第一章 随机事件 及其概率

黎雅莲

说明

1. 随机现象揭示了条件和结果之间的非确定性联系，其数量关系无法用函数加以描述.

2. 随机现象在一次观察中出现什么结果具有偶然性, 但在大量重复试验或观察中, 这种结果的出现具有一定的统计规律性，概率论就是研究随机现象这种本质规律的一门数学学科.

如何来研究随机现象?

随机现象是通过随机试验来研究的.

问题　什么是随机试验?

三、随机试验

定义 在概率论中,把具有以下三个特征的试验称为随机试验.

1. 可以在相同的条件下重复地进行;

2. 每次试验的可能结果不止一个,并且能事先明确试验的所有可能结果;

3. 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

§1.2.2 样本空间

定义1 对于随机试验E，它的每一个不可能再分的结果称为**样本点**，用e，f 等字母表示；

由一个样本点组成的单点集称为**基本事件**；

由部分样本点组成的集合称为**随机事件**，用A，B 等字母表示；

由所有样本点构成的集合称为E的**样本空间或必然事件**，用　表示。

我们规定不含任何元素的空集为**不可能事件**，用　表示。

例 1 、设试验为抛一枚硬币，观察是正面还是反面，则样本空间为：

Ω={正面，反面} 或 {ω_1,ω_2}

例 2 、设试验为从装有三个白球（记为1，2，3号）与两个黑球（记为4，5号）的袋中任取两个球.

（ 1 ）观察取出的两个球的颜色，则样本空间为：

$\Omega=\{\omega_{00}, \omega_{11}, \omega_{01}\}$

ω_{00} 表示“取出两个白球”，

ω_{11} 表示“取出两个黑球”，

ω_{01} 表示“取出一个白球与一个黑球”

（2）观察取出的两个球的号码，则样本空间为：

$\Omega=\{\omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{14}, \omega_{15}, \omega_{23}, \omega_{24},\omega_{25}, \omega_{34}, \omega_{35}, \omega_{45}\}$

ω_{ij}：表示“取出第i号与第j号球”．

注：试验的样本空间是根据试验的内容确定的！

§1.2.4 事件之间的关系及运算

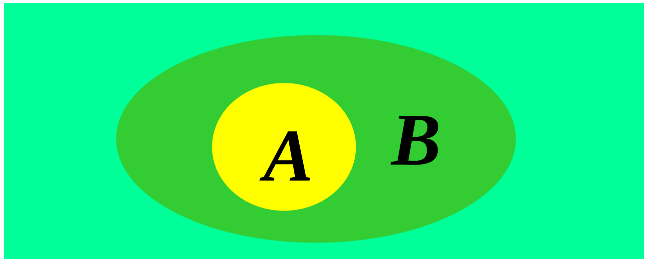
一.随机事件间的关系

设试验 E 的样本空间为 Ω, 而 A, B, A_k $(k=1,2,\cdots)$ 是 Ω 的子集.

1. 子事件 若事件 A 出现, 必然导致 B 出现，则称事件 A是事件B的子事件,记作 $B\supset A$ 或 $A\subset B$.

实例 "长度不合格A" 必然导致 "产品不合格B" 所以 "产品不合格B包含 "长度不合格A" .

图示 B 包含 A.



事件相等：若事件*A*是事件*B*的子事件,而且事件*B*是事件*A*的子事件, 则称事件*A*与事件*B*相等,记作*A*=*B*.

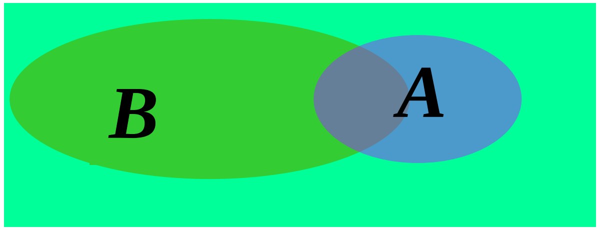
2.和(并)事件

由事件*A*或事件*B*的样本点所构成的集合称为事件*A*与事件*B*的和事件，记为*A*U*B*，即：

*A*U*B*={*e*|*e*Î*A*或*e*Î*B*}，表示*A*与*B*至少有一个发生。

实例 某种产品的合格与否是由该产品的长度直径是否合格所决定,因此 “产品不合格*D*”是 “长度不合格*A*”与 “直径不合格*B*”的并.

图示事件 *A* 与 *B* 的并。



推广 称 $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ 为n个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和事件,即

$A_1, A_2, \cdots, A_n$至少发生一个;

称 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件$A_1, A_2, \cdots$的和事件,即

$A_1, A_2, \cdots$至少发生一个.

3. 积(交)事件

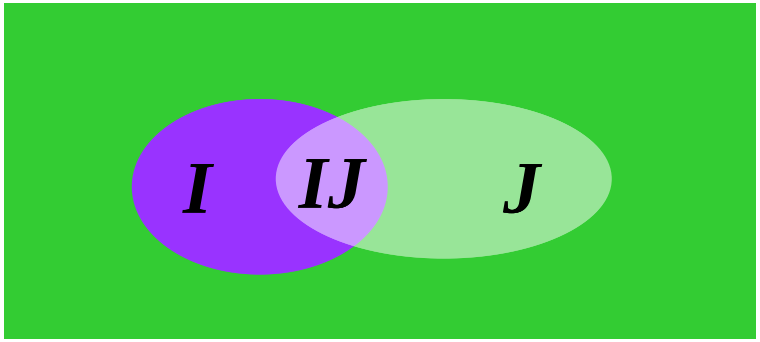
由属于*A*并且属于*B*的样本点所构成的集合称为事件*A*与事件*B*的积事件，记为*A*I*B*，即：

*A*I*B*={*e*|*e*Î*A*且*e*Î*B*}，表示*A*与*B*同时发生。

积事件也可记作 $A \cdot B$ 或 AB.

实例 某种产品的合格与否是由该产品的长度与直径是否合格所决定,因此“产品合格H”是“长度合格I”与“直径合格J”的交或积事件.

图示事件I与J的积事件.



推广　称 $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ 为n个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积事件,

即$A_1, A_2, \cdots, A_n$同时发生;

称 $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$的积事件,

即$A_1, A_2, \cdots$同时发生.

和事件与积事件的运算性质

$$\boldsymbol{A \cup A = A}, \quad A \cup \Omega = \Omega, \quad \boldsymbol{A \cup \varnothing = A},$$

$$\boldsymbol{A \cap A = A}, \quad A \cap \Omega = A, \quad \boldsymbol{A \cap \varnothing = \varnothing}.$$

4.互斥事件与对立事件

若事件 A、B 满足 $A \cap B = AB = \varnothing$.则称事件 A 与 B**互斥**。

若事件 A、B 满足 $A \cap B = \varnothing$ 且 $A \cup B = \Omega$，则称事件 A 与 B 为**对立事件**。记A的对立事件为 $\overline{A}$。

实例 抛掷一枚硬币,“出现花面” 与 “出现字面” 是互斥的两个事件，同时也是对立事件。

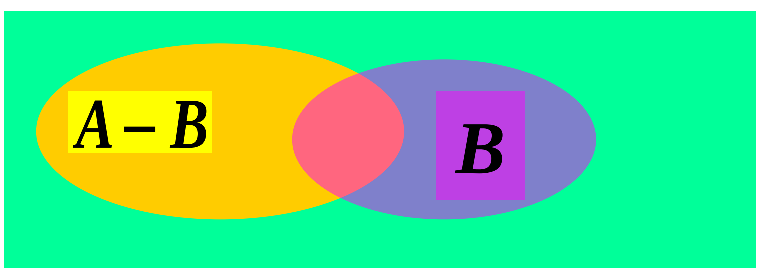
5.差事件

由属于事件A而不属于事件B的样本点组成的集合称为事件A与B的差。记作 $A-B$(或 $A\overline{B}$)。

实例 “长度合格但直径不合格”是“长度合格”与“直径合格”的差.

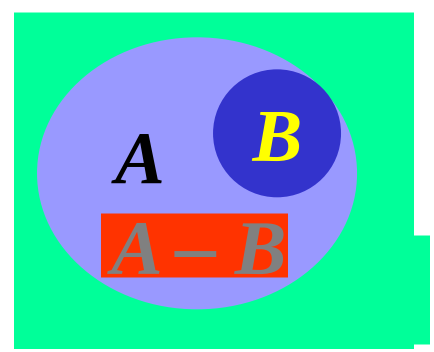
图示 A 与 B 的差

$B \not\subset A$



$$A-B=A-AB$$

$B \subset A$



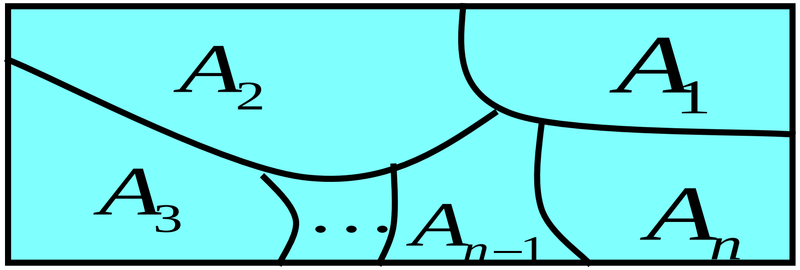
6.完备事件组

定义　设 Ω 为试验E的样本空间, $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 E 的一组事件,若

$1^0 \quad A_i A_j = \varnothing, i, j = 1,2,\cdots,n;$

$2^0 \quad A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega,$

则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为样本空间 Ω 的一个划分,也称为完备事件组.



二 事件间的运算规律　设 A, B, C 为事件,则有

(1) 交换律　$A \cup B = B \cup A, \quad AB = BA.$

(2) 结合律　$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$

$$(AB)C = A(BC).$$

(3) 分配律

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) = AB \cup AC,$$

$$A \cap (B - C) = AB - AC$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) = (A \cup C)(B \cup C).$$

(4)对偶律：　$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}, \qquad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$$

例1　设A,B,C 表示三个随机事件, 试将下列事件用A,B,C 表示出来.

(1) A 出现 , B, C 不出现;

(2) A, B都出现, C 不出现;

(3) 三个事件都出现;

(4) 三个事件至少有一个出现;

(5) 三个事件都不出现;

(6) 不多于一个事件出现;

(7) 不多于二个事件出现;

四、小结

概率论与集合论之间的对应关系

记号	概率论	集合论
	样本空间, 必然事件	空间(全集)
	不可能事件	空集
	基本事件	元素
	随机事件	子集
	A的对立事件	A的补集
	A出现必然导致B出现	A是B的子集
	事件A与事件B相等	A集合与B集合相等

$A \cup B$	事件A与事件B的和	A集合与B集合的并集
AB	事件A与B的积事件	A集合与B集合的交集
$A-B$	事件A与事件B的差	A与B两集合的差集
$AB=\varnothing$	事件A与B互不相容	A与B 两集合中没有相同的元素

§1.3 事件的概率

一、乘法原理 排列及组合

1、乘法原理

乘法原理：若完成一件事情要经过两个步骤，其中第一步中有 n_1 种不同的方法，第二步骤中有 n_2 种不同的方法，则完成这件事情共有 $n_1 \cdot n_2$ 种方法。

2、排列

排列：从*n*个不同的元素中按顺序取*r*个排成一列　(0称为r n)个排列。所有可能的排列记为P_n^r。则由乘法原理得

$$P_n^r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

例1　从1,2,3,4,5,6这六个数字中任取五个组成五位数,问共能组成多少个五位数?

$$P_6^5 = 6\times5\times4\times3\times2 = 720\ (\text{个})$$

3、组合

组合：从***n***个不同的元素中任取***r***个元素组成一组$(0\le r\le n)$，称为个组合。所有可能的组合数记为C_n^r，由乘法原理，从***n***个元素中取***r***个生成的排列可分两步进行，首先从***n***个元素中取***r***个组成一组，共有C_n^r种方法，然后再在取出的***r***个元素中进行全排列共有$r!$种方法，从而

$$P_n^r = C_n^r \cdot r!$$

所以从***n***个元素中取***r***个元素组成的组合数为

$$C_n^r = \frac{P_n^r}{r!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!\cdot r!}$$

特别，当*n* = *r*时，$C_n^n = 1$ **而且** $C_n^r = C_n^{n-r}$。

1.3 事件的概率

- 研究随机试验，不仅需要分析它在一定条件下可能产生的各种结果，而且还要分析各种结果发生的可能性大小。

1.3.2 概率的统计定义及性质

1、频率：设A为随机试验E中的一个随机事件，如果A在n次重复试验中出现了r次，则称比值r/n为A在n次试验中出现的频率，记为$f_n(A)$，即:

$$f_n(A)=\frac{r}{n}$$

3、频率的特点：不确定性与稳定性

2、频率的性质：

1) 非负性：对任意事件A, 有$0\le f_n(A)\le 1$；

2) 规范性：$f_n(W)=1$；

3) 有限可加性：设$A_1,A_2,\ldots,A_n$为两两互斥的n个事件,则：

$$f_n\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}f_n(A_i)$$

1.3.2 概率的统计定义及性质

定义1.3.2 **设A为试验E的一个事件，如果随着重复试验次数的增加，A出现的频率在0与1之间某个数p附近摆动，则定义A的概率为p,记为$P(A)$，即：**

$$P(A) = p$$

由事件的频率的性质可以推想事件的概率也应有相应的性质：

(1) $0 \le P(A) \le 1$。

(2) $P(\Omega) = 1$，$P(\Phi) = 0$。

(3) 当事件A与B互不相容时，则有 $P(A+B) = P(A) + P(B)$。

这条性质称为概率的可加性，并称此等式为互斥事件的加法公式。

一.古典概型

1、定义

如果一个随机试验E具有以下特征

（1）样本空间中仅含有有限个样本点；

（2）每个样本点出现的可能性相同。

则称该随机试验为古典概型。

观察“掷骰子”、“掷硬币”的试验，它们都具有这样的特点。

2. 古典概型中事件概率的计算公式

设试验 E 为古典概型的随机试验，样本空间由 n 个样本点构成, A为 E 的任意一个事件,且包含 r 个样本点, 则事件A出现的概率记为:

$$P(A)=\frac{A\text{中样本点的个数}}{\Omega\text{中样本点总数}}=\frac{r}{n}$$

称此为概率的古典定义。

3、古典概型的概率性质

1) 非负性：对任意事件A, 有$0\le P(A)$；

2) 规范性：$P(\Omega)=1$；

3) 有限可加性：设$A_1,A_2,\ldots,A_n$为两两互斥的n个事件,
则：
$$P(\sum_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

4. 古典概型的基本模型:摸球模型

(1) 无放回地摸球

问题1 设袋中有M个白球和 N个黑球, 现从袋中无放回地依次摸出$m+n$个球,求所取球恰好含m个白球, n个黑球的概率?

$$= C_M^m C_N^n / C_{M+N}^{m+n}$$

(2) 有放回地摸球

问题2 设袋中有4只红球和6只黑球,现从袋中有放回地摸球3次,求前2 次摸到黑球、第3 次摸到红球的概率. $= 0.144.$

6、典型例题

例（分房问题） 有 n 个人，每个人都以同样的概率 1/N 被分配在 $N(n \le N)$ 间房中的每一间中，试求下列各事件的概率：

(1) 恰有 n 间房，其中各有一人；

$$P(A) = \frac{C_N^n \cdot n!}{N^n}$$

(2) 某指定一间房中恰有 $m(m \le n)$ 人。

$$P(B) = \frac{C_n^m (N-1)^{n-m}}{N^n}$$

二、几何概型

概率的古典定义具有可计算性的优点, 但它也有明显的局限性. 要求样本点有限，如果样本空间中的样本点有无限个，概率的古典定义就不适用了。

例：在[0,1]上任取一数，求该数字小于等于0.5的概率？

把有限个样本点推广到无限个样本点的场合，人们引入了几何概型的随机试验，由此形成了确定概率的另一方法。

定义1 若随机试验E满足：

1）随机试验的样本空间是某个可度量的几何区域；

2）每个样本点是等可能发生的；

则称该试验为几何概型的随机试验，其任一随机事件A的概率定义为：

$$P(A)=\frac{A\text{的几何度量}}{\Omega\text{的几何度量}}$$

当样本空间是一维、二维、三维区域时，其相应的几何度量为长度、面积、体积。

二、几何概型概率的性质：

1) 非负性：对任意事件A, 有$0 \le P(A)$；

2) 规范性：$P(W)=1$；

3) 有限可加性：设$A_1,A_2,\dots,A_n$为两两互斥的n个事件, 则：

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

例1：某公共汽车站在早上8:00到8:30之间每15分钟发一次车，某乘客在该时间段内任意时刻可到达车站，

问：该乘客等车不超过5分钟的概率。

解：设乘客到达车站的时刻为t，则到达车站的样本空间为：

$$\Omega=\{t \mid 8:00 \le t \le 8:30\}$$

令：**A**=该乘客等车不超过5分钟，则：

$$A=\{t \mid 8:10 \le t \le 8:15 or 8:25 \le t \le 8:30\}$$

显然：样本空间为一维区域，几何度量为长度，

计算得：

$$P(A)=\frac{A\text{的长度}}{\Omega\text{的长度}}=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$$

例2：在单位圆周上任取三点，求三点构成钝角三角形的概率？

解：设将单位圆周分为三段，依次为**x, y, 2p-x-y,**
则任取三点的样本空间为：

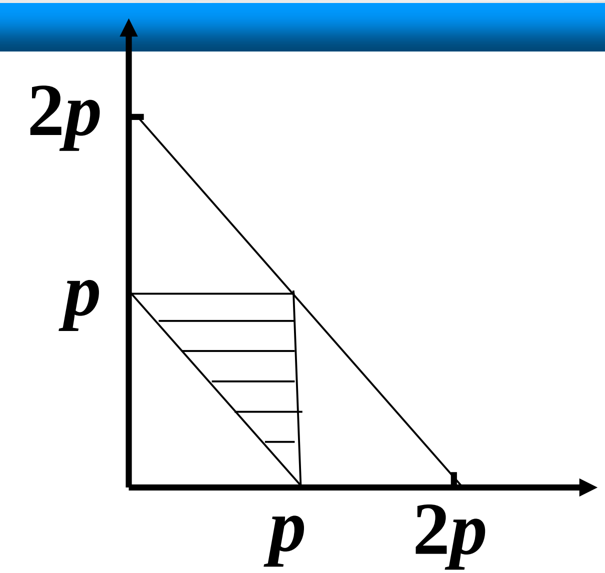
$$\Omega=\left\{(x,y)\left|\begin{cases}0<x<2\pi\\0<y<2\pi\\0<2\pi-x-y<2\pi\end{cases}\right.\right\}=\left\{(x,y)\left|\begin{cases}0<x<2\pi\\0<y<2\pi\\0<x+y<2\pi\end{cases}\right.\right\}$$

设***A*=**"三点构成钝角三角形"，则 $\overline{A}$表示"三点构成直角或锐角三角形"。则：

$$\overline{A}=\left\{(x,y)\left|\begin{cases}0<x\le\pi\\0<y\le\pi\\0<2\pi-x-y\le\pi\end{cases}\right.\right\}=\left\{(x,y)\left|\begin{cases}0<x\le\pi\\0<y\le\pi\\\pi<x+y\le2\pi\end{cases}\right.\right\}$$

图形表示为:

显然:样本空间是二维区域,故几何度量为面积。



计算得:

W 的面积为: $2p^2$

$\overline{A}$ 的面积为: $\pi^2/2$

故: $P(\overline{A}) = \dfrac{1}{4}$

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = \frac{3}{4}$$

四、概率的公理化体系

在学习几何和代数时，我们已经知道公理是数学体系的基础。数学上所说的“公理”，就是一些不加证明而公认的前提，然后以此为基础，推演出所讨论对象的进一步的内容。

概率的统计定义和古典定义都存在一定的缺点和局限性，有必要寻找概率的统一定义．经过长期的研究，到1933年，苏联数学家柯尔莫哥洛夫在总结了前人研究成果基础上，提出了概率论的公理化结构, 给出了概率的严格定义, 使概率论有了迅速的发展.

1. 概率的公理化定义

设E是随机试验，W是它的样本空间，对于W中的每一个事件A，赋予一个实数，记为$P(A)$，称为事件A的概率，如果集合函数$P(.)$满足下列条件：

1）非负性：对任意事件A，都有$P(A)\geqslant 0$；

2）规范性：$P(W)=1$；

3）可列可加性：设$A_1, A_2, \cdots,$ 为两两互斥的可列无穷多个事件, 则：

$$P(\sum_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

则称$P(A)$为事件A的概率。

2.概率的性质

(1) $P(\varnothing) = 0.$

(2) (有限可加性) 设$A_1,A_2,\ldots,A_n$是两两互斥的随机事件，则：

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

推论1：如果事件$A_1,A_2,\ldots,A_n$构成一个完备事件组，则：

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$$

推论2：A与A的对立事件的概率和等于1：

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1 \qquad P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

3.（减法公式）设A, B为两个随机事件，则：

$$P(B-A)=P(B)-P(BA)$$

特别地：若 $A\subset B$, 则：$P(B-A)=P(B)-P(A)$；

显然，这时有：$P(B)\geq P(A)$ （单调性）。

4. (加法公式)对于任意两事件 A, B 有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

推广1：三个事件和的情况

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$$
$$= P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_2A_3)$$
$$-P(A_1A_3)+P(A_1A_2A_3).$$

推广2：n 个事件和的情况：

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} P(A_i A_j)$$
$$+ \sum_{1 \le i < j < k \le n} P(A_i A_j A_k) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n).$$

设事件 A,B 的概率分别为 $\frac{1}{3}$ 和 $\frac{1}{2}$, 求在下列三种情况下 $P(B\overline{A})$ 的值.

(1) A与B互斥; (2) $A \subset B$; (3) $P(AB)=\frac{1}{8}$.

§1.3 条件概率及公式

引例：投掷骰子，观察点数，A表示“出现3”，B表示“出现奇数点”。

求：1) $P(A)$

2)在掷出奇数点的情况下，骰子正好是3点的概率。

解：1) P(A)=1/6

2)

$$\frac{1}{3}=\frac{1/6}{3/6}=\frac{P(AB)}{P(B)}=P(A|B)$$

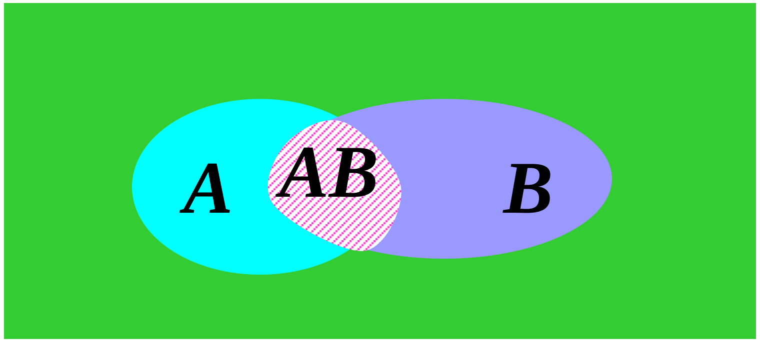
——称此为条件概率。

定义1：条件概率

设 A, B 是两个事件，且 $P(B)>0$，称

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

为在事件 B 发生的条件下事件 A 发生的条件概率.



条件概率的性质:

(1) 非负性： $0 \le P(A|B)$;

(2)规范性 $P(\Omega|B)=1$ $P(\Phi|B)=0$

(3) 可列可加性：设 $A_1, A_2, \cdots$ 是两两互斥的事件,则有

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i \middle| B\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B).$$

(4) $P(A|B)=1-P(\overline{A}|B)$.

(5) $P(A_1 \cup A_2|B)=P(A_1|B)+P(A_2|B)-P(A_1A_2|B)$;

例1 甲、乙两城市一年中雨天分别占50%与40%，两市同天下雨占2%，求甲市为雨天时乙市也为雨天的概率。

例2：n个人排成一队，已知甲总排在乙的前面，求：乙恰好紧跟甲后面的概率。

定理2 乘法公式

设P(A)>0, P(B)>0, 则有：P(AB)=P(A)P(B|A)

或者：=P(B)P(A|B)

推广1：设 A, B, C 为事件, 且 $P(AB) > 0$, 则有

$$\boldsymbol{P(ABC) = P(A)P(B|A)P(C|AB).}$$

推广2：设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 n 个事件, $n \geq 2$,

且 $\boldsymbol{P(A_1A_2\cdots A_{n-1}) > 0}$, 则有

$$\mathbf{P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})}$$

例4：设袋中装有r只红球，t只白球。每次自袋中任取一只球，观察其颜色然后放回，并再放入a只与所取出的那只球同色的球。若在袋中连续取球四次，试求第一、二次取到红球且第三、四次取到白球的概率。

抓阄是否与次序有关?

例5 两个阄, 其中一个阄内写着“有”字, 另一个为空白。现甲乙两人依次抓取，问：每个人抓到“有”字阄的概率是否相同?

1.4.3 全概率公式

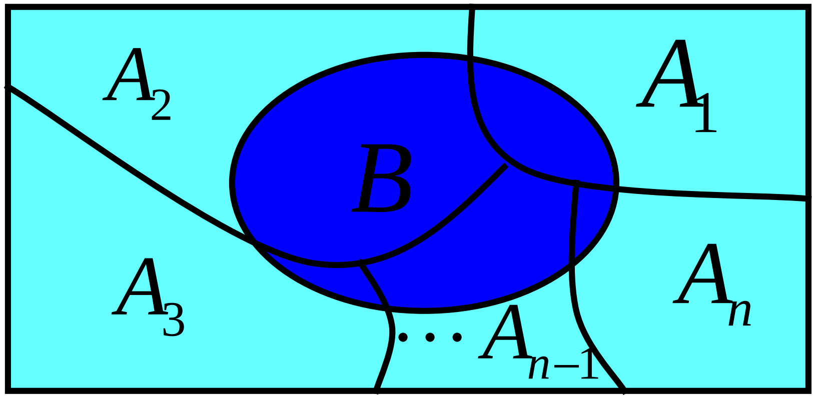
1、全概率公式

设Ω为试验E的样本空间，B为E的事件，$A_1, A_2, \cdots, A_n$为Ω的一个划分，且$P(A_i) > 0$ $(i = 1,2,\cdots,n)$，则

$$P(B) = P(B \mid A_1)P(A_1) + P(B \mid A_2)P(A_2) + \cdots + P(B \mid A_n)P(A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)$$

全概率公式

全概率公式的图形表示：



全概率公式的理解：

$P(B)$称为"全部"概率。即$P(B)$被分解为许多部分之和。在复杂的情况下直接计算$P(B)$不容易，但事件B又总是伴随这A_i出现，则可适当构造一组A_i往往可以简化$P(B)$的计算。

例1 某电子设备制造厂所用 的元件是由三家元件制造厂提供的.根据以往的记录有以下 的数据:

元件制造厂	次品率	提供元件的份额
1	0.02	0.15
2	0.01	0.80
3	0.03	0.05

设这三家工厂的产品在 仓库中是均匀混合的,且无区别的标志.

(1) 在仓库中随机地取一只 元件 ,求它是次品的概率;

(2) 在仓库中随机地取一只 元件,若已知取到的是次品,为分析此次品出自何厂 ,求此次品出由三家工厂生产的概率分 别是多少.

2. 贝叶斯公式

定义 设Ω为试验E的样本空间, B为E的事件,

$A_1, A_2, \cdots, A_n$为Ω的一个划分, 且$P(B) > 0$,

$P(A_i) > 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$, 则

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(B \mid A_i) P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B \mid A_j) P(A_j)}, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

称此为贝叶斯公式.

1. 全概率公式结题思路:

化整为零，各个击破

2. 贝叶斯公式有先验概率计算后验概率，进而做出新的判断

3. 简单的说，以因索果用全概率公式，执果索因用贝叶斯公式（逆概率公式）

例3：对以往的数据分析表明，当机器调整良好时，产品的合格率为98%，而当机器发生某种故障时，其合格率为55%。每天早晨机器开动时，机器调整良好的概率为95%。试求已知某日早上第一件产品是合格品时，机器调整良好的概率是多少？

$$= 0.97$$

例4：设有两箱装有同型号的零件，第一箱内装50只，其中10只一等品；第二箱内装30只，其中18只一等品。现从两箱中随机挑选一箱，然后从该箱中先后两次随机不放回取两只零件，

求：1)第一次取到的零件是一等品的概率； $=\frac{2}{5}$

2)已知第一次取到一等品,第二次也取出一等品的概率. ≈ 0.48

小结

1.条件概率 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$ → 乘法定理

$$P(AB)=P(A)P(B|A)$$

↓

全概率公式

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+\cdots+P(B_n)P(A|B_n)$$

↓

贝叶斯公式

$$P(B_i|A)=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(B_j)P(A|B_j)},\ i=1,2,\cdots,n.$$

2.条件概率 $P(B|A)$ 与积事件概率 $P(AB)$ 的区别.

(一) 两个事件的独立性

由条件概率，知

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

一般地， $P(A|B)\neq P(A)$

这意味着：事件B的发生对事件A发生的概率有影响．然而，在有些情形下又会出现：

$$P(A|B)=P(A)$$

1.引例

盒中有5个球(3绿2红),每次取出一个,有放回地取两次.记

$A=$ 第一次抽取,取到绿球,

$B=$ 第二次抽取,取到绿球,

则有 $P(B|A)=\dfrac{3}{5}=P(B)$

它表示 A 的发生并不影响 B 发生的可能性大小.

2. 定义 设 A, B 是两事件，如果满足等式

$$P(AB) = P(A)\,P(B)$$

则称事件 A, B 相互独立,简称 A, B 独立.

注. 1º 若 $P(A) > 0$,则

$$P(B|A) = P(B) \Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B)$$

说明

事件 A 与 B 相互独立,是指事件 A 的发生与事件 B 发生的概率无关.

3.性质

(1) 必然事件 与任何事件A相互独立;

不可能事件 与任何事件A相互独立。

(2) 若事件A与B相互独立, 则以下三对事件

也相互独立.

① A 与 $\overline{B}$;

② $\overline{A}$ 与 B;

③ $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$.

推广：三事件相互独立的概念：

设 A,B,C 是三个事件,如果满足等式

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} &P(AB)=P(A)P(B), \\ &P(BC)=P(B)P(C), \\ &P(AC)=P(A)P(C), \end{aligned}\right\} \text{三个事件两两独立} \\ P(ABC)=P(A)P(B)P(C), \end{cases}$$

则称事件 A,B,C 相互独立 .

同理：对n个随机事件独立性讨论类似。

射击问题

例1、 设每一名机枪射击手击落飞机的概率都是0.2,若10名机枪射击手同时向一架飞机射击,问击落飞机的概率是多少?

甲、乙、丙三人同时对飞机进行射击, 三人击中的概率分别为 0.4, 0.5, 0.7, 飞机被一人击中而被击落的概率为0.2 ,被两人击中而被击落的概率为 0.6 , 若三人都击中飞机必定被击落, 求飞机被击落的概率. ＝0.458.

1. *n*重贝努利(Bernoulli)试验

若n 次重复试验具有下列**特点**:

1) 每次试验的可能结果只有两个A 或 $\overline{A}$,

且 $P(A)=p, P(\overline{A})=1-p$

(在各次试验中p是常数,保持不变)

2) 各次试验的结果相互独立,

则称这n次重复试验为n重贝努里试验。

实例1 抛一枚硬币观察得到正面或反面. 若将硬币抛 n 次,就是n重伯努利试验.

实例2 抛一颗骰子n次,观察是否 “出现 1 点”, 就是 n重伯努利试验.

实例3 抽奖n次,观察是否 “出现一等奖”, 就是n重伯努利试验.

或者：观察是否 “出现三等以上的奖”, 就是n重伯努利试验。

2. n重贝努利试验的概率—二项概率公式

定理 如果在n重贝努利试验中，事件A每次出现的概率为p $(0<p<1)$, 则在n次试验中，A恰好出现 k 次的概率为:

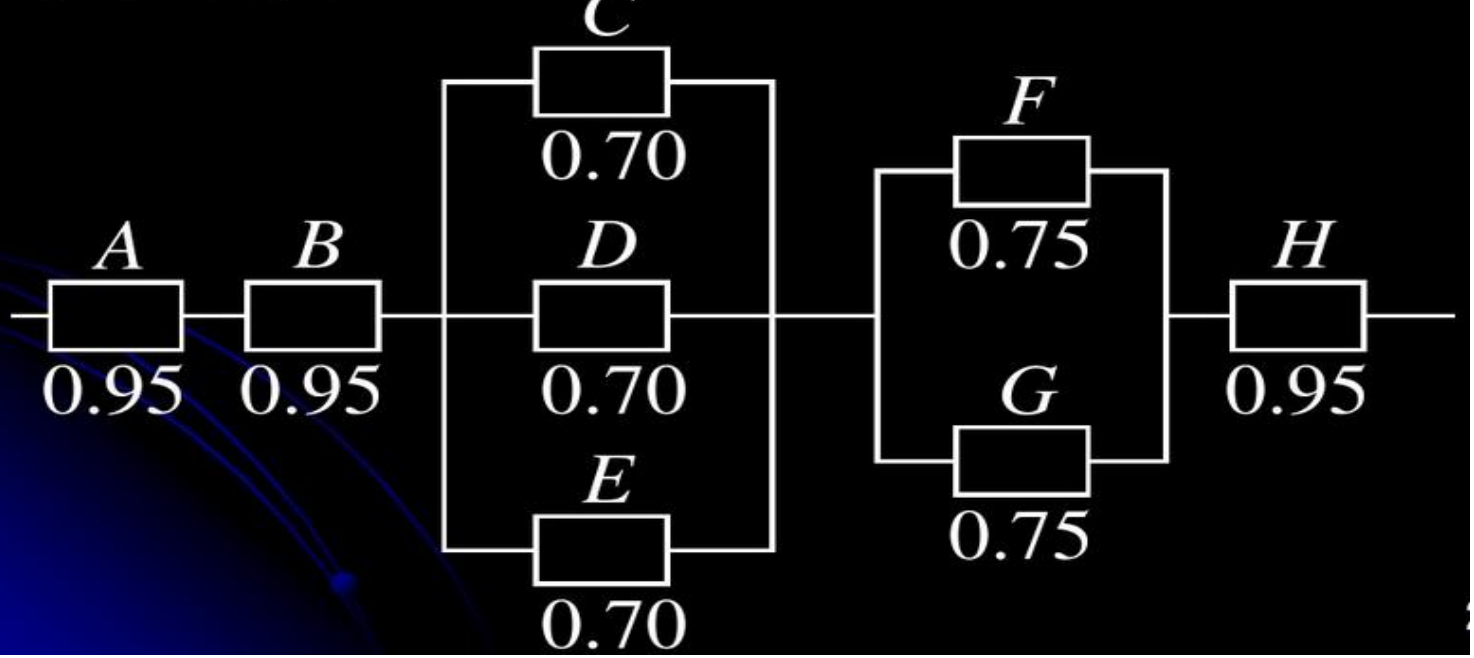
$$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=C_n^k p^k q^{n-k}$$

$$(k=0,1,2,\cdots,n;\ q=1-p)$$

且 $$\sum_{k=0}^{n} P_n(k)=1.$$

例1　设某考卷上有10道选择题，每道选择题有4个可供选择的答案，其中一个为正确答案，今有一考生发现自己完全不会做，于是随意填写，试问能碰对$m(m=0,1,2,\cdots,10)$道题的概率是多少？

例4* 如图是一个串并联电路系统, A,B,C,D,E,F,G,H都是电路中的元件. 它们下方的数字是各自正常工作的概率, 求电路系统的可靠性.



例2．一个医生知道某种疾病的自然痊愈率为0.25，为试验一种新药是否有效，把它给10个病人服用。规定：若这10个病人中至少有4人治好了，则认为这种药有效，提高了痊愈率，反之，则认为新药无效。

求：1) 虽然新药有效，并把痊愈率提高到0.35，但经过试验却被否定的概率。(0.5136)

2) 新药完全无效，但通过试验却被判断为有效的概率。（ 0.224 ）

例3 甲、乙各有n枚硬币，相互独立抛掷硬币，观察硬币，记录各自出现正面和反面的次数。求：正面数相等的概率？

甲、乙两人进行乒乓球比赛,每局甲胜的概率为 $p, p \geq 1/2$,问对甲而言,采用三局二胜制有利,还是采用五局三胜制有 利.设各局胜负相互独立.