# 卡尔曼公式各参数的释意及理解

Author：秦 mian

卡尔曼公式：使用上一次的最优结果预测当前的值，同时使用观测值修正当前值，得到最优结果

## 一：预测

**1：状态方程**

$$\tilde{x}_k^- = A * \tilde{x}_{k-1} + B * u_k$$ ……（1）

$\tilde{x}_k^-$：当前 k 时刻的先验估计值，是根据上一时刻的状态预测值
$\tilde{x}_{k-1}$：k-1 时刻根据滤波操作得到的最有估计结果，即 k-1 时刻的后验状态估计值
$A$：状态转移矩阵，是对目标状态的一种运动描述的公式矩阵表述
$u_k$：控制向量，控制当前状态的可变向量
$B$：将控制向量转化为状态的矩阵

**Eg：**小车做变加速直线运动，用$x_t$这个二维列向量矩阵$\binom{p}{v}$分别表述其当前时刻的位置和速度
由公式

$$P_i = P_{i-1} + v_{i-1}\Delta t + \frac{a^2}{2}\Delta t^2$$
$$\boldsymbol{v_i = v_{i-1} + a}\Delta t$$

可得

$$\binom{P_i}{vi} = \begin{pmatrix}1 & \Delta t\\ 0 & 1\end{pmatrix}\binom{P_{i-1}}{v_{i-1}} + \begin{pmatrix}\frac{\Delta t^2}{2}\\ \Delta t\end{pmatrix} \cdot a_i$$

即

$$\tilde{x}_k^- = A * \tilde{x}_{k-1} + B * u_k$$

**2：先验估计协方差**

$$P_{k+1}^- = AP_kA^T + Q$$

……(2)

矩阵的协方差公式：

$$\operatorname{cov}(x, x) = varx$$

$$\mathrm{cov}(Ax, Ax) = A \cdot \mathrm{cov}(x, x) \cdot A^T$$
$$\mathrm{cov}(Ax + k, Ax + k) = A \cdot \mathrm{cov}(x, x) \cdot A^T$$

将(1)式代入协方差公式，我们容易得到
$p_{k+1}^{-}$：先验估计值$\tilde{x}_{k+1}^{-}$的协方差
$A$：状态转移矩阵
$P_k$：后验估计值$\tilde{x}_k$的协方差
注意到，多出来一个 Q,在(1)式中，其实包含噪声$\omega_k$(服从高斯分布),
所以：
$Q$：过程激励噪声协方差（系统过程的协方差）。

**过渡：观测方程**

$$z_k = Hx_k + v_k$$

……(3)

$x_k$：k 时刻的状态量
$H$：由状态量到观测量的转移矩阵
$v_k$：观测噪声(服从高斯分布)
$z_k$：k 时刻的观测量

## 二：更新

**3：修正估计**

$$\boldsymbol{\tilde{x}_k = \tilde{x}_k^{-} + K_k(z_k - H \cdot \tilde{x}_k^{-})}$$……(4)

根据(3)式：
$z_k$：k 时刻的观测量
$H$：由状态量到观测量的转移矩阵
$\tilde{x}_k^{-}$：当前 k 时刻的先验估计的状态量
$K_k$：k 时刻的滤波增益矩阵，称卡尔曼增益或卡尔曼系数
$\tilde{x}_k$：k 时刻的后验状态估计值
$z_k - H \cdot \tilde{x}_k^{-}$：实际观测和预测观测的残差，和卡尔曼增益一起修正先验，得到后验

这个式子主要是利用先验估计状态+观测值综合得出最终的滤波结果, K 是个可调整的权重，若更信任观测值，权重可调大，更信任先验估计，参数可调小

**4：更新卡尔曼增益**

$$K = P_k^{-} H^T (H P_k^{-} H^T + R)^{-1}$$

……(5)

$K$：卡尔曼增益矩阵
$p_k^-$：先验估计值$\hat{x}_k^-$的协方差
$H$：由状态量到观测量的转移矩阵
$R$：测量噪声的协方差

**5：更新后验估计协方差**

后验估计协方差是融合了观测值的协方差，由(4)式代入协方差公式得到

$$P_k = (I - KH) * P_k^- \quad \cdots\cdots(6)$$

$P_k$：后验估计值的协方差，表示状态的不确定度
$I$：单位矩阵
$K$：卡尔曼增益矩阵
$H$：由状态量到观测量的转移矩阵
$p_k^-$：先验估计值$\hat{x}_k^-$的协方差