第4章 随机变量的数字特征

在这些数字特征中，最常用的是

数学期望、方差、协方差和相关系数

第一节　数学期望

- 离散型随机变量的数学期望
- 连续型随机变量的数学期望
- 随机变量函数的数学期望
- 数学期望的性质
- 课堂练习

一、数学期望的概念

定义1 设X是离散型随机变量，它的分布率是:

$$P\{X=x_k\}=p_k\ ,\ k=1,2,\ldots$$

若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 绝对收敛，则称级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 的和为随机变量X的数学期望，记为 $E(X)$,

即

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$$

若级数发散 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$，则称$X$的数学期望不存在。

关于定义的几点说明

(1) $E(X)$是一个实数,而非变量,它是一种加权平均,与一般的平均值不同，它从本质上体现了随机变量 X 取可能值的真正的平均值, 也称均值.

(2) 级数的绝对收敛性保证了级数的和不随级数各项次序的改变而改变，之所以这样要求是因为数学期望是反映随机变量X 取可能值的平均值,它不应随可能值的排列次序而改变.

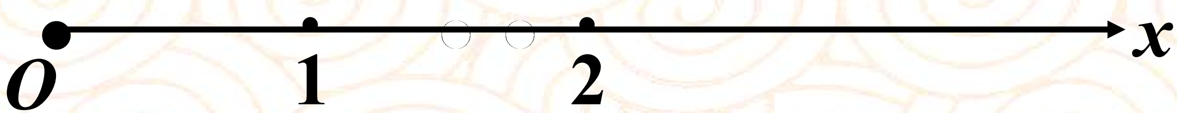
(3) 随机变量的数学期望与一般变量的算术平均值不同.

假设

X	1	2
p	0.02	0.98

随机变量 X 的算术平均值为 $\frac{1+2}{2}=1.5,$

$$E(X)=1\times 0.02+2\times 0.98=1.98.$$



它从本质上体现了随机变量X 取可能值的平均值.

当随机变量 X 取各个可能值是等概率分布时，X 的期望值与算术平均值相等.

例：　设随机变量X取值为 $x_k=(-1)^{k-1}\frac{2^k}{k},k=1,2,\ldots$

其对应的分布律为：$p_k=P\{X=x_k\}=\frac{1}{2^k},$

问：该随机变量的数学期望是多少？

定义2 设连续型随机变量X的概率密度为$f(x)$，如果积分$\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$绝对收敛，则称该积分的值为随机变量$X$的数学期望或者均值，记为$EX$，即

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx$$

如果积分$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)dx$发散，则称$X$的数学期望不存在。

例：设随机变量X的密度函数为：

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0<x<1 \\ 2-x, & 1\le x<2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求：数学期望*E*(*X*)

例：柯西分布

$$f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)},\qquad -\infty<x<+\infty$$

问：该数学期望是多少？

例 求常见分布的随机变量数学期望。

二、随机变量函数的数学期望

1. 问题的提出：

设已知随机变量X的分布，我们需要计算的不是X的期望，而是X的某个函数的期望，比如说$g(X)$的期望. 那么应该如何计算呢？

一种方法是，因为$g(X)$也是随机变量，故应有概率分布，它的分布可以由已知的X的分布求出来. 一旦我们知道了$g(X)$的分布，就可以按照期望的定义把$E[g(X)]$计算出来. 一般是比较复杂的 .

可以不先求$g(X)$的分布而只根据X的分布求得$E[g(X)]$吗？

定理1 设Y是随机变量X的函数:$Y=g(X)$ (g是连续函数)

(1) 当X为离散型时,它的分布率为$P(X=x_k)=p_k$;

$(k=1,2,\cdots)$,若$\sum\limits_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k$绝对收敛，则有

$$E(Y)=E[g(X)]=\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k$$

(2) 当X为连续型时,它的密度函数为$f(x)$.若

$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$绝对收敛，则有

$$E(Y)=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$$

$$E(Y)=E[g(X)]=\begin{cases}\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k, & X\text{离散型}\\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx, & X\text{连续型}\end{cases}$$

该公式的重要性在于: 当我们求$E[g(X)]$时，不必知道$g(X)$的分布，而只需知道X的分布就可以了. 这给求随机变量函数的期望带来很大方便.

定理2 设g (X,Y) 是随机变量X、Y的函数，且$E[g(X)]$存在。

(1) 如果X、Y是离散型随机变量，联合概率分布为p_{ij} , $i,j=1,2,\ldots$，则

$$E(Z)=E[g(X,Y)]=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}g(x_i,y_j)p_{ij}$$

(2) 如果X、Y是连续型随机变量，联合概率密度为$f(x,y)$，则

$$E(Z)=E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)dxdy$$

例 设 (X, Y) 的分布律为

$Y \backslash X$	1	2	3
-1	0.2	0.1	0
0	0.1	0	0.3
1	0.1	0.1	0.1

求：$E(X)$, $E(Y)$, $E(Y/X)$, $E[(X-Y)^2]$.

例P127 设随机变量 X 和 Y 相互独立，且都服从标准正态分布，求 $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ 的数学期望.

~1142.9公斤

例：按季节出售某种应时商品，每售出1公斤获利润6元。如果到季节尚有剩余商品，则每公斤净亏损1元。设某商品在季节内这种商品的销售量X（公斤）服从均匀分布U[800, 1200]。为使商店所获利润的数学期望达最大，问商店应该组织多少货源？

三、数学期望的性质

四、数学期望性质的应用

例 一民航送客车载有20位旅客自机场开出,旅客有10个车站可以下车,如到达一个车站没有旅客下车就不停车.以X表示停车的次数，求E(X).(设每位旅客在各个车站下车是等可能的,并设各旅客是否下车相互独立)

五、课堂练习

1 某人的一串钥匙上有n把钥匙,其中只有一把能打开自己的家门,他随意地试用这串钥匙中的某一把去开门,若每把钥匙试开一次后除去,求打开门时试开次数的数学期望.

2 设随机变量 X 的概率密度 $f(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$,

求 $E[\min(|X|,1)]$.

第二节　方差

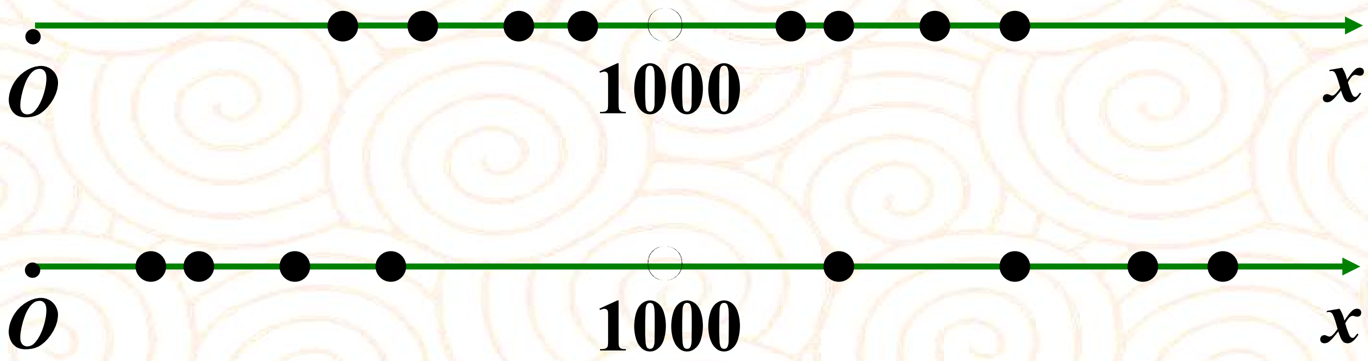
- 方差的定义
- 方差的计算
- 方差的性质
- 切比雪夫不等式
- 课堂练习

一、随机变量方差的概念及性质

1. 概念的引入

方差是一个常用来体现随机变量取值分散程度的量.

实例 有两批灯泡,其平均寿命都是 $E(X)$=1000小时.



2. 方差的定义

设 X 是一个随机变量,若 $E\{[X-E(X)]^2\}$ 存在,则称 $E\{[X-E(X)]^2\}$ 为 X 的方差,记为 $D(X)$ 或 $\mathrm{Var}(X)$,即…

$$D(X)=\mathrm{Var}(X)=E\{[X-E(X)]^2\}.$$

称 $\sqrt{D(X)}$ 为标准差,记为 $\sigma(X)$.

3. 方差的意义

如果 $D(X)$ 值大,表示 X 取值分散程度大,$E(X)$ 的代表性差;反之......

4. 随机变量方差的计算

(1) 利用定义计算

(2) 利用公式计算

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2.$$

离散型随机变量的方差

$$D(X)=\sum_{k=1}^{+\infty}[x_k-E(X)]^2 p_k,$$

其中 $P\{X=x_k\}=p_k, k=1,2,\cdots$ 是 X 的分布律.

连续型随机变量的方差

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2 f(x)\,\mathrm{d}x,$$

其中 $f(x)$ 为X的概率密度.

方差的性质P135 ,常见分布的方差
切比雪夫不等式及性质(6)

例 已知正常男性成人血液中，每一毫升白细胞数平均是7300，标准差是700 . 估计每毫升白细胞数在5200~9400之间的概率 .

P例4.3.3的性质及标准化变量

4.4协方差与相关系数,性质，等价性质？

例6 已知 $X \sim N(1,3^2), Y \sim N(0,4^2)$ ，且X与Y的相关系数r=-0.5，设：

$$Z=\frac{1}{3}X+\frac{1}{2}Y$$

求：1）DZ；2）Cov(X,Z)

例7：密度函数为：

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & x^2+y^2\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

判断**X**与**Y**的相关性与独立性。

$$X \sim N(0,\sigma^2), Y = X^2$$

原点矩与中心距