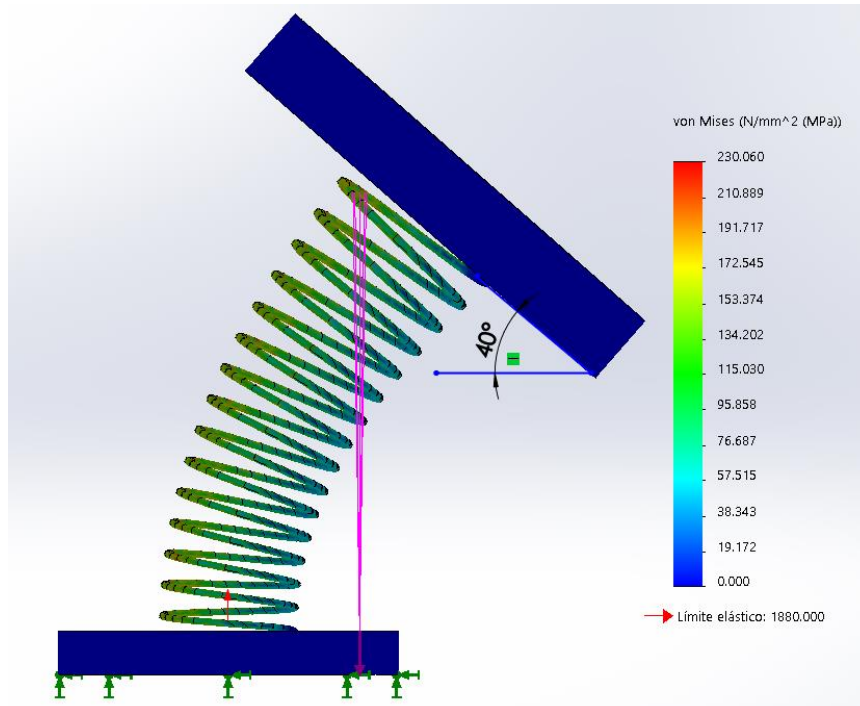


Figura 3.7 Estudio de tensión para validación del resorte.

Para validar el diseño del resorte se realiza un estudio de tensión en un software CAD para observar si al aplicar una fuerza al obtener la inclinación máxima que alcanza el

prototipo, tomando en consideración que el limite elástico del acero A228 que está hecho el resorte es de 2000 Mpa (Tabla 2) para d=3mm, al realizar el estudio de tensión como se observa en la figura 3.7 para alcanzar un ángulo de inclinación de 40° el resorte que actúa como columna central podrá recuperar su estado inicial ya que el limite elástico simulado no supera al teórico, pero se debe considerar que en los extremos del resorte será donde se aplicará mas esfuerzo como se observa en la figura 3.8.

Diametro, mm	Resistencia a la Tension, MPa		Diametro, mm	Resistencia a la Tension, MPa		Diametro, mm	Resistencia a la Tension, MPa		Diametro, mm	Resistencia a la Tension, MPa	
	minimo	maximo		minimo	maximo		minimo	maximo		minimo	maximo
0,10	3027	3344	0,56	2379	2634	1,50	2041	2255	3,18	1800	1986
0,13	2937	3247	0,61	2351	2599	1,60	2020	2234	3,30	1786	1972
0,15	2861	3165	0,66	2324	2572	1,70	1999	2213	3,43	1779	1765
0,18	2806	3096	0,71	2296	2537	1,83	1979	2186	3,56	1765	1951
0,20	2751	3041	0,76	2275	2517	1,93	1958	2165	3,68	1751	1937
0,23	2710	2992	0,81	2255	2489	2,03	1944	2151	3,81	1744	1924
0,25	2668	2951	0,86	2234	2468	2,16	1924	2124	3,96	1731	1910
0,28	2634	2910	0,91	2213	2448	2,29	1903	2103	4,11	1717	1896
0,30	2599	2875	0,97	2193	2427	2,41	1889	2089	4,50	1689	1862
0,33	2572	2841	1,02	2172	2406	2,54	1868	2068	4,88	1662	1841
0,36	2544	2813	1,07	2158	2386	2,59	1862	2062	5,26	1641	1820
0,38	2517	2785	1,14	2130	2358	2,72	1848	2041	5,72	1620	1793
0,41	2496	2758	1,22	2110	2337	2,79	1841	2034	6,35	1586	1758
0,46	2455	2710	1,30	2089	2310	2,84	1834	2027			
0,51	2413	2668	1,40	2068	2282	3,07	1813	1999			

Tabla 3. Tabla de resistencia para acero ASTM A228 [Spring Works INC]

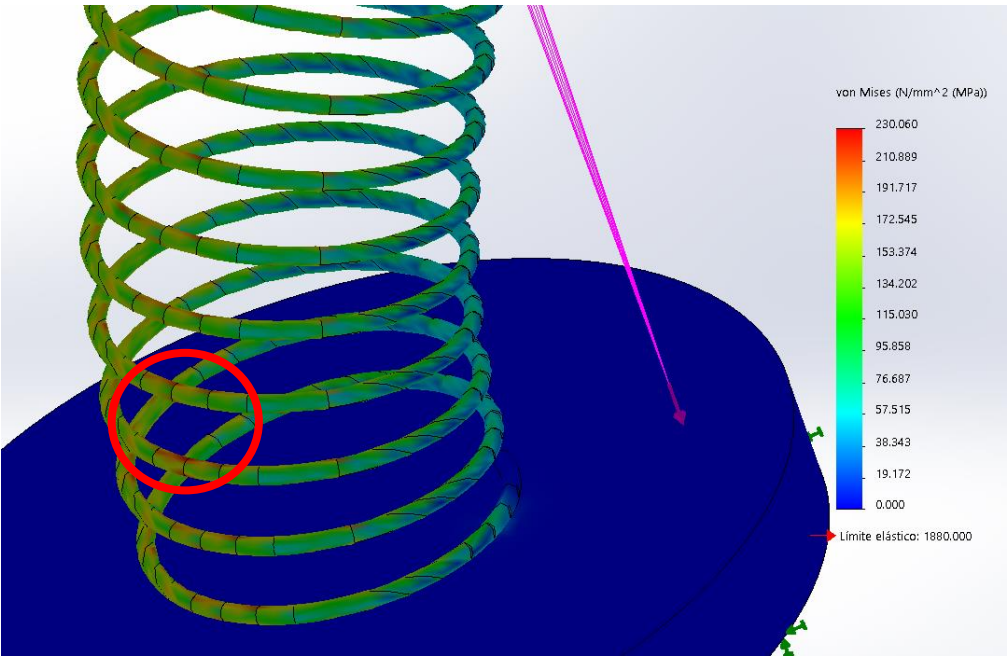
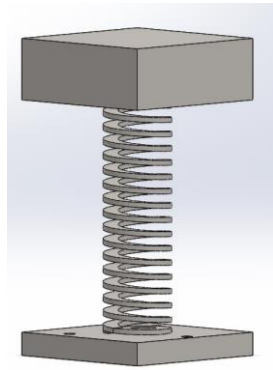


Figura 3.8 Zona del resorte donde se aplica el esfuerzo máximo.

Se deberá considerar si el resorte va perdiendo su elasticidad, reemplazar por un resorte con un perfil rectangular figura 3.9 dado que este diseño sirve para soportar grandes esfuerzos.





**Figura 3.9** Alternativa con un resorte rectangular

### 3.2.2 Fuerza de tensión del cable

Una vez diseñado el resorte, se necesita saber la fuerza necesaria para que el mecanismo llegue al ángulo de inclinación deseada, por deducción la fuerza máxima se conseguirá cuando el mecanismo alcance los 40° de inclinación que anteriormente se definió como el ángulo máximo de flexión del resorte,

Para realizar el estudio de la fuerza se basará en el análisis estático [development] del mecanismo con 1DOF, inspirado en el movimiento de flexión del cuello humano desarrollando un análisis sobre el pandeo lateral del cuello robótico con la teoría de elasticidad al considerar el resorte como una barra prismática en el cambio en la longitud del resorte.

El mecanismo de movimiento de cabeceo y alabeo (pitch/roll) del cuello humanoide es un práctico problema de pandeo lateral de resortes helicoidales comprimidos, como se trata en el artículo de Wittrick [16]. Timoshenko [17] investigó coeficiente de deflexión de compresión, lateral y de corte de un resorte helicoidal para explicar los límites de estabilidad, además Timoshenko [17] también señaló que el pandeo lateral de un resorte comprimido en espiral puede estudiarse con los mismos métodos que las barras prismáticas, pero considerando el cambio en la longitud del resorte debido a la compresión.

Las siguientes anotaciones del resorte helicoidal son:

$L_0$  es la longitud inicial del resorte

$n$  es el número de espiras;

$r$  es el radio de la hélice

$L$  es la longitud del muelle después de la compresión

$I$  es el momento de inercia de la sección transversal del cable con respecto a su diámetro

$\alpha_0$ ,  $\beta_0$ ,  $\gamma_0$  son los coeficientes de rigidez compresión, flexión y corte del resorte helicoidal sin carga

$\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , son las rigideces del resorte cargado

Timoshenko [17] declara que el número de espiras por unidad de longitud del resorte aumenta por el factor  $L_0/L$  cuando el resorte está comprimido. Por lo tanto, las rigideces disminuyen por el factor  $I / I_0$ , por lo tanto, se tiene:

$$\alpha = \alpha_0 \frac{L}{L_0}, \quad \beta = \beta_0 \frac{L}{L_0}, \quad \gamma = \gamma_0 \frac{L}{L_0} \quad (3.4)$$

Donde rigidez a la compresión, flexión y cote puede ser calculados respectivamente por:

$$\alpha_0 = \frac{GIL_0}{\pi nr^3}, \quad \beta_0 = \frac{2EGIL_0}{\pi nr(E+2G)}, \quad \gamma_0 = \frac{EIL_0}{\pi nr^3} \quad (3.5)$$

La flexión lateral de un resorte se presenta en la figura 3.10. Además, se toma en cuenta como una masa puntual  $m_0$  la carga total desde del centro de la base móvil, el mecanismo es impulsado por 2 cables que aplican las tensiones  $T_1$  y  $T_3$  y que están ubicados desde una distancia  $a$  medida desde el centro de la base móvil, y a su vez estos cable pasan por la placa fija a una distancia  $b$  medido desde el centro de la base.

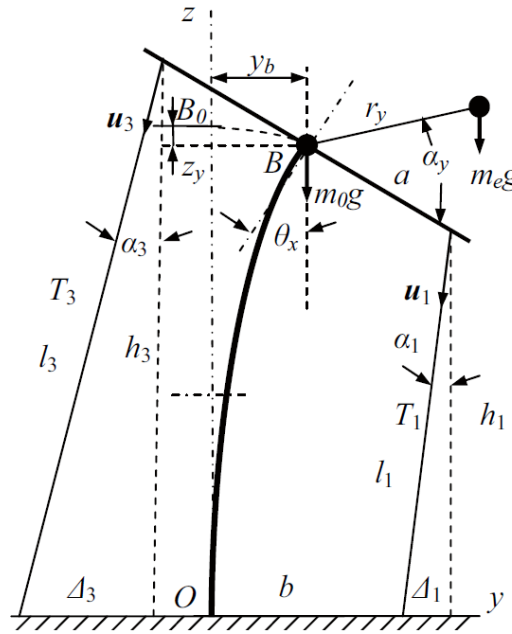


Figura 3.10 Modelo de la flexión lateral del mecanismo paralelo conducido por cables (CDMP)

Como ya se dijo anteriormente al resorte se lo estudiara como una viga prismática, por lo que el momento de pandeo en cualquier parte de la sección transversal del resorte es  $M$  y mediante desarrollos matemáticos se sabe que la curvatura de desviación está dada por la ecuación:

$$\beta \frac{\frac{d^2 y}{dz^2}}{(1 + (\frac{dy}{dz})^2)^{\frac{3}{2}}} = M \quad (3.6)$$

El momento total  $M$  aplicado en la flexión del resorte consta de 4 partes:

- $M_{m0}$ : Torque generado por la masa de la base fija
- $M_{me}$ : Torque generado por la carga útil externa.
- $M_{T1}$  y  $M_{T3}$ : Torque generado por las tensiones de los cables  $T_1$  y  $T_3$

Para pequeñas deflexiones pequeñas la ecuación (3.6) puede ser escrita como un caso lineal:

$$\beta \frac{d^2 y}{dz^2} = M \quad (3.7)$$

La cabeza humana adulta puede inclinarse más de 40 grados de deflexión, el movimiento de la cabeza generalmente en nuestra vida diaria no es más que 15 grados [development]. Por tanto, es factible usar la ecuación lineal (3.7) para analizar el modelo estático del mecanismo CDPM planteado en este proyecto. Considerando las condiciones iniciales:

$$(y)_{z=0} = 0, \left( \frac{dy}{dz} \right)_{z=0} = 0, \quad (3.8)$$

La solución general de la ecuación (3.7) es la siguiente:

$$y = (y_b + a_0)(1 - \cos wz) - \frac{a_1}{w} \sin wz + a_1 z, \quad (3.9)$$

Donde:

$$w = \sqrt{\frac{m_0 g + m_y g + T_1 \cos \alpha_1 + T_3 \cos \alpha_3}{\beta}}, \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} a_0 = & [m_e g r_y \cos \alpha_y + T_1 \cos \alpha_1 a \cos \theta_x \\ & + T_1 \sin \alpha_1 a \sin \theta_x - T_3 \cos \alpha_3 a \cos \theta_x \\ & - T_3 \sin \alpha_3 a \sin \theta_x - (T_1 \sin \alpha_1 + T_3 \sin \alpha_3) l] \\ & (m_0 g + m_e g + T_1 \cos \alpha_1 + T_3 \cos \alpha_3)^{-1}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} a_1 = & (T_1 \sin \alpha_1 + T_3 \sin \alpha_3) \\ & (m_0 g + m_e g + T_1 \cos \alpha_1 + T_3 \cos \alpha_3)^{-1} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Las siguientes ecuaciones describirán en su conjunto el ángulo de deflexión de la base móvil y el resorte, además describirán matemáticamente las diferentes dimensiones que se muestran en la figura 3.10 [development].

$$y_b = \frac{1 - \cos wl}{\cos wl} a_0 - \frac{a_1}{w} \tan wl + \frac{a_1 l}{\cos wl}. \quad (3.12)$$

$$\theta_x \approx y'_{z=l} = a_0 w \tan wl + a_1 (1 - \sec wl + wl \tan wl). \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} z_y = & \frac{\sec^2(wl)}{8w} \{ -4a_0 a_1 w + 8a_1 (a_0 + a_1 l) w \cos(wl) \\ & + 2(a_0 + a_1 l)^2 w^3 l - 4a_1 l (a_0 + a_1 l) w^2 \sin(wl) \\ & - 2a_1 (2a_0 + a_1 l) w \cos(2wl) \\ & - [3a_1^2 + (a_0 + a_1 l)^2 w^2] \sin(2wl) \}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\alpha_1 = \arctan \frac{\Delta_1}{h_1}, \quad (3.15)$$

$$l_1 = \sqrt{\Delta_1^2 + h_1^2}, \quad (3.16)$$

$$\alpha_3 = \arctan \frac{\Delta_3}{h_3}, \quad (3.17)$$

$$l_3 = \sqrt{\Delta_3^2 + h_3^2} \quad (3.18)$$

Donde:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= y_b + a \cos \theta_x - b, \\ h_1 &= l - z_y - a \sin \theta_x, \\ \Delta_3 &= b - (a \cos \theta_x - y_b), \\ h_3 &= h_1 + 2a \sin \theta_x. \end{aligned}$$

La longitud  $l$  del resorte comprimido es calculo como

$$l = l_0 - \Delta l \quad (3.19)$$

Donde:

$$\Delta l = \frac{1}{K} [m_0 g + m_e g + \sum_{i=1}^2 T_i \cos \alpha_i]$$

y  $K$  es la constante elástica del resorte.

Los parámetros conocidos son  $l_0, K, a, b, m_0, m_e$  y  $(r_y, \alpha_y)$  son conocidos, además se tiene 8 ecuaciones independientes desde (3.12) al (3.19) y a su vez tenemos las siguientes variables

$\theta_x$ = ángulo de flexión o inclinación

$l$ = longitud comprimida del resorte

$l_1$ = longitud del cable  $l_1$

$l_3$ = longitud del cable  $l_3$

$\alpha_1$ = dirección del cable  $l_1$

$\alpha_3$ = dirección del cable  $l_3$

$z_y$ = desplazamiento vertical del resorte bajo pandeo

$y_b$ = desplazamiento horizontal del resorte bajo pandeo

y por ultimo las tensiones de los cables  $T_1$  y  $T_3$

Sin embargo, se tiene un problema de redundancia porque para un ángulo  $\theta_x$  de pandeo dado se debe encontrar 9 variables desconocidas, enfocándose en las tensiones de los cables  $T_1$  y  $T_3$  se empleará una solución simple [development]., que consiste en un utilizar un solo cable para realizar el pandeo del resorte, por lo tanto, como se observa en la figura 3.10 el cable  $T_1$  es suficiente para el pandeo lateral por lo que el cable  $T_3$  será cero. Además, para el análisis no se considerará la una carga externa  $m_e$ , en

consecuencia,  $m_e=T3=0$  y las restantes variables desconocidas podrán ser calculadas mediante la herramienta OptimolTool de Matlab.

Las constantes físicas a utilizar en el resorte de compresión lateral para el prototipo de cuello robótico se presentan en la tabla 4.

Lo(m)	n	G(GPa)	E(GPa)	r(m)	d(m)
0.1	15	79.3	206.8	0.015	0.00307

Tabla 4 Características del Acero 228A para resorte

Además, se debe calcular la inercia  $I$ , la constante de elasticidad del resorte  $K$  y la constante de flexión  $\beta_0$  (3.5) con las siguientes formulas.

$$I = \frac{\pi d^4}{64} \quad (3.20)$$

$$K = \frac{G d^4}{64 n r^3} \quad (3.21)$$

Resolviendo se obtiene la siguiente tabla 5, también algunos parámetros adicionales que se debe considerar que son  $a=b=0.05$  m,  $m_e=T3=0$ .

$I (m^4)$	$K (N/m)$	$\beta_0$
$4,36 \times 10^{-12}$	$2.174 \times 10^3$	0.554

Tabla 5 Constantes del resorte

Utilizando Matlab con la función Solver el sistema de ecuaciones anteriormente mencionados se obtiene una tabla 6 considerando que  $\theta_x$  como una variable de entrada.

$\theta_x$ (deg)	yb(m)	zy(m)	L1(m)	L3(m)	w	a1	a0	L(m)	T(N)
1	0,0009	0,0000	0,0977	0,0995	2,3398	0,0056	0,0315	0,0986	1,7462
2	0,0017	0,0002	0,0958	0,0993	3,0071	0,0137	0,0377	0,0977	3,4834
3	0,0025	0,0006	0,0937	0,0990	3,5576	0,0222	0,0399	0,0969	5,2126
4	0,0034	0,0013	0,0913	0,0983	4,0398	0,0311	0,0408	0,0960	6,9356
5	0,0042	0,0024	0,0884	0,0972	4,4766	0,0403	0,0411	0,0951	8,6555
6	0,0049	0,0041	0,0851	0,0955	4,8811	0,0502	0,0410	0,0943	10,3767
7	0,0057	0,0064	0,0810	0,0933	5,2621	0,0610	0,0406	0,0934	12,1059
8	0,0065	0,0095	0,0763	0,0902	5,6265	0,0733	0,0400	0,0925	13,8538
9	0,0072	0,0135	0,0707	0,0864	5,9803	0,0877	0,0391	0,0917	15,6376
10	0,0079	0,0183	0,0641	0,0815	6,3304	0,1057	0,0379	0,0907	17,4874
11	0,0085	0,0243	0,0564	0,0756	6,6859	0,1295	0,0363	0,0898	19,4604
12	0,0091	0,0315	0,0475	0,0683	7,0636	0,1639	0,0339	0,0887	21,6834
13	0,0096	0,0402	0,0369	0,0595	7,5045	0,2211	0,0299	0,0875	24,5125
14	0,0096	0,0507	0,0241	0,0482	8,1701	0,3461	0,0215	0,0855	29,5575
15	0,0061	0,0589	0,0064	0,0315	10,9872	0,9356	-0,0122	0,0765	63,1291
16	0,0027	0,0595	0,0010	0,0285	12,0917	1,2370	-0,0239	0,0739	86,1282
17	0,0022	0,0722	0,0000	0,0296	6,8060	-0,3409	0,0792	0,0868	20,5207
18	0,0153	0,0910	0,0225	0,0217	6,9624	-0,6650	0,0926	0,0880	25,0562

19	0,0160	0,1117	0,0432	0,0206	7,7002	-0,3110	0,0675	0,0869	26,3044
20	0,0163	0,1333	0,0663	0,0363	8,1778	-0,1973	0,0589	0,0854	28,4471
21	0,0033	0,0712	0,0001	0,0365	5,9850	-0,1223	0,1048	0,0891	15,2651
22	0,0172	0,1801	0,1162	0,0807	8,8400	-0,1143	0,0524	0,0834	32,1475
23	0,0178	0,2066	0,1443	0,1068	9,1258	-0,0933	0,0506	0,0825	33,8658
24	0,0183	0,2356	0,1748	0,1355	9,3987	-0,0782	0,0492	0,0816	35,5436
25	0,0047	0,0889	-0,0002	0,0431	5,0173	-0,2266	0,1450	0,1100	13,3630
26	0,0194	0,3013	0,2437	0,2010	9,9241	-0,0575	0,0472	0,0799	38,8424
27	0,0199	0,3385	0,2825	0,2381	10,1819	-0,0502	0,0463	0,0791	40,4837
28	0,0205	0,3788	0,3243	0,2783	10,4387	-0,0441	0,0456	0,0783	42,1289
29	0,0210	0,4224	0,3695	0,3218	10,6957	-0,0390	0,0448	0,0774	43,7833
30	0,0215	0,4694	0,4181	0,3689	10,9540	-0,0346	0,0442	0,0766	45,4514
31	0,0220	0,5201	0,4704	0,4196	11,2144	-0,0309	0,0435	0,0757	47,1376
32	0,0224	0,5747	0,5266	0,4743	11,4779	-0,0276	0,0429	0,0749	48,8456
33	0,0229	0,6335	0,5869	0,5331	11,7453	-0,0248	0,0423	0,0740	50,5795
34	0,0233	0,6966	0,6516	0,5963	12,0174	-0,0223	0,0417	0,0731	52,3431
35	0,0237	0,7643	0,7209	0,6642	12,2951	-0,0200	0,0411	0,0722	54,1405
36	0,0241	0,8369	0,7952	0,7370	12,5794	-0,0180	0,0405	0,0713	55,9757
37	0,0245	0,9148	0,8747	0,8151	12,8711	-0,0162	0,0399	0,0703	57,8534
38	0,0248	0,9982	0,9598	0,8988	13,1715	-0,0146	0,0393	0,0694	59,7784
39	0,0251	1,0876	1,0508	0,9884	13,4816	-0,0131	0,0387	0,0684	61,7560
40	0,0254	1,1833	1,1482	1,0844	13,8028	-0,0118	0,0381	0,0673	63,7920

Tabla 6 Resultados del sistema de ecuaciones del (3.12) al (3.19) con Matlab.

De acuerdo a [development] demostró que el ángulo de pandeo era aparentemente proporcional a la entrada de fuerza, observando los datos de la tabla 6 se ve que para desplazamientos pequeños los datos son linealmente hasta los 12 grados de pandeo, como uno de los objetivos del proyecto es alcanzar los 40 grados de inclinación se tendrá que linealizar los datos para obtener una curva linealmente ajusta con la ayuda de la herramienta Curve Fitting Tool de Matlab, como se muestra en la Figura 3.11.

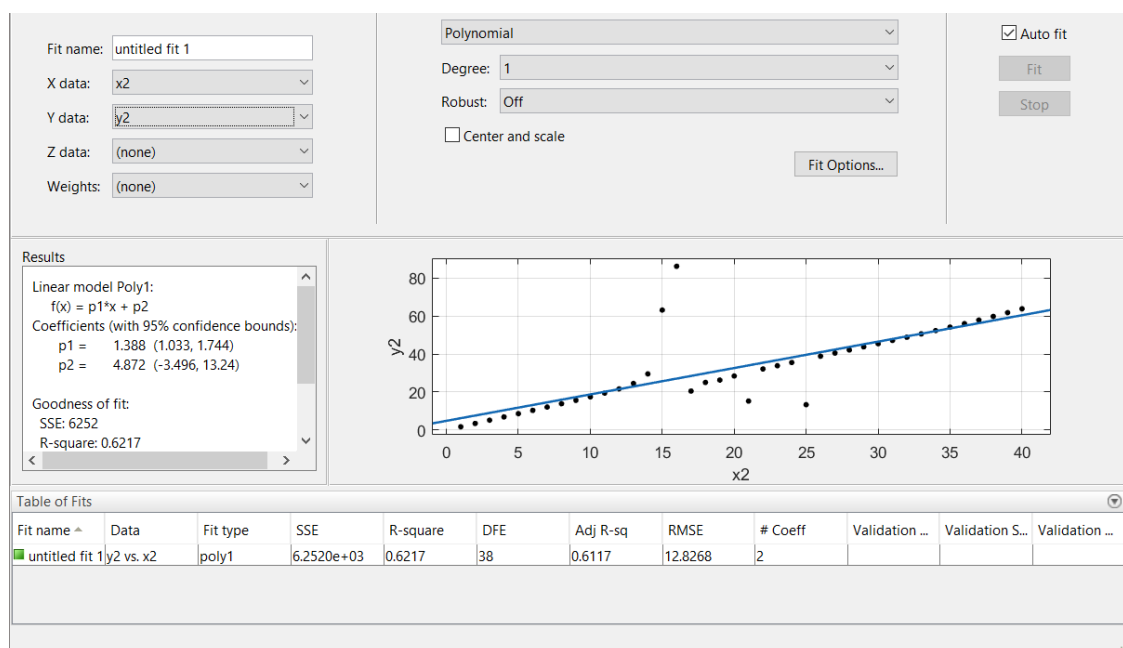


Figura 3.11 Herramienta Curve Fitting Tool de Matlab



Obteniendo como ecuación de la curva de ajuste:

$$T1 = 1.388(\theta_x) - 4.872 \text{ [N]} \quad (3.22)$$

Reemplazando por 40 grados que representa el ángulo de máximo de inclinación de diseño en la ecuación (3.22) da como resultado una tensión de 60,392 N, con esta fuerza se puede realizar el dimensionamiento de los motores cuya función será de controlar el desplazamiento de los cables del mecanismo CDPM.

### 3.3 Sistema Eléctrico

Un motor eléctrico combina las ventajas de la utilización de la energía eléctrica (bajo costo), facilidad de transporte que uno de los objetivos del proyecto, limpieza y simplicidad de comando con su construcción simple, gran versatilidad de adaptación a las cargas más diversas y mejores rendimientos. Los motores a emplear en el cuello robótico serán motores de corriente continua, y la principal causa de haber seleccionado estos motores es debido a que se requiere controlar la velocidad y giro de los motores de manera adecuada.

Para controlar el movimiento del mecanismo CDPM con 2 DOF, necesariamente hay 3 cables conectados entre las 2 bases. Cada cable se conectará con una unidad de actuación que incluirá: motor, reductora y codificador que enviará retroalimentación de posición al controlador.

#### 3.3.1 Dimensionamiento del motor

Antes de proceder a la selección propiamente dicha, será necesario cotejar la situación de transmisión de fuerza en su conjunto.

En la figura 3.12 se muestra las diferentes transmisiones de traslación para un motor DC

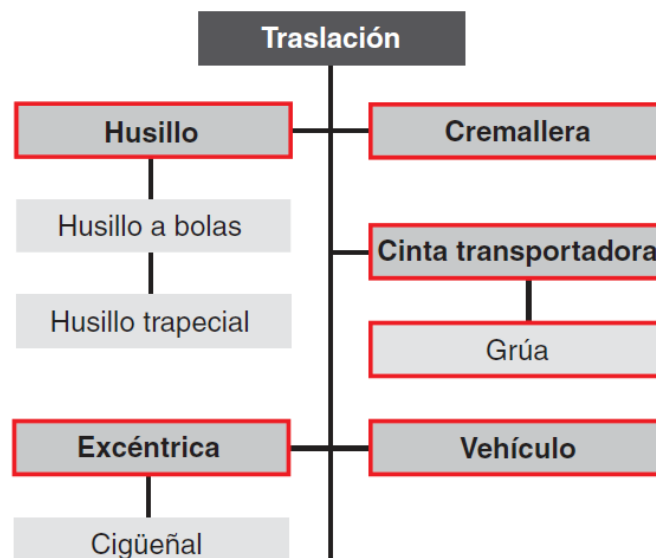


figura 3.12 Trasmision mecanica de traslacion para un motor DC.

De acuerdo a [Maxon academy], se revisó las diferentes transmisiones que un motor corriente continua puede realizar, la transmisión mecánica de angular a lineal es la mas adecuada para el proyecto porque los motores tendrán la función de recoger o ceder cable para realizar el movimiento de flexión lateral del resorte. A la vez que [Maxon academy] explican tres formas diferentes de transmisión angular a lineal, analizando se escogió la transmisión por grúa porque se aproxima a la aplicación del proyecto como se muestra en la figura 3.13.

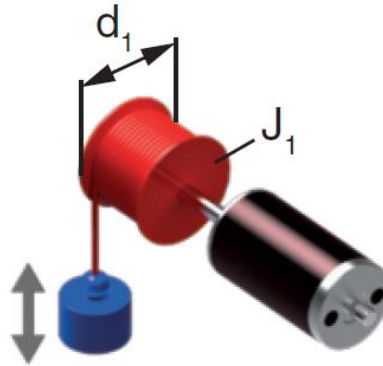


Figura 3.13 Transmisión mediante grúa

La carga está colgada de un cable (grúa), comparando con el proyecto la carga será la fuerza necesaria para flexionar el mecanismo del cuello robótico a través de un acople giratorio de diámetro  $d_1=20\text{mm}$  que encargará de recoger o ceder el cable del mecanismo, con esto se puede calcular la fuerza par  $M$  (3.23) necesaria al aplicar la fuerza máxima al obtener una inclinación de 40 grados.

$$M = \frac{d_1}{2} \times \frac{F_L}{n} \quad (3.23)$$

Donde:

$M$ = par de fuerza

$F_L$ =Fuerza de carga

$d_1$ = Diámetro del acople giratorio

$n$ =Rendimiento

$F_L$ (N)	$d_1$ (mm)	$n$ (%)
79,925	20	85

Tabla 7 Parámetro para la ecuación (3.24)

Para aplicar la ecuación (3.23) será necesario sustituir los parámetros de la Tabla 6, resolviendo dicha ecuación da como resultado  $M=0.71 \text{ Nm}$ .

### 3.3.2 Selección del motor

Con ayuda del programa de selección de Maxon mostrado en la figura 3.14, se ingresó los diferentes datos cálculos durante el dimensionamiento del motor, adicionalmente se incluirá: una velocidad angular de 30 RPM y un diámetro de motor 35mm.



figura 3.14 Programa de selección Maxon

Maxon presenta varias gamas de motores de CC de imán permanente con escobillas que se presentara a continuación:

- Gama RE
  - Alta densidad de potencia
  - Motor de CC de alta calidad con imán de NdFeB
  - Velocidad y par de fuerza altos
  - Diseño robusto (brida metálica)
  - Diámetro: 6 - 65 mm



Figura 3.15 Motor DC: Gama RE

- Gama A-max
  - Buena relación prestaciones/precio
  - Motor de CC con imán AlNiCo
  - Proceso de fabricación automatizado
  - Diámetro: 12 - 32 mm



Figura 3.16 Motor DC: Gama A-max

- Gama RE-max
  - Altas prestaciones a costes reducidos
  - Combina el diseño de los motores A-max con imanes NdFeB
  - Proceso de fabricación automatizado
  - Diámetro: 13 - 29 mm



Figura 3.17 Motor DC: Gama RE-max

- Maxon DCX Motor
  - Potente gracias al imán de NdFeB
  - Dinámico y eficiente
  - Configurable
  - Diámetro: 10 - 35 mm



Figura 3.18 maxon DCX Motor

Dentro de las diferentes alternativas que el programa presento la mejor opción es el servomotor DC para controlar el cable en CDPM. Los motores DC de Gama RE (RE 273762) de Maxon se seleccionan como el actuador para este proyecto A medida que el motor gira, la polea causa que el cable respectivo se enrolle en el eje. Algunas especificaciones del motor son:

Motor Data		273762
<b>Values at nominal voltage</b>		
1 Nominal voltage	V	48
2 No load speed	rpm	2110
3 No load current	mA	17.2
4 Nominal speed	rpm	1230
5 Nominal torque (max. continuous torque)	mNm	105
6 Nominal current (max. continuous current)	A	0.507
7 Stall torque	mNm	255
8 Stall current	A	1.19
9 Max. efficiency	%	77
<b>Characteristics</b>		
10 Terminal resistance	$\Omega$	40.2
11 Terminal inductance	mH	10.3
12 Torque constant	mNm/A	214
13 Speed constant	rpm/V	44.7
14 Speed / torque gradient	rpm/mNm	8.4
15 Mechanical time constant	ms	5.39
16 Rotor inertia	gcm <sup>2</sup>	61.2

Tabla 8 Características del motor RE 273762

Adicionalmente el programa de selección de Maxon selecciono el respectivo reductor planetario (GP 32 166155) de 32mm de diámetro que a continuación se muestra en la figura 3.19 y sus características técnicas en la tabla 9.



Figura 3.19 Reductor planetario GP 32 166155

		166155
Gearhead Data		
1	Reduction	3.7:1
2	Absolute reduction	$\frac{26}{7}$
3	Max. motor shaft diameter	mm 6
4	Number of stages	1
5	Max. continuous torque	Nm 0.75
6	Max. intermittent torque at gear output	Nm 1.1
7	Max. efficiency	% 80
8	Weight	g 118
9	Average backlash no load	° 0.7
10	Mass inertia	gcm <sup>2</sup> 1.5
11	Gearhead length L1	mm 26.5

Tabla 9 Características del Reductor planetario GP 32 166155

### 3.4 Prototipo Paralelo

En este punto se mostrará la idea gráfica del mecanismo CDPM en la figura 3.20, que representa el prototipo de un cuello robótico de 2 DOF.

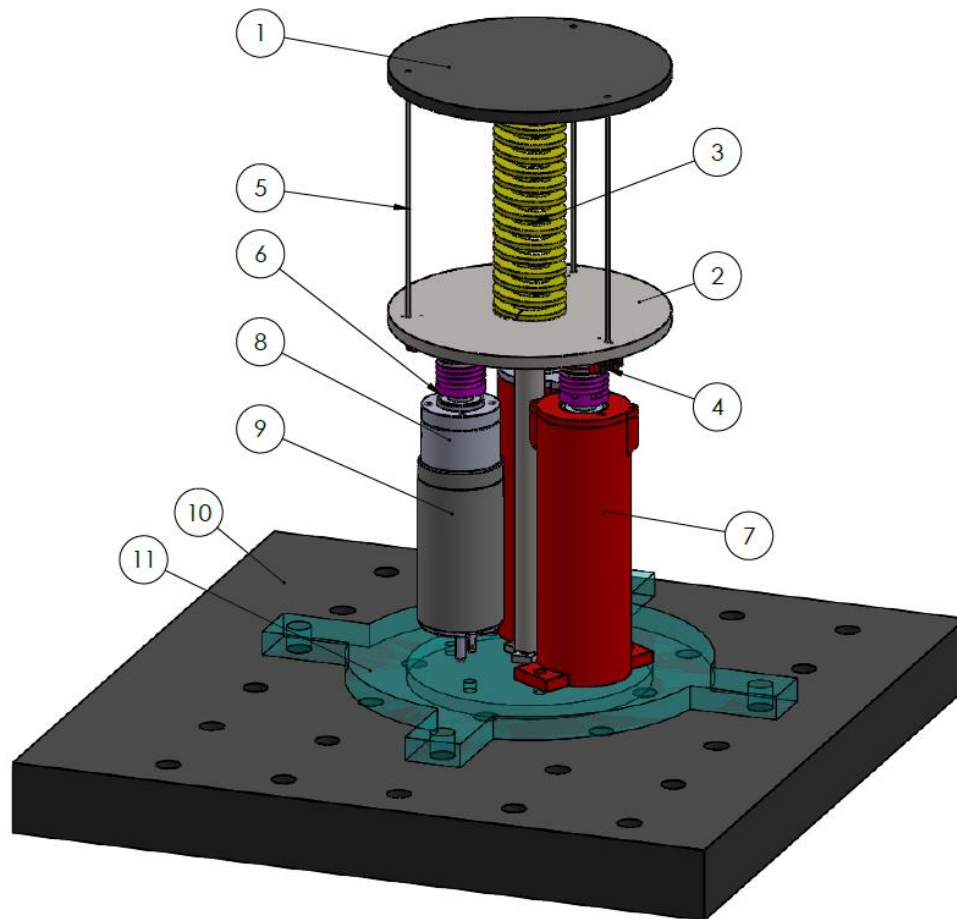


Figura 3.20 Esquema funcional de prototipo.

Los elementos que conforman el prototipo cuello robótico se muestran en la Tabla 10.

Tabla 10. Elementos del prototipo

NÚMERO DE ELEMENTO	NÚMERO DE PIEZA	CANTIDAD
1	Base móvil	1
2	Base fija	1
3	Resorte	1
4	Polea	3
5	Cables	3
6	Acople giratorio	3
7	Anclaje del motor	3
8	Reductora del motor	3
9	Motor CC	3
10	Base para los motores	1
11	Plataforma	1



### 3.4.1 ESPECIFICACIONES GENERALES DEL PROTIPO

La Tabla 11 resume las especificaciones generales que tendrá el prototipo.

Especificación técnica	Valor
Capacidad de carga	1 kg
Grados de libertad	2
Voltaje	24 V DC
Peso aproximado	12.5 Kg
Tipo de mecanismo	Mecanismo paralelo conducido por cable (CDPM)
Dimensiones aproximadas	110X110X262 mm
Sensores	Encoders
Rango de inclinación	0°- 40° aproximadamente

## Capítulo 4

### Modelo Matemático

#### 4.1 Configuración del mecanismo

La estructura del robot paralelo accionado por cable, como se muestra en la Fig. 4.1, consta de cuatro componentes principales:

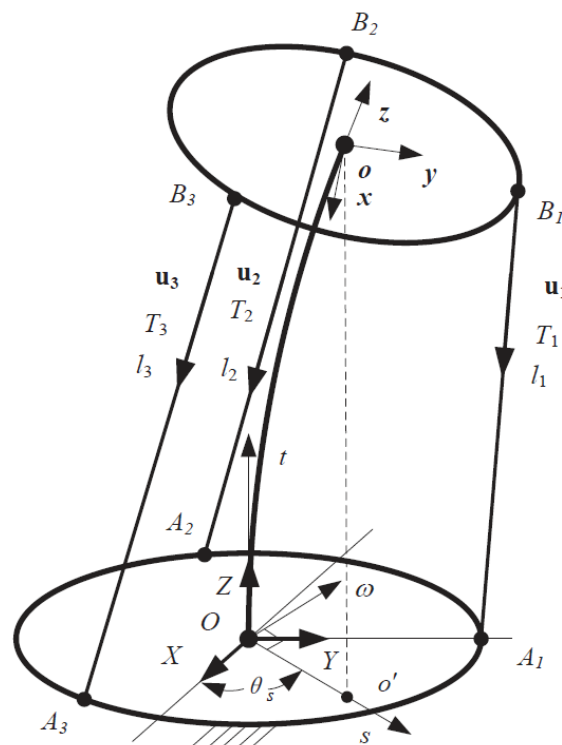


Figura 4.1 Mecanismo paralelo flexible y accionado por cable

Base fija. Esta es la parte fija del mecanismo al que está conectado un marco de coordenadas fijo OXYZ. El origen del marco está en el centro inferior del resorte, el eje Y está a lo largo OA1 y el eje Z es determinado por la regla de la mano derecha. Las coordenadas homogéneas de Ai (Figura 4.2) en la base fija con respecto al sistema de coordenadas OXYZ se pueden describir como:

$$OA_1 = (0, a, 0)^T$$

$$OA_2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a, -\frac{1}{2}a, 0\right)^T$$

$$OA_3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a, -\frac{1}{2}a, 0\right)^T$$

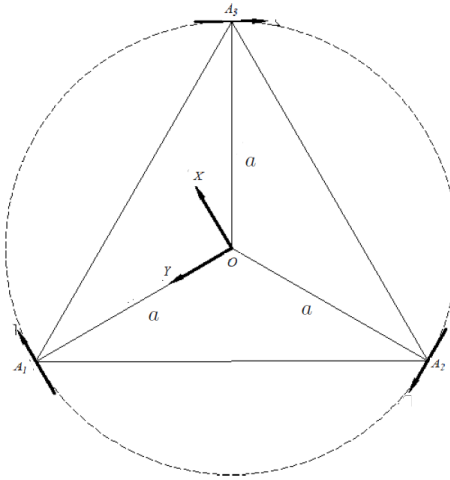


Figura 4.3 Vista superior de la base.

Plataforma móvil. Esta es la parte móvil del mecanismo, a la que se montará la carga. El sistema de coordenada oxyz está unido a esta plataforma móvil, con el origen o en la parte superior central del resorte, el eje y a lo largo de OB1 y el eje z determinado por la regla de la mano derecha. Del mismo modo, las coordenadas homogéneas de Bi (Figura 4.3) en la plataforma móvil con respecto a oxyz son:

$$OB_1 = (0, b, 0)^T$$

$$OB_2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}b, -\frac{1}{2}b, 0\right)^T$$

$$OB_3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}b, -\frac{1}{2}b, 0\right)^T$$

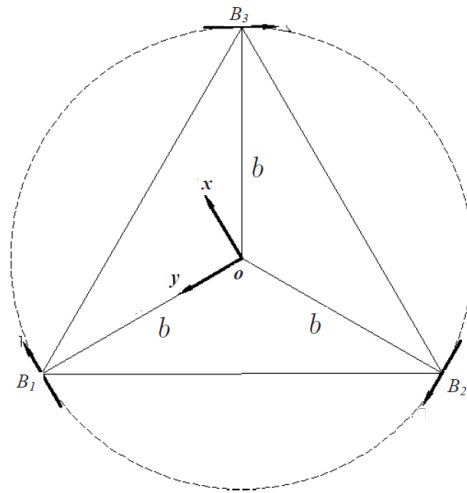


Figura 4.3.- Vista superior de la plataforma móvil

**Cables.** Tres cables flexibles con masa y diámetro insignificantes se conectan desde la plataforma móvil en el punto  $B_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) a la base fija en el punto  $A_i$ . Tanto  $A_i$  como  $B_i$  son equidistantes entre sí en el círculo con radios  $|OA_i| = a$  y  $|oB_i| = b$  con respecto al centro  $O$  y  $o$ , respectivamente.  $OA_i$  y  $OB_i$  están en la misma dirección en la configuración inicial. Denote el valor de fuerza a lo largo del cable como  $T_i$ , la longitud del cable entre  $A_i$  y  $B_i$  como  $l_i$ , y el vector unitario para la dirección de la fuerza en cada cable como  $u_i$ .

**Resorte.** El resorte de compresión produce una fuerza par entre la base fija y la plataforma móvil para soportar la carga y facilitar el movimiento del cuello robótico. Se muestra como una curva desde el punto  $O$  hasta el punto  $o$  en la Figura 4.1. Tenga en cuenta que dado que el resorte está rígidamente conectado a la base fija en el punto  $O$ , el vector tangente para la curva de resorte en  $O$  es perpendicular al plano base fijo. Se pueden aplicar argumentos similares al punto  $o$  y al plano de la plataforma móvil.

Debido a la ubicación simétrica de los cables, podemos suponer que el resorte se doblará en un plano. Además, dado que la resistencia a la torsión para la compresión del muelle es bastante grande, también suponemos que la plataforma móvil no puede girar alrededor del eje  $z$  del marco del cuerpo  $oxyz$ . Como estos dos supuestos se mencionarán con frecuencia más adelante, los establecemos como una suposición:

Debido a la ubicación simétrica de los cables, podemos suponer que el resorte se doblará en un plano. Además, dado que la resistencia a la torsión para la compresión del muelle es bastante grande, también suponemos que la plataforma móvil no puede girar alrededor del eje  $z$  del marco del cuerpo  $oxyz$ .

#### 4.1.1 Condición del mecanismo

El plano para la curva del resorte, que se muestra en la Figura 4.1, está formado por  $O$ ,  $O$  y  $o'$ , donde  $o'$  es la proyección vertical sobre la base fija. El plano formado por las coordenadas  $Ost$  se proyecta el resorte flexionado. El origen es el mismo que el marco fijo  $OXYZ$ , el eje  $t$  es el mismo que el eje  $Z$  en el cuadro  $OXYZ$  y el eje  $s$  está a lo largo  $Oo'$ . Con estas condiciones se necesita cuatro parámetros para definir la configuración de la plataforma móvil:

- $\theta_s$ : ángulo entre el eje  $s$  y el eje  $X$  (dirección de flexión).
- $\theta_p$  ángulo entre el plano base fijo y el plano de la plataforma móvil (amplitud de curvatura).
- $t_0$   $t$  coordenada para el punto  $o$  en el marco adjunto de resorte Ost (longitud vertical de la curvatura del resorte).
- $s_0$   $s$  coordenada para el punto  $o$  en el marco Ost (traslación lateral del resorte en flexión).

Solo hay tres parámetros independientes entre ellos.

Se puede considerar  $s_0$  como el parámetro dependiente. En otras palabras, una vez que se dan  $\theta_s$ ,  $\theta_p$  y  $t_0$ ,  $s_0$  puede resolverse. En este caso,  $s_0$  se considera como un movimiento parasitario que puede determinarse por los otros tres parámetros. Este movimiento parasitario se encuentra con frecuencia en manipuladores paralelos [12]. Según lo definido por el IFToMM, el DOF es el número de coordenadas independientes necesarias para definir la configuración de un mecanismo [13]. De acuerdo con esta definición, este mecanismo tiene 3 DOF.  $\theta_s$  y  $\theta_p$  pueden describir la postura de la plataforma móvil. Se puede obtener la matriz de postura cuando se han dado  $\theta_s$  y  $\theta_p$ .

#### 4.2 Representación de la orientación.

Uno de los problemas básicos para encontrar el espacio de trabajo de orientación 3-D es la elección de coordenadas para describir la orientación de la plataforma móvil. Existen varios conjuntos redundantes de coordenadas de orientación, como los parámetros de Euler (Yang y Haug, 1994), cosenos de dirección, etc. Si bien proporcionan una parametrización global de la orientación, requieren una representación en un espacio 4-D. Para superar este inconveniente, se pueden usar tres ángulos de Euler para representar la orientación de la plataforma móvil. Estos ángulos corresponden a tres o más rotaciones sucesivas sobre la base y ejes de bastidor móvil. La principal desventaja es la existencia de singularidades en las que no se cumple la correspondencia uno a uno entre la orientación real y los ángulos de Euler.

Los primeros requisitos establecidos para los ángulos de Euler se cumplen con los ángulos de Euler estándar que se definen girando primero el marco móvil alrededor del eje  $z$  base en un ángulo  $\phi$ , luego sobre el eje  $y$  'móvil' con un ángulo  $\theta$ , y finalmente sobre el eje  $z'$  móvil con un ángulo  $\psi$ . Para esta elección de ángulos de Euler, la singularidad se produce en  $\theta=0$  y la matriz de rotación se define como:

$$R = R_z(\phi)R_{y'}(\theta)R_{z'}(\psi) = R_z(\phi)R_y(\theta)R_z(\psi) \quad (4.1)$$

Los ángulos de Euler estándar dan tramas complicadas de espacio de trabajo de orientación por lo que una modificación conjunta de ángulos de Euler fue introducida. En una nueva representación de orientación, primero, rotando la plataforma móvil sobre el eje  $z$  base en un ángulo  $\phi$ , luego sobre el eje base  $y$  ángulo  $\theta$ , luego sobre eje  $z$  por un ángulo  $-\phi$ , y finalmente sobre el eje  $z'$  móvil por un ángulo  $\psi$ . La singularidad ocurre a  $\theta = 0$ . El ángulo  $\psi$  es el "ángulo de rotación", el ángulo  $\theta$  es el "ángulo de inclinación", y el ángulo  $\phi$  es el ángulo entre el eje  $x$  y la proyección del acercarse al vector en el plano  $xy$  mostrado en la figura 4.4.

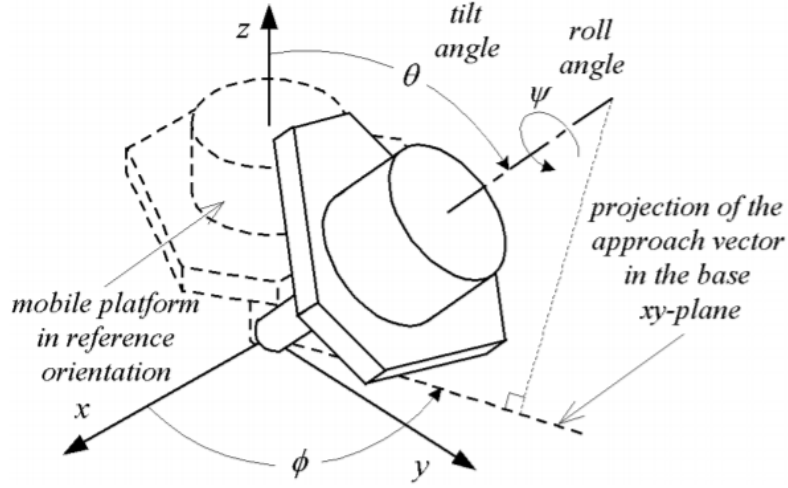


Figura 4.4 Los ángulos de Euler modificados que definen la orientación de la plataforma. [26]

Debe tenerse en cuenta que los ángulos de balanceo  $\psi$  son iguales a cero porque, suponiendo que no haya torsión rotación. Por lo tanto, la matriz de rotación se define como:

$$\begin{aligned}
 R &= R_z(\phi)R_{y'}(\theta)R_z(-\phi)R_z(\psi) \\
 &= R_z(\phi)R_y(\theta)R_z(\psi - \phi) \\
 &= R_z(\phi)R_y(\theta)R_z(-\phi)
 \end{aligned}$$

La transformación rotacional se define como:

$$R_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}; R_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}; R_z(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces en (4.1):

$$R(\phi, \theta) = R_z(\phi)R_y(\theta)R_z(-\phi)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (\cos^2 \phi \cos \theta + \sin^2 \phi) & (\cos \phi \cos \theta \sin \phi - \sin \phi \cos \phi) & (\cos \phi \sin \theta) \\ (\sin \phi \cos \theta \cos \phi - \cos \phi \sin \phi) & (\sin^2 \phi \cos \theta + \cos^2 \phi) & (\sin \phi \sin \theta) \\ (-\sin \theta \cos \phi) & (-\sin \theta \sin \phi) & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Reemplazando los ángulos que describen la orientación del mecanismo:  $\phi = \theta_s$  y  $\theta = \theta_p$  en la ecuación (4.2), la matriz de transformación rotacional del cuello robótico es:

$${}^O\mathbf{R}'_o = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Donde:

$$\begin{aligned} t_{11} &= \sin^2 \theta_s + \cos \theta_p \cos^2 \theta_s, \\ t_{12} &= t_{21} = (\cos \theta_p - 1) \cos \theta_s \sin \theta_s \\ t_{13} &= -t_{31} = \sin \theta_p \cos \theta_s, \\ t_{23} &= -t_{32} = \sin \theta_p \sin \theta_s \\ t_{22} &= \cos^2 \theta_s + \cos \theta_p \sin^2 \theta_s \\ t_{33} &= \cos \theta_p \end{aligned}$$

En consecuencia, la matriz de transformación homogénea entre la base móvil y el sistema de coordenadas base se expresa como:

$${}^O\mathbf{T}_o = \begin{bmatrix} {}^O\mathbf{R}'_o & {}^O\mathbf{P}_o \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Donde  ${}^O\mathbf{P}_o$  es el vector posición del punto o con respecto al sistema de coordenadas base y su ecuación es:

$${}^O\mathbf{P}_o = [s_0 \cos \theta_s \quad s_0 \sin \theta_s \quad t_0]^T \quad (4.5)$$

#### 4.3 Análisis estático y de la cinemática inversa

El análisis tanto de la cinemática inversa como el estático del cuello robótico está representado por el siguiente diagrama:





El problema de la cinemática inversa de la posición se expresa como: dada la postura deseada de la plataforma móvil  $\mathbf{x} = [\theta_s, \theta_p, t_0]^T \in \mathbb{R}^3$ , se necesita calcular la longitud de los cables  $\mathbf{q} = [l_1, l_2, l_3]^T \in \mathbb{R}^3$ , que se puede describir como

$$\mathbf{q} = f(\mathbf{x}) \quad f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (4.6)$$

La solución se calcula como:

$$l_i = \left\| {}^o\mathbf{T}_o \overrightarrow{OB_i} - \overrightarrow{OA_i} \right\| \quad (4.7)$$

Si  $s_0$  se resuelve de  $\mathbf{x}$ . Sin embargo,

$s_0$  no se puede asignar arbitrariamente. Este movimiento parasitario es una característica de la flexión lateral del resorte, que es causada por las fuerzas que actúan sobre el resorte. Estas fuerzas son principalmente

resultó de las fuerzas de tracción en los cuatro cables y la masa de la carga útil. Por lo tanto, debemos combinar la posición inversa y la estática para obtener una solución. El procedimiento general es [combined inverse]:

- 1) Transformar todas las fuerzas del cable a la fuerza y momento equivalentes aplicados en el centro superior del resorte.
- 2) Usar la fuerza y el momento equivalentes para obtener las ecuaciones de flexión lateral del muelle deseada.
- 3) Resuelve  $s_0$ .
- 4) Resuelve la posición inversa y la estático.

#### 4.3.1 Ecuaciones de equilibrio de fuerza y momento

Con el numeral 4.1.1, todas las fuerzas del cable se pueden transformar en el plano de flexión Ost. En otras palabras, podemos convertir todas las fuerzas en dos fuerzas perpendiculares  $F_1$  y  $F_2$  en el plano, y un momento  $M$  perpendicular al plano en el centro superior de la primavera como se muestra en la Figura 4.5, considerando que el movimiento de la plataforma no está sujeta a fuerzas externas.

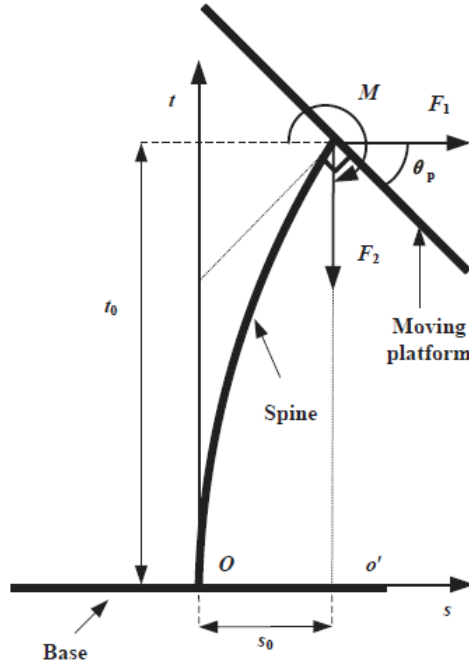


Figura 4.5 Sistema de equilibrio de Fuerzas y momentos.

La masa de la plataforma móvil se toma como un punto de masa en el centro superior de la primavera con la cantidad  $m$ . Las condiciones de equilibrio para fuerza y momento de la plataforma móvil son las siguientes:

$$\sum_{i=1}^3 \mathbf{T}_i + \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (4.8)$$

$$\sum_{i=1}^3 {}^O \mathbf{r}_i \times \mathbf{T}_i + \mathbf{M} = \mathbf{0} \quad (4.9)$$

Donde:

$$\begin{aligned} {}^O \mathbf{T}_i &= T_i \left( {}^O \mathbf{T}_o \overrightarrow{OB_i} - \overrightarrow{OA_i} \right) / \left\| {}^O \mathbf{T}_o \overrightarrow{OB_i} - \overrightarrow{OA_i} \right\| \\ {}^O \mathbf{r}_i &= {}^O \mathbf{R}_o \cdot \overrightarrow{OB_i}, \\ \mathbf{F} &= [-F_1 \cos \theta_s, -F_1 \sin \theta_s, F_2 - mg]^T, \\ \mathbf{M} &= [-M \sin \theta_s, M \cos \theta_s, 0]^T. \end{aligned}$$

Las ecuaciones (3) y (4) se pueden descomponer en seis ecuaciones [combined inverse]. En las seis ecuaciones, hay en total de siete incógnitas:  $T_1$  a  $T_3$ ,  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $M$  y  $s_0$ . Eliminando  $T_1$  a  $T_3$ , una ecuación con solo  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $M$  y  $s_0$  ya que se pueden obtener las incógnitas:

$$\begin{aligned}
& 2b \sin \theta_s \sin \theta_p F_2' s_0^2 \\
+ & 2b(\sin \theta_s \sin \theta_p t_0 F_1 + \sin \theta_s \cos \theta_p t_0 F_2' \\
& + \sin \theta_s \sin \theta_p M + \frac{1}{2} a \sin \theta_p \cos 2\theta_s F_2') s_0 \\
+ & b(2t_0^2 \sin \theta_s \cos \theta_p - ab \sin \theta_s \sin^2 \theta_p \\
& + a \sin \theta_p \cos 2\theta_s t_0) F_1 \\
- & ab \sin \theta_p \sin \theta_s (a - b \cos \theta_p) F_2' \\
- & 2t_0 \sin \theta_s (a - b \cos \theta_p) M = 0
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Donde:

$$F_2' = F_2 - mg$$

#### 4.3.2. Ecuaciones de pandeo lateral para un resorte

El problema de flexión del resorte fue investigado por primera vez por Timoshenko como ya se mencionó en el numeral 3.2.2, indicando que la flexión lateral de un resorte de compresión podría tratarse con los mismos métodos que las barras elásticas, pero era necesario considerar el cambio en la longitud del muelle debido a la compresión ya que el cambio no es insignificante, como en el caso de barras comprimidas [33]. Considerando esta sugerencia, el resorte como se muestra en la Figura 4.5 se doblará por las fuerzas  $F_1$  y  $F_2$  más un par  $M$ , la siguiente ecuación describe esta deformación:

$$\beta \frac{d^2 s / dt^2}{[1 + (ds/dt)^2]^{3/2}} = M + F_2(s_0 - s) + F_1(t_0 - t) \tag{4.11}$$

El lado derecho es el momento total aplicado a una sección transversal del resorte. Esta ecuación no tiene una solución analítica, por lo que una solución numérica puede ser calculando integrales elípticas [32]. Para deflexión pequeña, la ecuación (4.11) se puede simplificar a un caso lineal:

$$\beta \frac{d^2 s}{dt^2} = M + F_2(s_0 - s) + F_1(t_0 - t) \tag{4.12}$$

Con las condiciones iniciales para un extremo del resorte conectado al base fija y el extremo libre conectado a la plataforma móvil

$$s(0) = 0, s'(0) = 0, s(t_0) = s_0, s'(t_0) = \tan \theta_p \tag{4.13}$$

Donde:  $s' = ds/dt$ .

En base a (4.12) y (4.13), se pueden derivar dos ecuaciones con respecto a  $F_1$  y  $M$  como una función de  $s_0$ :

$$F_1 = D_1 s_0 + E_1 \quad (4.14)$$

$$M = D_2 s_0 + E_2 \quad (4.15)$$

Donde:

$$D_1 = -\frac{a_2 c_1 - a_1 c_2}{a_2 b_1 - a_1 b_2}, \quad E_1 = -\frac{a_2 d_1 - a_1 d_2}{a_2 b_1 - a_1 b_2}$$

$$D_2 = -\frac{b_2 c_1 - b_1 c_2}{b_2 a_1 - b_1 a_2}, \quad E_2 = -\frac{b_2 d_1 - b_1 d_2}{b_2 a_1 - b_1 a_2}$$

$$a_1 = 1 - \cos \left( \sqrt{F_2/\beta} t_0 \right),$$

$$b_1 = \sqrt{\beta/F_2} \sin \left( \sqrt{F_2/\beta} t_0 \right) - t_0 \cos \left( \sqrt{F_2/\beta} t_0 \right),$$

$$c_1 = -F_2 \cos \left( \sqrt{F_2/\beta} t_0 \right),$$

$$d_1 = 0;$$

$$a_2 = \sqrt{F_2/\beta} \sin \left( \sqrt{F_2/\beta} t_0 \right),$$

$$b_2 = \cos \left( \sqrt{F_2/\beta} t_0 \right) + t_0 \sqrt{F_2/\beta} \sin \left( \sqrt{F_2/\beta} t_0 \right) - 1,$$

$$c_2 = F_2 \sqrt{F_2/\beta} \sin \left( \sqrt{F_2/\beta} t_0 \right),$$

$$d_2 = -F_2 \tan \theta_p.$$

Sustituyendo (4.14) y (4.15) en (4.10), se obtiene la siguiente ecuación:

$$A s_0^2 + B s_0 + C = 0 \quad (4.16)$$

Donde:

$$A = 2b \sin \theta_p \sin \theta_s (F_2' + t_0 D_1 + D_2)$$

$$B = (2bt_0^2 \cos \theta_p \sin \theta_s - ab^2 \sin^2 \theta_p \sin \theta_s$$

$$+ abt_0 \sin \theta_p \cos 2\theta_s) D_1$$

$$- 2t_0 \sin \theta_s (a - b \cos \theta_p) D_2$$

$$+ 2bt_0 \sin \theta_s (F_2' \cos \theta_p + E_1 \sin \theta_p)$$

$$+ 2b \sin \theta_p \left( E_2 \sin \theta_s + \frac{1}{2} a F_2' \cos 2\theta_s \right)$$

$$C = (2bt_0^2 \cos \theta_p \sin \theta_s - ab^2 \sin^2 \theta_p \sin \theta_s$$

$$+ abt_0 \sin \theta_p \cos 2\theta_s) E_1$$

$$- ab \sin \theta_p \sin \theta_s (a - b \cos \theta_p) F_2'$$

$$- 2t_0 \sin \theta_s (a - b \cos \theta_p) E_2$$

La ecuación (4.16) es una ecuación cuadrática y A, B, C se conocen cuando se dan  $\theta_p$  y  $\theta_s$ . Entonces,  $s_0$  puede se obtiene resolviendo el (4.16). Una vez se obtenga  $s_0$ , la cinemática inversa puede ser resuelto en consecuencia.

#### 4.4. Implementación numérica.

La posición inversa y el análisis estático se implementan en MATLAB. Parámetros de compresión de primavera para el prototipo se muestran en la TABLA 5, además el momento de inercia  $I$  de la sección transversal del cable de resorte y la rigidez a flexión  $\beta_0$  son obtenidos por las ecuaciones (3.20) y (3.21) respectivamente.

Otros parámetros a considerar son  $a = b = 0.05$  m y  $m = 1$  kg. La implementación se realiza con un  $t_0$  fijo de 0.085 m porque en aplicaciones reales  $t_0$  solo puede usarse para ajustar la fuerza en los tres cables. Variando  $\theta_p$  de 0 a 40 grados y  $\theta_s$  de 0 a 360 grados, podemos obtener los resultados que se muestran en la Figura 4.6, donde las longitudes de los cables se ubican en la coordenada  $z$ .

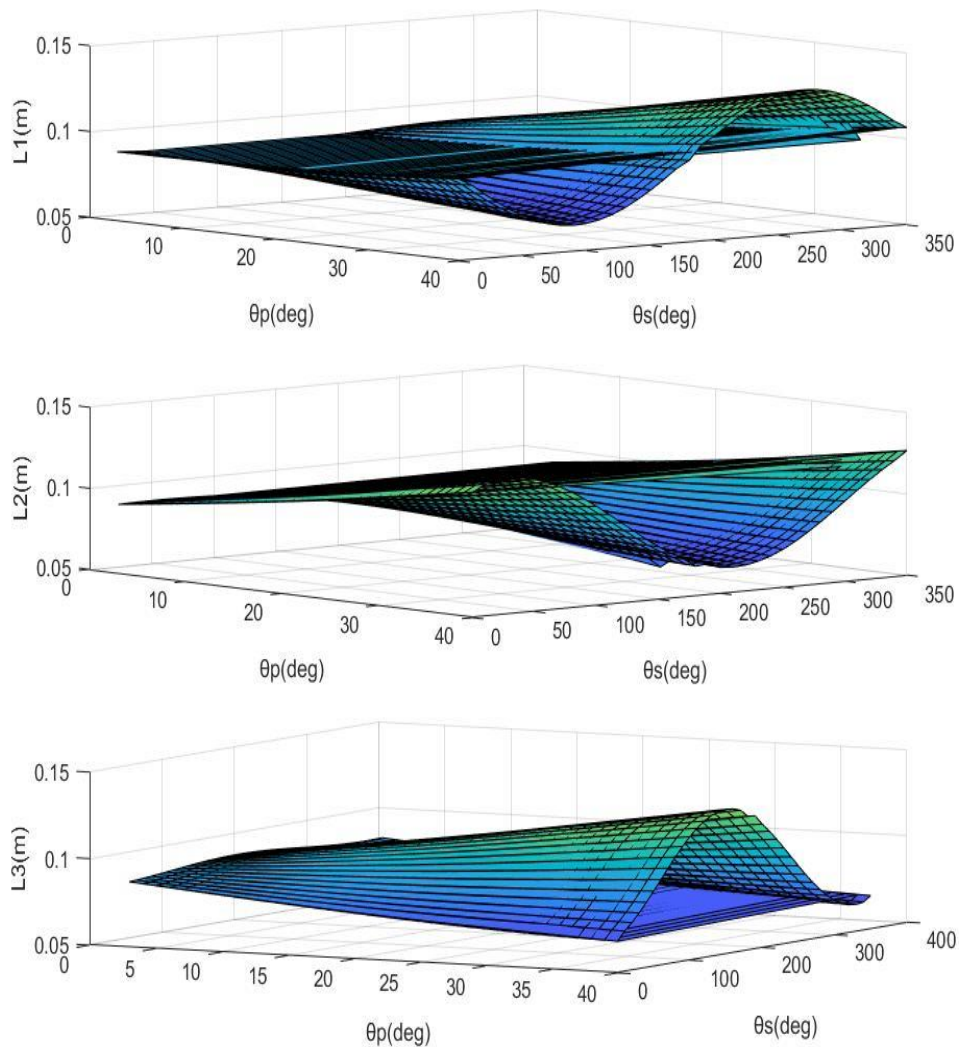


Fig. 4.6 Diagrama de la cinemática inversa.

Una observación de la Figura 4.6 es que cuando  $\theta_p$  es grande, la variación de la longitud también es grande. Esto se debe a que cuanto más queremos doblar la plataforma móvil, la fuerza que necesita es grande.

## Referencias

Yang, F-C., and Haug, E. J., 1994, "Numerical Analysis of the Kinematic Working Capability of Mechanisms," *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 116, pp. 111-118, March.

26]: Bonev I.A. and Ryu J., —Orientation workspace analysis of 6-dof parallel manipulators||, *ASME Design Engineering Technical Conferences*, Las Vegas, Nevada, pp. 1-8, 1999.

[33] S. Timoshenko, *Theory of elastic stability*, McGraw-Hill, New York, 1936.

32. R. Frisch-Fay, *Flexible Bars*. Butterworths, Washington, DC (1962).