卡尔曼滤波公式推导

Author 秦 mian

引入:

状态空间方程:

1：状态方程

$$x_k = Ax_{k-1} + Bu_{k-1} + \omega_{k-1}$$

2：观测方程

$$Z_k = Hx_k + v_k$$

其中ω_{k-1}为过程噪声，v_k为测量噪声

噪声不可测，也不可以一个量化的值去代入计算，但其符合正态分布:

$$P(\omega) \sim (0, Q)$$

Q为协方差矩阵，$Q = E(\omega, \omega^T) = E\left[\begin{pmatrix}\omega_1 \\ \omega_2\end{pmatrix} \cdot (\omega_1 \omega_2)\right] = E\left[\begin{pmatrix}\omega_1^2 & \omega_1\omega_2 \\ \omega_1\omega_2 & \omega_2^2\end{pmatrix}\right]$

由于ω_1，ω_2相互独立，所以$Q = \begin{bmatrix} E(\omega_1^2) & E(\omega_1\omega_2) \\ E(\omega_1\omega_2) & E(\omega_2^2)\end{bmatrix}$

又因为ω_1，ω_2服从高斯分布，所以$E(\omega_1) = E(\omega_2) = 0$；即$E(\omega_1^2) = \sigma(\omega_1^2)$，$E(\omega_2^2) = \sigma(\omega_2^2)$

所以

$$Q = \begin{bmatrix} \sigma(\omega_1^2) & \sigma(\omega_1)\sigma(\omega_2) \\ \sigma(\omega_1)\sigma(\omega_2) & \sigma(\omega_2^2)\end{bmatrix}$$

同理，

$$P(v) \sim (0, R)$$

- 第一个公式：先验预测估计值

  在卡尔曼公式中，省略了状态方程的噪声，而称其为先验估计方程没有加入噪声的估计值为先验估计值。

  $$\tilde{x}_k^- = A * \tilde{x}_{k-1} + B * u_k$$

  同理地，我们省去测量噪声，即得到测量方程:

  $$Z_k = Hx_k$$

  解得，$\tilde{x}_{kmea} = H^{-1}Z_k$

  综合估计和观测，写成加权形式:

  $$\tilde{x}_k = \tilde{x}_k^- + G(H^{-1}Z_k - \tilde{x}_k^-)$$

  其中 G 为权重，$G\epsilon[0,1]$，当 G=0，完全相信估计值，G=1，完全相信观测值。

  令$G = K_k H$，即得:

- 第二个公式：修正估计，后验估计值:

  $$\tilde{x}_k = \tilde{x}_k^- + K_k(z_k - H \cdot \tilde{x}_k^-)$$

$$K_k \in [0, H^{-1}]$$

我们的目标是，寻找K_k使得$\tilde{x}_k \to x_k$实际值。

令误差$e_k = x_k - \tilde{x}_k$，可知，误差属于高斯分布，$P(e^k) \sim (0, P)$。根据上市推到的高斯分布协方差矩阵，可知：

$P = \begin{bmatrix} \sigma(e_1^2) & \sigma(e_1)\sigma(e_2) \\ \sigma(e_1)\sigma(e_2) & \sigma(e_2^2) \end{bmatrix}$,要让误差最小，即让$tr(P) = \sigma(e_1^2) + \sigma(e_2^2)$最小。

$$X_k - \tilde{x}_k = (I - K_k H)(x_k - \tilde{x}_k^-)$$
$$E(e, e^T) = E[(x_k - \tilde{x}_k)(x_k - \tilde{x}_k)^T]$$
$$= (P_k^- - K_k H P_k^-)\left(I - H^T {K_k}^T\right) + K_k R K_k^T$$

令$P_k = P_k^- - K_k H P_k^- - P_k^- H^T {K_k}^T + K_k H P_k^- H^T {K_k}^T + K_k R K_k^T$

找最小值，即对$tr(P_k)$求导：

$$tr(P_k) = tr(P_k^-) - 2tr(K_k H P_k^-) + tr(K_k H P_k^- H^T {K_k}^T) + tr(K_k R K_k^T)$$

求导

$$\frac{d\left(tr(P_k)\right)}{K_k} = 0$$

得

$$-2(HP_k^-)^T + 2K_k H P_k^- H^T + 2K_k R = 0$$

即得

- 第三个公式，卡尔曼系数更新公式：

$$K = P_k^- H^T (H P_k^- H^T + R)^{-1}$$

代回上述推导方程，得

- 第四个公式，更新后的协方差公式：

$$P_k = (I - KH) * P_k^-$$

- 第五个公式，先验协方差公式：

将第一个公式代入协方差运算

$$\mathrm{cov}(x, x) = varx$$
$$\mathrm{cov}(Ax, Ax) = A \cdot \mathrm{cov}(x, x) \cdot A^T$$
$$\mathrm{cov}(Ax + k, Ax + k) = A \cdot \mathrm{cov}(x, x) \cdot A^T$$

$$P_k^- = \mathrm{cov}(\tilde{x}_k^-) = cov(A \cdot \tilde{x}_{k-1} + Bu_k) = AP_{k-1}A^T + Q$$

Q是噪声ω的协方差

即得：

$$P_k^- = AP_{k-1}A^T + Q$$