姓名 学号 年级 专业、班 学院

密 封 线

严肃考纪、拒绝作弊

公平竞争、诚实守信、严肃考纪、拒绝作弊

重庆大学《算法分析与设计》课程试卷

A卷 B卷

2015— 2016 学年 第 1 学期

开课学院：计算机学院 课程号：18016435 考试日期：2015.1.4

考试方式： 开卷 闭卷 其他 考试时间：120 分钟

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总 分
得 分											

考试提示

1.严禁随身携带通讯工具等电子设备参加考试；

2.考试作弊，留校察看，毕业当年不授学位；请人代考、替他人考试、两次及以上作弊等，属严重作弊，开除学籍。

一、（15 分）算法复杂度渐进分析

(1) Prove the following two equations (10 分)

$O(f(n))+O(g(n)) = O(f(n)+g(n))$

$f(n) = \Theta(g(n))$ if and only if $g(n) = \Theta(f(n))$

(2) Prove $T(n)=O(n^2)$ through substitution (替代法) (5 分)

$T(n) = 4T(n/3)+n$, $T(1) = \Theta(1)$.

二、（20 分）合并排序

(1) What is the time complexity (tight bound Θ) to merge (合并) two sorted (已排好序) sub-arrays of equal length n/2 ? (2 分)

(2) What is the time complexity (tight bound Θ) to merge two sorted sub-arrays of lengths n/4 and 3n/4 respectively (长度分别为 n/4 和 3n/4) ? Describe the reason briefly. (简要说明其理由) (4 分)

(3) Sort an array of length n by Merging Sort (合并排序). If we recursively divide the array according to the ratio 1:3 (按 1:3 的比例递归地划分数组) into two sub-arrays and merge them, then

A) write the recurrence(递推函数) of the time complexity T(n); (3 分)

B) draw out the corresponding recursion tree (递归树); (3 分)

C) prove the tight bound (Θ) of T(n) with substitution. (8 分)

三、 （15 分）动态规划（0-1 背包问题）

Given n objects and a "knapsack". Item i has weighs $w_i > 0$ kilograms and has value $v_i > 0$; Knapsack has capacity of W kilograms. Goal: fill knapsack so as to maximize total value (总价值最大化).

(1) Define OPT(i, W) = max profit (最大价值) for subset of items 1, …, i with weight limit W, complete the following recursive function. (5 分)

$$OPT(i,W) = \begin{cases} 0 & i = 0 \\ OPT(i-1,W) & w_i > W \\ \max(OPT(i-1,W-w_i)+v_i,\ OPT(i-1,W)) & \text{otherwise} \end{cases}$$

(2) Given a knapsack with capacity of 11 kilograms, and 5 objects which been described below. Work out OPT(5,11) with table (用表格计算). (10 分)

Item	Value	Weight
1	1	1
2	18	5
3	6	2
4	20	6
5	28	7

命题人：陈波、张敏 组题人：夏云霓 审题人：李佳 命题时间：2015.12.30 教务处制

四、 （10 分）贪心算法（简化 0-1 背包问题）

Given n objects and a knapsack with capacity W kilograms. Assume all objects have different weights (重量不同) but an identical value (价值一样). Then, the OPT(n, W) can be worked out more easily through greedy choices (贪心选择). Describe the algorithm briefly and give its time complexity (6 分) and prove the first choice satisfying greedy property (证明第一次选择满足贪心原则) . (4 分)

五、 （20 分）动态规划（整数相加合并问题）

正整数的序列：$a_1,a_2,\ldots,a_i,\ldots,a_n$ $(1\leqslant i\leqslant n)$。相邻两个整数可以相加合并成一个整数，通过有限次合并，最终合并成一个整数。比如1, 2, 3，先合并1和2得到序列3, 3；再合并3和3，最终得到6。但合并整数s和t，需要付出s+t的代价。在上述1, 2, 3的合并过程中共付出3+6=9的代价，但如果先合并2和3再与1合并的话，需要支出5+6=11的代价。用动态规划设计最佳的合并顺序使总代价最小。

(1) 设F(i,j)等于合并序列$a_i,a_{i+1},\ldots,a_j$的总代价的最小值. 给出F(i,j)的递推方程式和边界条件 (5分)，并简单描述算法 (3分)。
(2) 求序列 5,7,10,12,8,9 的最小总代价，用表格记录F(i,j)的值 (8分)。
(4) 分析算法的计算复杂度. (4分)

六、 （20 分）最大流

Let G=(V, E) be a flow network and $|f|$ be the value of a flow f on G, i.e., $|f|=f(s,V)$ with s being source of G.

(1) Prove $f(V, V)=0$. (3 分)
(2) Work out the maximum flow of the following flow network by Edmond-Karp algorithm, where the positive integers denote the capacities (容量) of each edge respectively. During each iteration, you should draw the residue network(画出剩余流量图) and find out an shortest augmenting path (找出最短增广路径) (if exists) using Breadth-First Search (广度优先遍历) . (17 分)