

# Beispiel für den 3-Means-Algorithmus

Dr. Hermann Völlinger

01.09.2024

## Ausgangsdaten

Wir haben die folgenden acht Punkte in einem 2D-Raum:

Punkt A:  $(1, 1)$   
Punkt B:  $(2, 1)$   
Punkt C:  $(4, 3)$   
Punkt D:  $(5, 4)$   
Punkt E:  $(6, 7)$   
Punkt F:  $(8, 8)$   
Punkt G:  $(3, 3)$   
Punkt H:  $(7, 7)$

Ziel ist es, diese Punkte in **drei Cluster** aufzuteilen.

## Schritt 1: Initialisierung der Cluster-Zentren

Wir wählen drei Anfangszentren zufällig aus den Punkten:

Cluster 1 Zentrum:  $(1, 1)$  (Punkt A)  
Cluster 2 Zentrum:  $(5, 4)$  (Punkt D)  
Cluster 3 Zentrum:  $(8, 8)$  (Punkt F)

## Iteration 1: Zuordnung der Punkte zu den Zentren

Für jeden Punkt berechnen wir die euklidische Distanz zu den drei Zentren und ordnen den Punkt dem nächstgelegenen Zentrum zu.

## Berechnung der Distanzen und Zuordnung

- **Punkt A (1, 1):**

$$d(A, \text{Cluster 1}) = \sqrt{(1-1)^2 + (1-1)^2} = 0$$

$$d(A, \text{Cluster 2}) = \sqrt{(1-5)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{16+9} = 5$$

$$d(A, \text{Cluster 3}) = \sqrt{(1-8)^2 + (1-8)^2} = \sqrt{49+49} = 9.899$$

**Zuordnung:** Cluster 1

- **Punkt B (2, 1):**

$$d(B, \text{Cluster 1}) = \sqrt{(2-1)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$d(B, \text{Cluster 2}) = \sqrt{(2-5)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{9+9} = 4.243$$

$$d(B, \text{Cluster 3}) = \sqrt{(2-8)^2 + (1-8)^2} = \sqrt{36+49} = 9.219$$

**Zuordnung:** Cluster 1

- **Punkt C (4, 3):**

$$d(C, \text{Cluster 1}) = \sqrt{(4-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{9+4} = 3.606$$

$$d(C, \text{Cluster 2}) = \sqrt{(4-5)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{1+1} = 1.414$$

$$d(C, \text{Cluster 3}) = \sqrt{(4-8)^2 + (3-8)^2} = \sqrt{16+25} = 6.403$$

**Zuordnung:** Cluster 2

- **Punkt D (5, 4):**

$$d(D, \text{Cluster 1}) = \sqrt{(5-1)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{16+9} = 5$$

$$d(D, \text{Cluster 2}) = \sqrt{(5-5)^2 + (4-4)^2} = 0$$

$$d(D, \text{Cluster 3}) = \sqrt{(5-8)^2 + (4-8)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

**Zuordnung:** Cluster 2

- **Punkt E (6, 7):**

$$d(E, \text{Cluster 1}) = \sqrt{(6-1)^2 + (7-1)^2} = \sqrt{25+36} = 7.810$$

$$d(E, \text{Cluster 2}) = \sqrt{(6-5)^2 + (7-4)^2} = \sqrt{1+9} = 3.162$$

$$d(E, \text{Cluster 3}) = \sqrt{(6-8)^2 + (7-8)^2} = \sqrt{4+1} = 2.236$$

**Zuordnung:** Cluster 3

- **Punkt F (8, 8):**

$$d(F, \text{Cluster 1}) = \sqrt{(8-1)^2 + (8-1)^2} = \sqrt{49+49} = 9.899$$

$$d(F, \text{Cluster 2}) = \sqrt{(8-5)^2 + (8-4)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

$$d(F, \text{Cluster 3}) = \sqrt{(8-8)^2 + (8-8)^2} = 0$$

**Zuordnung:** Cluster 3

- **Punkt G (3, 3):**

$$d(G, \text{Cluster 1}) = \sqrt{(3-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{4+4} = 2.828$$

$$d(G, \text{Cluster 2}) = \sqrt{(3-5)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{4+1} = 2.236$$

$$d(G, \text{Cluster 3}) = \sqrt{(3-8)^2 + (3-8)^2} = \sqrt{25+25} = 7.071$$

**Zuordnung:** Cluster 2

- **Punkt H (7, 7):**

$$d(H, \text{Cluster 1}) = \sqrt{(7-1)^2 + (7-1)^2} = \sqrt{36+36} = 8.485$$

$$d(H, \text{Cluster 2}) = \sqrt{(7-5)^2 + (7-4)^2} = \sqrt{4+9} = 3.605$$

$$d(H, \text{Cluster 3}) = \sqrt{(7-8)^2 + (7-8)^2} = \sqrt{1+1} = 1.414$$

**Zuordnung:** Cluster 3

### Ergebnis der ersten Iteration

- **Cluster 1:** Punkte A, B
- **Cluster 2:** Punkte C, D, G
- **Cluster 3:** Punkte E, F, H

### Schritt 3: Neuberechnung der Cluster-Zentren

- **Neues Zentrum für Cluster 1:**  $(\frac{1+2}{2}, \frac{1+1}{2}) = (1.5, 1)$
- **Neues Zentrum für Cluster 2:**  $(\frac{4+5+3}{3}, \frac{3+4+3}{3}) = (4, 3.33)$
- **Neues Zentrum für Cluster 3:**  $(\frac{6+8+7}{3}, \frac{7+8+7}{3}) = (7, 7.33)$

### Iteration 2: Neue Zuordnung der Punkte

Nach der Neuberechnung der Cluster-Zentren bleiben die Punkte den gleichen Clustern zugeordnet. Daher ist der Algorithmus nach zwei Iterationen konvergiert.

### Endergebnis

Die finalen Cluster sind:

- **Cluster 1 (Zentrum: (1.5, 1)):** Punkte A, B
- **Cluster 2 (Zentrum: (4, 3.33)):** Punkte C, D, G
- **Cluster 3 (Zentrum: (7, 7.33)):** Punkte E, F, H