往年真题

$$u_{0.95}=1.64,u_{0.975}=1.96,c^{2}_{0.025}(9)=2.7,c^{2}_{0.05}(9)=16.919$$

$$c^{2}_{0.975}(9)=19.023$$

一、填空题（每空 3 分，共 42 分）

1. 已知 $P(A)=0.3, P(B)=0.4$，$P(B|A)=0.5$，则 $P(A\cup B)=$ **0.55**，$P(B|A\cup B)=$ $\dfrac{6}{11}$。

$$0.5 = P(B|A) = \frac{P(BA)}{P(A)} \overset{P(A)=0.3}{\Rightarrow} P(BA) = 0.15,$$

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.55,$$

$$P(B|A\cup B) = \frac{P[B(A\cup B)]}{P(A\cup B)} = \frac{P(B)}{P(A\cup B)} = \frac{6}{11}.$$

2. 袋中有 10 个球，8 红 2 白，现从袋中任取两次，每次取一球作不放回抽样，则至少有一次取得白球的概率为 $\underline{17/45}$。

$$P(\text{至少一个白球}) = 1 - P(\text{两个都是红球})$$

$$= 1 - \frac{8}{10} \times \frac{7}{9} = \frac{17}{45}.$$

3. 10 名同学参加数学竞赛，假如每人取得 1,2,3,4,5 分的可能性相等，记 A_k 为“他们取得的最高分为 $k(k=1,2,3,4,5)$”，则 $P(A_3) = \dfrac{3^{10} - 2^{10}}{5^{10}}$

$$P(A_3) = P(\text{最高分} \leq 3) - P(\text{最高分} \leq 2) = (3/5)^{10} - (2/5)^{10}$$

4. 设随机变量 X 的分布函数为 $F_X(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ A\sin x & 0\le x\le \dfrac{\pi}{2}\\ 1 & x>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$，则 $A=$ **1**，

$P\left\{|X|<\dfrac{\pi}{6}\right\}=$ ______。

$$P\{0<X<\pi/6\}=F(\pi/6)-F(0)=\mathbf{1/2}$$

5. 设随机变量 $X\sim G(\frac{1}{2})$ 几何分布，令 $Y=\begin{cases}1 & 当X为偶数\\ 0 & 当X为奇数\end{cases}$，则 $Y\sim$ ______。 $\mathbf{B(1,1/3)}$

$$P\{X=k\}=0.5^{k-1}\times 0.5=0.5^k,\quad k=1,2,\cdots$$

$$P\{Y=1\}=P\{X=2,4,6,\cdots\}=0.5^2+0.5^4+0.5^6+\cdots=\frac{1}{3}.$$

6. 设 $X \sim N(0,1)$，则 $Y=|X|$ 的概率密度 $f(y)=$ ______

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{|X|\le y\}=\begin{cases}P\{-y\le X\le y\}, & y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

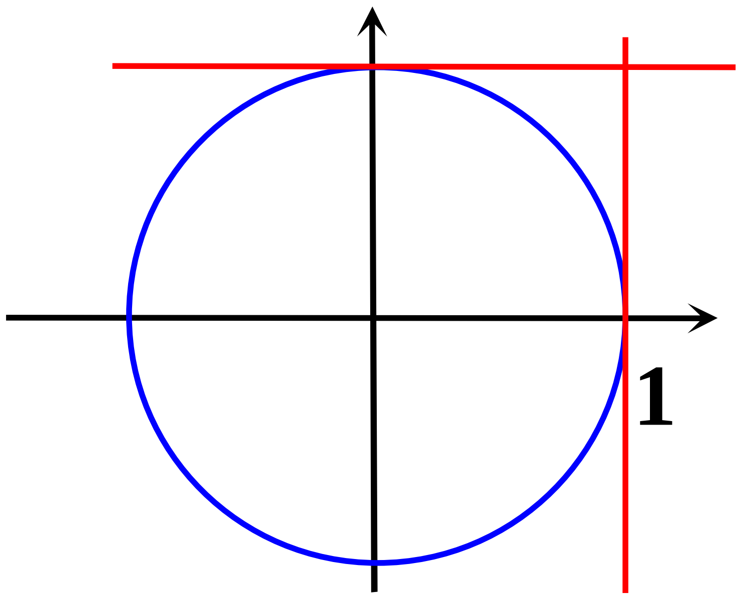
$$=\begin{cases}2\Phi(y)-1, & y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}2f(y), & y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, & y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

7. 设二维随机变量(X,Y)在单位圆内服从均匀分布，求$P\{\max(X,Y)\le 1\}=$

1。

$$P\{\max(X,Y)\le 1\}=P\{X\le 1,Y\le 1\}$$



8. 设随机变量 X 的概率密度 $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}, x\in R$， 则 $E(X)=$ __0__，

$D(X)=$ __2__。

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{2} e^{-|x|} dx = 0.$$

$$D(X)=E(X^2)-E(X)^2$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot \frac{1}{2} e^{-|x|} dx = \int_{0}^{+\infty} x^2 e^{-x} dx$$

法一

$$= -\int_{0}^{+\infty} x^2 de^{-x} = \int_{0}^{+\infty} 2xe^{-x}dx = -\int_{0}^{+\infty} 2x de^{-x} = \int_{0}^{+\infty} 2e^{-x}dx = 2.$$

法二

$$\underset{Y\sim G(1,1)}{=} E(Y^2) = D(Y)+E(Y)^2 = 2.$$

9. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_{10}$ 来自正态总体 $N(\mu,16)$，设 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_{10}$ 来自正态总体 $N(\mu,24)$，且两个总体 X,Y 独立，则 $\bar{X}-\bar{Y}\sim$ $\underline{N(0,4)}$，

$P\{|\bar{X}-\bar{Y}|<0.1\}=$ $\underline{2\Phi(0.05)-1}$

$$\bar{X}\sim N(\mu,1.6)\qquad \bar{Y}\sim N(\mu,2.4)$$

$$P\left\{\left|\bar{X}-\bar{Y}\right|<0.1\right\}=P\left\{\left|\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{2}\right|<0.05\right\}=\Phi(0.05)-\Phi(-0.05)$$

$$=2\Phi(0.05)-1$$

10. 设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，若 σ^2 已知，总体均值 μ 的置信度为0.95的置信区间为 $(\bar{X} \pm k\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}})$，则 $k =$ $u_{0.975}=1.96$。

(1)单正态总体 μ 的置信度 $1-\alpha$ 的区间估计

若 σ^2 已知:

$$\left(\bar{X}-u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X}+u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

二、（20 分）设随机变量(X,Y)的概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases} Ae^{-(3x+4y)}, & x>0, y>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求：1） 常数 A； 2）随机变量(X,Y)的分布函数

3）$P\{0<X<1, 0<Y<2\}$； 4）判断 X,Y 的独立性；

5）求$Z=X+Y$的密度函数。

三、（14 分）设二维随机变量(X,Y)的联合分布律为

$X\backslash Y$	-1	0	1
0	α	β	0.2
1	γ	0.2	0.2

其中α,β,γ为常数，且有$P\{X\le 0\mid Y\le -1\}=0.5$，$E(X)=0.5$。问：

1）求出α,β,γ，判断X,Y是否独立；

2）求$Z=X+Y$的分布；

3）求$P\{Y=2Z\}$；

4）求随机变量X,Z的相关系数ρ_{XZ}。

四、（12 分）设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 $X \sim U[\theta, 0](\theta < 0)$ 的简单随机样本，求：

1）参数 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_1$ 和极大似然估计量 $\hat{\theta}_2$；

2）推断 $\hat{\theta}_2$ 是不是参数 θ 的无偏估计量。

五、（12 分）在正常的生产条件下，某产品的测试指标总体 $X \sim N(\mu_0, \sigma_0^2)$，其中 $\sigma_0 = 0.23$。后来改变了生产工艺，出了新产品，假设新产品的测试指标总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，从新产品中随机地抽出 10 件，测得样本标准差 $s = 0.33$，试在检验水平 $\alpha = 0.05$ 的情况下，检验方差 σ^2 有没有显著变化？