罗德里格斯的轮换公式

维基百科，自由的百科全书

本文是关于罗德里格斯的旋转公式，它与相关的 Euler-Rodrigues参数和用于3D旋转的Euler-Rodrigues公式不同。

在三维旋转理论中，**罗德里格斯的旋转公式**，以奥林德罗德里格斯命名，是一种有效的算法，用于在给定轴和旋转角度的情况下在空间中旋转矢量。通过扩展，这可以被用于转化所有三个基向量，以计算旋转矩阵在SO（3），该组的所有旋转矩阵的，从轴角。换句话说，罗德里格式提供了一种算法来计算指数映射从**所以**（3），所述李代数的SO（3），以SO（3），而不实际计算全矩阵指数。

内容 [hide]

声明 [编辑]

如果**v**是在载体中$\mathbb{R}^3$和**k**是一个单位矢量描述的旋转轴线关于哪个**v**由角度旋转*θ*根据右手定则，在Rodrigues的公式旋转矢量是

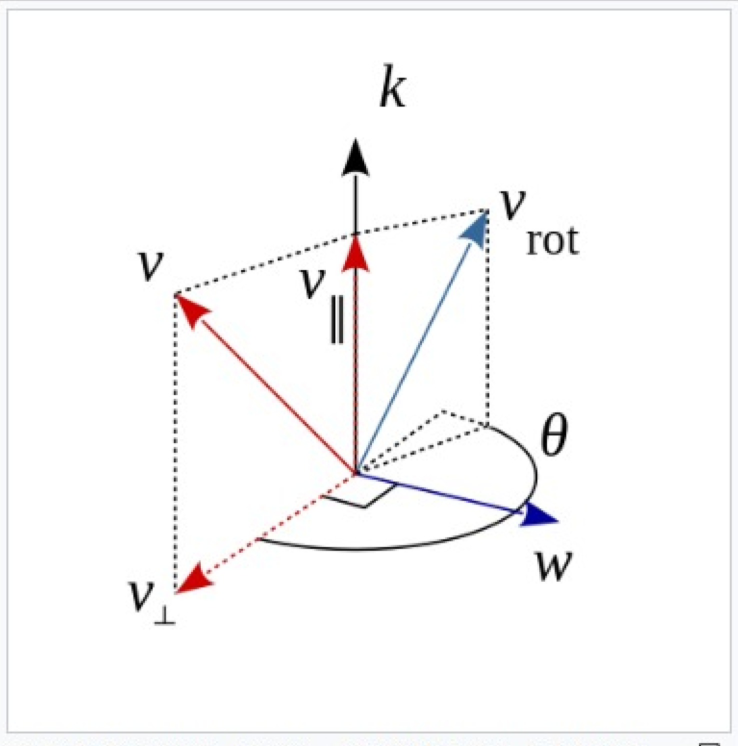
$$\boxed{\mathbf{v}_{\mathrm{rot}} = \mathbf{v}\cos\theta + (\mathbf{k}\times\mathbf{v})\sin\theta + \mathbf{k}\,(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})(1-\cos\theta)\,.}$$

另一种说法是将轴向量写为任意两个非零向量**a**和**b**的叉积 **a** × **b**，其定义旋转平面，并且角度*θ*的感觉是从**a**和朝向**b**测量的。假设*α*表示这些矢量之间的角度，两个角度*θ*和*α*不一定相等，但它们以相同的方式测量。然后可以写入单位轴向量

$$\mathbf{k} = \frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|} = \frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\alpha}\,.$$

当涉及定义平面的两个向量时，该形式可能更有用。物理学中的一个例子是托马斯进动，它包括罗德里格斯公式给出的旋转，就两个非共线增压速度而言，旋转轴垂直于它们的平面。

推导 [编辑]



罗德里格旋转公式旋转**v**由角度*θ*围绕向量**k**通过分解成平行它的组件，并垂直于*k*，并且仅旋转垂直分量。

设**k**是定义旋转轴的单位矢量，并且令**v**是任何矢量以**k**为角度*θ*旋转（右手规则，图中为逆时针）。

使用点和叉积，矢量**v**可以分解为平行和垂直于轴**k**的分量，

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_\parallel + \mathbf{v}_\perp\,,$$

其中与**k**平行的分量是

$$\mathbf{v}_\parallel = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{k})\mathbf{k}$$

称为矢量投影的**v**上**ķ**，并垂直于部件**ķ**是

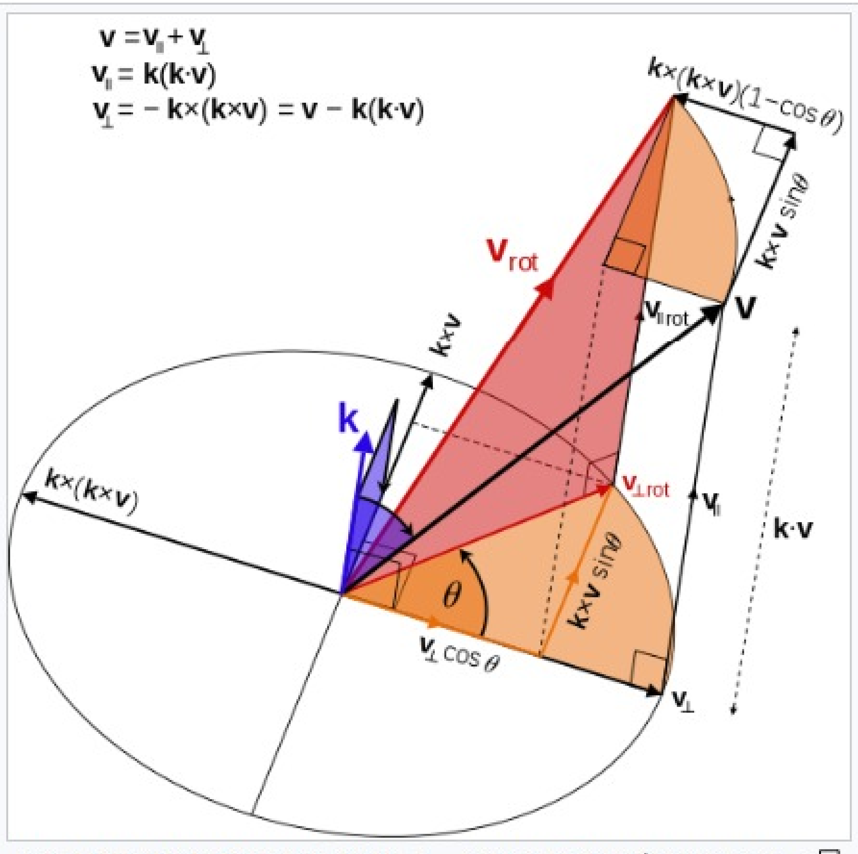
$$\mathbf{v}_\perp = \mathbf{v} - \mathbf{v}_\parallel = \mathbf{v} - (\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})\mathbf{k} = -\mathbf{k}\times(\mathbf{k}\times\mathbf{v})$$

称为向量排斥的**v**从**ķ**。

矢量**ķ** × **v**可以被看作是副本**v** $_\perp$由90°逆时针旋转**ķ**，所以它们的大小相等，但方向是垂直的。同样地，矢量**ķ** ×（**ķ** × **v**）的副本**v** $_\perp$通过逆时针旋转180°约**ķ**，使得**ķ** ×（**ķ** × **v**）和**v** $_\perp$是在幅度，但方向相反相等（即它们各自的底片其他，因此减号）。扩大了向量三重积建立平行和垂直分量之间的连接，以供参考公式是一个 ×（**b** × **c** ^（）= 一 · Ç）**b** -（一 · **b**）Ç给出的任何三个矢量一个，**b**，**c** ^。

平行于轴的分量在旋转下不会改变幅度或方向，

$$\mathbf{v}_{\parallel\mathrm{rot}} = \mathbf{v}_\parallel\,,$$



矢量几何罗德里格斯的旋转公式，以及分解为平行和垂直分量。

根据，只有垂直分量会改变方向但保持其大小

$$|\mathbf{v}_{\perp\mathrm{rot}}| = |\mathbf{v}_\perp|\,,$$

$$\mathbf{v}_{\perp\mathrm{rot}} = \cos\theta\mathbf{v}_\perp + \sin\theta\mathbf{k}\times\mathbf{v}_\perp\,,$$

并且由于**ķ**和**v** $_\parallel$是平行的，它们的交叉积为零**ķ** × **v** $_\parallel$ = **0**，从而使

$$\mathbf{k}\times\mathbf{v}_\perp = \mathbf{k}\times\left(\mathbf{v}-\mathbf{v}_\parallel\right) = \mathbf{k}\times\mathbf{v} - \mathbf{k}\times\mathbf{v}_\parallel = \mathbf{k}\times\mathbf{v}$$

然后是

$$\mathbf{v}_{\perp\mathrm{rot}} = \cos\theta\mathbf{v}_\perp + \sin\theta\mathbf{k}\times\mathbf{v}\,.$$

这种旋转是正确的，因为矢量**v** $_\perp$和**ķ** × **v**具有相同的长度，并**ķ** × **v**是**v** $_\perp$通过逆时针旋转90°左右**ķ**。使用三角函数正弦和余弦对$\mathbf{v}_\perp$和**k** × **v**进行适当的缩放，得到旋转的垂直分量。旋转分量的形式类似于2D平面极坐标（*r*，*θ*）中的径向矢量 在笛卡尔的基础上

$$\mathbf{r} = r\cos\theta\mathbf{e}_x + r\sin\theta\mathbf{e}_y\,,$$

其中**e** $_x$，**e** $_y$是指示方向的单位矢量。

现在完全旋转的矢量是

$$\mathbf{v}_{\mathrm{rot}} = \mathbf{v}_{\parallel\mathrm{rot}} + \mathbf{v}_{\perp\mathrm{rot}}\,,$$

通过替换的定义**v** $_{\parallel\mathrm{rot}}$和**v** $_{\perp\mathrm{rot}}$在方程结果

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{\mathrm{rot}} &= \mathbf{v}_\parallel + \cos\theta\,\mathbf{v}_\perp + \sin\theta\,\mathbf{k}\times\mathbf{v}\\ &= \mathbf{v}_\parallel + \cos\theta\left(\mathbf{v}-\mathbf{v}_\parallel\right) + \sin\theta\,\mathbf{k}\times\mathbf{v}\\ &= \cos\theta\,\mathbf{v} + (1-\cos\theta)\mathbf{v}_\parallel + \sin\theta\,\mathbf{k}\times\mathbf{v}\\ &= \cos\theta\,\mathbf{v} + (1-\cos\theta)(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})\mathbf{k} + \sin\theta\,\mathbf{k}\times\mathbf{v}\end{aligned}$$

矩阵表示法 [编辑]

将**v**和**k** × **v**表示为列矩阵，可以将叉积表示为矩阵乘积

$$\begin{bmatrix}(\mathbf{k}\times\mathbf{v})_x\\(\mathbf{k}\times\mathbf{v})_y\\(\mathbf{k}\times\mathbf{v})_z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}k_y v_z - k_z v_y\\k_z v_x - k_x v_z\\k_x v_y - k_y v_x\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -k_z & k_y\\k_z & 0 & -k_x\\-k_y & k_x & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{bmatrix}.$$

设**K**表示单位向量**k**的“叉积矩阵”，

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix}0 & -k_z & k_y\\k_z & 0 & -k_x\\-k_y & k_x & 0\end{bmatrix},$$

矩阵方程是象征性的

$$\mathbf{K}\mathbf{v} = \mathbf{k}\times\mathbf{v}$$

对于任何矢量**v**。（事实上，**K**是具有此属性的唯一矩阵。它具有特征值0和± *i*）。

在右边迭代交叉乘积相当于乘以左边的叉积矩阵，特别是

$$\mathbf{K}(\mathbf{K}\mathbf{v}) = \mathbf{K}^2\mathbf{v} = \mathbf{k}\times(\mathbf{k}\times\mathbf{v})\,.$$

此外，由于**k**是单位矢量，因此**K** 具有单位2范数。因此，矩阵语言中的先前旋转公式是

$$\mathbf{v}_{\mathrm{rot}} = \mathbf{v} + (\sin\theta)\mathbf{K}\mathbf{v} + (1-\cos\theta)\mathbf{K}^2\mathbf{v}\,,\quad \|\mathbf{K}\|_2 = 1\,.$$

注意，在这种表示法中，前导词的系数*现在为*1。

对**v**进行因式分解允许紧凑表达

$$\mathbf{v}_{\mathrm{rot}} = \mathbf{R}\mathbf{v}$$

哪里

$$\boxed{\mathbf{R} = \mathbf{I} + (\sin\theta)\mathbf{K} + (1-\cos\theta)\mathbf{K}^2}$$

是围绕**k**逆时针旋转角度*θ*的旋转矩阵，**I**是3×3 单位矩阵。该矩阵[**R**是旋转族元素SO（3）的$\mathbb{R}^3$，和**ķ**是的元件李代数**所以**（3）生成的李群（注意**ķ**是斜对称，其表征**所以**（3））。就矩阵指数而言，

$$\mathbf{R} = \exp(\theta\mathbf{K})\,.$$

要看到最后一个身份存在，人们会注意到

$$\mathbf{R}(\theta)\mathbf{R}(\phi) = \mathbf{R}(\theta+\phi),\quad \mathbf{R}(0) = \mathbf{I}\,,$$

一的特性单参数子组，即指数，并且所述式匹配无穷小*θ*。

对于基于该指数关系的替代推导，请参见从**so**（3）到SO（3）的指数映射。对于逆映射，请参阅从SO（3）到**so**（3）的日志映射。

另见 [编辑]

- 轴角
- 轮换（数学）
- SO（3）和SO（4）
- Euler-Rodrigues公式