4. Aussagenlogik

Wir haben bisher beschrieben, auf welche Weise die Objekte und Individuen in unserer Welt als einfache Mengen und Mengen von n-Tupeln erfasst werden können. Daraufhin haben wir Relationen und Funktionen zwischen Mengen betrachtet, die wir als n-Tupel darstellen können, so dass wir nun in der Lage sind, beliebige Gruppierungen von Objekten und Individuen vorzunehmen. Dies benötigen wir, um Sachverhalte in der Welt zu beschreiben. Da wir sprachliche Ausdrücke und ihren Bezug zur Welt betrachten wollen, sehen wir uns die einfachen (Aussage-) Sätze in (1) an:

(1) (i) Peter ist in Paris.
(ii) Ein brauner Hund läuft den Hügel hinauf.
(iii) Karl hat gestern drei Autos zu Schrott gefahren.

Derartige Sätze analysieren wir zunächst nicht weiter, sondern fassen sie als elementare Aussagen auf. Als solche können diese Sätze entweder wahr oder falsch sein. Wenn z.B. in einer Weltsituation, in der ein brauner Hund den Hügel hinauf läuft, eine Person den Satz (1)(ii) äußert, dann ist dieser Satz wahr. Ist es hingegen nicht der Fall, dass ein brauner Hund den Hügel hinauf läuft, so ist der Satz (1)(ii) falsch.

Andere einfache Sätze wie die in (2) können nicht wahr oder falsch sein:

(2) (i) Kommt Franz morgen?
(ii) Wer will schwimmen gehen?
(iii) Gib mir 'mal fünf Mark!
(iv) Wäre das doch nicht passiert!

Der Satz (2)(i) ist eine Entscheidungsfrage, auf die mit *Ja* oder *Nein* geantwortet werden kann, während der Satz (2)(ii) eine Ergänzungsfrage ist, die beantwortet werden kann, indem man die Personen nennt, die schwimmen gehen wollen. Satz (2)(iii) ist ein Imperativsatz, auf den eine Handlung des Hörers erfolgen sollte, und (2)(iv) ist ein Exklamativsatz, mit dem eine innere Befindlichkeit ausgedrückt wird. Diesen vier Sätzen ist gemeinsam, dass sie weder wahr noch falsch sein können. Da wir gerade nach den Wahrheitsbedingungen von Sätzen fragen, fallen sie nicht in den Bereich unseres gegenwärtigen Interesses.

Nun interessieren uns nicht nur einfache Sätze wie in (1), sondern auch komplexere Zusammenfassungen solcher Sätze wie in (3):

(3) (i) Petra ist im Kino, und Franz ist in der Kneipe.
(ii) Peter kommt nicht.
(iii) Wenn Franz Bier trinkt, dann ist Petra sauer.
(iv) Peter ist in Rom, oder Karl ist in London.

Wir wollen auch zu diesen z.T. koordinierten Sätzen feststellen können, unter welchen Bedingungen sie wahr oder falsch sind. Offensichtlich hängt diese Bewertung nicht ausschließlich davon ab, ob die einzelnen Sätze jeweils wahr oder falsch sind, sondern auch davon, welche Verbindung zwischen den jeweils verknüpften Sätzen besteht. So ist der Satz (3)(i) nur dann wahr, wenn sowohl Petra im Kino als auch Franz in der Kneipe ist, d.h. beide Teilsätze müssen wahr sein, damit auch der Gesamtsatz wahr ist. Bei dem Satz (3)(iv) ist dies aber anders. Hier genügt ein wahrer Teilsatz für die Wahrheit des Gesamtsatzes.

Der Satz (3)(ii) sieht zunächst wie ein einfacher Satz aus. Doch auch dieser Satz ist komplex, denn in ihm steckt der Teilsatz *Peter kommt*, und dieser Teilsatz wird negiert mit dem Wörtchen *nicht*. Wenn Peter tatsächlich kommt, dann ist der Satz *Peter kommt* wahr, der Satz *Peter kommt nicht* ist hingegen falsch.

Schwieriger als diese ersten Sätze ist der Satz (3)(iii) zu beurteilen. Er ist sicherlich wahr, wenn Franz tatsächlich Bier trinkt und Petra tatsächlich sauer ist. Der Satz ist aber sicherlich falsch, wenn Franz tatsächlich Bier trinkt, Petra aber nicht sauer ist. Wenn Franz kein Bier trinkt, Petra aber sauer ist und jemand äußert in dieser Situation (3)(iii), so ist der Satz hinsichtlich seines Wahr- bzw. Falschseins intuitiv schwierig zu beurteilen.

4.1. Syntax der Aussagenlogik

Uns interessiert nun, welche Auswirkung die Verwendung der unterschiedlichen *Satzkonnektoren* auf die Wahrheit des Gesamtsatzes hat. Um dies systematisch zu untersuchen, wollen wir zunächst festlegen, welche Menge von Sätzen wir überhaupt betrachten wollen. Nun haben wir in der Mengenlehre bereits unterschiedliche Verfahren kennengelernt, mit denen wir Mengen angeben können. Da es sich bei der Menge der einfachen und komplexen Sätze bereits um unendlich viele Sätze handelt, ist es prinzipiell unmöglich, alle Sätze aufzuschreiben. Wir wollen daher *rekursiv* definieren, welche Sätze Gegenstand unserer Untersuchung sind. Dazu geben wir zunächst an, was *atomare Aussagen* sind und legen fest, dass alle atomaren Aussagen zur Menge der *wohlgeformten Formeln (wff)* gehören. Sodann geben wir an, wann zwei wohlgeformte Formeln wieder eine wohlgeformte Formel ergeben. Und schließlich müssen wir noch festlegen, dass außer dem genannten nichts anderes eine wohlgeformte Formel ist. Damit haben wir ein *syntaktisches System* konstruiert, welches uns eine unendlich große Menge wohlgeformter Formeln definiert. Wir formulieren also rekursive Regeln für die Menge der wffn. Die Regelmenge nennen wir die *Syntax der Aussagenlogik*. Die einzelnen Regeln legen fest, in welcher Art und Weise einzelne Aussagen verknüpft werden können. Die atomaren Aussagen p, q, ... und die Konnektoren bilden das Vokabular der Aussagenlogik.

(1) Syntax der Aussagenlogik.
- (i) Jede atomare Aussage ist eine *wohlgeformte Formel (wff)*.
- (ii) 1. Jede wff, der das Symbol '¬' (Negation) vorausgeht, ist eine wff.
  Zwei (nicht notwendigerweise verschiedene) wffn können zu einer wff zusammengefasst werden, indem
  2. das Symbol '∧' (Konjunktion) oder
  3. das Symbol '∨' (Disjunktion) oder
  4. das Symbol '→' (Konditional) oder
  5. das Symbol '↔' (Bikonditional)
  zwischen diese Ausdrücke geschrieben und der Gesamtausdruck in Klammern gesetzt wird.
- (iii) Nichts sonst ist eine wff.

Dieses syntaktische System erlaubt uns u.a. die folgenden wohlgeformten Formeln zu bilden:

(2) $p, (p \wedge q), \neg(p \leftrightarrow q), \neg(\neg r), ((((p \vee q) \wedge \neg s) \rightarrow r) \leftrightarrow s)$

Damit haben wir zunächst die *syntaktische Struktur* der Ausdrücke festgelegt, die wir betrachten wollen. Nun möchten wir darüber hinaus auch wissen, welche Wahrheitswerte diese komplexen Ausdrücke haben, d.h. wir fragen nach ihrer *semantischen Struktur*.

4.2. Semantik der Aussagenlogik

Um sicherzugehen, dass wir zu allen Ausdrücken eine semantische Struktur erhalten, müssen wir semantische Regeln angeben, die den syntaktischen Regeln zugeordnet sind, d.h. jedesmal, wenn eine syntaktische Regel angewendet wird, wird auch eine korrespondierende semantische Regel angewendet. Über diese Korrespondenz der Anwendungen von syntaktischen Regeln und semantischen Interpretationsregeln werden wir genau die Wahrheit bzw. Falschheit von komplexen Sätzen berechnen können. Da die wohlgeformten Formeln aus *atomaren Aussagen* und *Verknüpfungen* bestehen, gehen wir so vor, dass jeder atomaren Aussage ein *Wahrheitswert* zugeordnet wird. Als Wahrheitswerte wählen wir das Symbol *1* für eine wahre Aussage und das Symbol *0* für eine falsche Aussage.

Sodann müssen wir festlegen, welche *Wahrheitsbedingungen* die Konnektoren haben. Diese Festlegung geschieht durch sog. *Wahrheitswert-Tabellen*. In einer solchen Tabelle sind alle möglichen Kombinationen von Wahrheitswerten der beteiligten Aussagen erfasst, und die Tabelle gibt jeweils an, bei welcher Verteilung sich welcher Wahrheitswert ergibt. Betrachten wir zunächst die einfache Tabelle für die *Negation*. Diese Tabelle ist deshalb unkompliziert, weil sich die Negation nur auf *eine* Aussage bezieht, wie wir aus den syntaktischen Regeln ersehen können. Die vier anderen Konnektoren beziehen jeweils zwei Aussagen aufeinander.

Wenn wir untersuchen wollen, was die Bedeutung der Negation einer Aussage ist, so sind zwei Fälle zu unterscheiden. Eine Aussage kann entweder wahr oder falsch sein. Wenn eine Aussage wahr ist, so ist ihre Negation falsch; und wenn eine Aussage falsch ist, so ist ihre Negation wahr. Wenn z.B. die Aussage *Paul ist in Rom* wahr ist, d.h. dass Paul tatsächlich in Rom ist, dann ist die negierte Aussage *Paul ist nicht in Rom* oder *Es ist nicht der Fall, dass Paul in Rom ist* falsch. Ist die Aussage *Paul ist in Rom* falsch, d.h. dass sich Paul tatsächlich nicht in Rom aufhält, dann ist die negierte Form dieser Aussage, nämlich *Paul ist nicht in Rom* oder *Es ist nicht der Fall, dass Paul in Rom ist*, wahr. Die Eigenschaft der Negation scheint also zu sein, dass sie die Wahrheit von Aussagen gerade in ihr Gegenteil verkehrt. Diesen Sachverhalt drücken wir nun in der folgenden Wahrheitswert-Tabelle aus:

(1) Negation:

p	¬p
1	0
0	1

Beispiel: p = Peter kommt.
¬p = Es ist nicht der Fall, dass Peter kommt.
= Peter kommt nicht.

In der ersten Spalte von (1) stehen die beiden möglichen Wahrheitswerte, die die Aussage p annehmen kann. In der zweiten Spalte stehen die Wahrheitswerte, die die Formel ¬p hat, wenn p den Wert in der ersten Spalte annimmt. Damit haben wir zu der ersten *syntaktischen Regel* eine *semantische Regel* formuliert.

Dies wollen wir nun auch für die zweite syntaktische Regel vornehmen. Die *Konjunktion* verbindet zwei Aussagen miteinander, etwa die Aussage p = *Peter ist in Rom* und die Aussage q = *Maria ist in Paris*. Wann ist demnach die Aussage *Peter ist in Rom und Maria ist in Paris* wahr bzw. falsch? Nun, wenn Peter tatsächlich in Rom ist und wenn Maria tatsächlich in Paris ist, dann ist diese Aussage wahr. Wenn aber Peter nicht in Rom ist, Maria hingegen in Paris ist, dann ist die Aussage falsch. Genauso verhält es sich, wenn Peter tatsächlich in Rom, Maria aber tatsächlich irgendwo anders als in Paris ist. Die Aussage ist auch falsch, wenn sowohl Peter tatsächlich nicht in Rom und Maria tatsächlich nicht in Paris ist. Wir müssen also, wenn wir alle Fälle berücksichtigen wollen, eine Wahrheitswert-Tabelle mit vier Zeilen aufstellen. Jede Zeile enthält eine mögliche Verteilung der Wahrheitswerte der beiden Aussagen:

(2) Konjunktion:

p	q	$(p \wedge q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Beispiel: p = Peter raucht.
q = Maria trinkt.
$(p \wedge q)$ = Peter raucht und Maria trinkt.

Damit haben wir auch für die zweite syntaktische Regel eine *semantische Regel* formuliert.

Die Zeilenanzahl einer Wahrheitswert-Tabelle ist abhängig von der Anzahl der auftretenden Variablen. Hat man eine Verknüpfung mit drei Variablen, so erhöht sich die Zeilenanzahl auf acht, bei vier Aussagen auf sechzehn usw. Die Anzahl der Zeilen einer Wahrheitswert-Tabelle lässt sich berechnen, wie in (3) angegeben:

(3) Wenn eine komplexe Formel n verschiedene Aussagen enthält, so ist die Anzahl der Zeilen für die Wahrheitswert-Tabelle dieser Formel gleich 2^n.

Die *Disjunktion* entspricht der Verknüpfung mit 'oder'. Diese Art der Verbindung zweier Aussagen hat andere Wahrheitsbedingungen als die Verknüpfung mit der Konjunktion '$\wedge$'. Wäre dies nicht so, so würde 'oder' das gleiche bedeuten wie 'und'.

Betrachten wir nochmals die beiden Aussagen p = *Peter ist in Rom* und q = *Maria ist in Paris*. Die Aussage *Peter ist in Rom oder Maria ist in Paris* ist offensichtlich wahr, wenn Peter tatsächlich in Rom und zugleich Maria tatsächlich in Paris ist. Dabei setzen wir voraus, dass das einschließende 'oder' gemeint ist, das mit *vel* ins Lateinische übersetzt wird, und nicht das ausschließende *entweder oder*, das mit *aut* zu übersetzen ist. Im Deutschen haben beide Bedeutungen nur eine Lautform. Die komplexe Aussage ist - im Gegesatz zur Konjunktion - aber auch dann wahr, wenn nur eine der beiden beteiligten Aussagen wahr ist. Wenn also nur Peter tatsächlich in Rom ist, Maria aber in London, dann ist die Gesamtaussage in diesem Fall genauso wahr, als wenn Peter tatsächlich in London, Maria aber in Paris ist. Nur wenn beide Teilaussagen falsch sind, wird auch deren Verknüpfung mit '$\vee$' falsch. Wenn also weder Peter in Rom noch Maria in Paris ist, so ist die Gesamtaussage falsch. Wir erhalten damit die Wahrheitswert-Tabelle für die Disjunktion in (4):

(4) Disjunktion:

p	q	(p $\vee$ q)
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Beispiel: p = Peter raucht.
q = Maria trinkt.
(p $\vee$ q) = Peter raucht oder Maria trinkt.

Die *wenn ... dann ...*-Beziehung wird *Konditional* (oder auch *materiale Implikation*) '$\rightarrow$' genannt, und sie verknüpft ebenfalls zwei Aussagen. Nur sind die Wahrheitswert-Verteilungen bei dieser Verknüpfung nicht so leicht ausfindig zu machen. Wenn wir wieder die beiden Aussagen p = *Peter ist in Rom* und q = *Maria ist in Paris* betrachten, so sagt uns unser intuitives Verständnis, dass die *wenn...dann...*-Verknüpfung wahr ist, wenn beide Aussagen wahr sind. Wenn es also wahr ist, dass Peter in Rom und Maria in Paris ist, dann ist die Aussage *Wenn Peter in Rom ist, dann ist Maria in Paris* wahr. Und ähnlich plausibel erscheint es uns, dass diese Aussage falsch ist, wenn Peter in Rom, Maria aber nicht in Paris ist.

Problematisch wird die Bewertung, wenn die Aussage p falsch ist. Wenn Peter tatsächlich nicht in Rom, Maria aber tatsächlich in Paris ist, und irgend jemand sagt *Wenn Peter in Rom ist, dann ist Maria in Paris*, dann scheint dieser Satz zunächst falsch zu sein. Tatsächlich können wir aber gar nicht genau sagen, was er bedeutet. Denn wenn wir von einer Voraussetzung ausgehen, die falsch ist, dann kann daraus alles mögliche folgen. Wenn etwa 2 x 2 = 5 ist, dann wissen wir einfach nicht, wie die Welt beschaffen ist, so dass die Aussage *Es gibt zehn Päpste* wahr sein könnte. In der Tat scheinen unsere Intuitionen bzgl. der Aussage *wenn p, dann q* zu versagen, wenn p falsch ist. Solange wir aber nur zwei Möglichkeiten zur Auswahl haben, nämlich *wahr* oder *falsch*, müssen wir uns für eine der beiden entscheiden. Da es – wie wir später noch sehen werden – gute Gründe dafür gibt, dem Konditional bei falschem Vordersatz den Wert wahr zuzuordnen, wollen wir die Wahrheitswert-Tabelle entsprechend festlegen:

(5) Konditional:

p	q	$(p \rightarrow q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Beispiel: p = Peter raucht.
q = Maria trinkt.
$(p \rightarrow q)$ = Wenn Peter raucht, dann trinkt Maria.

Wir werden später aber noch eine angemessenere Deutung des Konditionals kennen lernen, begnügen uns aber zunächst mit der klassischen Definition.

Wenn wir den nächsten Konnektor, das *Bikonditonal* '$\leftrightarrow$' diskutiert haben, werden wir sehen, dass diese Festsetzung durchaus vernünftig war. Das Bikonditional lässt sich im Deutschen auch mit *genau dann, wenn* paraphrasieren. Des Ausdruck $p \leftrightarrow q$ entspricht einer zweifachen Verwendung des Konditionals, nämlich: $p \rightarrow q$ und $q \rightarrow p$. Das Bikonditional ist also ein Konditional in beide Richtungen. Eine Aussage, die aus zwei mit dem Bikonditional verknüpften Aussagen gebildet ist, ist genau dann wahr, wenn beide Aussagen den gleichen Wahrheitswert haben. Dies führt zu der Wahrheitswert-Tabelle in (6):

(6) Bikonditional:

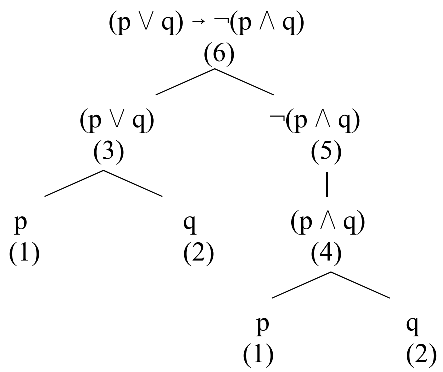
p	q	$(p \leftrightarrow q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Beispiel: p = Peter raucht.
q = Maria trinkt.
$(p \leftrightarrow q)$ = Peter raucht, gdw. Maria trinkt.

Mit den fünf verschiedenen Wahrheitswert-Tabellen haben wir zu jeder syntaktischen Regel eine semantische Regel formuliert, so dass wir nun zu einer beliebig komplexen Formel, die unser syntaktischer Apparat erzeugt, auch deren Wahrheitswert angeben können. Wir gehen von der syntaktischen Struktur der Formel aus und berechnen an jedem Knoten dieser Struktur die Wahrheitswerte.

Der Ausdruck $((p \vee q) \rightarrow \neg(p \wedge q))$ ist sicherlich eine wohlgeformte Formel. Wie lassen sich zu dieser Formel die Wahrheitsbedingungen angeben? Wir müssen alle Kombinationen von Wahrheitswertverteilungen für p und q betrachten und diese für die einzelnen Verknüpfungen aus den jeweiligen Wahrheitswert-Tabellen entnehmen. Dazu benötigen wir aber die syntaktische Struktur des Ausdrucks, der ja auch schon durch die Klammerung sichtbar wird, den wir aber nochmals als Baumstruktur darstellen wollen:

(7)



Um die Wahrheitsbedingungen am obersten Knoten dieses Baumes zu berechnen, beginnen wir bei den atomaren Aussagen und prüfen die Wahrheitsbedingungen an allen Knoten von unten nach oben. Wir folgen dabei der Strategie, dass wir zunächst die Wahrheitswerte der weniger komplexen Teilausdrücke berechnen und diese sodann nach den Wahrheitswert-Tabellen der jeweiligen Konnektoren aufeinander beziehen. Dazu betrachten wir die folgende Tabelle, in der jedem einzelnen Knoten eine Spalte zugeordnet ist. In diesen Spalten stehen die Wahrheitswerte, die an den Knoten jeweils unter allen möglichen Ausgangswerten von p und q auftreten:

(8)

p	q	$(p \vee q)$	$(p \wedge q)$	$\neg(p \wedge q)$	$(p \vee q) \rightarrow \neg(p \wedge q)$
1	1	1	1	0	0
1	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1
0	0	0	0	1	1
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)

In der untersten Zeile stehen die Spaltennummern, die den Knotennummern in dem Baum in (7) entsprechen. Um zu sehen, welche Wahrheitswerte an den Baumknoten in Abhängigkeit von den Wahrheitswerten von p und q auftreten, betrachtet man zu jedem Knoten im Baum (7) die zugehörige Spalte in der Tabelle (8). In den Spalten (1) und (2) stehen die möglichen Wahrheitswert-Verteilungen für p und q. Da wir die Kombinatorik von zwei Aussagen betrachten, die jeweils zwei mögliche Wahrheitswerte annehmen können, ergeben sich also vier Zeilen. Die Spalten (3) und (4) sind identisch mit den Wahrheitswert-Tabellen für die Disjunktion und die Konjunktion. Spalte (5) enthält die Werte für die negierte Spalte (4); und Spalte (6) gibt an, welchen Wahrheitswert die Gesamtformel – abhängig von den Wahrheitswerten von p und q – jeweils hat. Spalte (6) zeigt also, dass die Gesamtformel falsch ist, wenn p und q wahr sind, und dass sie in allen anderen Fällen wahr ist.

Mit Hilfe der Wahrheitswert-Tabellen lassen sich die Wahrheitswerte komplexer aussagenlogischer Formeln systematisch ermitteln. Der Wahrheitswert der Gesamtformel ist dabei stets abhängig von den Wahrheitswerten der beteiligten atomaren Aussagen. Man spricht daher auch von den *Wahrheitsbedingungen* einer aussagenlogischen Formel.

Wir kommen nun auf das Konditional zurück und wollen die Festlegung seiner Wahrheitswert-Tabelle mit Bezug zum Bikonditional motivieren. Das Bikonditional $p \leftrightarrow q$ drückt ja aus, dass $p \rightarrow q$ und $q \rightarrow p$ zugleich gelten, so dass die beiden Formeln in (9) bei gleicher Anfangsbelegung für p und q die gleichen Wahrheitswerte haben sollten. Dies prüfen wir einfach anhand der Tabelle in (10) nach:

(9) (i) $p \leftrightarrow q$
(ii) $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

(10)

p	q	$(p \leftrightarrow q)$	$(p \rightarrow q)$	$(q \rightarrow p)$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)

Ein Vergleich der Spalten (3) und (6) zeigt, dass beide Formeln tatsächlich zu den gleichen Wahrheitswerten führen. Nehmen wir nun an, dass wir das Konditional anders definiert hätten, nämlich wie in (11):

(11) ungünstige Definition des Konditionals:

p	q	(p → q)
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	0

Dann sollten die Spalten (3) und (6) ebenfalls identisch sein. Dies ist, wie wir der Tabelle in (12) entnehmen können, aber nicht der Fall, da in der vierten Reihe zwischen den Spalten (3) und (6) keine Übereinstimmung besteht:

(12)

p	q	(p ↔ q)	(p → q)	(q → p)	(p → q) ∧ (q → p)
1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	0	▸ 1	0	0	▸ 0
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)

Die Tabelle ist also hinsichtlich unserer Intuition in den Spalten (3) und (6) kontraintuitiv. Nun ließe sich einwenden, dass der Unterschied in diesen Spalten dadurch behoben werden kann, dass das Konditional auch in der vierten Reihe den Wert 1 annimmt, so dass wir die Tabelle in (13) erhalten würden:

(13) ebenfalls ungünstige Definition des Konditionals:

p	q	(p → q)
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Diese Definition führt aber zur Ununterscheidbarkeit von Konditional und Bikonditional, so dass auch diese Definition nicht sinnvoll sein kann. Als letzte Möglichkeit verbleibt die Definition in (14), für die wir aber schon in Tabelle (12) gesehen haben, dass sie in der vierten Reihe zu kontraintuitiven Resultaten führt:

(14) ebenfalls ungünstige Definition des Konditionals:

p	q	(p → q)
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Wir können also festellen, dass für die Fälle mit falschem Vordersatz keine Änderung in der Festlegung der Wahrheitswert-Tabelle des Konditionals vorgenommen werden kann, ohne dass kontraintuitive Ergebnisse auftreten.

4.3. Tautologien, Kontradiktionen und Kontingenzen

Es gibt Formeln, deren Wahrheitswerte unabhängig von den Ausgangswerten der beteiligten Aussagen stets gleich sind, d.h. solche Formeln sind unter allen Anfangsbelegungen der Teilausdrücke stets nur wahr oder nur falsch:

(1) (i) Eine Aussage, die stets wahr ist, wird *Tautologie* genannt. In diesem Fall enthält die letzte Spalte der Wahrheitswert-Tabelle nur 1-en.
(ii) Eine Aussage, die stets falsch ist, wird *Kontradiktion* genannt. In diesem Fall enthält die letzte Spalte der Wahrheitswert-Tabelle nur 0-en.
(iii) Eine Aussage, die abhängig von den Ausgangswerten der beteiligten Aussagen sowohl wahr als auch falsch sein kann, wird *Kontingenz* genannt. In diesem Fall enthält die letzte Spalte der Wahrheitswert-Tabelle sowohl 1-en als auch 0-en.

Der Satz *Es regnet oder es regnet nicht* ist tautologisch. Wenn wir den Satz *Es regnet* mit p bezeichnen, so lässt sich der komplexe Satz in die folgende Formel übersetzen: $p \lor \neg p$. Wie wir aus der Tabelle ersehen können, enthält die letzte Spalte nur 1-en, und die Formel ist nach (1)(i) eine Tautologie:

(2)

p	¬p	p ∨ ¬p
1	0	1
0	1	1

Der Satz *Es regnet und es regnet nicht* ist hingegen kontradiktorisch. Dieser Satz wird mit dem Konnektor '∧' übersetzt: p ∧ ¬p. Aus der letzten Spalte der Wahrheitswert-Tabelle lässt sich nach (1)(ii) ablesen, dass es sich um eine Kontradiktion handelt. Die beiden mit '∧' verknüpften Sätzen können nicht gleichzeitig wahr sein:

(3)

p	¬p	p ∧ ¬p
1	0	0
0	1	0

Der Satz *Es regnet und die Sonne scheint* ist kontingent. Denn wenn wir den Satz *Es regnet* mit p bezeichnen und den Satz *Die Sonne scheint* mit q, so erhalten wir die folgende Wahrheitswert-Tabelle für den komplexen Satz:

(4)

p	q	p ∧ q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Nach (1)(iii) ist dieser Satz eine Kontingenz, da in der letzten Spalte sowohl 1-en als auch 0-en auftreten. Die Wahrheit dieses Satzes hängt also von den anfänglichen Wahrheitswerten von p und q ab.

4.4. Logische Äquivalenz und logische Konsequenz

Wir erörtern nun noch die Begriffe *logische Äquivalenz* und *logische Konsequenz*.

(1) Zwei (komplexe) Aussagen P und Q heißen *logisch äquivalent*, gdw. die Formel (P ↔ Q) eine Tautologie ist.

Um zu prüfen, ob zwei Aussagen logisch äquivalent sind, betrachtet man die Wahrheitswert-Tabelle für das Bikonditional. Wenn dabei in der letzten Spalte nur 1-en auftreten, ist das Bikonditional dieser beiden Aussagen eine Tautologie, und die beiden Aussagen sind logisch äquivalent. Ersetzt man in einer Formel einen Teilausdruck durch einen logisch äquivalenten Ausdruck, so bleibt sowohl die Wahrheit als auch die Falschheit der Gesamtaussage unverändert:

(2) Wenn zwei Aussagen P und Q *logisch äquivalent* sind, so schreiben wir: P ⇔ Q.

Betrachten wir etwa die beiden logischen Formeln in (3):

(3) (i) $P := (\neg(p \wedge q) \rightarrow q)$
(ii) $Q := \neg((p \vee q) \rightarrow \neg q)$

Sind P und Q logisch äquivalent? Um diese Frage zu beantworten, müssen wir die Wahrheitswert-Tabelle sowohl für P als auch für Q angeben und sodann prüfen, ob das Bikonditional der beiden letzten Spalten eine Tautologie ist:

(4)

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	P	$p \vee q$	$\neg q$	$(p \vee q) \rightarrow \neg q$	Q	$P \leftrightarrow Q$
1	1	1	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1	0	1
0	1	0	1	1	1	0	0	1	1
0	0	0	1	0	0	1	1	0	1

Dies ist in der Tat der Fall, so dass wir in einer beliebigen Formel, in der P auftritt, anstelle von P auch Q einsetzen können, ohne dass sich der Wahrheitswert für den Gesamtausdruck ändert. Es gilt also: P ⇔ Q.

(5) Eine Aussage Q ist eine *logische Konsequenz* (oder: *logische Folgerung*) einer Aussage P, gdw. $(P \rightarrow Q)$ eine Tautologie ist.
Wenn Q eine logische Konsequenz von P (oder: Q eine logische Folgerung aus P) ist, so schreiben wir: P ⇒ Q.

Um festzustellen, ob Q eine logische Konsequenz von P ist, betrachtet man die Wahrheitswert-Tabelle des Konditionals. Treten dabei in der letzten Spalte nur 1-en auf, so ist Q eine logische Konsequenz von P. Sehen wir uns zur Illustration die beiden Formeln in (6) mit den zugehörigen Tabellen in (7) an:

(6) (i) $P := (\neg(p \wedge q) \rightarrow q)$
(ii) $Q := ((p \vee q) \rightarrow q)$

(7)

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	P
1	1	1	0	1
1	0	0	1	0
0	1	0	1	1
0	0	0	1	0

$p \vee q$	Q
1	1
1	0
1	1
0	1

$P \rightarrow Q$
1
1
1
1

$P \leftrightarrow Q$
1
1
1
0

Wie die unterste Zeile der rechten Tabelle zeigt, sind P und Q nicht logisch äquivalent. Hingegen ist aus der dritten Tabelle ersichtlich, dass Q die logische Konsequenz von P ist.

Wenn man in einer Formel einen Teilausdruck durch eine logische Konsequenz dieses Teilausdrucks ersetzt, so bleibt zwar die Wahrheit der Gesamtaussage unverändert, aber - im Gegensatz zur logischen Äquivalenz - nicht notwendigerweise deren Falschheit. Dies liegt daran, dass das Konditional $P \rightarrow Q$ bei falschem P immer wahr ist, unabhängig davon, ob Q wahr oder falsch ist. Wenn nämlich die Formel P aus (6) in einem komplexeren Ausdruck als Teilformel auftritt wie in (8)(i), so bleibt die Gesamtaussage wahr, wenn wir Q anstelle von P einsetzen. Die Gesamtaussage bleibt aber nicht falsch, wenn wir diese Ersetzung vornehmen. Dies zeigen die ersten drei Reihen der Tabelle in (8)(ii):

(8) (i) $p \vee P$

(ii)

p	P	Q	$p \vee P$	$p \vee Q$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	1	1
0	0	1	0	1

Wie aus der Tabelle in (8)(ii) zu ersehen ist, ist die Formel $p \vee Q$ dann wahr, wenn auch die Formel $p \vee P$ wahr ist. Q kann also für P ersetzt werden, und die Wahrheit der Gesamtformel bleibt erhalten. Wenn die Formel $p \vee P$ allerdings falsch ist, wie in der untersten Zeile, so verändert die Ersetzung von P durch Q den Wahrheitswert der Gesamtformel, wie in der untersten Zeile der beiden letzten Spalten zu sehen ist. Da P und Q nicht logisch äquivalent sind, bleibt die *Falschheit* der Gesamtaussage nicht erhalten, wenn P durch Q ersetzt wird. Da Q aber eine logische Konsequenz von P ist, bleibt die *Wahrheit* der Gesamtaussage erhalten.

Wir wollen nun einige Äquivalenzen erörtern, die in der Aussagenlogik generell gelten. Beginnen wir mit dem Gesetz der *doppelten Negation*, welches besagt, dass eine zweifach negierte Aussage denselben Wahrheitswert hat wie die Aussage selbst:

(9) doppelte Negation:

$\neg(\neg p) \quad \Leftrightarrow \quad p$

Eine andere Klasse von Äquivalenzen wird durch die *Distributivgesetze* festgelegt, die eine Beziehung zwischen der Disjunktion in Verbindung mit der Konjunktion herstellen:

(10) Distributivgesetze:
 (i) $p \vee (q \wedge r) \quad \Leftrightarrow \quad (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
 (ii) $p \wedge (q \vee r) \quad \Leftrightarrow \quad (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

Einen Zusammenhang zwischen der Negation einerseits und der Disjunktion und Konjunktion andererseits stiften die Gesetze von de Morgan. Die Negation einer Disjunktion zweier Aussagen ist äquivalent zu der Konjunktion der beiden negierten Aussagen, und die Negation einer Konjunktion zweier Aussagen ist äquivalent zu der Disjunktion der beiden negierten Aussagen:

(11) De Morgans Gesetze:
 (i) $\neg(p \vee q) \quad \Leftrightarrow \quad \neg p \wedge \neg q$
 (ii) $\neg(p \wedge q) \quad \Leftrightarrow \quad \neg p \vee \neg q$

Auch die konditionale Beziehung zwischen zwei Aussagen lässt sich äquivalent auf eine Formel beziehen, die die Negation und die Disjunktion verwendet, wie (12)(i) ausdrückt. (12)(ii) ist das Gesetz der *Kontraposition*, welches die Äquivalenz zwischen einer konditionalen Verknüpfung zweier Aussagen und deren jeweiliger Negation ausdrückt, indem die Reihenfolge der negierten Aussagen vertauscht wird:

(12) Gesetze für das Konditional:
 (i) $p \rightarrow q \quad \Leftrightarrow \quad \neg p \vee q$
 (ii) $p \rightarrow q \quad \Leftrightarrow \quad \neg q \rightarrow \neg p$
 (iii) $p \rightarrow q \quad \Leftrightarrow \quad \neg(p \wedge \neg q)$

Das Bikonditional lässt sich als Konjunktion zweier Konditionale ausdrücken, die jeweils in die entgegengesetzte Richtung weisen, wie (13)(i) darstellt. Es lässt sich aber auch leicht verstehen, dass (13)(ii) gilt, denn bei bikonditionaler Verknüpfung müssen entweder beide Aussagen wahr oder beide Aussagen falsch sein, damit das Bikonditional wahr ist.:

(13) Gesetze für das Bikonditional:
 (i) $p \leftrightarrow q \quad \Leftrightarrow \quad (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
 (ii) $p \leftrightarrow q \quad \Leftrightarrow \quad (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$

Zum Abschluss dieser Betrachtungen wollen wir uns noch klarmachen, dass verschiedene Zusammenhänge zwischen den Konnektoren bestehen. Es ist nämlich nicht unbedingt nötig, die vier Konnektoren $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ und die Negation $\neg$ zu verwenden, da einige dieser Konnektoren durch die Kombinatorik von anderen Konnektoren erzeugt werden können. Strikt gesprochen reichen die Negation und das Konditional aus, um auch die anderen Konnektoren zu bestimmen. Dies wird aus den folgenden Formeln ersichtlich, deren Richtigkeit der Leser selbst überprüfen kann, indem er jeweils die letzten Spalten der Wahrheitswert-Tabellen für die Konjunktion '$\wedge$', die Disjunktion '$\vee$' und das Bikonditional '$\leftrightarrow$' mit den letzten Spalten der Wahrheitswert-Tabellen der Formeln auf der rechten Seite des Äquivalenzzeichens vergleicht. Auf der rechten Seite wird nur die Negation und das Konditional verwendet:

(14) (i) $p \wedge q \quad \Leftrightarrow \quad \neg(p \rightarrow \neg q)$
(ii) $p \vee q \quad \Leftrightarrow \quad \neg p \rightarrow q$
(iii) $p \leftrightarrow q \quad \Leftrightarrow \quad \neg((p \rightarrow q) \rightarrow \neg(q \rightarrow p))$

4.5. Deduktionsverfahren

Wir wollen nun auf den eigentlichen Gegenstand der formalen Logik als einer *Theorie des Schließens* zu sprechen kommen. Ein *Schluss* besteht aus einer Menge von *Prämissen* und einer *Konklusion*. Eine solche Konstruktion nennt man auch ein *logisches Argument*. Da es keineswegs so ist, dass aus beliebigen Prämissen beliebige Schlüsse gezogen werden können, stellt sich die Frage: *Was ist ein gültiger Schluss?* bzw. *Was ist ein gültiges (valides) Argument?*

Betrachten wir etwa das folgende gültige Argument, das aus den Prämissen P_1, P_2 und der Konklusion Q besteht. Das Zeichen $\therefore$ ist zu lesen als: *daher gilt*.

(1) gültiges Argument:

P_1: Wenn Franz Petra küsst, dann ist Petra glücklich.
P_2: Franz küsst Petra.

$\therefore$ Q: Petra ist glücklich.

Die Gültigkeit liegt offensichtlich nicht an dem Inhalt der einzelnen Prämissen, sondern nur an der Form des Arguments, so dass wir eine rein formale Schreibweise wählen können. Wenn die Aussage p = *Max küsst Petra* und die Aussage q = *Petra ist glücklich* ist, so ergibt sich (2):

(2) gültiges Argument:

$$\begin{array}{lcl} P_1 & = & p \rightarrow q \\ P_2 & = & p \\ \hline \therefore\ Q & = & q \end{array}$$

Und immer, wenn ein Argument diese Form hat, ist es gültig. Argumente, die nicht diese Form aufweisen, können ungültig sein, wie etwa das folgende Argument in (3) zeigt.

(3) ungültiges Argument:

P_1: Wenn Franz Petra küsst, dann ist Petra glücklich.
P_2: Petra ist glücklich.

∴ Q: Franz küsst Petra.

Dieses Argument sieht ähnlich aus, ist aber nicht gültig, denn Petra könnte aus irgendeinem anderen Grund als einem Kuss von Franz glücklich sein. Wie sieht nun die formale Struktur dieses Arguments aus? Die Prämisse P_1 ist die gleiche, wie in dem vorangegangenen Beispiel, aber die Prämisse P_2 ist in diesem Fall q, und die Konklusion ist p. Wir haben also eine formale Struktur wie die in (4), von der wir intuitiv wissen, dass sie nicht unter allen Bedingungen gültig ist. Ein solches Argument bezeichnen wir als ungültig:

(4) ungültiges Argument:

$$\begin{array}{lcl} P_1 & = & p \rightarrow q \\ P_2 & = & q \\ \hline \therefore\ Q & = & p \end{array}$$

Wir wollen nun Formen für gültige Argumente betrachten. Dazu definieren wir zunächst, was überhaupt ein Argument ist:

(5) Ein *logisches Argument* besteht aus
  (i) einer Anzahl von Aussagen, sog. *Prämissen*, für die wir voraussetzen, dass sie wahr sind,
  (ii) einer Aussage, sog. *Konklusion*, deren Wahrheit aus der Wahrheit der Prämissen notwendig folgt.

Jedes Argument besteht also aus einer oder mehreren Prämissen und einer Konklusion. Ein Argument ist *gültig*, wenn unter der Voraussetzung, dass die Prämissen wahr sind, auch die Konklusion wahr ist:

(6) Ein Argument ist *gültig* (*valide*), gdw. es keine Wahrheitswert-Belegung gibt, die alle Prämissen wahr, die Konklusion aber falsch macht, d.h. wenn P_1, P_2, ..., P_n Prämissen sind, und Q die Konklusion ist, dann muss der Ausdruck: $((P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n) \rightarrow Q)$ eine Tautologie sein.

Die Gültigkeit eines Arguments hat also nur indirekt etwas mit der Wahrheit der Konklusion zu tun. Ein gültiges Argument hat keinen Wahrheitswert, nur Aussagen haben einen Wahrheitswert. Was behauptet wird, wenn ein Argument gültig ist, ist, dass bei wahren Prämissen auch die Konklusion wahr sein muss. Wenn die Konklusion hingegen falsch ist, so muss auch mindestens eine der Prämissen falsch sein.

Wir können mit den Mitteln der Aussagenlogik zu einer Menge von Prämissen und einer Konklusion entscheiden, ob ein Argument gültig ist oder nicht, indem wir die Konjunktion der Prämissen als erstes Argument des Konditionals einsetzen und die Konklusion als zweites Argument. Wenn der Konditional-Ausdruck dann eine Tautologie ist, liegt ein gültiges Argument vor.

Ein bekannter Fall ist das in (1) genannte Beispiel, bei dem es sich um den sog. *Modus Ponens* handelt. Dieses Argument hat die Struktur in (7):

(7)
$$\begin{array}{ll} & P \rightarrow Q \\ & P \\ \hline \therefore & Q \end{array}$$

Wenn sowohl der Konditionalausdruck als auch dessen Vordersatz wahr ist, so muss auch der Nachsatz wahr sein.

Ein weiteres gültiges Argument ist der sog. *Modus Tollens*, der die Negation gemeinsam mit dem Konditional verwendet:

(8)
P_1: Wenn Franz am Computer sitzt, dann lernt Petra Italienisch.
P_2: Petra lernt nicht Italienisch.

∴ Q: Franz sitzt nicht am Computer.

Die formale Struktur des Modus Tollens ist die folgende:

(9)
$$\begin{array}{ll} & P \rightarrow Q \\ & \neg Q \\ \hline \therefore & \neg P \end{array}$$

Wenn der Konditionalausdruck wahr ist, die Negation von dessen Nachsatz hingegen falsch, so muss der Vordersatz des Konditionalausdrucks falsch sein, seine Negation hingegen wahr. Im Gegensatz zum Modus Ponens tritt Q in der zweiten Prämisse auf und P in der Konklusion, allerdings sind beide negiert.

Beim *hypothetischen Syllogismus* – einem weiteren gültigen Argument – enthalten beide Prämissen ein Konditional, und der Schluss geht von dem ersten Satz des ersten Konditionals auf den zweiten Satz des zweiten Konditionals:

(10) P_1: Wenn Max Maria küsst, dann betrinkt sich Peter.
P_2: Wenn sich Peter betrinkt, dann ist Monika sauer.

$\therefore$ Q: Wenn Max Maria küsst, dann ist Monika sauer.

Der hypothetische Syllogismus hat die allgemeine Form:

(11)
$$\begin{array}{ll} & P \rightarrow Q \\ & Q \rightarrow R \\ \hline \therefore & P \rightarrow R \end{array}$$

Ein anderer Syllogismus ist der *disjunktive Syllogismus*. Diese Figur enthält als Prämisse einen Satz mit Disjunktion, während die zweite Prämisse einen Teil dieser Disjunktion negiert. Damit die Disjunktion wahr ist, was vorausgesetzt wird, muss also der andere Teil der Disjunktion wahr sein:

(12) P_1: Max küsst Maria oder Max küsst Petra.
P_2: Max küsst Maria nicht.

$\therefore$ Q: Max küsst Petra.

Dieser einfache Sachverhalt beruht auf der Struktur in (13):

(13)
$$\begin{array}{ll} & P \vee Q \\ & \neg P \\ \hline \therefore & Q \end{array}$$

Die drei nächsten Argumente sind von ihrer Struktur her sehr einfach. Wenn man die Wahrheitswert-Tabellen der Konjunktion und der Disjunktion kennt, erscheinen sie schon fast trivial. Nichtsdestoweniger werden wir sie kurz angeben, da zum Beweisen logischer Sätze oft von ihnen Gebrauch gemacht wird.

Bei der *Konjunktionsreduktion* wird ausgenutzt, dass die Prämisse eine Konjunktion ist, die natürlich nur dann wahr ist, wenn beide Sätze wahr sind. Ist dies der Fall, so ist insbesondere einer dieser beiden Sätze wahr:

(14) P_1: Max küsst Maria und Peter trinkt Bier.

∴ Q: Max küsst Maria.

(15) $P \wedge Q$

∴ P

Bei der sog. *Konjunktion* nutzt man denselben Sachverhalt in umgekehrter Richtung. Man formuliert die Prämissen P_1 und P_2, die nach Voraussetzung ja wahr sind, und schließt, dass die Konjunktion ebenfalls wahr ist:

(16) $P_{1:}$ Max küsst Maria
$P_{2:}$ Peter trinkt Bier

∴ Q: Max küsst Petra und Peter trinkt Bier.

(17) P
Q

∴ $P \wedge Q$

Bei der *Addition* verwendet man die Eigenschaft der Disjunktion. Diese ist wahr, wenn mindestens ein Teilsatz wahr ist. Setzt man mit der Prämisse also voraus, dass P wahr ist, so ist die Konklusion, die aus P und einem per Disjunktion verknüpften anderen Satz besteht, ebenfalls wahr. Insbesondere lässt sich also eine ganz beliebige andere Aussage, wie etwa *Peter trinkt Bier*, mittels der Disjunktion mit der Prämisse verbinden:

(18) P_1: Max küsst Maria.

∴ Q: Max küsst Maria oder Peter trinkt Bier.

(19) $\begin{array}{ll} & P \\ \hline \therefore & P \vee Q \end{array}$

4.6. Übungsaufgaben

1. Übersetze die folgenden Sätze in aussagenlogische Formeln. Wähle die Variablen p, q, r für die jeweiligen Aussagen in nicht negierter Form:
   (i) Maria kommt.
   (ii) Clara kommt und Peter geht.
   (iii) Wenn Maria kommt, dann geht Peter.
   (iv) Wenn Maria kommt und Peter geht, dann bleibt Clara.
   (v) Wenn Peter nicht kommt und wenn Otto nicht kommt, dann kommt Clara nicht.
   (vi) Wenn Peter nicht kommt, dann kommt Clara nicht, und wenn Clara nicht kommt, dann kommt Peter nicht.

2. Überprüfe die Richtigkeit der folgenden Beispiele.
   (i) Tautologien: $(p \vee \neg p)$, $(p \rightarrow p)$, $(p \rightarrow (q \rightarrow p))$, $\neg(p \wedge \neg p)$
   (ii) Kontradiktionen: $\neg(p \vee \neg p)$, $(p \wedge \neg p)$, $\neg((p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p))$
   (iii) Kontingenzen: p, $(p \vee p)$, $((p \vee q) \rightarrow q)$, $((p \rightarrow q) \leftrightarrow (q \rightarrow p))$

3. (i) Prüfe anhand einer Wahrheitswert-Tabelle, ob die folgende Aussage kontingent, tautologisch oder kontradiktorisch ist:
   $((p \wedge q) \wedge r) \rightarrow (r \vee \neg(p \wedge q))$
   (ii) Gib den Strukturbaum zu der Formel in (i) an.

4. Zeige die Gültigkeit der folgenden Argumente durch eine formale Ableitung der Konklusion aus den Prämissen:

(i) $\begin{array}{ll} & p \\ & \neg r \\ & (p \wedge \neg r) \rightarrow q \\ \hline \therefore & q \end{array}$

(ii) $\begin{array}{ll} & p \vee q \\ & \neg q \\ & r \rightarrow \neg p \\ \hline \therefore & \neg r \end{array}$

(iii) $\begin{array}{ll} & \neg p \vee q \\ & \neg q \wedge r \\ & \neg(p \vee q) \rightarrow s \\ \hline \therefore & r \wedge s \end{array}$