学习笔记 01　　相机的内参和外参

一、像素坐标和图像坐标的关系。

（一）像素坐标平面相对于图像坐标没有旋转，它的两坐标轴相互垂直。

$$\text{关系式}\begin{cases} u=\dfrac{x}{d_x}+u_0 \\ v=\dfrac{y}{d_y}+v_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{d_x} & 0 & x \\ 0 & \dfrac{1}{d_y} & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d_x & 0 & -u_0 d_x \\ 0 & d_y & -v_0 d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix}$$

dx 和 dy 是相机形成的图像中每个像素对应真实世界中的长度，用于联系像坐标和成像平面，是成像元件的固有属性。假定需要成像的物体是一个矩形，或者可以用一个矩形把它完全包围起来。把矩形的一个顶点 A 放在图像平面的原点处，同时这个原点位于像素平面的（u0，v0）处。用 B 表示与点 A 呈斜对角关系的顶点。用 x 和 y 这两个参数表示矩形的实际长度，则 x/dx 表示这个物体的长边对应到像素平面中需要有几个单位长度，y/dy 同理①。令图像平面的原点（0，0）与像素平面上的（u0,v0）点重合。坐标变换应该使得两个坐标系下的顶点 B 在两个坐标系按照上述方式重叠摆放时看起来是一个点。如果只用（x/dx,y/dy）表示顶点 B，达不到上述要求，应把它在 u 轴方向向右②平移 u0 单位，向 v 轴正向平移 v0 个单位，即可达到上述要求。此时，顶点 B 在像素平面下的坐标变为（x/dx+u0, y/dy+v0），与像素平面下的点（x,y）相同。

1. 上述关系描述了一种坐标变换，其中的 dx,dy 描述了坐标轴单位长度的伸缩，u0,y0 描述了图像平面的原点在像素平面中的位置，同时这也是经过坐标的伸缩变换后应该平移的长度。这四个参数构成了相机的内参；

2. 注释①允许 x/dx 和 y/dy 是非整数

3. 注释②关于坐标系的建立和坐标轴的选取：

图像平面代表物理世界，其坐标原点(x,y)=(0,0)选择在成像元件（如 CCD）的中心，横向 x 轴且向右为正，纵向 y 轴且向下为正，位于其中的点的横纵坐标可正可负，一个单位长度可以是真实世界中的任何长度单位。像素平面是计算机中用于描述图像的平面。这里不讨论用发光点阵显示图像的方法，只考虑一副放大了的能看见一个个小色块的图像。一个像素是一个小方格，它的面积是 dx*dy。原点位于成像元件的左上角，点(u0,v0)代表了区域 D: u∈(u0-dx,u0],v∈(v0-dy,v0]的一块区域。在像素平面下，成像平面中的(0,0)是（u0，v0）。同样地，横向为 x 轴且向右为正，纵向为 y 轴且向下为正。

4. 坐标变换的矩阵形式：记

$$U=\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}, A=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{d_x} & 0 & x \\ 0 & \dfrac{1}{d_y} & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} d_x & 0 & -u_0 d_x \\ 0 & d_y & -v_0 d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

矩阵变换为$U=AX,X=BU$，显然可知$AB=I,I=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix}$。

（二）像素坐标平面相对于图像坐标有旋转角，它的两坐标轴相互垂直。

$$\begin{cases}x'=x\cos\theta+y\sin\theta \\ y'=-x\sin\theta+y\cos\theta\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=x'\cos\theta-y'\sin\theta \\ y=x'\sin\theta+y'\cos\theta\end{cases}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

关系式：$$\begin{bmatrix}x' \\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x \\ y\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}x \\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x' \\ y'\end{bmatrix}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix}x' \\ y' \\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x \\ y \\ 1\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}x \\ y \\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x' \\ y' \\ 1\end{bmatrix}$$

其中x',y'是图像坐标, x,y是像素坐标, θ是图像坐标相对于像素坐标逆时针旋转的角度。如果需要平移，则相应地添加平移量 tx,ty

（三）像素坐标平面相对于图像坐标没有旋转角，但是它的两坐标轴有夹角

关系式：$$\begin{cases}u=u_0+\dfrac{x-y\cot\theta}{d_x} \\ v=v_0+\dfrac{y}{d_y\sin\theta}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}u \\ v \\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{d_x} & -\dfrac{\cot\theta}{d_x} & u_0 \\ 0 & \dfrac{1}{d_y\sin\theta} & v_0 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x \\ y \\ 1\end{bmatrix}$$

其中 u,v 是点在像素坐标系下的坐标，u0,v0 是图像坐标系的原点在像素坐标系下的坐标，θ是像素坐标系坐标轴正向的夹角。u 与 x,y 的关系式中出现-ycotθ是因为，v 轴与 u 轴的夹角缩小后，计算图像坐标中的点(x,y)在 u 轴上的投影不再是通过该点作 u 轴的垂线，而是作一条与 v 轴平行的斜线，投影缩小了。v 与 y 的关系式出现 sinθ是因为，v 轴顺时针旋转后，点(x,y)在 v 轴上的投影变长了，且原来的投影是现在的投影在与 u 轴垂直方向上的分量。当θ为 90°时，上述关系退化成（一）中给出的关系。

如果需要综合上述变换，只需把它们各自的变换矩阵相乘。

二、相机坐标系和世界坐标系的关系。

关系式：$$\begin{bmatrix}x_C \\ y_C \\ z_C\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x \\ y \\ z\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}t_x \\ t_y \\ t_z\end{bmatrix}$$，记

$$X_C=\begin{bmatrix}x_C \\ y_C \\ z_C\end{bmatrix},R=\begin{bmatrix}r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33}\end{bmatrix},X=\begin{bmatrix}x \\ y \\ z\end{bmatrix},T=\begin{bmatrix}t_x \\ t_y \\ t_z\end{bmatrix},$$

则上述关系还可以写作$X_C=RX+T$，其中 Xc 是相机坐标系中的点，X 是世界坐标系中的

点, T 是两个坐标系中对应点的平移关系, R 描述了从世界坐标系到相机坐标系的变换方式。

R 和 T 矩阵共同确定了两个坐标系的对应关系，它们都与相机本身无关，因此是外参。仍然采用类似于一中的描述模型的方法, 这一次我们用一个立方体表示真实世界中的一个物体，并令它的一个顶点 A 落在世界坐标系的坐标原点，对角线上的另一个点 B 是我们要考察的点，它由 X^T 给出。世界坐标系的原点在相机坐标系中的位置由 TT 描述。由于世界坐标系与相机坐标系之间可能有一（二）给出的旋转关系，且变换过程不产生形变，因此我们用 R 来描述这一关系。R 是三维旋转，可以分解成以 x,y,z 轴为轴的旋转。当坐标系以 x 轴为转轴时，y 轴和 z 轴在 yOz 平面发生旋转，这与一（二）中的情形极为类似。所不同的是，x 方向没有旋转，则 r12,r13,r21,r31 均为 0。所以

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

同理

$$R_y = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}, R_z = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中，默认 yOz,xOz,xOy 平面上的旋转都是逆时针旋转θ。当需要在两个或三个维度上进行旋转时，只需把 Rx,Ry,Rz 按需要相乘。一般地，$R = R_x R_y R_z$。需要注意的是，Rx,Ry,Rz 中的θ可以不相等。

三、相机坐标系与图像平面坐标系的关系。

关系式：$$\begin{cases} \dfrac{x}{f} = \dfrac{x_C}{z_C} \\ \dfrac{y}{f} = \dfrac{y_C}{z_C} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \cdot z_C = f \cdot x_C \\ y \cdot z_C = f \cdot y_C \end{cases} \Leftrightarrow z_C \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \\ 1 \end{bmatrix}$$

之前的两部分都是讨论平面到平面、三维到三维的变换关系。从摄像机到最终的成像元件需要把三维坐标变换为二维坐标。相机坐标系包含 x,y,z 轴，图像平面是三维物体在平面投影所成，它的坐标原点在 z 轴上，平面平行于相机坐标系的 xOy 平面。f 是焦距，是摄像机的光心到图像平面的距离。相机坐标系中描述一个物体的位置需要(xc,yc,zc)，在图像平面上描述一个点需要(x,y)，加上参数 f，就可以找到空间中的相似三角形，就有了上面的关系式。

最后，从世界坐标到相机坐标，从图像坐标到像素坐标，世界中的一个点在四个坐标系下有了四种表现形式。给定相机以及相机的位置，就可以确定出内参和外参。给定世界坐标，就可以通过变换矩阵把它映射到像素平面上。

已知世界坐标(x,y,z)，求它的像素坐标(u,v):

$$
z_C \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{d_x} & 0 & u_0 \\ 0 & \frac{1}{d_y} & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{3\times 3} & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}
$$

参考:

1. https://blog.csdn.net/u011574296/article/details/73658560
2. https://blog.csdn.net/waeceo/article/details/50580607