罗德里格斯（Rodrigues）旋转方程推导

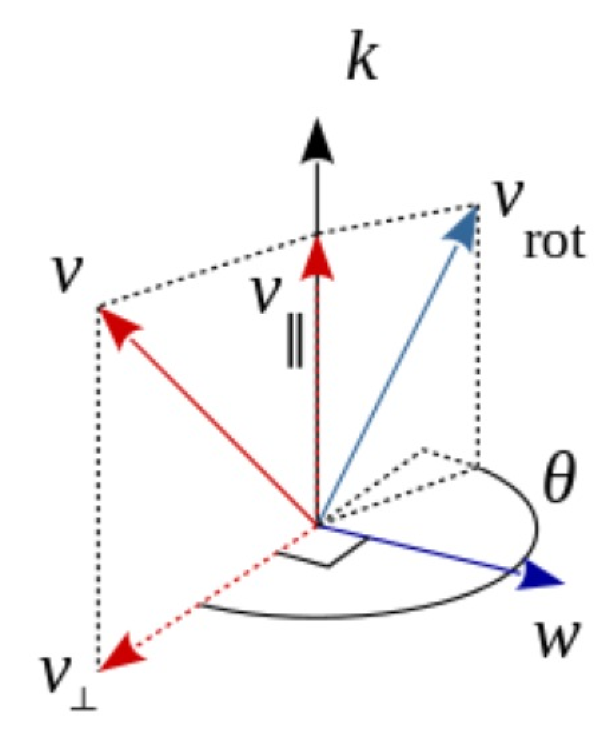
2018年05月26日 15:20:00 冬日旭光 阅读数：560 更多

罗德里格斯旋转方程是从角度和向量计算出相应的旋转矩阵，这个旋转方程在很多方面有重要的应用，这里简要概述一下方程的推导过程。

主要参考资料是维基百科，其实基本上就是翻译一下，自己走一遍这个推导过程，这里把链接贴出来。

维基百科-罗德里格斯方程

推导过程：



整个推导过程都是围绕上面的图片开展的，进行向量推导。

首先，定义向量k是旋转轴的单位矢量，向量v是绕向量k旋转角度θ的任意向量（旋转方向遵循右手定则，图中逆时针）。

使用点乘和叉乘，向量v可以分解成与轴k平行和垂直的分量，

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}\,, \qquad (1\text{-}1)$$

与k平行的分量是

$$\mathbf{v}_{\parallel} = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{k})\mathbf{k} \qquad (1\text{-}2)$$

向量v在k上的向量投影，垂直于k的分量为

$$\mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\parallel} = \mathbf{v} - (\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})\mathbf{k} = -\mathbf{k}\times(\mathbf{k}\times\mathbf{v}) \qquad (1\text{-}3)$$

矢量k×v可以看作是v⊥绕k逆时针旋转90°的副本，所以它们的大小相等，但是方向是垂直的。同样，向量k×（k×v）是v⊥绕k逆时针旋转180°的副本，使得k×（k×v）和v⊥的大小相等，但方向相反（因此符号相反）。

矢量三重叉积链接了平行分量和垂直分量，参考公式为a×（b×c）=（a·c）b -（a·b）c，对于给定任意三个向量a，b，c。

平行于轴的分量在旋转时不会改变幅度和方向，

$$\mathbf{v}_{\parallel\text{rot}} = \mathbf{v}_{\parallel}\,, \qquad (1\text{-}4)$$

根据以上分析，垂直分量在旋转时会改变方向，但保持其大小

$$|\mathbf{v}_{\perp\text{rot}}| = |\mathbf{v}_{\perp}|\,,$$
$$\mathbf{v}_{\perp\text{rot}} = \cos\theta\mathbf{v}_{\perp} + \sin\theta\mathbf{k}\times\mathbf{v}_{\perp}\,, \qquad (1\text{-}5)$$

并且由于k和$v_{\parallel}$是平行的，所以它们的叉积是零 $k\times v_{\parallel} = 0$，因此

$$\mathbf{k}\times\mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{k}\times\left(\mathbf{v}-\mathbf{v}_{\parallel}\right) = \mathbf{k}\times\mathbf{v} - \mathbf{k}\times\mathbf{v}_{\parallel} = \mathbf{k}\times\mathbf{v} \qquad (1\text{-}6)$$

因此

$$\mathbf{v}_{\perp\text{rot}} = \cos\theta\mathbf{v}_{\perp} + \sin\theta\mathbf{k}\times\mathbf{v}\,. \qquad (1\text{-}7)$$

这种旋转是正确的，因为矢量v⊥和k×v具有相同的长度，并且k×v是v⊥围绕k逆时针旋转90°。使用三角函数正弦和余弦对v⊥和k×v进行适当乘积可以得到旋转的垂直分量。旋转分量的形式类似于笛卡尔基的2D平面极坐标（r，θ）中的径向向量

$$\mathbf{r} = r\cos\theta\mathbf{e}_x + r\sin\theta\mathbf{e}_y\,, \qquad (1\text{-}8)$$

其中ex，ey是它们指示方向上的单位向量。

现在完整的旋转矢量是

$$\mathbf{v}_{\text{rot}} = \mathbf{v}_{\parallel\text{rot}} + \mathbf{v}_{\perp\text{rot}}\,, \qquad (1\text{-}9)$$

用上述结果中的v ||rot和v⊥rot的定义代替

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{\text{rot}} &= \mathbf{v}_{\parallel} + \cos\theta\,\mathbf{v}_{\perp} + \sin\theta\,\mathbf{k}\times\mathbf{v}\\ &= \mathbf{v}_{\parallel} + \cos\theta\left(\mathbf{v}-\mathbf{v}_{\parallel}\right) + \sin\theta\,\mathbf{k}\times\mathbf{v}\\ &= \cos\theta\,\mathbf{v} + (1-\cos\theta)\mathbf{v}_{\parallel} + \sin\theta\,\mathbf{k}\times\mathbf{v}\\ &= \cos\theta\,\mathbf{v} + (1-\cos\theta)(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})\mathbf{k} + \sin\theta\,\mathbf{k}\times\mathbf{v}\end{aligned} \qquad (1\text{-}10)$$

矩阵表示

将v和k×v表示为列矩阵，叉积可以表示为矩阵乘积

$$\begin{bmatrix}(\mathbf{k}\times\mathbf{v})_x\\(\mathbf{k}\times\mathbf{v})_y\\(\mathbf{k}\times\mathbf{v})_z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}k_yv_z - k_zv_y\\k_zv_x - k_xv_z\\k_xv_y - k_yv_x\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -k_z & k_y\\k_z & 0 & -k_x\\-k_y & k_x & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{bmatrix}. \qquad (1\text{-}11)$$

令矩阵K表示单位向量k的"叉积矩阵"

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix}0 & -k_z & k_y\\k_z & 0 & -k_x\\-k_y & k_x & 0\end{bmatrix}, \qquad (1\text{-}12)$$

矩阵方程可以表示为

$$\mathbf{K}\mathbf{v} = \mathbf{k}\times\mathbf{v} \qquad (1\text{-}13)$$

对于任何向量v（实际上，矩阵K是具有特征值0和±i）。

迭代右边的叉乘相当于乘以左边的叉积矩阵，如下

$$\mathbf{K}(\mathbf{K}\mathbf{v}) = \mathbf{K}^2\mathbf{v} = \mathbf{k}\times(\mathbf{k}\times\mathbf{v})\,. \qquad (1\text{-}14)$$

而且，由于k是单位向量，所以k具有单位2-范数。 因此旋转公式（1-10）可以表示为

$$\mathbf{v}_{\text{rot}} = \mathbf{v} + (\sin\theta)\mathbf{K}\mathbf{v} + (1-\cos\theta)\mathbf{K}^2\mathbf{v}\,,\quad \|\mathbf{K}\|_2 = 1\,. \qquad (1\text{-}15)$$

补充一下推导过程：（1-10）到（1-15）都点跨度比较大，其实中间经过了下面一个步骤，

$$V_{rot} = v - (1-\cos\theta)(k\cdot k)v + (1-\cos\theta)(k\cdot v)k + \sin\theta\,Kv$$
$$V_{rot} = v + (1-\cos\theta)((k\cdot v)k - (k\cdot k)v) + \sin\theta\,Kv$$

再根据矢量三重叉积就可以获得（1-15）。

将v用紧凑表达式表达

$$\mathbf{v}_{\text{rot}} = \mathbf{R}\mathbf{v} \qquad (1\text{-}16)$$

最后获得罗德里格斯旋转方程：

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + (\sin\theta)\mathbf{K} + (1-\cos\theta)\mathbf{K}^2 \qquad (1\text{-}17)$$