第三章 多维随机变量及其分布

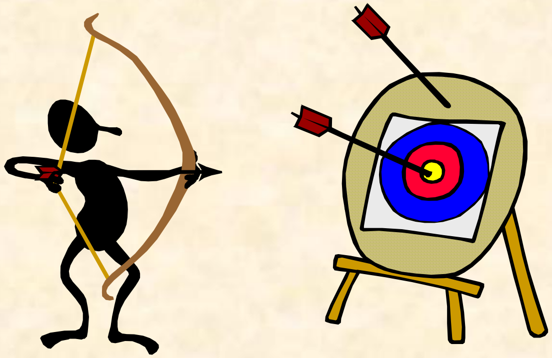
一维随机变量及其分布

↓

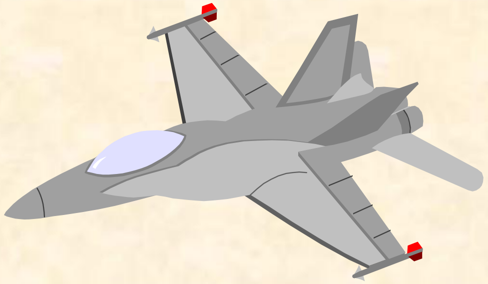
多维随机变量及其分布

有些随机现象用一个随机变量来描述还不够，而需要用几个随机变量来描述.

在打靶时,命中点的位置是由一对*r .v* (两个坐标)来确定的.



飞机的重心在空中的位置是由三个r .v (三个坐标)来确定的等等.



定义 设Ω为随机试验的样本空间，

$$\forall \omega \in \Omega \xrightarrow{\text{一定法则}} \exists \left(X(\omega), Y(\omega)\right) \in R^2$$

则称(X, Y)为**二维*r.v.*或二维随机向量**

讨论：

- 二维*r.v.*作为一个整体的概率特性
- 其中每一个*r.v.*的概率特性与整体的概率特性之间的关系

一、二维随机变量的分布函数

定义1 设 (X,Y) 是二维随机变量，如果对于任意实数 x, y，二元函数

$$F(x,y) = P\{(X \le x) \cap (Y \le y)\} \triangleq P(X \le x, Y \le y)$$

称为二维随机变量 (X,Y) 的**分布函数**，或者称为随机变量 X 和 Y 的**联合分布函数**.

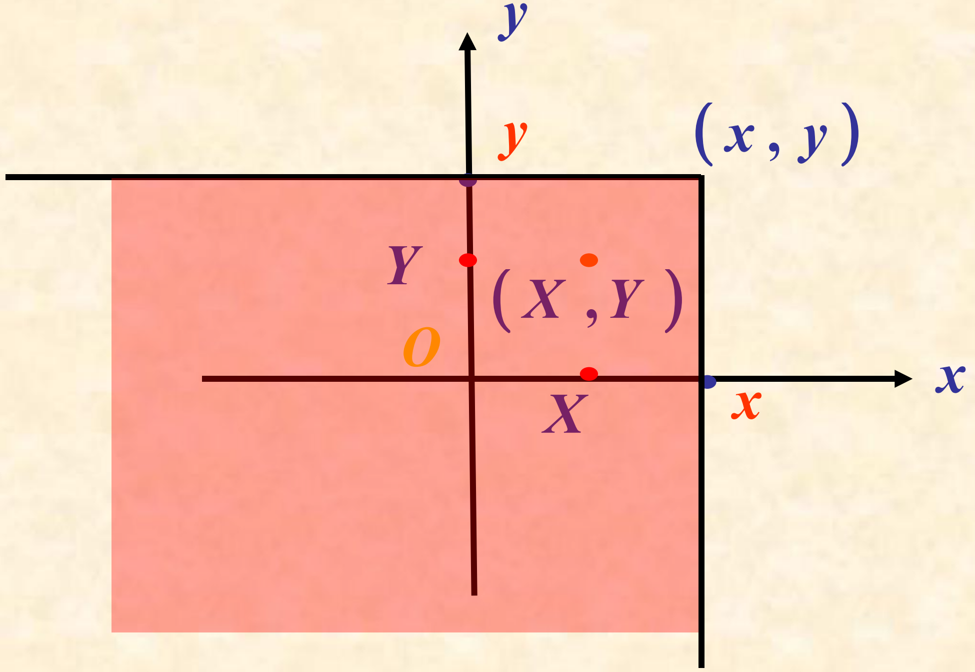
一维随机变量 X 的分布函数

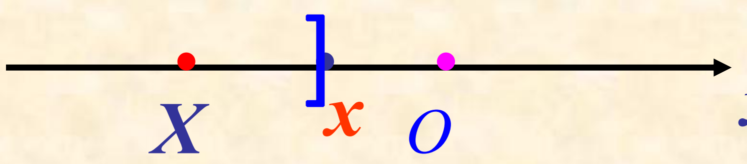
$$F(x) = P(X \le x)$$

$$-\infty < x < \infty$$

分布函数的函数值的几何解释

将二维随机变量 (X,Y) 看成是平面上随机点的坐标, 那么,分布函数 $F(x,y)$ 在点 (x,y) 处的函数值就是随机点 (X,Y) 落在下面左图所示的,以点 (x,y) 为顶点而位于该点左下方的无穷矩形域内的概率.



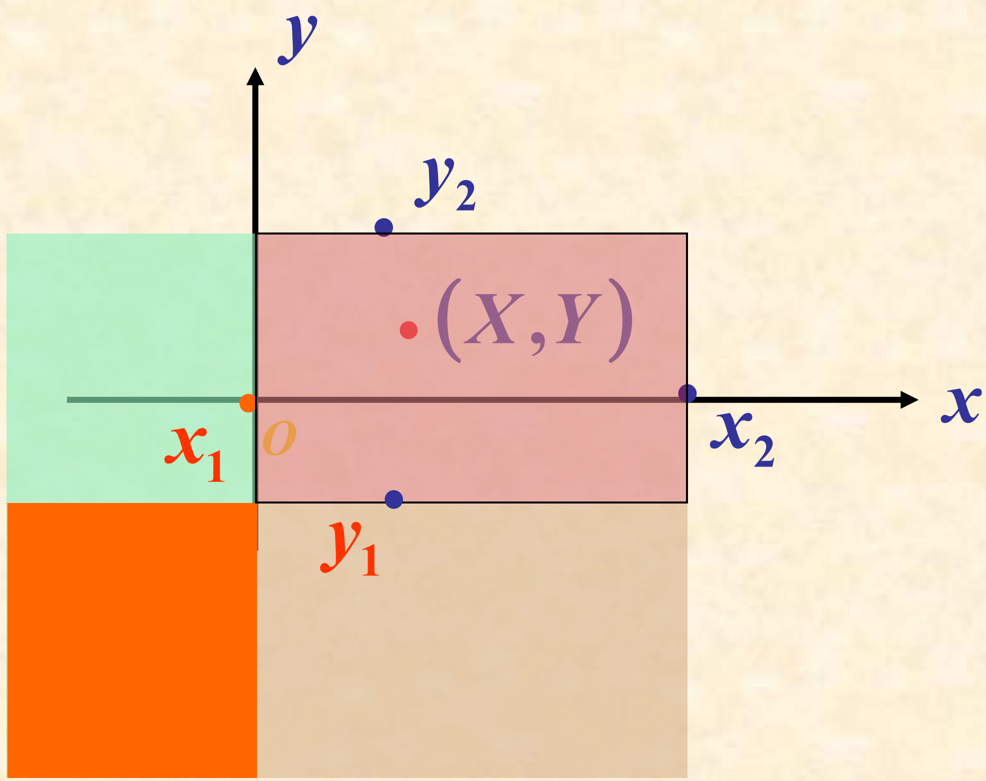


随机点(X,Y)落在矩形域 $x_1 < x \le x_2, y_1 < y \le y_2$

内的概率为

$$P(x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2)$$

$$= F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1)$$

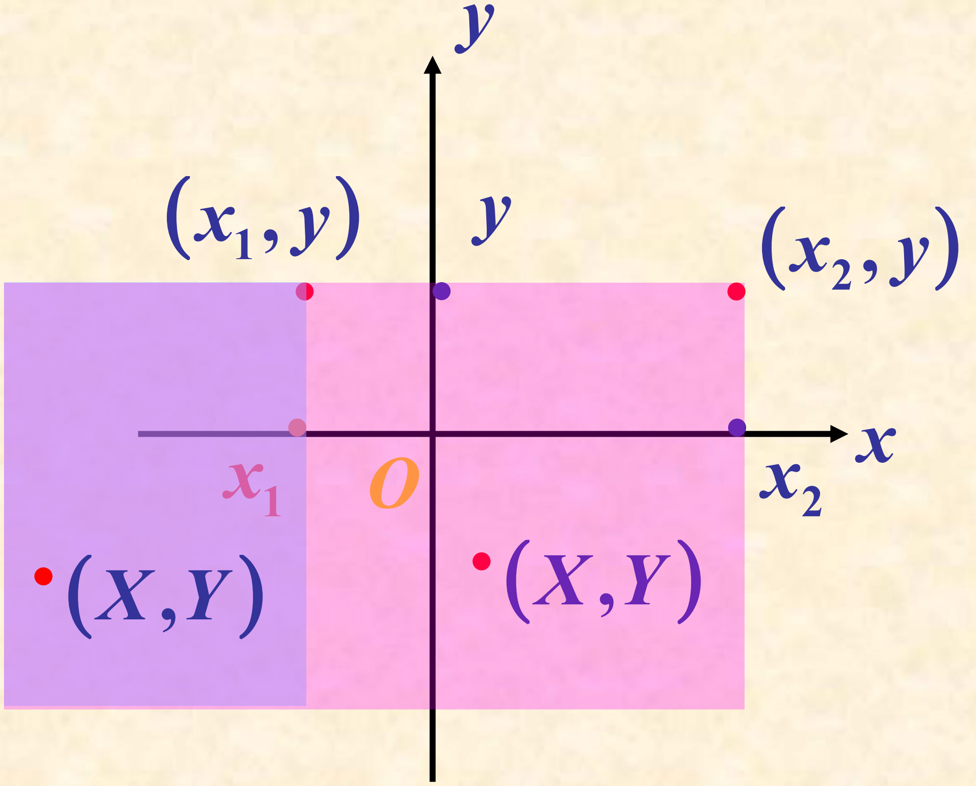


分布函数 $F(x,y)$ 的性质：

1．$F(x,y)$ 是关于变量 x 和 y 的不减函数；

对任意固定的 $y \in R$ 及 $\forall\ x_1, x_2 \in R$，当 $x_1 < x_2$ 时 $F(x_1,y) \le F(x_2,y)$；

对任意固定的 $x \in R$ 及 $\forall\ y_1, y_2 \in R$，当 $y_1 < y_2$ 时 $F(x,y_1) \le F(x,y_2)$；

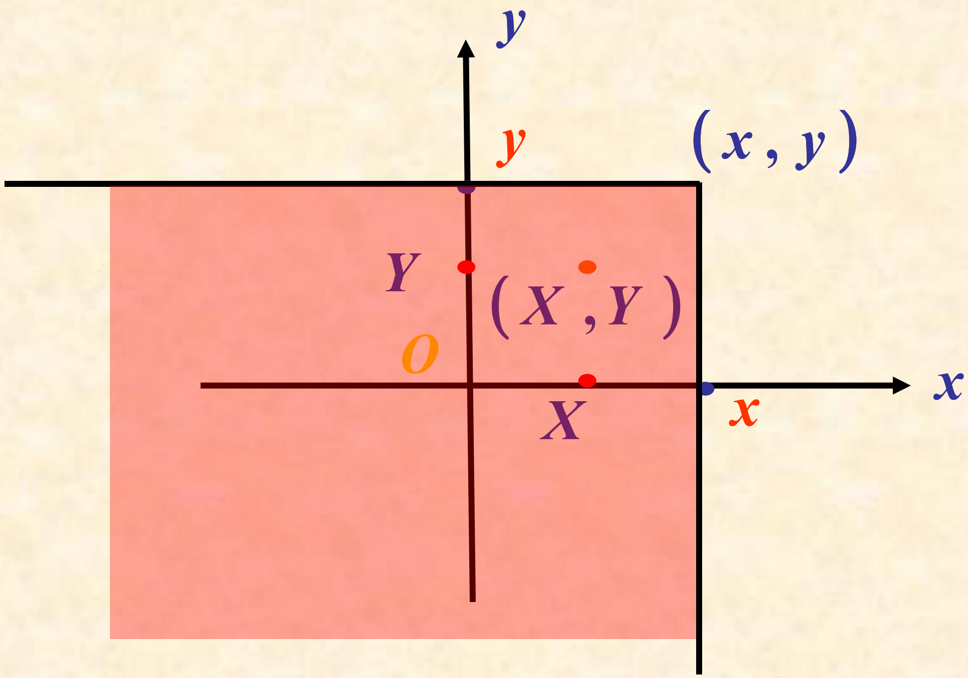


2．$0 \le F(x,y) \le 1$，且

对任意固定的 $y \in R$，$F(-\infty, y) = 0$，

对任意固定的 $x \in R$，$F(x, -\infty) = 0$，

$F(-\infty, -\infty) = 0$，$F(+\infty, +\infty) = 1$．



3． $F(x,y)=F(x+0,y)$，$F(x,y)=F(x,y+0)$.

即$F(x,y)$ 关于x,y是右连续的。

4. 对任意的 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),x_1<x_2,y_1<y_2$，

下述不等式成立：

$$F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)-F(x_1,y_2)+F(x_1,y_1)\ge 0$$

二、二维离散型随机变量

定义2 如果二维随机变量 (X,Y) 全部可能取到的不相同的值是有限对或可列无限多对，则称 (X,Y) 是离散型随机变量.

设二维离散型随机变量 (X,Y) 可能取的值是 (x_i, y_j)，$i,j=1,2,\cdots$，记

$$P(X=x_i, Y=y_j)=p_{ij},$$
$$i,j=1,2,\cdots$$

称之为二维离散型随机变量 (X,Y) 的分布律，或随机变量 X 和 Y 的联合分布律.

一维随机变量 X 离散型

X 的分布律

$$P(X=x_k)=p_k,\quad k=1,2,\ldots$$

$$\begin{cases} p_k \geq 0, & k=1,2,\ldots \\ \sum\limits_k p_k=1 \end{cases}$$

也可用表格来表示随机变量X和Y的联合分布律.

$Y \backslash X$	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
y_1	p_{11}	p_{21}	$\cdots$	p_{i1}	$\cdots$
y_2	p_{12}	p_{22}	$\cdots$	p_{i2}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
y_j	p_{1j}	p_{2j}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	

二维离散型随机变量(X,Y)的分布律具有性质

$$\begin{cases} p_{ij} \geq 0, i, j = 1,2,\cdots \\ \sum_i \sum_j p_{ij} = 1 \end{cases}$$

二维离散型随机变量(X,Y)的联合分布函数为：

$$F(x,y)=\sum_{x_i\le x}\sum_{y_j\le y}P(X=x_i,Y=y_i)=\sum_{x_i\le x}\sum_{y_j\le y}p_{ij}$$

其中和式是对一切满足 $x_i \le x, y_j \le y$ 的i, j求和.

例： 设二维随机变量(X,Y)的联合分布律为

Y \ X	-1	0
1	1/4	1/4
2	1/6	a

求：1）常数a的值　　2）$P\{X+Y<2\}$。

例　把一枚均匀硬币抛掷三次，设X为三次抛掷中正面出现的次数，而 Y 为正面出现次数与反面出现次数之差的绝对值，求 (X,Y) 的分布律 .

三、二维连续型随机变量

定义3 对于二维随机变量 (X,Y) 的分布函数 $F(x,y)$,如果存在非负的函数 $f(x,y)$, 使对于任意 x,y 有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)\,du\,dv$$

则称 (X,Y) 是连续型的二维随机变量,函数 $f(x,y)$ 称为二维随机变量(X,Y)的概率密度,或称为随机变量 X 和 Y 的联合概率密度.

一维随机变量X

连续型

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

$$-\infty < x < +\infty$$

X的概率密度函数

$f(x)\quad x\in R$

$$f(x)\geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=1$$

（*X,Y*）的概率密度的性质：

1. $f(x,y)\geq 0$；

2. $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1$; $\left(\iint_{R^2} f(x,y)dxdy=1\right)$;

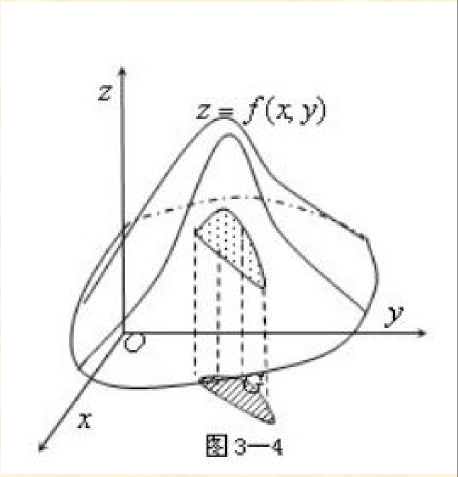
3. 设 G 是 xOy 平面上的区域，则有

$$P\{(X,Y)\in G\}=\iint_G f(x,y)dxdy;$$

4. 在 $f(x,y)$ 的连续点， $f(x,y)=\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}$

说明:

几何上, $z = f(x, y)$ 表示空间的一个曲面 .



$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = 1,$$

表示介于 $f(x, y)$和 xoy 平面之间的空间区域的全部体积等于1.

$$P\{(X, Y) \in G\} = \iint\limits_{G} f(x, y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y,$$

$P\{(X,Y) \in G\}$的值等于以G为底,以曲面$z = f(x, y)$为顶面的柱体体积 .

5.均匀分布

定义　设 D 是平面上的有界区域,其面积为 S,若二维随机变量 (X, Y) 具有概率密度

$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S}, & (x,y)\in D,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

则称(X, Y)在 D 上服从均匀分布.

５.均匀分布

均匀分布例题P88

定义　设 D 是平面上的有界区域,其面积为 S,若二维随机变量 (X, Y) 具有概率密度

$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S}, & (x,y)\in D,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

则称(X, Y)在 D 上服从均匀分布.

二维随机变量及其分布→多维随机变量及其分布.

多项分布P89

例　一批产品共有100件，其中一等品60件，二等品30件，三等品10件，从这批产品中有放回的任取2件，以X和Y分别表示取出的2件产品中一等品、二等品的件数，求二维随机变量（X,Y）的联合分布列。

§3.2 二维随机变量的边缘分布

一、定义

问题：已知(X,Y)的分布，如何确定 X,Y的分布？

$$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\},\ F(x)=P\{X\le x\},$$

$$P\{X\le x\}=P\{X\le x,Y<\infty\}=F(x,\infty)=F_X(x)$$

(X,Y)关于X的边缘分布函数.

定义 设$F(x,y)$为随机变量(X,Y)的分布函数，

则 $F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}$ 令 $y\to\infty$, 称

$$P\{X\le x\}=P\{X\le x,Y<\infty\}=F(x,\infty),$$

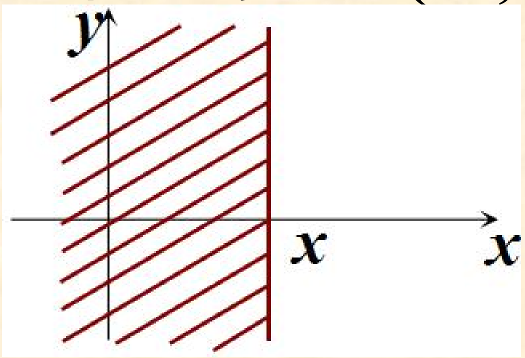
为随机变量(X,Y)关于X的边缘分布函数 .

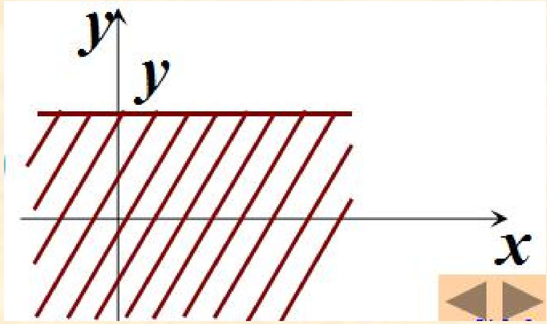
记为 $F_X(x)=F(x,\infty).$

同理令 $x\to\infty$,

$$F_Y(y)=F(\infty,y)=P\{X<\infty,Y\le y\}=P\{Y\le y\}$$

为随机变量(X,Y)关于Y的边缘分布函数.





二、离散型随机变量的边缘分布律

定义　设二维离散型随机变量 (X,Y) 的联合分布律为 $P\{X=x_i, Y=y_j\} = p_{ij}, i, j = 1,2,\cdots.$

记
$$p_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = P\{X = x_i\}, \quad i = 1,2,\cdots,$$

$$p_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} = P\{Y = y_j\}, \quad j = 1,2,\cdots,$$

分别称 $p_{i\bullet}\ (i=1,2,\cdots)$ 和 $p_{\bullet j}\ (j=1,2,\cdots)$ 为 (X,Y) 关于 X 和关于 Y 的边缘分布律.

$Y \backslash X$	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
y_1	p_{11}	p_{21}	$\cdots$	p_{i1}	$\cdots$
y_2	p_{12}	p_{22}	$\cdots$	p_{i2}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
y_j	p_{1j}	p_{2j}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	

$$P\{X = x_i\} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij},\ i = 1,2,\cdots;$$

$$P\{Y = y_j\} = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij},\ j = 1,2,\cdots.$$

因此得离散型随机变量关于X和Y的边缘分布函数分别为

$$F_X(x) = F(x, \infty) = \sum_{x_i \le x} \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij},$$

$$\mathrm{F_Y(y) = F(\infty, y)} = \sum_{\mathrm{y_j \le y}} \sum_{\mathrm{i=1}}^{\infty} \mathrm{p_{ij}}.$$

三、连续型随机变量的边缘分布

定义　对于连续型随机变量 (X, Y), 设它的概率密度为 $p(x, y)$, 由于

$$F_X(x) = F(x, \infty) = \int_{-\infty}^{x} [\int_{-\infty}^{\infty} p(x, y)\,\mathrm{d}\,y]\,\mathrm{d}\,x,$$

记　$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y)\,\mathrm{d}\,y,$$

称其为随机变量 (X, Y) 关于 X 的边缘概率密度.

同理可得 Y 的边缘分布函数

$$F_Y(y) = F(\infty, y) = \int_{-\infty}^{y}\left[\int_{-\infty}^{\infty} p(x, y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y,$$

$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y)\,\mathrm{d}x.$$

Y 的边缘概率密度.

例1 已知下列分布律求其边缘分布律.

$Y \backslash X$	0	1
0	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$
1	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$

注意 **联合分布** $\underset{\not\longleftarrow}{\longrightarrow}$ **边缘分布**

例2 设随机变量 X 和 Y 具有联合概率密度

$$p(x,y)=\begin{cases}6, & x^2 \le y \le x,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

求边缘概率密度 $p_X(x), p_Y(y)$.

四、小结

$$F_X(x) = F(x, \infty) = \int_{-\infty}^{x} \left[\int_{-\infty}^{\infty} p(x, y)\,\mathrm{d}\,y\right] \mathrm{d}\,x.$$

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y)\,\mathrm{d}\,y.$$

$$F_Y(x) = F(\infty, y) = \int_{-\infty}^{y} \left[\int_{-\infty}^{\infty} p(x, y)\,\mathrm{d}\,x\right] \mathrm{d}\,y.$$

$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y)\,\mathrm{d}\,x.$$

联合分布 $\underset{\cancel{\longleftarrow}}{\longrightarrow}$ 边缘分布

§3.2.4 随机变量的独立性

随机变量的独立性是概率论中的一个重要概念.两随机变量独立的定义是:

1.定义

设 X,Y 是两个 *r.v*，若对任意的 x,y，有

$$P(X \le x, Y \le y) = P(X \le x)P(Y \le y)$$

则称 X,Y 相互独立 .

它表明，两个 *r.v* 相互独立时，它们的联合分布函数等于两个边缘分布函数的乘积 .

用分布函数表示，即

设 X,Y 是两个 *r.v*，若对任意的 x,y，有

$$F(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$$

则称 X,Y 相互独立 .

若 (X,Y)是连续型$r.v$,则上述独立性的定义等价于：若对任意的 x, y, 有

$$p(x,y)=p_X(x)p_Y(y)$$

成立，则称X,Y相互独立 .

若 (X,Y)是离散型$r.v$ ，则上述独立性的定义等价于：

对(X,Y)的所有可能取值(x_i, y_j),有

$$P(X=x_i,Y=y_j)=P(X=x_i)P(Y=y_j)$$

则称X和Y相互独立.

例 设两个独立的随机变量 X 与 Y 的分布律为

X	1	3
P_X	0.3	0.7

Y	2	4
P_Y	0.6	0.4

求随机变量 (X,Y) 的分布律.

例

$$(X,Y)\sim p(x,y)=\begin{cases} Cy(1-x), & 0\le x\le 1, 0\le y\le x. \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

(1)求 C 的值;(2)求关于 X,关于 Y 的边缘概率密度;

(3)判断 X,Y 的独立性.

四、多维随机变量的独立性P96

独立性

1. 若离散型随机变量 (X,Y) 的联合分布律为

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, \quad i, j = 1,2,\cdots.$$

X 和 Y 相互独立 $\Leftrightarrow$

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\}P\{Y = y_j\}.$$

2. 设连续型随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为 $p(x,y)$,边缘概率密度分别为 $p_X(x), p_Y(y)$,则有

X 和 Y 相互独立 $\Leftrightarrow$ $p(x,y) = p_X(x)p_Y(y)$

3. X 和 Y 相互独立,则 $f(X)$ 和 $g(Y)$ 也相互独立.

条件分布P97

§3.4 二维 *r.v.* 函数的分布

问题

已知 *r.v.* (X,Y) 的概率分布，

$g(x, y)$ 为已知的二元函数，

求 $Z=g(X,Y)$ 的概率分布

方法

转化为 (X,Y) 的事件

例 设相互独立的两个随机变量 X, Y 具有同一分布律,且 X 的分布律为

X	0	1
P	0.5	0.5

试求 : $Z1=\max(X,Y)$, $Z2=X+Y$ 和 $Z3=XY$ 的分布律 .

结论 若二维离散型随机变量 的联合分布律为

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}, i,j=1,2,\cdots$$

则随机变量函数 $Z=f(X,Y)$ 的分布律为

$$P\{Z=z_k\}=P\{f(X,Y)=z_k\}=\sum_{z_k=f(x_i,y_j)} p_{ij} \quad k=1,2,\cdots.$$

例2：已知：$X \sim P(\lambda_1)$, $Y \sim P(\lambda_2)$，并且X与Y相互独立；

证明: $X+Y \sim P(\lambda_1+\lambda_2)$。（可加性）

例3(P103)：已知：$X \sim B(m,p)$, $Y \sim B(n,p)$，并且X与Y相互独立；

证明: $X+Y \sim B(m+n,p)$。（可加性）

例4：设某一设备由相同型号的五个元件$A_1,\ldots,A_5$构成，元件之间工作状态相互独立。已知每个元件每天正常工作的概率为0.2，而只有在至少有三个元件正常工作时，设备才能正常运转。

求：设备每天正常运转的概率。

三、连续型随机向量函数的分布

1.极值分布

设 X,Y 是两个相互独立的随机 变量,它们的分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$,

$$令M=\max(X,Y)及N=\min(X,Y)$$

$$F_M(z)=F_X(z)F_Y(z),$$

$$F_N(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$$

推广

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是 n 个相互独立的随机变量,它们的分布函数分别为 $F_{X_i}(x_i), (i=1,2,\cdots,n)$

则$M=\max(X_1, X_2, \cdots, X_n)$及$N=\min(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的分布函数分别为

$$F_{\max}(z) = F_{X_1}(z) \cdot F_{X_2}(z) \cdots F_{X_n}(z),$$

$$F_{\min}(z) = 1 - [1 - F_{X_1}(z)][1 - F_{X_2}(z)] \cdots [1 - F_{X_n}(z)].$$

若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$相互独立且具有相同的 分布函数 $F(x)$,则

$$F_{\max}(z) = [F(z)]^n, \qquad F_{\min}(z) = 1 - [1 - F(z)]^n.$$

$$F_M(z) = [F(z)]^n \qquad F_N(z) = 1 - [1 - F(z)]^n$$

它们的概率密度函数分别为

$$\mathbf{p_M(z) = n[F(z)]^{n-1}.p(z)}$$

$$\mathbf{p_N(z) = n[1 - F(z)]^{n-1}.p(z)}$$

若 **X**与**Y** 相互独立同分布且为连续型随机变量,**X** 的分布密度为**p(x)**, 则**M**与**N**的分布密度为

$$p_M(z) = 2F(z).p(z)$$

$$p_N(z) = 2[1 - F(z)].p(z)$$

例：假设一电路装有三个不同的电子元件，其工作状态相互独立，并且无故障工作时间均服从参数为$\lambda(>0)$的指数分布。将三个元件串联。求电路正常工作的时间T的概率分布。

2. Z=aX+bY的分布

设 (X, Y)的概率密度为 $f(x, y)$, 则 $Z = aX + bY$ 的分布函数 ?

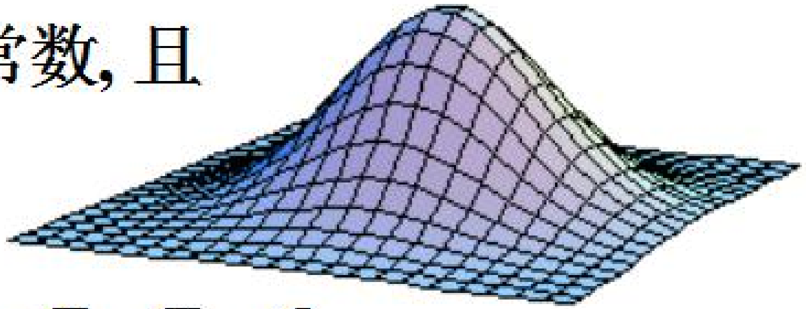
一、二维正态分布定义

定义 若二维随机向量 (X, Y) 具有概率密度

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{2\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

其中 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$ 均为常数, 且

$\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, |\rho| < 1$



则称(X,Y)服从参数为 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$ 的二维正态分布. 记作 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$.

二、二维正态分布的边缘分布

可以证明，若 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，则

$$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)\text{，}\ Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)\,.$$

这就是说，**二维正态分布的两个边缘分布仍然为正态分布**，而且其边缘分布不依赖于参数 ρ. 因此可以断定参数 ρ 描述了 X 与 Y 之间的某种关系!

再次说明联合分布和边缘分布的关系：

由联合分布可以确定边缘分布；

但由边缘分布一般不能确定联合分布.

三、二维正态分布的相关系数

可以证明，若$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，

则其中的参数ρ即为X、Y的相关系数，证明略.

若$\rho=0$，则有

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}]}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\mathrm{e}^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}},$$

$$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

前面说明，若 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，则

$$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),\ \ Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2).$$

所以$\rho=0$时，有 $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$，

即若X与Y不相关性，则X与Y必独立.

所以在**正态分布**的场合，独立性与不相关性是等价的.

例 已知X与Y分别服从正态分布$N(1,3^2)$和$N(0,4^2)$，若$\rho_{XY}=0$，求(X,Y)的联合密度．

解 由$\rho_{XY}=0$，知X与Y相互独立，

所以(X,Y)的联合密度为

$$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$$

$$=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-1)^2}{2\times 3^2}}\cdot\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2\times 4^2}}$$

$$=\frac{1}{24\pi}e^{-\frac{(x-1)^2}{18}-\frac{y^2}{32}}.$$

四、相互独立的一维正态变量的线性组合

若X和Y独立, $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$,

则 $Z = X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

更一般地, 若$X_1, \cdots, X_n$相互独立, 且$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, \cdots, n$, 则有

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right)} \qquad \boxed{\sum_{i=1}^{n} k_i X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} k_i \mu_i, \sum_{i=1}^{n} k_i^2 \sigma_i^2\right)}$$

即有限个独立正态变量的线性组合仍然服从正态分布.

五、二维正态变量分量的线性组合

若 (X,Y) 服从二维正态分布 $N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，

则 X 与 Y 的线性组合 $aX+bY$ 服从正态分布（其中 a,b

是不全为零的常数）.