1　梯度、方向導數與切平面

1.1　梯度的定義

對於兩變數函數 $f(x,y)$，其梯度 $\nabla f(x,y)$ 定義為

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

若是變數有三個，則 $\nabla f(x,y,z)$ 定義為

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

梯度在數學形式上的定義

一般而言，一個有 n 個變數的函數 $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$，取梯度以後便得到一個 n 維的向量函數。而其第一個分量就是對第一個變數作偏微分；第二個分量就是對第二個變數作偏微分，以此類推。也就是說

$$\nabla f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

example 1

$f(x,y) = x^2y + \sin(xy)$，求其在點 $(2,3)$ 處的梯度。

解

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (\ 2xy + y\cos(xy)\ ,\ x^2 + x\cos(xy)\ )$$

所以

$$\nabla f(2,3) = (\ 12 + 3\cos(6)\ ,\ 4 + 2\cos(6)\ )$$

這樣的定義不算難懂，但我們目前也只知道它在數學式上是如何定義，並不明白這樣的向量有何幾何意義。

1.2 方向導數

如果你去爬山，正在山坡上的某處時。此時我問你，你那邊的斜率大概多少？你一定感到無法回答，要再反問我：「你是說朝哪個方向看？」。

通常在山坡上，你朝著四面八方各種方向看過去，看起來的斜率應該會不盡相同。有些方向看起來坡度很大地往上，有些方向看起來差不多是水平的，而有些方向看起來是坡度朝下的。

簡介何謂方向導數

單變數的微分，便是在求斜率。多變函數時，也可以做類似事情。但如前所述，由於定義域已不只一維，因此在同一個點上，可能朝各個方向的斜率都不盡相同。

這種問題，便是**方向導數**（directional derivative），且讓我們先定睛於兩變數的情況。設函數 $z = f(x,y)$，而在定義域 $xy-$ 平面上有一點 (a,b) 及單位向量 $\vec{\mathbf{u}}$。我們想問，曲面 $z = f(x,y)$ 在 (a,b) 處，沿 $\vec{\mathbf{u}}$ 的方向的斜率會是多少。符號上，是記為 $D_{\vec{\mathbf{u}}}f(a,b)$。裡面的 a,b 標示出是在何處；下標的單位向量則標示是往哪個方向。

既然 $\vec{\mathbf{u}}$ 是單位向量，那我就可以把它寫成是 $(\cos(\theta),\sin(\theta))$。接著我定義一個新函數

$$F(t) = f(\ a + t\cos(\theta)\ ,\ b + t\sin(\theta)\ )$$

推導方向導數

意思是從點 (a,b) 出發，沿 $(\cos(\theta),\sin(\theta))$ 方向，走 t 單位長，之後的函數值。而當然，$F(0) = f(a+0,b+0) = f(a,b)$。

這樣子定義了以後，當然，只要將 $F(t)$ 對 t 微分後再代 $t = 0$ [1]，便會是 f 於 (a,b) 處沿 $(\cos(\theta),\sin(\theta))$ 方向的方向導數。也就是說

$$D_{\vec{\mathbf{u}}}f(a,b) = F'(0)$$

而要把 $F'(0)$ 作出來，只須使用連鎖規則

$$\frac{d}{dt}\, f(\ \overbrace{a + t\cos(\theta)}^{x}\ ,\ \overbrace{b + t\sin(\theta)}^{y}\ )\Big|_{t=0}$$

[1] 因為 $(x,y) = (a,b)$ 處是 $t = 0$ 時。

$$= \frac{\partial}{\partial x} f(a,b)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial}{\partial y} f(a,b)\frac{dy}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} f(a,b)\cos(\theta) + \frac{\partial}{\partial y} f(a,b)\sin(\theta)$$

兩兩相乘再加起來，可視為向量內積

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} f(a,b)\ ,\ \frac{\partial}{\partial y} f(a,b)\right) \cdot (\cos(\theta)\ ,\ \sin(\theta))$$

過程看不太懂也沒關係，知道此結果也能夠計算方向導數。

而注意到左邊那個向量，正是我們剛學到的梯度！因此可寫成

$$\nabla f(a,b) \cdot (\cos(\theta)\ ,\ \sin(\theta))$$

所以，計算方向導數，便是取該點的梯度，再與單位向量 $\vec{\mathbf{u}}$ 作內積。

> $f(x,y)$ 於點 (a,b) 處，沿著單位向量 $\vec{\mathbf{u}}$ 的方向，的方向導數為
>
> $$D_{\vec{\mathbf{u}}} f(a,b) = \nabla f(a,b) \cdot \vec{\mathbf{u}}$$

example 2

$f(x,y) = x^2 + y^2$，$\vec{\mathbf{v}} = (1,1)$。計算方向導數 $D_{\vec{\mathbf{v}}} f(-3,2)$。

解

$$\nabla f(-3,2) = \left(\frac{\partial}{\partial x} f(-3,2)\ ,\ \frac{\partial}{\partial y} f(-3,2)\right)$$

$$= \left(2x \Big|_{(-3,2)}\ ,\ 2y \Big|_{(-3,2)} \right) = (-6,4)$$

注意 $\vec{\mathbf{v}}$ 並非單位向量，要將它單位化。由於它的長度是 $\sqrt{2}$，所以除以 $\sqrt{2}$，得到 $\vec{\mathbf{u}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$。所以

$$D_{\vec{\mathbf{v}}} f(-3,2) = (-6,4) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

現在來想一個問題。不是先給你方向問你方向導數，而是問說，在 $f(a,b)$ 處，朝哪個方向看起來，會有最大的方向導數。

最大方向導數問題

由於方向導數可用梯度與單位向量作內積

$$D_{\vec{\mathbf{u}}}f(a,b) = \nabla f(a,b)\cdot\vec{\mathbf{u}}$$

而向量內積又可寫成

$$\left|\nabla f(a,b)\right|\cdot\left|\vec{\mathbf{u}}\right|\cdot\cos(\varphi)$$

其中 φ 是兩向量之夾角。

我們注意，由於 $\nabla f(a,b)$ 是取完梯度以後，又已代入點 (a,b) 了。所以它已是一個固定向量，也因此其長度 $\left|\nabla f(a,b)\right|$ 為一定值，姑且記之為 C。而至於 $\vec{\mathbf{u}}$，它是單位向量，長度根本是 1。也就是說，現在整個式子的變數根本就只有 φ：

$$C\cdot 1\cdot\cos(\varphi)$$

問哪個方向會有最大的方向導數，等同於，問怎樣的 φ 會使上式極大。那當然便是 $\cos(\varphi)=1$ 時，也就是 $\varphi=0$ 時，會使方向導數最大。而所謂的 $\varphi=0$ 時，即是梯度 $\nabla f(a,b)$ 與單位向量 $\vec{\mathbf{u}}$ 同向[2] 之時。

所以，剛剛那問題，在 $f(a,b)$ 處，朝哪個方向看起來，會有最大的方向導數。答案便是與梯度 $\nabla f(a,b)$ 同向的那個方向。

我再把這句話反過來講。梯度 $\nabla f(a,b)$ 這個向量，它是朝哪個方向呢？它是朝著，會使得函數 $f(x,y)$ 在 (a,b) 處，有最大方向導數的那個方向。

而這最大方向導數的值又是如何呢？由於我們已取 $\cos(\varphi)=1$ 了，所以

梯度的幾何意義與最大方向導數有關

$$C\cdot 1\cdot\cos(\varphi) = C\cdot 1\cdot 1 = C$$

C 是我剛剛用來記 $\left|\nabla f(a,b)\right|$ 的。也就是說，最大方向導數的值，就是梯度 $\nabla f(a,b)$ 的長度。

綜合以上討論，我們便可歸納出梯度 $\nabla f(a,b)$ 的幾何意義。

[2]不要說平行，應說同向。

函數 $z = f(x,y)$，其在點 (a,b) 處的梯度 $\nabla f(a,b)$，是一個向量。此向量的幾何意義為：

1. 就方向而言，它朝著使得函數 $f(x,y)$ 在 (a,b) 處，有最大方向導數的那個方向。
2. 就長度而言，其長度為那個最大方向導數的值。

example 3

熱鍋上的螞蟻急著想儘快往較低溫處跑。鍋子位於 $x^2+y^2 \le 1$，牠此時正在原點 $(0,0)$，而鍋子的溫度函數是 $170\cos(y+xy)+9(x^2+x+2y)$。此時牠應朝哪個方向移動？

解

為了不被煮熟趕快逃跑，這隻熱鍋上的螞蟻急得像熱鍋上的螞蟻。在此危急關頭，正所謂「急中生智」，牠在一瞬之間領悟了微積分，知道此時要算最小方向導數。最大方向導數是取 $\cos(\varphi)=1$，而最小就是取 $\cos(\varphi)=-1$。也就是說，跟梯度向量的方向反向。

於是先求出梯度

$$
\begin{aligned}
&\nabla f(0,0)\\
&=\left(170y\sin(y+xy)+9(2x+1)\Big|_{(0,0)},\ 170(1+x)\sin(y+xy)+9(2)\Big|_{(0,0)}\right)\\
&=(9,18)
\end{aligned}
$$

因此它要往 $(-1,-2)$ [3] 的方向移動，才會降溫最快。不過即使往降溫最快的方向跑，溫度仍然很高，所以牠還是被煮熟了。

[3] $(9,18)$ 加負號以後是 $(-9,-18)$，而因為我們只用到其方向，所以寫 $(-1,-2)$ 或是 $(-4,-8)$ 之類的都無所謂。

example 4

有一座山，其坡面為曲面 $100(x^2+y^2-2x-3y+2xy)$。此時你在 $(x,y)=(1,2)$ 處，請問你那邊看起來坡度最大處，斜率是多少？

解

先求出梯度

$$
\begin{aligned}
&\nabla f(1,2)\\
&=\left(100(2x-2+2y)\big|_{(1,2)},\ 100(2y-3+2x)\big|_{(1,2)}\right)\\
&=(400,300)
\end{aligned}
$$

梯度向量的長度，便是最大方向導數的值

$$\sqrt{400^2+300^2}=500$$

其實，梯度的幾何意義還沒有討論完。

如果我們遇到的，是隱函數 $g(x,y,z)=C$。雖然也是三維空間中的曲面，但如果此時我們取梯度，得到 $\nabla g(x,y,z)=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y},\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)$。此情況所取的梯度，幾何意義就會不一樣了 [4]。

且讓我們先對於隱函數 $g(x,y,z)=C$，等號兩邊作微分（differenial），得到

$$dg=dC$$

因 C 是常數所以 $dC=0$；而 dg 則用全微分，得到

$$g_x dx+g_y dy+g_z dz=0$$

探討隱函數形式下取梯度的幾何意義

[4] 一定的嘛。畢竟一個是二維，一個是三維，一定不一樣的。

兩兩相乘再加起來，可視之為兩向量作內積。因此寫成

$$(g_x, g_y, g_z) \cdot (dx, dy, dz) = 0$$

又可寫成

$$\nabla g(x, y, z) \cdot d\vec{\mathbf{X}} = 0$$

其中 $d\vec{\mathbf{X}} = (dx, dy, dz)$。我簡寫成此符號，是為要強調，它是代表沿著曲面 $g(x, y, z) = C$ 上作的一個微小變動。它可以是各種方向，只要是沿著曲面上的。現在我們分析的結果是，這個沿著曲面上任意方向的微小變動 $d\vec{\mathbf{X}}$，它跟梯度向量 $\nabla g(x, y, z)$ 內積為 0，也就是垂直。梯度向量跟沿著曲面不管怎麼拉的向量都垂直，所以這個梯度向量即是**法向量**。

梯度的幾何意義

一個三維中的曲面，若將其表達成顯函數形式 $z = f(x, y)$，其在點 (a, b) 處的梯度 $\nabla f(a, b)$，是一個向量。此向量的幾何意義為：

1. 就方向而言，它朝著使得函數 $f(x, y)$ 在 (a, b) 處，有最大方向導數的那個方向。
2. 就長度而言，其長度為那個最大方向導數的值。

若將其表達成隱函數形式 $g(x, y, z) = C$，其在點 (a, b, c) 處的梯度 $\nabla g(a, b, c)$，是曲面在 (a, b, c) 處的法向量。

已知隱函數，要將其寫成顯函數形式，可能會很困難。然而已知顯函數的情況下，要寫成隱函數就非常簡單。譬如說 $z = x^2 + 2y + 7$，只要簡單地將 z 移過去，得到 $x^2 + 2y + 7 - z = 0$，這樣就有隱函數形式了。

顯函數形式必能改寫為隱函數形式

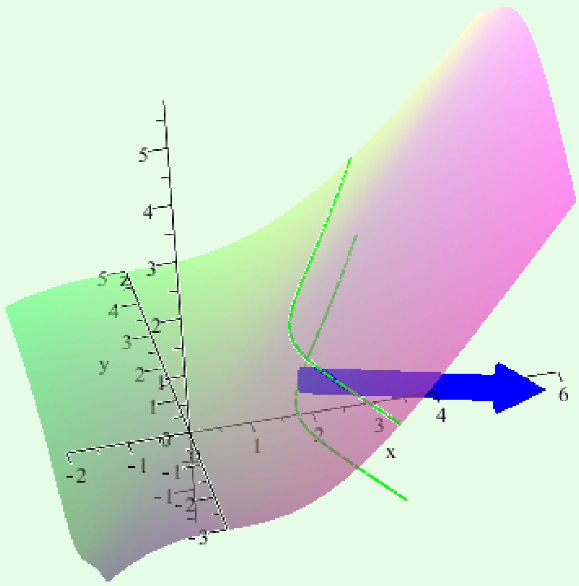
另外，雖然前面我是以三維中的曲面為例，但二維中的曲線也是同樣道理的。譬如說 $y = 3x + 4$ 是一條直線。若將 y 移項得到 $3x - y + 4 = 0$，此時作梯度得到 $(3, -1)$，這便是直線的法向量。而如果是圓 $x^2 + y^2 = 4$，作梯度得到 $(2x, 2y)$，接著再代點之後，就會得到該點的梯度，也就是該處的

法向量。

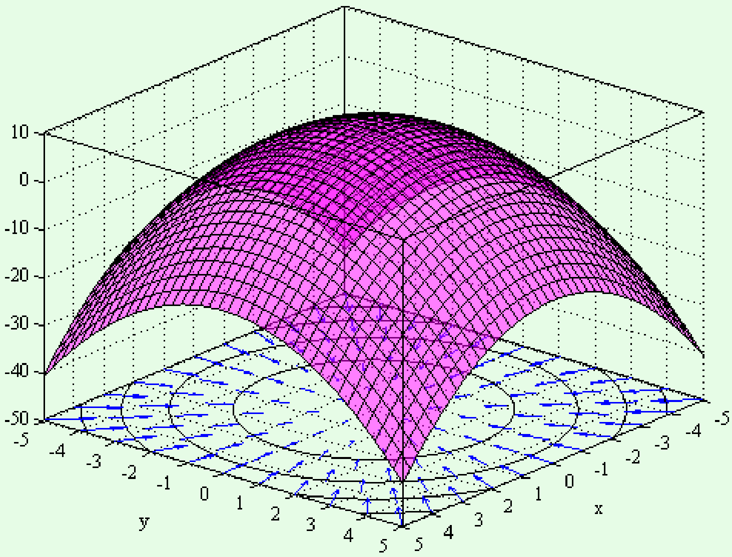
如果說對於曲面 $z=f(x,y)$，為了繪製等高線圖，設了 $z=c_1,c_2,\dots,c_n$，而得到 $f(x,y)=c_1,\dots,f(x,y)=c_n$。這些都是二維平面上的曲線，的隱函數形式。

我的意思是說，看清楚了，同樣是 $\nabla f(a,b)$。對於曲面來說，$\nabla f(a,b)$ 是在它的顯函數形式之下取梯度後，代 $(x,y)=(a,b)$；對曲線來說，$\nabla f(a,b)$ 是在它的隱函數形式之下取梯度後，代 $(x,y)=(a,b)$。

所以說，同一個向量 $\nabla f(a,b)$，它是在曲面 $z=f(x,y)$ 上的 $(x,y)=(a,b)$ 處，指著最大方向導數的方向，且其長度就是最大方向導數的值；而它同時也是在某一條等高線 $f(x,y)=c_k$ 上的 $(x,y)=(a,b)$ 處的法向量。



如上圖所示，畫出曲面及它的某一條通過 (x,y) 的等高線。對曲面的顯函數或是對曲線的隱函數在 $(x,y)=(2,1)$ 處取梯度，取出來都是那條藍色向量。這條藍色向量，正是那條等高線在 $(x,y)=(2,1)$ 處的法向量。同時，曲面在 $(x,y)=(2,1)$ 處，朝著藍色向量方向，即是最大方向導數的方向，並且向量的長度就是最大方向導數的值。



example 5

$$\text{求曲線 } x^3 + y^3 - \frac{9}{2}xy = 0 \text{ 於 } (2,3) \text{ 處的切線方程式。}$$

解

在單變數微分中，可以用隱微分來處理這問題。而現在我們也可以將其取梯度

$$\nabla\left(x^3 + y^3 - \frac{9}{2}xy\right) = \left(3x^2 - \frac{9y}{2}\ ,\ 3y^2 - \frac{9x}{2}\right)$$

接著代點 $(2,3)$，得到

$$\left(12 - \frac{27}{2}\ ,\ 27 - 9\right) = \left(-\frac{3}{2}\ ,\ 18\right)$$

這是曲線 $(2,3)$ 處的法向量，同時也是以 $(2,3)$ 為切點的切線之法向量 [5]。因此切線方程式便為

$$-\frac{3}{2}(x-2) + 18(y-3) = 0$$

[5] 相切即是有共同的法向量。

1.3 切平面

前面示範了以梯度來求出切線方程式。而如果是給定一個曲面，想要求切平面方程式的話，也可以用梯度來做。

example 6

曲面 $x^2+4y^2=z^2$，求以 $(3,2,5)$ 為切點的切平面方程式。

解

先移項得到

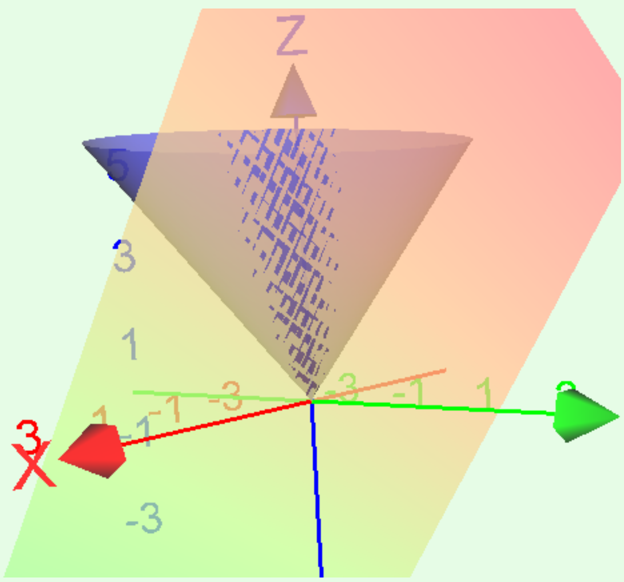
$$x^2+4y^2-z^2=0$$

此情況取梯度

$$\nabla(x^2+4y^2-z^2)=(\ 2x\ ,\ 8y\ ,\ -2z\ )$$

接著再代點 $(3,2,5)$ 可得法向量 $(6,16,-10)$。於是切平面方程式即為

$$3(x-3)+8(y-2)-5(z-5)=0$$



example 7

曲面 $z=\ln(x^2+y^2)$，求以 $(1,0,0)$ 為切點的切面方程式。

解

先移項

$$\ln(x^2+y^2)-z=0$$

取梯度

$$\left(\frac{2x}{x^2+y^2},\frac{2y}{x^2+y^2},-1\right)$$

代入點 $(1,0,0)$

$$(2,0,-1)$$

於是可知切平面方程式為

$$2(x-1)-z=0$$

直線方程式與平面方程式，都是只要知道所過的某一點及法向量，便可以寫出。而在求切線或切平面方程式時，題目所給的切點即是它所過的某一點。至於法向量，所謂的相切即是有共同的法向量的意思。所以切線的法向量就是曲線在切點上的法向量；切平面的法向量就是曲面在切點上的法向量。而欲求曲線或曲面在切點上的法向量，只須在隱函數形式下取梯度，並代入切點。