

22 Vorlesungen über

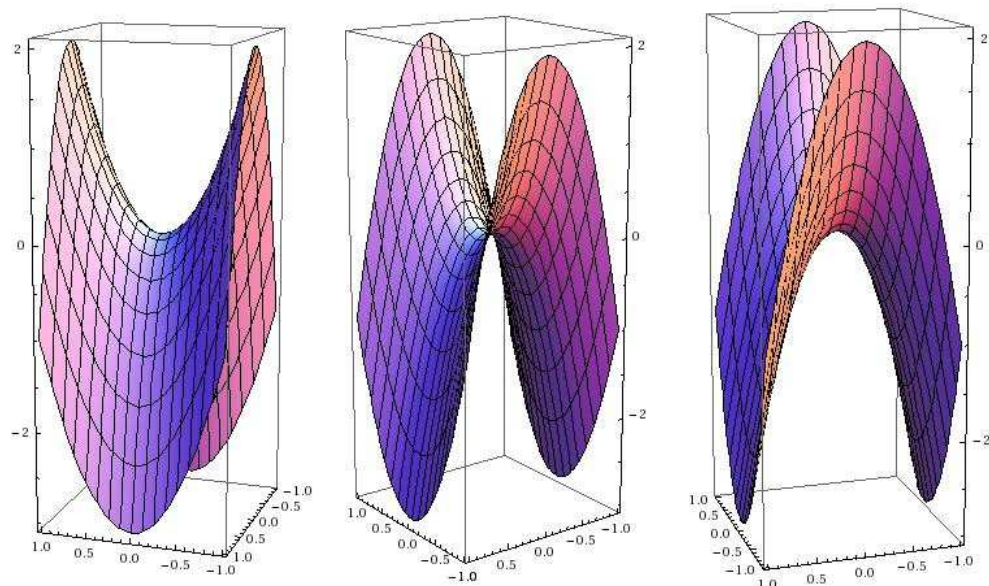
---

Analysis in mehreren Veränderlichen / Ausgewählte Kapitel der Analysis

---

für Lehramtstudierende der Schulformen Grund-, Haupt- und Realschule

JÖRN STEUDING  
Universität Würzburg, Sommersemester 2011



Dies sind verschiedene Ansichten der Funktion  $(x, y) \mapsto x^2 - 2y^2$  mit einem beispielhaften 'Sattelpunkt': geeignete Projektionen liefern nach oben bzw. nach unten geöffnete Parabeln.

Viele Gesetzmäßigkeiten in der Natur hängen von verschiedenen Parametern ab. Beispielsweise legt nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz ein (physikalischer) Körper im freien Fall nach  $t$  Sekunden die Distanz  $\frac{1}{2}gt^2$  in Metern zurück; hierbei ist  $g$  die Fallbeschleunigung, welche auf der Erde (in Mitteleuropa) ca.  $9,81\text{m/sec}^2$  ist, auf dem Mond jedoch nur ca. ein Sechstel dieses Wertes beträgt. Der freie Fall hängt also von mehreren Variablen ab! In dieser Vorlesung dehnen wir die Differential- und Integralrechnung auf Funktionen *mehrerer Veränderlicher* aus. Interessante Anwendungen sind Aufgaben wie die folgende: Gibt es ein rechtwinkliges Dreieck mit maximalem (minimalem) Flächeninhalt bei gegebener Hypotenuse? Und wenn ja, was lässt sich über dessen Form aussagen?

Dieser Stoff macht den ersten Teil der Vorlesung aus und richtet sich an die Studierenden des modularisierten Lehramtes (Stichwort: **Analysis mehrerer Veränderlicher**, 08 02070). Für die Studierenden des nicht-modularisierten Lehramtes (Stichwort: **Ausgewählte Kapitel der Analysis**, 08 02090) wird ein zweiter Teil in die Theorie der Differentialgleichungen einführen.

Differentialgleichungen lassen sich dazu verwenden, Prozesse in der Natur zu beschreiben. So gilt für die oben erwähnte Distanz  $y(t) = \frac{1}{2}gt^2$  beim freien Fall bei Differentiation bzgl.  $t$  die Gesetzmässigkeit  $y'(t) = \frac{2}{t}y(t)$ , was ein erstes Beispiel einer Differentialgleichung liefert und einen Zusammenhang zwischen der Distanz  $y(t)$  und der Geschwindigkeit  $y'(t) = gt$  liefert. Wir werden aber wesentlich interessantere (und kompliziertere) Differentialgleichungen kennen lernen...

Dieses Skript ist - wie fast jeder geschriebene Text - wohl nicht ohne Druckfehler. Berichtigungen und Verbesserungsvorschläge sind herzlich willkommen.  
*Viel Spaß!*

Jörn Steuding

---

Empfehlenswerte Literatur zum Thema:

- T. ARENS, F. HETTLICH, C. KARPfinger, U. KOCKELKORN, K. LICHTENEGGER, H. STACHEL, *Mathematik*, Spektrum 2008 (ein umfangreiches Buch mit den wichtigsten Resultaten zur Analysis und linearen Algebra!)
- E. HAIRER & G. WANNER, *Analysis in historischer Entwicklung*, Springer 2011 (betont die Entwicklung der Analysis von ihren Anfängen bis ins zwanzigste Jahrhundert!)
- O. FORSTER, *Analysis 2*, Vieweg 2011, 9. Auflage (enthält alle wesentlichen Resultate und ist dabei recht dünn!)
- R. COURANT, H. ROBBINS, *Was ist Mathematik?*, Springer 1993, 4. Auflage (ein Klassiker!)

# Inhaltsverzeichnis

<b>Kapitel 1. Differential- und Integralrechnung von Funktionen mehrerer Veränderlicher</b>	<b>4</b>
1. Abstände und Normen in $n$ -dimensionalen Räumen – 2. Mai	4
2. Konvergente Folgen – 5. Mai	6
3. Stetige Abbildungen – 9. Mai	8
4. Partielle Ableitungen – 12. Mai	11
5. Totale Differenzierbarkeit – 16. Mai	14
6. Taylor-Approximation mit mehreren Veränderlichen – 19. Mai	17
7. Extremwerte – 23. Mai	19
8. Implizite Funktionen und Anwendungen – 26. Mai	23
9. Kurven und ihre Bogenlänge – 30. Mai	28
10. Volumenberechnung mit mehrdimensionalen Integralen – 6. Juni	31
♣ Practise makes perfect – 9. Juni	34
<b>Kapitel 2. Differentialgleichungen</b>	<b>36</b>
11. Einige einfache Differentialgleichungen – 16. Juni	36
12. Trennung der Variablen – 20. Juni	39
13. Lineare Differentialgleichungen – 27. Juni	42
♣ No pains - no gains! – 30. Juni	44
14. Exakte Differentialgleichungen – 4. Juli	46
♣ Brain is better than brawn! – 7. Juli	48
15. Existenz- und Eindeutigkeitssätze – 11. Juli	49
16. Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnung – 14. Juli	52
17. Systeme linearer Differentialgleichungen erster Ordnung – 18. Juli	55
18. Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung – 21. Juli	58
19. Systeme linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten – 25. Juli	61

## KAPITEL 1

# Differential- und Integralrechnung von Funktionen mehrerer Veränderlicher

Wir setzen die Differential- und Integralrechnung fort, allerdings studieren wir nun Funktionen mehrerer Veränderlicher. Zunächst gilt es jedoch, einige Begriffe aus der eindimensionalen Theorie zu verallgemeinern.

### 1. Abstände und Normen in $n$ -dimensionalen Räumen – 2. Mai

Unsere Zahlenuniversen sind die euklidischen Vektorräume  $\mathbb{R}^n := \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$  ( $n$ -faches kartesisches Produkt der Menge der reellen Zahlen). Die Elemente sind Vektoren  $(x_1, \dots, x_n)$ , die wir komponentenweise addieren können und mit einem reellen Skalar multiplizieren können; damit ist  $\mathbb{R}^n$  ein  $n$ -dimensionaler Vektorraum (vgl. Lineare Algebra).

In  $\mathbb{R}$  lässt sich der Abstand zwischen zwei Punkten durch den Betrag der Differenz angeben. Wie kann dies auf euklidische Räume  $\mathbb{R}^n$  verallgemeinert werden?

Wir stellen uns den zweidimensionalen euklidischen Raum  $\mathbb{R}^2$  als Ebene vor. Nach dem Satz des Pythagoras ist der Abstand zweier Punkte  $p_1 = (x_1, y_1)$  und  $p_2 = (x_2, y_2)$  des  $\mathbb{R}^2$

$$d(p_1, p_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Dieser Abstand hängt nur von der Differenz  $p_1 - p_2$  ab und wir schreiben deshalb auch  $\|p_1 - p_2\|_2$  bzw.

$$\|(x, y)\|_2 := \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Dieser Abstandsbegriff lässt sich problemlos auf den drei- bzw. sogar  $n$ -dimensionalen Raum übertragen: Für den  $\mathbb{R}^n$  definieren wir die **euklidische Norm** eines Vektors  $x = (x_1, \dots, x_n)$  als

$$\|x\|_2 := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

Den **Abstand** zwischen  $x, y \in \mathbb{R}^n$  definieren wir als  $d(x, y) := \|x - y\|_2$ . Natürlich definieren wir diese Größen ebenso für Spaltenvektoren.

**Satz 1.1.** *Für die euklidische Norm gelten*

- (1)  $\|x\| \geq 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  und Gleichheit genau für  $x = 0$ ;
- (2)  $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$ ;
- (3)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  für alle  $x, y \in \mathbb{R}^n$ .

**Beweisskizze.** Nachweis von (1) und (2) ist trivial. Seien  $x = (x_1, \dots, x_n), y := (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ . Mit

$$A := \sum_{j=1}^n x_j^2, \quad B := \sum_{j=1}^n x_j y_j, \quad C := \sum_{j=1}^n y_j^2$$

und variablem  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt

$$0 \leq \sum_{j=1}^n (x_j - \lambda y_j)^2 = A^2 - 2\lambda B + \lambda^2 C.$$

Ist  $C = 0$ , so auch  $B = 0$ . Ist hingegen  $C \neq 0$ , so definiert die obige rechte Seite ein quadratisches Polynom in  $\lambda$ , welches keine negativen Werte annimmt; damit sind die Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = \frac{A}{C} \pm \sqrt{\frac{A^2}{C^2} - \frac{B}{C}}$$

entweder identisch oder nicht-reell, d.h.  $A^2 - BC \leq 0$  (was auch den Fall  $C = B = 0$  beinhaltet). Nun übersetzt sich  $A^2 \leq BC$  zu

$$\left| \sum_{j=1}^n x_j y_j \right|^2 \leq \sum_{j=1}^n x_j^2 \cdot \sum_{j=1}^n y_j^2.$$

Einsetzen dieser Ungleichung in

$$\|x + y\|_2^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2 + 2 \sum_{j=1}^n x_j y_j + \sum_{j=1}^n y_j^2$$

und Ziehen der Quadratwurzel liefert die Dreiecksungleichung. •

Wir definieren das **Skalarprodukt** von  $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$  durch

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n x_j y_j.$$

Damit lässt sich die Ungleichung aus dem vorangegangenen Beweis sehr kurz formulieren:

**Satz 1.2 (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung).** Für beliebige  $x, y \in \mathbb{R}^n$  gilt

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \|x\|_2 \|y\|_2.$$

Die obigen Konzepte lassen sich verallgemeinern: Eine Abbildung  $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , die (1), (2) und (3) des Satzes genügt, heißt **Norm auf  $\mathbb{R}^n$** .

**Beispiele:** Zu  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  ist die 1-Norm definiert durch

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j|;$$

allgemeiner ist für festes reelles  $p \geq 1$  die  **$p$ -Norm** gegeben durch

$$\|x\|_p = \left( \sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}};$$

die **Maximum-Norm** ist definiert durch

$$\|x\|_\infty = \max_{j=1, \dots, n} |x_j|.$$

Der folgende Satz zeigt Relationen zwischen verschiedenen Normen auf:

**Satz 1.3.** Für beliebiges  $x \in \mathbb{R}^n$  gelten die Ungleichungen

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty.$$

Insbesondere sind also die Normen  $\|x\|_p$  für  $1 \leq p \leq \infty$  alle äquivalent.

Ohne **Beweis** in der Vorlesung.

Im Folgenden notieren wir die euklidische Norm kurz mit  $\|\cdot\|$  (statt  $\|\cdot\|_2$ ). Mehr zu Normen in den Tutorien und auf den Übungsblättern.

## 2. Konvergente Folgen – 5. Mai

Gegeben  $p \in \mathbb{R}^n$  und  $r > 0$  heißt

$$B_r(p) := \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, p) < r\}$$

die **offene Kugel mit Mittelpunkt  $p$  und Radius  $r$** . Hier hätten wir den Abstand  $d(x, p)$  auch als  $\|x - p\|$  notieren können; die offene Kugel  $B_r(p)$  besteht jedenfalls aus allen Punkten  $x$ , die einen Abstand kleiner  $r$  zum Punkt  $p$  haben. Eine Menge  $U \subset \mathbb{R}^n$  heißt eine **Umgebung eines Punktes  $p$** , falls es ein  $\epsilon > 0$  gibt mit

$$B_\epsilon(p) \subset U.$$

Eine Menge  $U \subset \mathbb{R}^n$  heißt **offen**, falls sie Umgebung jedes ihrer Punkte ist.

**Beispiele:** offene Intervalle in  $\mathbb{R}$  (alt), alle  $B_r(p)$ ,  $\mathbb{R}^n$ ,  $\emptyset$ , ...

Eine Menge  $A \subset \mathbb{R}^n$  heißt **abgeschlossen**, falls das Komplement  $\mathbb{R}^n \setminus A$  offen ist.

**Beispiele:** abgeschlossene Intervalle in  $\mathbb{R}$  (alt), jede **abgeschlossene Kugel**  $\overline{B_r(p)} := \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, p) \leq r\}$ ,  $\emptyset$ ,  $\mathbb{R}^n$ , ...

Folgen sind Abbildungen  $\mathbb{N} \rightarrow X$ , wobei die Zielmenge bislang stets  $X = \mathbb{R}$  war; nun werden wir allgemeiner  $X = \mathbb{R}^n$  betrachten, also Folgen  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  (oder kurz:  $(x_k)_k$ ) von Vektoren  $x_k = (x_{k1}, \dots, x_{kn})$  des  $\mathbb{R}^n$ . Vorsicht:  $k$  bezeichnet hier den Index der Folge und nicht die  $k$ -te Komponente eines Vektors!

Eine Folge  $(x_k)_k$  von Vektoren des  $\mathbb{R}^n$  **konvergiert mit Grenzwert  $a \in \mathbb{R}^n$** , falls für alle  $\epsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  existiert, so dass

$$\|x_k - a\| < \epsilon \quad \text{für alle } k \geq N;$$

in diesem Fall schreiben wir  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$ . Damit konvergiert eine Folge  $(x_k)_k$  also gegen  $a$ , wenn in jeder noch so kleinen Umgebung von  $a$  alle bis auf höchstens endlich viele Folgenglieder  $x_k$  liegen! Nichtkonvergente Folge heißen **divergent**.

**Satz 2.1.** Für eine Folge  $(x_k)_k$  von Vektoren  $x_k = (x_{k1}, \dots, x_{kn}) \in \mathbb{R}^n$  gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a \iff \lim_{k \rightarrow \infty} x_{kj} = a_j \quad \text{für } j = 1, \dots, n,$$

d.h.  $(x_k)_k$  konvergiert genau dann, wenn alle Komponentenfolgen  $(x_{kj})_k$  in  $\mathbb{R}$  konvergieren; in diesem Fall ist der Grenzwert  $a = (a_1, \dots, a_n)$  gleich dem Vektor gebildet aus den Grenzwerten der Komponentenfolgen.

**Beweis.** Konvergiert  $(x_k)_k$  gegen  $a$ , so existiert also zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $N$  mit der Eigenschaft  $\|x_k - a\| < \epsilon$  für alle  $k \geq N$ . Insbesondere folgt

$$|x_{kj} - a_j| \leq \|x_k - a\| < \epsilon \quad \text{für } j = 1, 2, \dots, n$$

und damit komponentenweise Konvergenz. Existiert umgekehrt zu jedem  $j = 1, \dots, n$  und jedem  $\epsilon > 0$  ein  $N_j$  mit  $|x_{kj} - a_j| < \tilde{\epsilon} := \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}$  für alle  $k \geq N_j$ , so folgt

$$\|x_k - a\| = \left( \sum_{j=1}^n |x_{kj} - a_j|^2 \right)^{1/2} < (n\tilde{\epsilon}^2)^{1/2} = \epsilon$$

für alle  $k \geq \max\{N_1, \dots, N_n\}$ . Damit folgt die Konvergenz von  $(x_k)_k$ . •

Mit dem vorangegangenen Satz übertragen sich leicht die Rechengesetze für konvergente Folgen aus der eindimensionalen Theorie. Um jedoch eine gegebene Folge als konvergent zu überführen, müssen wir bislang den Grenzwert kennen (was manchmal schwierig ist). Wie in der eindimensionalen Theorie hilft hier folgender Kunstgriff:

Eine Folge  $(x_k)$  von Vektoren  $x_k = (x_{k1}, \dots, x_{kn}) \in \mathbb{R}^n$  heißt **Cauchy-Folge**, falls für alle  $\epsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  existiert, so dass

$$\|x_k - x_\ell\| < \epsilon \quad \text{für alle } k, \ell \geq N.$$

**Satz 2.2.** Eine Folge in  $\mathbb{R}^n$  ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.

**Beweis.** Konvergiert  $(x_k)_k$  gegen  $a$ , existiert also zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $N$ , so dass  $\|x_k - a\| < \frac{\epsilon}{2}$  für alle  $k \geq N$ , so folgt mit der Dreiecksungleichung (Satz 1.1,(3)) für beliebige  $k, \ell \geq N$

$$\|x_k - x_\ell\| \leq \|x_k - a\| + \|a - x_\ell\| < \epsilon.$$

Ist umgekehrt  $(x_k)_k$  eine Cauchy-Folge, dann auch jede ihrer Komponentenfolgen, welche nach der eindimensionalen Theorie also sämtlich konvergieren. Mit Satz 2.1 folgt damit die Konvergenz von  $(x_k)_k$ . •

Eine Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$  heißt **beschränkt**, falls  $M$  in einer genügend großen Kugel enthalten ist, d.h.  $M \subset B_R(a)$  für gewisse  $a \in \mathbb{R}^n$  und  $R > 0$ ; ansonsten ist  $M$  **unbeschränkt**. Dieselben Begriffe gelten auch für Folgen, die wir als geordnete Punktmengen auffassen können.

**Satz 2.3 (Satz von Bolzano–Weierstraß).** *Jede beschränkte Folge in  $\mathbb{R}^n$  besitzt eine konvergente Teilfolge.*

**Beweis** durch sukzessives Benutzen der eindimensionalen Version des Satzes von Bolzano–Weierstraß in den jeweiligen Komponenten.

Eine Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$  heißt **kompakt**, falls es zu jeder Überdeckung von  $M$

$$M \subset \bigcup_{i \in I} U_i \quad \text{mit offenen } U_i$$

endlich viele Indizes  $i_1, \dots, i_m \in I$  gibt, so dass

$$M \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_m}.$$

Tatsächlich genügt uns eine einfachere Charakterisierung kompakter Mengen (welche auch den alten Kompaktheitsbegriff der eindimensionalen Theorie rechtfertigt):

**Satz 2.4 (Satz von Heine–Borel).** *Eine Teilmenge  $M \subset \mathbb{R}^n$  ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.*

Ohne **Beweis** in der Vorlesung.

### 3. Stetige Abbildungen – 9. Mai

Sind  $X$  und  $Y$  wohldefinierte Mengen, so verstehen wir unter einer Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  eine Zuordnung, die jedem  $x \in X$  ein eindeutig bestimmtes  $y \in Y$  zuordnet; wir schreiben hierfür auch  $Y = f(x)$  und notieren diese Zuordnung oft durch  $x \mapsto f(x)$ . Im Folgenden werden der Urbildbereich  $X$  und der Bildbereich  $Y$  jeweils (nicht notwendig identische) euklidische Vektorräume oder Teilmengen hiervon sein. Statt von Abbildungen spricht man auch von Funktionen.

Im Folgenden sei stets  $U \subset \mathbb{R}^n$  nicht-leer und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Abbildung. Für  $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$  schreiben wir  $y = f(x)$  mit  $y = (y_1, \dots, y_m)$  mit den **Komponentenfunktionen**  $y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m = f_m(x_1, \dots, x_n)$ ; kurz:  $(x_1, \dots, x_n) = x \mapsto f(x) = y = (y_1, \dots, y_m) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$ .

**Beispiele:** Eine Funktion ( $m = 1$ ) von zwei Variablen ( $n = 2$ ) kann als Oberfläche im dreidimensionalen Raum  $\mathbb{R}^3$  interpretiert werden:

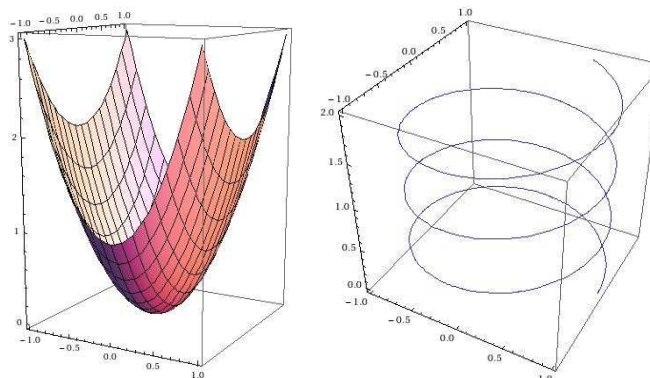
$$(x, y) \mapsto x^2 + y^2$$

liefert einen Paraboloid (wichtig in der *Analytischen Geometrie*). Drei Funktionen ( $m = 3$ ) einer Variablen ( $n = 1$ ) liefern eine Kurve im Raum:

$$t \mapsto (\cos t, \sin t, t)$$

ist eine Schraubenlinie. *Wie lang ist diese Kurve für  $0 \leq t \leq 10$ ?* Auf der nächsten Seite befinden sich mit MATHEMATICA hergestellte Bilder dieser Objekte. Im Allgemeinen ist es jedoch problematisch, solche höherdimensionalen Objekte zu visualisieren!





Eine Abbildung  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  heißt **stetig in**  $a \in U$ , falls zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, so dass

$$\|f(x) - f(a)\| < \epsilon \quad \text{für alle } x \in U \text{ mit } \|x - a\| < \delta.$$

Dies ist völlig analog zur eindimensionalen Theorie: Wenn  $x$  hinreichend nahe bei  $a$  liegt, so ist  $f(x)$  nahe bei  $f(a)$ !

**Satz 3.1.** *Eine Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  ist genau dann stetig in  $a \in U$ , wenn alle Komponentenfunktionen  $f_j : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  in  $a \in U$  stetig sind (in der Notation von oben).*

**Beweis.** Existiert zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  mit  $\|f(x) - f(a)\| < \epsilon$  falls  $\|x - a\| < \delta$ , so folgt für  $j = 1, \dots, n$

$$|f_j(x) - f_j(a)| \leq \|f(x) - f(a)\| < \epsilon$$

für ebensolche  $x$ . Also impliziert die Stetigkeit von  $f$  in  $a$  die Stetigkeit aller Komponentenfunktionen  $f_j$  in  $a$ . Unser Argument ähnelt dabei sehr demjenigen für den Beweis von Satz 2.1 und tatsächlich lässt sich so unschwer auch die umgekehrte Implikation beweisen. •

Als Alternative zur  $\epsilon$ - $\delta$ -Definition lässt sich Stetigkeit auch über die Existenz von Grenzwerten von Folgen charakterisieren:

**Satz 3.2.** *Eine Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  ist genau dann stetig in  $a \in U$ , wenn für jede Folge  $(x_k)_k$  in  $U$  mit Grenzwert  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$  gilt*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(a).$$

Man beachte, dass sich die Folgen der  $x_k$  in einem höherdimensionalen Raum  $\mathbb{R}^m$  aus sehr vielen Richtungen gegen ihren Grenzwert  $a$  konvergieren können!

**Beweis wie in der eindimensionalen Theorie:** Existiert zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$ , so dass aus  $\|x - a\| < \delta$  dann  $\|f(x) - f(a)\| < \epsilon$  folgt, so ergibt sich speziell für  $x = x_k$  wegen der Konvergenz  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$  ein  $N$  mit  $\|x_k - a\| < \delta$  für alle  $k \geq N$ . Also folgt  $\|f(x_k) - f(a)\| < \epsilon$  für eben diese  $x_k$  und damit  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(a)$ . Die umgekehrte Implikation zeigen wir durch Kontraposition: Angenommen,  $f$  ist nicht stetig in  $a$ , so gibt es ein  $\epsilon > 0$ , so dass für jedes

$\delta > 0$  ein  $x \in U$  existiert mit

$$\|x - a\| < \delta, \quad \text{aber} \quad \|f(x) - f(a)\| \geq \epsilon.$$

Speziell für  $\delta = \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}$ , ergibt sich so eine Folge von  $x_k \in U$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$  und  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) \neq f(a)$ , der gewünschte Widerspruch. •

**Beispiele:** Die Abstandsfunktion

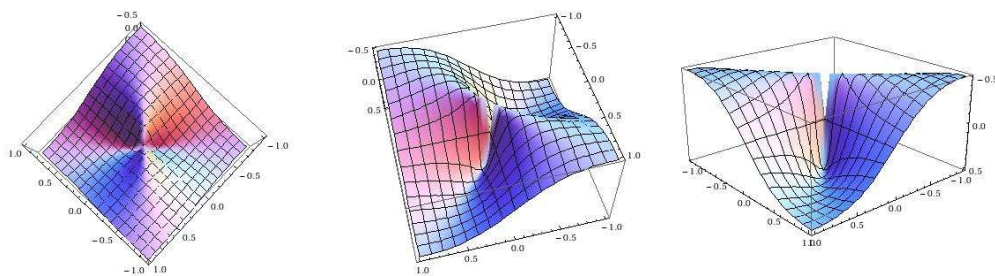
$$d(\cdot, y) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto d(x, y),$$

die den Abstand zu einem fixierten Punkt  $y \in \mathbb{R}^n$  misst, ist in jedem Punkt stetig.

Die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{falls } x_1^2 + x_2^2 > 0, \\ 0 & \text{falls } x_1^2 + x_2^2 = 0, \end{cases}$$

ist überall stetig mit Ausnahme des Ursprungs  $(0, 0)$ . Die Unstetigkeit ergibt sich leicht mit der Folge  $(\frac{1}{k}, \frac{1}{k})_k$  und Satz 3.2. Bewegt man sich jedoch auf den



Koordinatenachsen und nicht auf einer der Halbachsen auf den Ursprung zu, so offenbart sich die Unstetigkeit nicht (siehe obige Bilder). Dieses Beispiel ist typisch für ein Phänomen bei Abbildungen mehrerer Veränderlicher, welches in dieser Weise bei Funktionen einer Veränderlichen nicht auftreten kann! Mehr Beispiele hierzu in den Tutorien und auf den Übungsblättern...

Sei  $M$  eine Menge und  $f$  in jedem Punkt  $x \in M$  stetig, dann heißt  $f$  **stetig in  $M$** . Wie bei Funktionen einer Variablen gilt, dass die Verkettung stetiger Funktionen wieder stetig ist. Ein weiteres Analogon der eindimensionalen Theorie:

**Satz 3.3.** Sei  $K \subset \mathbb{R}^n$  kompakt und  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann ist  $f$  auf  $K$  beschränkt und nimmt ihr Maximum und ihr Minimum an, d.h. es gibt  $x_{\min}, x_{\max} \in K$  mit

$$f(x_{\min}) \leq f(x) \leq f(x_{\max}) \quad \text{für alle } x \in K.$$

Ohne **Beweis** in der Vorlesung (welcher wie im Eindimensionalen verläuft).

Ein noch stärkerer Begriff als Stetigkeit: Eine Abbildung  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  heißt **gleichmäßig stetig in  $U$** , falls zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, so dass

$$\|f(x) - f(y)\| < \epsilon \quad \text{für alle } x, y \in U \text{ mit } \|x - y\| < \delta.$$

**Satz 3.4 (Satz von Heine).** Sei  $K \subset \mathbb{R}^n$  kompakt und  $f : K \rightarrow \mathbb{R}^m$  stetig. Dann ist  $f$  sogar gleichmäßig stetig in  $K$ .

Ohne **Beweis** in der Vorlesung.

Übrigens: Funktionen mehrerer Veränderlicher können mehr Symmetrien besitzen, wie folgendes Beispiel illustriert:

$$f(x, y, z) = (x - 2)^2 \sin(y) \cos(z)^2 \quad \text{bzw.} \quad g(x, y) = \sin(x) \cos(y).$$

Welche Symmetrie bestehen hier?

#### 4. Partielle Ableitungen – 12. Mai

Wie differenziert man eine Funktion mehrerer Veränderlicher, wie etwa  $f(x_1, x_2) := \exp(x_1 + x_2^3)$  ?

Im Folgenden sei stets  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ . Ferner bezeichne  $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$  den  $j$ -ten Standardbasis-Einheitsvektor (mit einer 1 in der  $j$ -ten Komponente und lauter Nullen sonst). Dann heißt  $f$  im Punkt  $x \in U$  **partiell differenzierbar in der  $j$ -ten Koordinatenrichtung**, falls der Grenzwert

$$D_j f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h e_j) - f(x)}{h}$$

existiert (wobei sich der Grenzwert nur auf solche reellen  $h \neq 0$  bezieht, für die  $x + h e_j \in U$  liegt); die Größe  $D_j f(x)$  nennt man in diesem Fall die  **$j$ -te partielle Ableitung von  $f$  in  $x$** . Wir verwenden neben  $D_j f$  auch die Notationen  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$  bzw.  $f_{x_j}$ .

**Beispiel:** Die erste partielle Ableitung von  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) := \exp(x_1 + x_2^2)$  berechnet sich als

$$\begin{aligned} D_1 f(x_1, x_2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(x_1 + h + x_2^2) - \exp(x_1 + x_2^2)}{h} \\ &= \exp(x_1 + x_2^2) \cdot \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\exp(h) - 1)}_{=1} \end{aligned}$$

(man beachte  $x = (x_1, x_2)$  addiert mit  $h e_1 = (h, 0)$  gibt  $x + h e_1 = (x_1 + h, x_2)$ ).

Die partiellen Ableitungen einer Funktion  $f$  lassen sich vermöge

$$\zeta \mapsto f_j(\zeta) := f(x_1, \dots, x_{j-1}, \zeta, x_{j+1}, \dots, x_n)$$

als die gewöhnlichen Ableitungen von Funktionen einer Variablen interpretieren, denn

$$D_j f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_j(x_j + h) - f_j(x_j)}{h} = f'_j(x_j).$$

**Beispiel:** Die zweite partielle Ableitung von  $f(x_1, x_2) = \exp(x_1 + x_2^2)$  ist

$$D_2 f(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_2} \exp(x_1 + x_2^2) = 2x_2 \exp(x_1 + x_2^2).$$

Die Variable  $x_1$  wird bei der partiellen Ableitung nach  $x_2$  wie eine numerische Konstante behandelt! Eine alternative geometrische Begründung für diese Berechnung der partiellen Ableitung: Die Funktion  $f$  beschreibt eine Oberfläche im  $\mathbb{R}^3$  und für konstantes  $x_1$  entsteht eine Raumkurve, die nur von  $x_2$  abhängt und deren Steigung mit der partiellen Ableitung bzgl.  $x_2$  übereinstimmt.

Eine Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **partiell differenzierbar in  $U$** , falls alle partiellen Ableitungen  $D_j f(x)$  in allen Punkten  $x \in U$  existieren. Sind zusätzlich alle  $D_j f : U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, so heißt  $f$  **stetig partiell differenzierbar**.

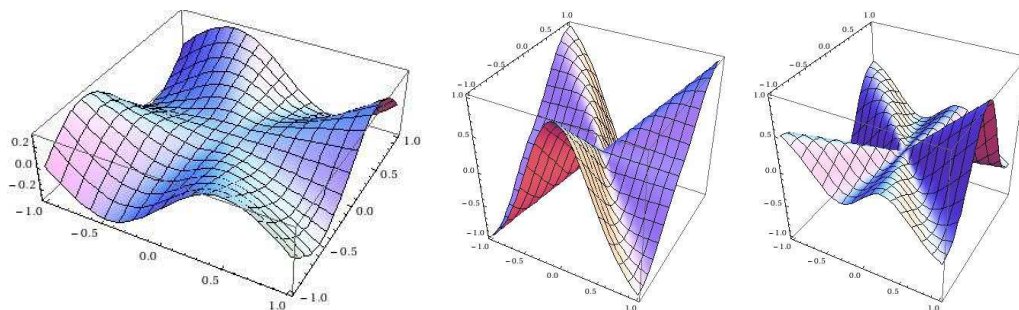
**Beispiel:** Die Funktion  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  sei gegeben durch

$$(x, y) \mapsto g(x, y) := \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sie besitzt die partiellen Ableitungen

$$g_x(x, y) = y \frac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{und} \quad g_y(x, y) = x \frac{x^4 - 4x^2y^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^2}$$

für  $(x, y) \neq (0, 0)$ . Diese sind stetig nach  $(x, y) = (0, 0)$  fortsetzbar mit jeweiligem Wert null. Also ist  $g$  stetig partiell differenzierbar. Nachstehend Bilder von  $g, g_x$  und  $g_y$  (von links nach rechts):



Sei wiederum  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  partiell differenzierbar. Sind sämtliche partiellen Ableitungen  $D_j f : U \rightarrow \mathbb{R}$  wieder partiell differenzierbar, so heißt  $f$  **zweimal partiell differenzierbar**. Allgemeiner mit  $k \in \mathbb{N}$ : Die Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  heißt  **$(k+1)$ -mal partiell differenzierbar**, wenn sie  $k$ -mal partiell differenzierbar ist und alle partiellen Ableitungen  **$k$ -ter Ordnung**

$$D_{i_k} \dots D_{i_2} D_{i_1} f : U \rightarrow \mathbb{R}$$

partiell differenzierbar sind; darüber hinaus heißt  $f$   **$(k+1)$ -mal stetig partiell differenzierbar**, falls alle partiellen Ableitungen der Ordnung  $\leq k+1$  stetig sind.

Ein wichtige Frage: Kommt es auf die Reihenfolge der partiellen Differentiation an oder gilt  $D_i D_j f = D_j D_i f$ ?

**Beispiel:** Für die Funktion  $g$  aus dem letzten Beispiel gilt:

$$\begin{aligned} D_2 D_1 g(0,0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (D_1 g(h e_2) - D_1(0)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} h \frac{-h^4}{h^4} = -1, \\ D_1 D_2 g(0,0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (D_2 g(h e_1) - D_2(0)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} h \frac{+h^4}{h^4} = +1; \end{aligned}$$

bei zweimal partiell differenzierbaren Funktionen ist die Differentiation also nicht unbedingt kommutativ! Stetigkeit macht den feinen Unterschied:

**Satz 4.1 (Satz von Schwarz).** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal stetig partiell differenzierbar. Dann gilt

$$D_i D_j f(a) = D_j D_i f(a) \quad \text{für alle } a \in U, 1 \leq i, j \leq n.$$

**Beweis.** OBdA sei  $n = 2$  sowie  $i = j = 1$  und  $a = (0,0)$ . Wir schreiben  $(x,y)$  statt  $(x_1, x_2)$  und definieren  $F(x,y) := f(x,y) - f(x,0)$ . Nach dem Mittelwertsatz der eindimensionalen Theorie gibt es ein  $\zeta$  mit  $|\zeta| \leq |x|$  und

$$F(x) - F(0) = x F'(\zeta).$$

Dabei gilt

$$F'(\zeta) = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)|_{x=\zeta} - \frac{\partial}{\partial x} f(x,0)|_{x=\zeta} = D_1 f(\zeta, y) - D_1 f(\zeta, 0).$$

Der Mittelwertsatz angewandt auf  $D_1 f(\zeta, y)$  als Funktion von  $y$  liefert ein  $\eta$  mit  $|\eta| \leq |y|$  und

$$D_1 f(\zeta, y) - D_1 f(\zeta, 0) = y \frac{\partial}{\partial y} D_1 f(\zeta, y)|_{y=\eta} = y D_2 D_1 f(\zeta, \eta).$$

Also ergibt sich durch Einsetzen

$$(1) \quad f(x,y) - f(x,0) - (f(0,y) - f(0,0)) = F(x) - F(0) = xy D_2 D_1 f(\zeta, \eta)$$

Dasselbe Argument mit vertauschten Rollen ( $x \leftrightarrow y$ ) liefert mit der Funktion  $G(y) := f(x,y) - f(0,y)$  ganz ähnlich

$$(2) \quad f(x,y) - f(x,0) - (f(0,y) - f(0,0)) = G(y) - G(0) = xy D_1 D_2 f(\tilde{\zeta}, \tilde{\eta})$$

für gewisse  $\tilde{\zeta}, \tilde{\eta}$ , die ihrerseits betragsmäßig gegen  $x$  bzw.  $y$  beschränkt sind. Vergleich von (1) und (2) liefert

$$D_2 D_1 f(\zeta, \eta) = D_1 D_2 f(\tilde{\zeta}, \tilde{\eta}).$$

Mit  $(x,y) \rightarrow (0,0)$  gilt dabei sowohl  $(\zeta, \eta) \rightarrow (0,0)$  als auch  $(\tilde{\zeta}, \tilde{\eta}) \rightarrow (0,0)$  und mit der Stetigkeit der zweiten partiellen Ableitungen folgt  $D_2 D_1 f(0,0) = D_1 D_2 f(0,0)$ . •

**Korollar 4.2.** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$   $k$ -mal stetig partiell differenzierbar. Dann gilt

$$D_{i_k} \dots D_{i_1} f = D_{i_{\pi(k)}} \dots D_{i_{\pi(1)}} f.$$

für alle  $i_1, \dots, i_k \in \{1, 2, \dots, n\}$  und alle Permutationen  $\pi$  der Zahlen  $1, \dots, k$ .

## 5. Totale Differenzierbarkeit – 16. Mai

Eine alternative Möglichkeit, Differenzierbarkeit von Funktionen mehrerer Veränderlicher zu erklären, basiert auf der Eigenschaft linearer Approximierbarkeit (aus der eindimensionalen Theorie bekannt). Dies führt tatsächlich zu einem stärkeren Differenzierbarkeitsbegriff!

Im Folgenden werden Vektoren bis auf weiteres als Spaltenvektoren aufgefasst; ferner sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Abbildung.

Dann heißt  $f$  im Punkt  $x \in U$  **total differenzierbar**, falls es eine lineare Abbildung  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  gibt, so dass in einer Umgebung  $V$  von  $x$

$$f(x + \zeta) = f(x) + A\zeta + \varphi(\zeta)$$

gilt, wobei  $V \subset \mathbb{R}^m$  eine offene Umgebung von 0 sei und  $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Funktion ist, die

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{\varphi(\zeta)}{\|\zeta\|} = 0$$

erfüllt; im Folgenden notieren wir solche 'kleinen' Funktionen  $\varphi(\zeta)$  auch kurz mit  $o(\|\zeta\|)$  (Sprechweise: 'klein-oh'). Für  $m = n = 1$  ist dies nichts anderes als die Differenzierbarkeit von Funktionen einer Veränderlichen. Im höherdimensionalen Fall lehrt die Lineare Algebra, dass die lineare Abbildung  $A$  sich durch eine  $m \times n$ -Matrix mit reellen Einträgen beschreiben lässt.

**Satz 5.1.** *Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Abbildung, die in  $x \in U$  total differenzierbar ist mit*

$$(3) \quad f(x + \zeta) = f(x) + A\zeta + o(\|\zeta\|),$$

wobei  $A = (\alpha_{ij})_{ij}$  eine  $m \times n$ -Matrix mit reellen Einträgen sei. Dann gelten

- (i)  $f$  ist stetig in  $x$ ,
- (ii) alle Komponentenfunktionen  $f_i : U \rightarrow \mathbb{R}$  von  $f = (f_1, \dots, f_m)^t$  sind in  $x$  partiell differenzierbar mit  $D_j f_i = \alpha_{ij}$ .

Die Matrix  $A$  nennt man die **Jacobi-Matrix von  $f$  in  $x$**  und wird mit  $Df(x)$  notiert.

In §3 erwies sich die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{falls } x_1^2 + x_2^2 > 0, \\ 0 & \text{falls } x_1^2 + x_2^2 = 0, \end{cases}$$

als unstetig in  $(x_1, x_2) = (0, 0)$ . Allerdings ist sie partiell differenzierbar in  $(0, 0)$ , und somit ist sie ein Beispiel, dass im Gegensatz zur eindimensionalen Theorie Stetigkeit nicht aus partieller Differenzierbarkeit folgt. aus §3

**Beweis.** Wegen  $\lim_{\zeta \rightarrow 0} A\zeta = 0$  und  $\lim_{\zeta \rightarrow 0} o(\|\zeta\|) = 0$  folgt aus (3) sofort  $\lim_{\zeta \rightarrow 0} f(x + \zeta) = f(x)$  und damit die Stetigkeit von  $f$  in  $x$ . Für  $i = 1, \dots, m$  gilt

$$f_i(x + \zeta) = f_i(x) + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \zeta_j + \varphi_i(\zeta) \quad \text{mit} \quad \varphi_i(\zeta) = o(\|\zeta\|);$$

speziell für  $\zeta = he_j$ , wobei  $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$  der  $j$ -te Standardbasiseinheitsvektor des  $\mathbb{R}^n$  ist (bestehend aus lauter Nullen bis auf eine Eins in der  $j$ -ten Komponente) und  $h > 0$ , folgt  $f_i(x + he_j) = f_i(x) + h\alpha_{ij} + \varphi_i(he_j)$  bzw.

$$D_j f_i(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_i(x + he_j) - f_i(x)}{h} = \alpha_{ij} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi_i(he_j)}{h} = \alpha_{ij},$$

also die partielle Differenzierbarkeit mit Ableitungswert  $\alpha_{ij}$ . •

**Beispiel:** Die Abbildung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto f(x, y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \exp(-y) \\ \cos x + \sin y \end{pmatrix}$$

besitzt im Ursprung die Jacobi-Matrix

$$D f(x, y) = \begin{pmatrix} D_1 f_1(x, y) & D_2 f_1(x, y) \\ D_1 f_2(x, y) & D_2 f_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(-y) & -x \exp(-y) \\ -\sin x & \cos y \end{pmatrix}$$

und es gilt

$$f(\zeta) = f(0) + Df(0)\zeta + \text{Fehler}(\zeta)$$

bzw.

$$\begin{aligned} f(\zeta_1, \zeta_2) &= f(0, 0) + Df(0, 0) \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} + \text{Fehler}(\zeta_1, \zeta_2) \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} + \text{Fehler}(\zeta_1, \zeta_2) \\ &= \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ 1 + \zeta_2 \end{pmatrix} + \text{Fehler}(\zeta_1, \zeta_2) \end{aligned}$$

mit einem verschwindenden Fehlerterm für  $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)^t \rightarrow 0$ .

**Satz 5.2.** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine in  $U$  partiell differenzierbare Funktion. Sind alle partiellen Ableitungen  $D_j f_i$  in  $x \in U$  stetig, so ist  $f$  in  $x$  total differenzierbar; insbesondere ist  $d$  stetig in  $x$ .

Für die verschiedenen Differenzierbarkeiten ergibt sich somit folgende Hierarchie:

$$\text{stetig partiell diff.bar} \implies \text{total diff.bar} \implies \text{partiell diff.bar}$$

**Beweis.** Da  $U$  offen ist, existiert eine offene Kugel  $B_\delta(x) \subset U$  mit einem positiven Radius  $\delta$ . Sei  $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|\zeta\| < \delta$  gegeben. Ferner sei

$$z^{(k)} = x + \sum_{j=1}^k \zeta_j e_j \quad \text{mit} \quad e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$$

(dem  $j$ -ten Standardbasiseinheitsvektors des  $\mathbb{R}^n$ ); also ist  $z^{(0)} = x$  und  $z^{(n)} = x + \zeta$  und die Punkte  $z^{(k)}$  und  $z^{(k-1)}$  unterscheiden sich lediglich um  $\zeta_k e_k$  (also nur in der  $k$ -ten Komponente). Nach dem Mittelwertsatz der eindimensionalen Theorie existieren  $\lambda_k \in [0, 1]$ , so dass

$$f(z^{(k)}) - f(z^{(k-1)}) = \zeta_k \cdot D_k f(y^{(k)}) \quad \text{mit} \quad y^{(k)} := z^{(k-1)} + \lambda_k \zeta_k e_k$$

(also liegt  $y^{(k)}$  auf dem Streckenzug, der  $z^{(k)}$  und  $z^{(k-1)}$  verbindet). Also

$$f(x + \zeta) - f(x) = \sum_{k=1}^n \zeta_k D_k f(y^{(k)})$$

und mit  $\alpha_k := D_k f(x)$  ergibt sich

$$f(x + \zeta) = f(x) + \sum_{k=1}^n \alpha_k \zeta_k + \varphi(\zeta), \quad \text{wobei} \quad \varphi(\zeta) = \sum_{k=1}^n (D_k f(y^{(k)}) - \alpha_k) \zeta_k.$$

Mit  $\zeta \rightarrow 0$  strebt  $y^{(k)}$  gegen  $x$  und auf Grund der Stetigkeit der partiellen Ableitungen folgt

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} D_k f(y^{(k)}) = D_k f(x) = \alpha_k$$

und damit  $\varphi(\zeta) = o(\|\zeta\|)$ . Die Stetigkeit von  $f$  in  $x$  ergibt sich unmittelbar aus der Definition von totaler Differenzierbarkeit. •

Im Folgenden werden wir des Öfteren abkürzend das Wort 'differenzierbar' statt 'total differenzierbar' benutzen. Wir schließen mit zwei Verallgemeinerungen der eindimensionalen Theorie:

**Satz 5.3 (Kettenregel).** *Seien  $U \subset \mathbb{R}^n$  und  $V \subset \mathbb{R}^m$  offen sowie*

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}^m \quad \text{und} \quad g : V \rightarrow \mathbb{R}^k$$

*Abbildungen mit  $f(U) \subset V$ . Ist  $f$  in  $x \in U$  differenzierbar und  $g$  in  $y = f(x)$  differenzierbar, dann ist die zusammengesetzte Abbildung*

$$g \circ f : U \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad \zeta \mapsto g(f(\zeta))$$

*in  $x$  differenzierbar mit*

$$D(g \circ f)(x) = (Dg)(f(x)) \cdot Df(x).$$

Man beachte, dass Matrizenmultiplikation i.A. nicht kommutativ ist, also auf die Reihenfolge der Jacobi-Matrizen im Produkt zu achten ist! Im Spezialfall ergibt sich die bekannte Kettenregel bei Funktionen einer Veränderlicher:  $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ .

Ohne **Beweis** in der Vorlesung.

**Beispiel:** Seien  $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  durch

$$f(x, y) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g(x, y) = B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

mit  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  definierte lineare Abbildungen. Dann berechnen  $Df = A$  und  $Dg = B$  sowie  $D(g \circ f) = BA$ .



## 6. Taylor-Approximation mit mehreren Veränderlichen – 19. Mai

Im Folgenden sei wiederum  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ .

Wir wiederholen zunächst Taylor-Approximation von Funktionen einer Veränderlichen ( $n = 1$ ): Gegeben eine  $(m + 1)$ -mal stetig differenzierbare Funktion  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ , so lässt sich  $f$  um  $x \in [a, b]$  durch ein Polynom  $m$ -ten Grades approximieren:

$$\begin{aligned} f(x+h) &= \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k + R_m(h) \\ &= f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2 + \dots, \end{aligned}$$

wobei der Fehlerterm von der Form

$$R_m(h) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} h^{m+1}$$

mit einem  $\xi$  zwischen  $x$  und  $x+h$  ist. Wie lässt sich dieses Konzept auf Funktionen mehrerer Veränderlicher verallgemeinern?

Zunächst benötigen wir bei allgemeinem  $n \in \mathbb{N}$  einen Ersatz für die erste Ableitung. Hierzu definieren wir den **Gradient von  $f$  in  $x \in U$**  als den Zeilenvektor

$$\text{grad} f(x) = (D_1 f(x), \dots, D_n f(x)),$$

gebildet aus den partiellen Ableitungen von  $f$ .

Sei nun  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal partiell differenzierbar. Dann heißt

$$H_f(x) = (D_i D_j f(x))_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{pmatrix} D_1 D_1 f(x) & D_1 D_2 f(x) & \dots & D_1 D_n f(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_n D_1 f(x) & D_n D_2 f(x) & \dots & D_n D_n f(x) \end{pmatrix}$$

die **Hesse-Matrix** von  $f$  in  $x \in U$ . Ist  $f$  zweimal stetig partiell differenzierbar, so ist die Hesse-Matrix nach dem Satz 4.1 von Schwarz symmetrisch.

**Beispiel:**  $f(x, y) := \frac{x-y}{x+y}$  ist auf  $\mathbb{R}_+^2$  beliebig oft differenzierbar (als Verkettung beliebig oft differenzierbarer Funktionen), wobei  $\mathbb{R}_+$  für die Menge aller positiven reellen Zahlen stehe, und es gilt

$$\text{grad} f(x, y) = \left( \frac{2y}{(x+y)^2}, \frac{-2x}{(x+y)^2} \right)$$

und

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{-4y}{(x+y)^3} & \frac{2x-2y}{(x+y)^3} \\ \frac{2x-2y}{(x+y)^3} & \frac{4x}{(x+y)^3} \end{pmatrix}.$$

**Satz 6.1 (Satz von Taylor – zweite Ordnung).** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal stetig differenzierbar. Dann gilt für  $x \in U$

$$f(x + \zeta) = f(x) + \langle \text{grad} f(x), \zeta \rangle + \frac{1}{2} \langle \zeta, H_f(x) \zeta \rangle + o(\|\zeta\|^2).$$

**Beispiel:** Die Funktion  $f(x, y)$  aus dem vorangegangenen Beispiel ist um  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  zu approximieren:

$$\begin{aligned} f(1 + \zeta_1, 1 + \zeta_2) &= f(1, 1) + \langle \text{grad } f(1, 1), \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} \rangle + \frac{1}{2} \langle \zeta, H_f(1, 1) \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} \rangle + o(\|\zeta\|^2) \\ &= 0 + \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(\zeta_1, \zeta_2) \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} + o(\zeta_1^2 + \zeta_2^2) \\ &= \frac{1}{2}(\zeta_1 - \zeta_2) + \frac{1}{4}(-\zeta_1^2 + \zeta_2^2) + \text{Fehler}. \end{aligned}$$

**Beweis.** Wir untersuchen die zweimal stetig differenzierbare Funktion einer Veränderlichen

$$g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto g(t) := f(x + t\zeta).$$

Mit dem Satz über die Taylor-Approximation der eindimensionalen Theorie angewandt auf  $g(t)$  mit Entwicklungspunkt 0 gilt

$$(4) \quad g(t) = g(0) + g'(0)t + \frac{1}{2}g''(0)t^2 + o(t^2).$$

Hier ist  $g(0) = f(x)$  sowie  $g(1) = f(x + \zeta)$ . Zur Berechnung der weiteren Terme benutzen wir folgenden Spezialfall der Kettenregel (Satz 5.3):

**Lemma 6.2.** Für einmal stetig differenzierbare Funktionen  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\xi : [a, b] \rightarrow U$  gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\xi(t)) = \left\langle \text{grad } f(\xi(t)), \frac{\partial}{\partial t} \xi(t) \right\rangle$$

Wir leiten diesen Spezialfall der Kettenregel her: Mit Hilfe der linearen Approximierbarkeit gilt

$$f(\xi(t+h)) = f(\xi(t)) + \langle \text{grad } f(\xi(t)), \xi(t+h) - \xi(t) \rangle + o(\|\xi(t+h) - \xi(t)\|).$$

Division durch  $h$  und Grenzwertbildung liefern

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\xi(t)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\xi(t+h)) - f(\xi(t))}{h} = \left\langle \text{grad } f(\xi(t)), \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\xi(t+h) - \xi(t)}{h} \right\rangle,$$

und die Aussage des Lemma folgt aus dem Grenzwert  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\xi(t+h) - \xi(t)}{h} = \xi'(t)$ .

Damit folgt in (4) mit  $\xi(t) = x + t\zeta$

$$g'(t) = \frac{\partial}{\partial t} f(x + t\zeta) = \langle \text{grad } f(x + t\zeta), \zeta \rangle,$$

also insbesondere  $g'(0) = \langle \text{grad } f(x), \zeta \rangle$ , sowie durch ein weiteres Anwenden

$$\begin{aligned} g''(t) &= \frac{\partial}{\partial t} \langle \text{grad } f(x + t\zeta), \zeta \rangle = \frac{\partial}{\partial t} \sum_{j=1}^n D_j f(x + t\zeta) \zeta_j \quad \text{mit} \quad \zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)^t \\ &= \sum_{i=1}^n D_i \left( \sum_{j=1}^n D_j f(x + t\zeta) \zeta_j \right) \zeta_i = \sum_{i,j=1}^n D_i D_j f(x + t\zeta) \zeta_i \zeta_j. \end{aligned}$$

Den letzten Ausdruck kann man für  $t = 0$  auch als  $\langle \zeta, H_f(x) \zeta \rangle$  schreiben. Einsetzen dieser Ausdrücke in (4) und anschließendes Auswerten für  $t = 1$  liefert die Aussage des Satzes. •

**Beispiel:**  $f(x, y) = \frac{1}{1-x-y}$  besitzt in der Nähe des Ursprungs  $(0, 0)$  die Taylor-Entwicklung

$$f(x, y) = f(0, 0) + \left\langle \text{grad } f(0, 0), \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, H_f(x) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle + o(\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \|^2)$$

bzw.

$$\frac{1}{1-x-y} = 1 + x + y + (x+y)^2 + o(x^2 + y^2).$$

Für welche Werte von  $x$  und  $y$  ist  $f$  definiert? Können Sie  $f$  ohne irgendeinen Fehlerterm für hinreichend kleine Werte von  $x$  und  $y$  in eine unendliche Reihe entwickeln? Die geometrische Reihe erlaubt insbesondere  $f$  von höherer Ordnung zu approximieren.

Tatsächlich gilt der Satz von der Taylor-Approximation noch wesentlich allgemeiner, allerdings benötigen wir vereinfachende Schreibweisen: Für  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$  seien  $|\alpha| := \sum_{j=1}^n \alpha_j$  und  $\alpha! := \prod_{j=1}^n \alpha_j!$  sowie für eine  $|\alpha|$ -mal stetig differenzierbare Funktion  $f$  sei

$$D^\alpha f := D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n} f \quad \text{mit} \quad D_i^{\alpha_i} := \underbrace{D_i \cdots D_i}_{\alpha_i\text{-mal}}$$

sowie  $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$  für  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . Dann gilt

**Satz 6.3 (Satz von Taylor – beliebige Ordnung).** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $k$ -mal stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt für  $x \in U$

$$f(x + \zeta) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} \zeta^\alpha + o(\|\zeta\|^k).$$

Ohne **Beweis** in der Vorlesung.

## 7. Extremwerte – 23. Mai

Wir wiederholen kurz die Extremwerttheorie von Funktionen einer Veränderlichen: Die Funktion  $f_1(x) = x^2$  besitzt ein Minimum in  $x = 0$ , denn ihre Ableitung  $f_1'(x) = 2x$  verschwindet und die zweite Ableitung  $f_2(x) = 2$  ist positiv; ganz analog besitzt  $f_2(y) = -2y^2$  in  $y = 0$  ein Maximum. Damit besitzt die Funktion

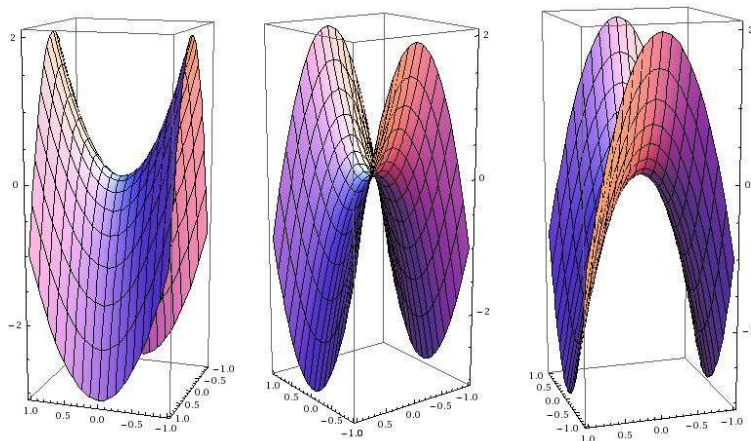
$$f(x, y) = x^2 - 2y^2 \quad (= f_1(x) + f_2(y))$$

weder ein Maximum noch ein Minimum in  $(x, y) = (0, 0)$ . Bilder dieser Funktion zeigen eine *Sattelfläche* (siehe nächste Seite). Dieses Beispiel zeigt bereits, dass zum eindimensionalen Fall analoge Kriterien für Funktionen mehrerer Veränderlicher zu erwarten sind; tatsächlich werden (wie in §6) die erste und zweite Ableitung durch den Gradienten bzw. die Hesse-Matrix ersetzt werden...

Wie üblich sei im Folgenden stets  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ .

Ein Punkt  $\xi \in U$  heißt ein **lokales Maximum** von  $f$ , falls es eine Umgebung  $V \subset U$  von  $\xi$  gibt, so dass

$$f(x) \leq f(\xi) \quad \text{für alle } x \in V$$



gilt; wenn sogar strikte Ungleichung besteht,

$$f(x) < f(\xi) \quad \text{für alle } x \in V,$$

so ist  $\xi$  ein **striktes lokales Maximum** von  $f$ . Analog erklärt man ein lokales Minimum: Ein Punkt  $\xi \in U$  heißt ein **lokales Minimum** von  $f$ , falls es eine Umgebung  $V \subset U$  von  $\xi$  gibt, so dass

$$f(x) \geq f(\xi) \quad \text{für alle } x \in V$$

gilt; wenn sogar strikte Ungleichung besteht,

$$f(x) > f(\xi) \quad \text{für alle } x \in V,$$

so ist  $\xi$  ein **striktes lokales Minimum** von  $f$ . Der Oberbegriff für Maximum und Minimum ist **Extremum** (Plural: Extrema). Wir sprechen von einem **globalen Extremum**, falls die entsprechende strikte Ungleichung nicht nur für alle  $x \in V$ , sondern für alle  $x$  aus dem Definitionsbereich von  $f$  besteht.

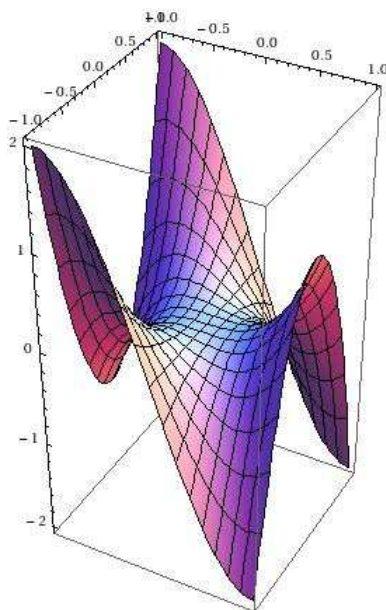
**Satz 7.1 (Notwendiges Kriterium für Extrema).** *Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  einmal stetig differenzierbar. Besitzt  $f$  in  $\xi \in U$  ein lokales Extremum, so verschwinden alle partiellen Ableitungen in  $\xi$ , d.h.*

$$\text{grad } f(\xi) = 0.$$

**Beweis.** Für  $j = 1, \dots, n$  betrachte die für kleine reelle  $t$  differenzierbare Funktion  $g_j(t) := f(\xi + te_j)$  mit dem  $j$ -ten Standardeinheitsvektor  $e_j$ . Besitzt  $f$  in  $\xi$  ein lokales Extremum, so hat  $g_j$  in  $t = 0$  ein lokales Extremum und nach der eindimensionalen Theorie gilt also  $g'_j(0) = 0$ . Wegen  $g'_j(0) = D_j f(\xi)$  ergibt sich die Behauptung. •.

Ist  $f$  einmal stetig differenzierbar, so heißt  $\xi \in U$  ein **kritischer Punkt** von  $f$ , falls  $\text{grad } f(\xi) = 0$ . Die Extrema finden sich unter den kritischen Punkten!

**Beispiele:** Wir greifen mit  $f(x, y) = x^2 - 2y^2$  das Eingangsbeispiel noch einmal auf. Wegen  $\text{grad } f(x, y) = (2x, -4y)$  besitzt  $f$  in  $(0, 0)$  einen kritischen Punkt, ist aber dort nicht extremal. Solche Punkte nennt man einen **Sattelpunkt**. Als weiteres Beispiel sei  $g(x, y) = x^3 - 3xy^2$ ; der Graph von  $g$  heißt dann *Affensattel* und erinnert wiederum an einen Sattel, bloß besitzt diese Fläche eine weitere Senkung für den Affenschwanz.



Damit ist das Kriterium aus Satz 7.1 nur notwendig für die Existenz eines Extrema, nicht aber hinreichend! Wie im Eindimensionalen können die zweiten Ableitungen (so existent), also die Hesse-Matrix, weitere Informationen liefern.

Eine symmetrische Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  heißt

- **positiv definit**, wenn  $\langle x, Ax \rangle > 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ,
- **positiv semidefinit**, wenn  $\langle x, Ax \rangle \geq 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ,
- **negativ definit**, wenn  $\langle x, Ax \rangle < 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ,
- **negativ semidefinit**, wenn  $\langle x, Ax \rangle \leq 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ,
- **indefinit**, wenn es  $x, y \in \mathbb{R}^n$  gibt mit  $\langle x, Ax \rangle < 0 < \langle y, Ay \rangle$ .

**Satz 7.2.** Eine symmetrische Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ist genau dann

- **positiv definit**, wenn sämtliche Eigenwerte positiv sind,
- **positiv semidefinit**, wenn sämtliche Eigenwerte nicht-negativ sind,
- **negativ definit**, wenn sämtliche Eigenwerte negativ sind,
- **negativ semidefinit**, wenn sämtliche Eigenwerte nicht-positiv sind,,
- **indefinit**, wenn es mindestens einen positiven und mindestens einen negativen Eigenwert gibt.

Ohne **Beweis** in der Vorlesung.

Damit gelingt nun das Analogon zum eindimensionalen Fall:

**Satz 7.3 (Hinreichendes Kriterium für Extrema).** *Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal stetig differenzierbar sowie  $\xi \in U$  ein kritischer Punkt. Dann gilt:*

- (i) *Ist  $H_f(\xi)$  positiv definit, dann ist  $\xi$  ein striktes lokales Minimum;*
- (ii) *ist  $H_f(\xi)$  negativ definit, dann ist  $\xi$  ein striktes lokales Maximum;*
- (iii) *ist  $H_f(\xi)$  indefinit, dann ist  $\xi$  kein lokales Extremum.*

Im Falle einer semidefiniten Hesse-Matrix in einem kritischen Punkt kann keine Aussage gemacht werden, wie die drei Beispielfunktionen  $x^2$ ,  $x^2 + x^3$  und  $x^2 + x^4$  aufzeigen.

**Beweis.** Da  $f$  zweimal stetig differenzierbar ist, ist die Hesse-Matrix  $H_f(\xi)$  nach dem Satz 4.1 von Schwarz symmetrisch. Nach dem Satz 6.1 von Taylor gilt

$$f(\xi + \zeta) = f(\xi) + \langle \text{grad } f(\xi), \zeta \rangle + \frac{1}{2} \langle \zeta, H_f(\xi) \zeta \rangle + \varphi(\zeta).$$

für hinreichend kleine  $\zeta$  mit  $\varphi(\zeta) = o(\|\zeta\|^2)$ . Da  $\xi$  ein kritischer Punkt ist, verschwindet der Gradient nach Satz 7.1 und die obige Formel vereinfacht sich zu

$$f(\xi + \zeta) = f(\xi) + \frac{1}{2} \langle \zeta, H_f(\xi) \zeta \rangle + \varphi(\zeta).$$

Die Abbildung  $\zeta \mapsto \langle \zeta, H_f(\xi) \zeta \rangle$  nimmt als stetige Funktion auf der kompakten Menge  $K := \{\zeta \in \mathbb{R}^n : \|\zeta\| = 1\}$  nach Satz 3.3 ihr Minimum an. Ist nun  $H_f(\xi)$  positiv definit, so folgt  $\langle \zeta, H_f(\xi) \zeta \rangle > 0$  für alle  $\zeta \neq 0$  und

$$\alpha := \min\{\langle \zeta, H_f(\xi) \zeta \rangle : \zeta \in K\} > 0.$$

Damit gilt  $\langle \zeta, H_f(\xi) \zeta \rangle \geq \alpha \|\zeta\|^2$  für alle  $\zeta \in \mathbb{R}^n$  (zunächst nur für  $\zeta \in K$ , aber durch Übergang zu  $\lambda \zeta$  statt  $\zeta$  mit positivem reellen  $\lambda$  tatsächlich für alle  $\zeta$ ). Sei nun  $\delta > 0$  so gewählt, dass

$$|\varphi(\zeta)| \leq \frac{\alpha}{4} \|\zeta\|^2 \quad \text{für } \|\zeta\| \leq \delta,$$

dann folgt

$$f(\xi + \zeta) \geq f(\xi) + \frac{\alpha}{4} \|\zeta\|^2$$

und also  $f(\xi + \zeta) > f(\xi)$  für  $0 < \|\zeta\| < \delta$ , so dass also  $f$  in  $\xi$  ein striktes lokales Minimum besitzt.

Ist die Hesse-Matrix negativ definit, so betrachtet man stattdessen  $-f$  und die Aussage folgt aus dem bereits Bewiesenen.

Ist die Hesse-Matrix indefinit, so existieren Vektoren  $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{R}^n$ , verschieden vom Nullvektor, mit

$$\beta_1 := \langle \zeta_1, H_f(\xi) \zeta_1 \rangle > 0 > \langle \zeta_2, H_f(\xi) \zeta_2 \rangle =: \beta_2.$$

Für hinreichend kleine  $h > 0$  gilt dann

$$f(\xi + h\zeta_j) = f(\xi) + \frac{1}{2} \beta_j h^2 + \varphi(h\zeta_j)$$

für  $j = 1, 2$ . Für hinreichend kleine  $h$  ist hier der Fehlerterm wieder klein gegenüber dem Beitrag von der Hesse-Matrix, so dass also

$$\begin{aligned} f(\xi + h\zeta_1) &\geq f(\xi) + \frac{1}{4}\beta_1 h^2 > f(\xi), \\ f(\xi + h\zeta_2) &\leq f(\xi) + \frac{1}{4}\beta_2 h^2 < f(\xi) \end{aligned}$$

und also die Behauptung folgt. •

**Beispiel:** Seien  $a, b, c$  reell und

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y) := ax^2 + 2bxy + cy^2$$

mit  $b^2 \neq ac$ . Dann ist

$$\text{grad } f(x, y) = (2ax + 2by, 2cy + 2bx) = 2(ax + by, bx + cy)$$

und der einzige kritische Punkt ist  $(x, y) = (0, 0)$  (denn das homogene lineare Gleichungssystem  $ax + by = bx + cy = 0$  besitzt wegen der nach Voraussetzung nicht verschwindenden Determinante  $ac - b^2$  nur die triviale Lösung). Ferner ist

$$H_f(x, y) = 2 \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

unabhängig von  $(x, y)$ . Die Eigenwerte von  $H_f$  sind  $\frac{1}{2}(a + c \pm \sqrt{(a - c)^2 + 4b^2})$ ; mit Satz 7.2 kann nun für spezielle Werte von  $a, b, c$  entschieden werden, ob ein Extremum vorliegt und welchen Typ es gegebenenfalls hat.

## 8. Implizite Funktionen und Anwendungen – 26. Mai

Wieder sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ .

Der Kreis um den Ursprung  $(0, 0)$  mit Radius  $r > 0$  im  $\mathbb{R}^2$  wird bekanntlich gegeben durch die Menge der Punkte

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = r^2\}.$$

Kann man den Kreis durch eine Funktion beschreiben? Hierzu müsste man also nach einer Veränderlichen auflösen; dies ist nicht möglich, wenn zu einem Wert von beispielsweise  $x$  zwei Werte  $y$  gehören. Wollen wir jedoch etwa nur den oberen Halbkreis beschreiben, also die Menge der Punkte mit nicht-negativem  $y$ , so lässt sich die den Kreis definierende Gleichung umformen zu

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Für  $y = 0$  jedoch wäre die Tangente an den Kreis tangential und man kann keine Funktion  $y(x)$  finden, so dass  $x^2 + y(x)^2 = r^2$  in einer Umgebung von  $x = r$  oder auch  $x = -r$  besteht.

**Satz 8.1 (Satz über implizite Funktionen).** Seien  $U_1 \subset \mathbb{R}^k, U_2 \subset \mathbb{R}^n$  offen und

$$f = (f_1, \dots, f_n) : U_1 \times U_2 \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (x, y) \mapsto f(x, y)$$

stetig differenzierbar. Für den Punkt  $(a, b) \in U_1 \times U_2$  gelte

$$f(a, b) = 0$$

und die  $n \times n$ -Matrix

$$\frac{\partial}{\partial y} f := \frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1} f_1 & \cdots & \frac{\partial}{\partial y_n} f_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial y_1} f_n & \cdots & \frac{\partial}{\partial y_n} f_n \end{pmatrix}$$

sei ausgewertet in  $(a, b)$  invertierbar. Dann existieren offene Umgebungen  $V_1 \subset U_1$  von  $a$  und  $V_2 \subset U_2$  von  $b$  sowie eine eindeutige stetig differenzierbare Abbildung  $\eta : V_1 \rightarrow V_2$ , so dass  $\eta(a) = b$  und

$$f(x, \eta(x)) = 0 \quad \text{für alle } x \in V_1.$$

Ohne **Beweis** in der Vorlesung.

Wir wollen uns den Spezialfall einer Funktion zweier Veränderlicher näher anschauen: Seien  $U \subset \mathbb{R}^2$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  in einer Umgebung des Punktes  $(a, b)$  stetig differenzierbar. Gilt zudem

$$f(a, b) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial y} f(a, b) \neq 0,$$

dann existieren Umgebungen  $V_1$  von  $a$  und  $V_2$  von  $b$ , sowie eine eindeutige Funktion  $\eta : V_1 \rightarrow V_2$ , so dass  $\eta(a) = b$  und

$$f(x, \eta(x)) = 0 \quad \text{für alle } x \in V;$$

ferner ist  $\eta(x)$  in  $V$  differenzierbar mit

$$\eta'(x) = - \frac{\frac{\partial}{\partial x} f(x, \eta(x))}{\frac{\partial}{\partial y} f(x, \eta(x))}.$$

**Beispiel:** Gegeben sei die Gleichung:

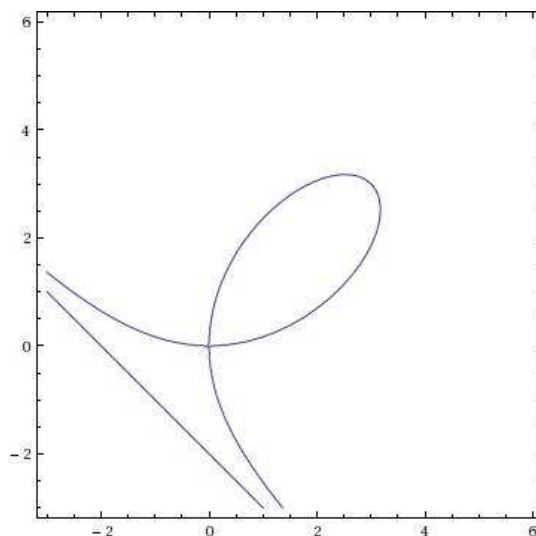
$$f(x, y) := x^3 + y^3 - 6xy = 0.$$

Die Punkte, die dieser Gleichung genügen, beschreiben eine Kurve in der Ebene, welche eine Schlinge darstellt (siehe Bild nächste Seite). Für die partiellen Ableitungen von  $F$  gilt

$$f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 3x^2 - 6y \quad \text{und} \quad f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = 3y^2 - 6x,$$

welche beide im Nullpunkt  $(0, 0)$  verschwinden. Ferner gilt  $f_y(x, y) = 0$  genau dann, wenn  $x = \frac{1}{2}y^2$ , was auf  $P_1 = (2\sqrt[3]{4}, 2\sqrt[3]{2})$  führt; in diesem Punkt besitzt die Kurve eine vertikale Tangente. Folglich lässt sich  $x$  als Funktion von  $y$  in jeder hinreichend kleinen Umgebung aller Punkte verschieden vom Ursprung  $(0, 0)$  und  $P_1$  ausdrücken. Hingegen gilt  $f_x(x, y) = 0$  genau dann, wenn  $y = \frac{1}{2}x^2$  was auf den Punkt  $P_2 = (2\sqrt[3]{2}, 2\sqrt[3]{4})$  mit horizontaler Tangente führt. Folglich lässt sich  $x$  als Funktion von  $y$  ausdrücken, falls  $(x, y)$  nicht mit dem Ursprung oder  $P_2$  zusammenfällt. Die Äste der Kurve nähern sich übrigens asymptotisch der Geraden  $y = -x - 2$  an.

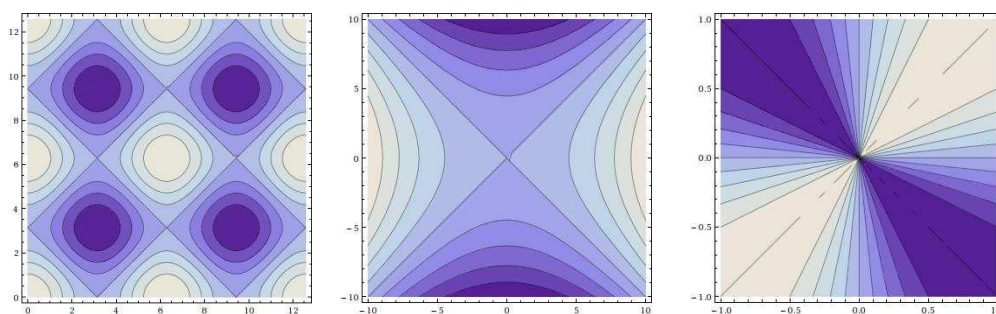




Nun zu zwei weiteren Anwendungen des Satzes über implizite Funktionen: Gegeben eine reelle Zahl  $c$ , so versteht man unter der **Niveaumenge**  $N_f(c)$  von  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  bzgl.  $c$  die Menge aller Punkte, für die  $f$  den Wert  $c$  annimmt:

$$N_f(c) := \{(x) \in U : f(x) = c\}.$$

Die Schar aller Niveaumengen  $N_f(c)$  für  $c \in \mathbb{R}$  legt  $f$  eindeutig fest; insbesondere lassen sich Informationen über  $f$  aus den Niveaumengen ablesen. Im Falle  $n = 2$  spricht man auch von **Höhenlinien**, welche an die Isobare auf Wetterkarten erinnern; siehe die Beispiele in den Bildern (verschiedene Farben stehen hier für unterschiedlich große Werte  $c$ ). Von links nach rechts:  $\cos x + \cos y$  für  $0 \leq x, y \leq$



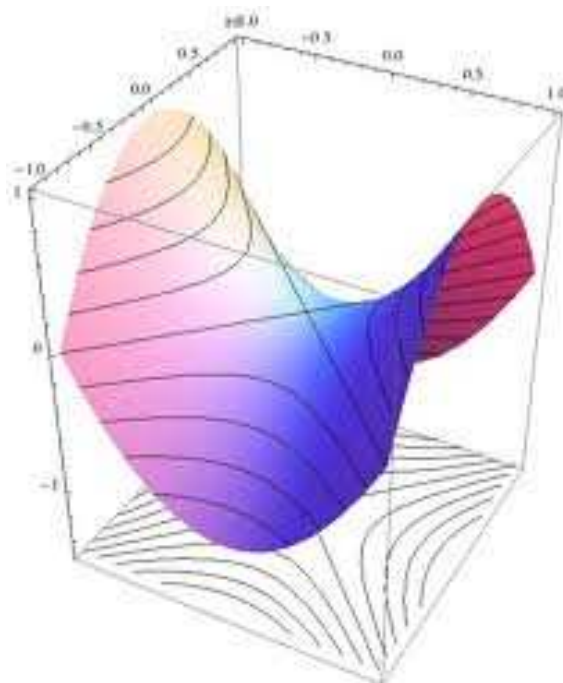
$4\pi, x^2 - y^2$  sowie  $\frac{xy}{(x^2+y^2)}$  für  $-1 \leq x, y \leq 1$  mit Ausnahme der Singularität in  $(x, y) = (0, 0)$ .

Sei jetzt  $f(x, y)$  eine stetig differenzierbare Funktion für alle  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  und  $c$  eine feste reelle Zahl. Dann lässt sich die Gleichung

$$f(x, y) - c = 0$$

nach dem Satz 8.1 über implizite Funktionen genau dann nach beispielsweise  $y$  auflösen, wenn die partielle Ableitung  $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$  nicht verschwindet; analog kann nach  $x$  aufgelöst werden, wenn die andere partielle Ableitung nach  $y$  nicht verschwindet. Nur in den Punkten, in denen der Gradient von  $f$  verschwindet ist

eine lokale Auflösung nicht möglich. Damit lassen sich Höhenlinien einer stetig differenzierbaren Funktion  $f$  in den Punkten  $(x, y)$  mit  $\text{grad } f(x, y) \neq (0, 0)$  stets lokal als Graph einer Funktion einer Veränderlichen darstellen. Im Bild nächste Seite sieht man einige Höhenlinien zur Funktion  $f(x, y) = x^2 - y^2$ .



Eine weitere schöne Eigenschaft des Gradienten (die uns insbesondere noch kurz in der Vorlesung *Analytische Geometrie* im nächsten Semester beschäftigen wird): Für eine stetig differenzierbare Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  ist der Anstieg in  $x \in U$  in Richtung eines Vektors  $v \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|v\| = 1$  gegeben durch

$$\langle \text{grad } f(x), v \rangle = |\text{grad } f(x)| \cos \alpha,$$

wobei  $\alpha$  der Winkel zwischen  $\text{grad } f(x)$  und  $v$  bezeichnet. Dieser Anstieg ist am größten für  $\alpha = 0$ ; der Gradient steht also senkrecht auf der Nivaumenge und die Richtung von  $\text{grad } f(x)$  ist also identisch mit der Richtung des maximalen Anstiegs von  $f$  in  $x$ . Speziell in dem vorangegangenen Beispiel  $f(x, y) = x^2 - y^2$  ist die Steigung  $2\sqrt{2}$  im Punkt  $(1, 1)$  in Richtung  $(2, -2)$ .

Unsere zweite Anwendung behandelt die Frage, wann eine stetig differenzierbare Abbildung  $f : U_1 \rightarrow U_2$  mit offenen Mengen  $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$  bijektiv ist und eine wiederum stetig differenzierbare Umkehrabbildung  $g : U_2 \rightarrow U_1$  besitzt; hierbei bedeutet **Umkehrabbildung**, dass  $g \circ f = \text{id}_{U_1}$ , also gleich der Identität auf der Menge  $U_1$  ist, bzw.  $f \circ g = \text{id}_{U_2}$  die Identität auf  $U_2$  ist. Die Forderung nach Bijektivität ist wichtig: Ist beispielsweise  $f$  nicht injektiv, existieren also  $x_1$  und  $x_2$  mit  $f(x_1) = f(x_2) = y$ , welchen Wert soll man der Umkehrabbildung als Bild von  $y$  zuordnen? Eine notwendige Bedingung für die Existenz einer stetig differenzierbaren Umkehrabbildung liefert Differentiation von  $g \circ f = \text{id}_{U_1}$  mit

Hilfe der Kettenregel: Sei  $a \in U_1$  und  $b := f(a) \in U_2$ , so gilt nach Satz 5.3

$$a = g(f(a)) = g(b) \quad \implies \quad \mathbf{1} = Dg(f(a))Df(a),$$

wobei  $\mathbf{1}$  die  $n \times n$ -Einheitsmatrix ist. Insbesondere muss also die Jacobi-Matrix  $Df(x)$  in  $x = a$  invertierbar sein.

**Satz 8.2.** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar mit  $a \in U$  und  $b := f(a)$  sowie einer invertierbaren Jacobi-Matrix  $Df(a)$ . Dann existiert eine offene Umgebung  $U_0$  von  $a$  in  $U$  und eine offene Umgebung  $V_0$  von  $b$ , so dass  $f$  die Menge  $U_0$  bijektiv auf  $V_0$  abbildet und die Umkehrabbildung

$$g : V_0 \rightarrow U_0$$

stetig differenzierbar ist mit  $Dg(b) = (Df(a))^{-1}$ .

Wir erinnern die entsprechende Formel bei Funktionen einer Veränderlichen:  $g'(b) = f'(a)^{-1}$  für die Umkehrfunktion  $g = f^{-1}$  zu einem differenzierbaren  $f$ .

**Beweis.** Definiere

$$F : \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (x, y) \mapsto F(x, y) := x - f(y).$$

Dann gilt  $F(b, a) = 0$ . Weil  $\frac{\partial}{\partial y} F(x, y) = -Df(y)$  und  $Df(a)$  invertierbar ist, folgt mit dem Satz 8.1 über implizite Funktionen die Existenz einer offenen Umgebung  $V'$  von  $b$ , einer offenen Umgebung  $U'$  von  $a$  sowie einer stetig differenzierbaren Abbildung  $\eta : V' \rightarrow U'$  mit folgenden Eigenschaften

- $0 = F(x, \eta(x)) = x - f(\eta(x))$ , also  $f(\eta(x)) = x$  für alle  $x \in V'$ ;
- Für  $(x, y) \in V' \times U'$  mit  $F(x, y) = 0$  (d.h.  $y = f(x)$ ) folgt aus  $x = \eta(y)$ .

Wegen der Stetigkeit von  $f$  gibt es eine Umgebung  $U_0$  von  $a$  in  $U'$  mit  $f(U_0) \subset V'$  und mit der zweiten Eigenschaft ergibt sich  $V_0 := f(U_0) = \eta^{-1}(U_0)$ . Mit der Stetigkeit von  $\eta$  ist  $V_0$  eine offene Umgebung von  $b$  und nach Konstruktion ist  $f : U_0 \rightarrow V_0$  bijektiv mit Umkehrung  $\eta$ . •

**Beispiel:** Sei

$$f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (r, \phi) \mapsto f(r, \phi) := (r \cos \phi, r \sin \phi).$$

Die zugehörige Jacobi-Matrix ist

$$Df((r, \phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi \\ \sin \phi & r \cos \phi \end{pmatrix}$$

und besitzt also Determinante  $r > 0$ , und also ist  $f$  invertierbar in allen Punkten  $(r, \phi)$  des Definitionsbereiches. Zur Berechnung der Umkehrabbildung  $g$  setzt man  $f(r, \phi) = (x, y)$ , also

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \frac{x}{r} = \cos \phi, \quad \frac{y}{r} = \sin \phi;$$

dann folgt

$$Dg(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \frac{-y}{x^2 + y^2} & \frac{x}{x^2 + y^2} \end{pmatrix}.$$

Tatsächlich kann man  $g$  explizit durch  $g(x, y) = (\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan \frac{y}{x})$  angeben. Die Koordinaten  $r, \phi$  zu einem Punkt  $(x, y)$  nennt man die **Polarkoordinaten**; sie spielen eine wichtige Rolle in der Welt der komplexen Zahlen.

## 9. Kurven und ihre Bogenlänge – 30. Mai

Wir haben im vorangegangenen Kapitel bereits Kurven untersucht; nun untersuchen wir diese genauer.

Unter einer **Kurve** verstehen wir eine stetige Abbildung

$$f = (f_1, \dots, f_m) : I \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

wobei  $I \subset \mathbb{R}$  ein nicht-leeres Intervall sei. Die Kurve heißt (**stetig**) **differenzierbar**, falls ihre Komponentenfunktionen  $f_j : I \rightarrow \mathbb{R}$  (stetig) differenzierbar sind.

### Beispiele:

- Ein Kreis in der Ebene vom Radius  $r > 0$  mit Mittelpunkt im Ursprung lässt sich durch die Kurve

$$f : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (r \cos t, r \sin t)$$

beschreiben. Der Umfang eines Kreises vom Radius  $r > 0$  beträgt bekanntlich  $2\pi r$ . Wie berechnet sich dies?

- Für  $r > 0$  und  $c \neq 0$  liefert

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (r \cos t, r \sin t, ct)$$

eine Schraubenlinie (vgl. §3). Wie berechnet man hier Längen wie etwa die für  $0 \leq t \leq 10$ ?

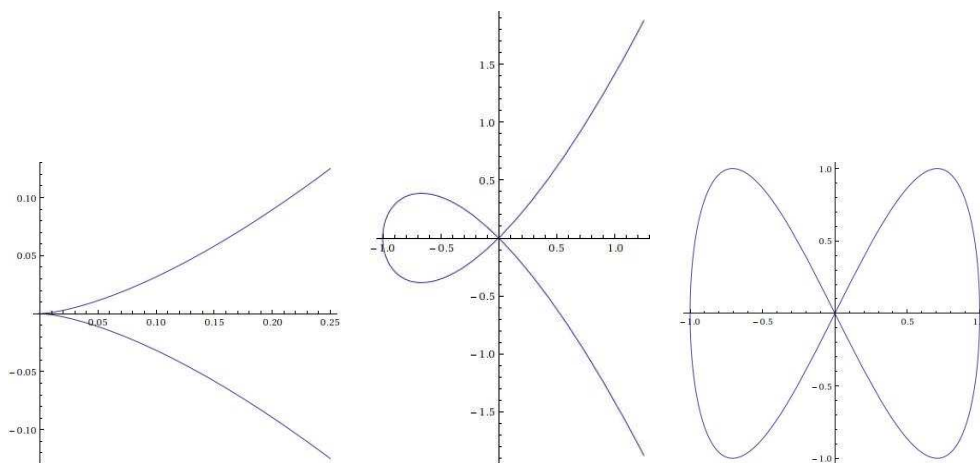
Eine Kurve  $f = (f_1, \dots, f_m) : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  heißt **nicht-singulär** (bzw. **regulär**), wenn der so genannte **Tangentialvektor**  $(f'_1(t), \dots, f'_m(t))$  für kein  $t \in I$  verschwindet; ein Parameterwert  $t$ , für den dieser Vektor verschwindet heißt hingegen **singulär**. Der Tangentialvektor ist also komponentenweise Grenzwert von Sekanten an die Kurve.

### Beispiele:

- Die **Neilsche Parabel**  $t \mapsto (t^2, t^3)$  ist singulär in  $t = 0$  (siehe Bild links).
- Die Kurve  $t \mapsto (t^2 - 1, t^3 - t)$  besitzt einen Doppelpunkt in  $(0, 0)$  für  $t = \pm 1$  (siehe Bild in der Mitte), ist aber regulär.
- Die Kurve  $t \mapsto (\sin t, \sin 2t)$  beschreibt eine 'liegende Acht' oder auch *Lemniskate von Huygens* (siehe Bild rechts) und ist auch nirgends singulär.

Wir wollen nun die Länge von Kurven berechnen. Ist  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Kurve und unterteilt man das Intervall  $[a, b]$  gemäß

$$(5) \quad a =: t_0 < t_1 < \dots < t_k := b$$



und verbindet die Punkte  $f(t_j)$  geradlinig, so entsteht ein Polygonzug im  $\mathbb{R}^m$  der Länge

$$\sum_{j=1}^k \|f(t_j) - f(t_{j-1})\|.$$

Dann heißt  $f$  **rektifizierbar** mit der **Länge**  $\ell(f)$ , wenn zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, so dass für jede Unterteilung (5) mit  $t_j - t_{j-1} < \delta$  für alle  $j = 1, \dots, k$

$$\left| \ell(f) - \sum_{j=1}^k \|f(t_j) - f(t_{j-1})\| \right| < \epsilon$$

gilt. Die Länge rektifizierbarer Kurven ist also der Grenzwert der Längen der Polygonzüge bei immer feineren Unterteilungen.

**Satz 9.1.** *Jede stetig differenzierbare Kurve  $f = (f_1, \dots, f_m) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$  ist rektifizierbar und ihre Länge beträgt*

$$\ell(f) = \int_a^b \|f'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{|f'_1(t)|^2 + \dots + |f'_m(t)|^2} dt$$

Bevor wir den Beweis von Satz 9.1 geben, benötigen wir folgende Eigenschaft des Tangentialvektors:

**Lemma 9.2.** *Ist  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$  stetig differenzierbar, so gibt es zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  mit*

$$\left\| \frac{f(t) - f(\tau)}{t - \tau} - f'(t) \right\| \leq \epsilon$$

für alle  $t, \tau \in [a, b]$  mit  $0 < |t - \tau| \leq \delta$ .

**Beweis.** Sei  $f = (f_1, \dots, f_m)$ . Im Falle  $m = 1$  existiert nach dem Mittelwertsatz der eindimensionalen Theorie ein  $s$  zwischen  $t$  und  $\tau$ , so dass

$$\frac{f(t) - f(\tau)}{t - \tau} = f'(s)$$

und mit der gleichmäßigen Stetigkeit von  $f'$  folgt

$$\left| \frac{f(t) - f(\tau)}{t - \tau} - f'(t) \right| = |f'(s) - f'(t)| \leq \epsilon$$

für alle  $t, \tau \in [a, b]$  die hinreichend nahe beisammen liegen. Der Fall eines beliebigen  $m$  lässt sich auf das bisher Gezeigte vermöge

$$\left\| \frac{f(t) - f(\tau)}{t - \tau} - f'(t) \right\| \leq \sqrt{m} \max_{1 \leq j \leq m} \left| \frac{f_j(t) - f_j(\tau)}{t - \tau} - f'_j(t) \right|$$

zurückführen. Das Lemma ist bewiesen. •

Übrigens gibt es auch einen Mittelwertsatz für Abbildungen mehrerer Veränderlicher:

**Satz 9.3 (Mittelwertsatz).** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  in allen Punkten des Liniensegmentes  $(a, b) := \{x = a + t(b - a) : 0 < t < 1\} \subset U$  differenzierbar mit

$$\|f'(x)\| \leq M \quad \text{für alle } x \in (a, b).$$

Dann gilt

$$\|f(b) - f(a)\| \leq M \|b - a\|.$$

Ohne **Beweis** in der Vorlesung. Jedoch nun der

**Beweis von Satz 9.1.** Das Integral in der zu beweisenden Formel wird durch Riemannsche Summen approximiert, d.h. zu gegebenem  $\epsilon > 0$  existiert ein  $\delta > 0$ , so dass

$$(6) \quad \left| \int_a^b \|f'(t)\| dt - \sum_{j=1}^k \|f'(t_j)\| (t_j - t_{j-1}) \right| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

für jede Unterteilung  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$  von  $[a, b]$  der Feinheit  $t_j - t_{j-1} \leq \delta$ . Nach dem Lemma gibt es ein positives  $\delta' \leq \delta$ , so dass für eine Unterteilung wie oben mit  $t_j - t_{j-1} \leq \delta'$  darüberhinaus

$$\left\| \frac{f(t_j) - f(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}} - f'(t_j) \right\| \leq \frac{\epsilon}{2(b-a)}$$

für  $j = 1, \dots, k$ . Damit ergibt sich ebenso

$$|\|f(t_j) - f(t_{j-1})\| - \|f'(t_j)\|(t_j - t_{j-1})| \leq \frac{t_j - t_{j-1}}{b - a} \cdot \frac{\epsilon}{2}$$

und die Behauptung folgt durch Summation über  $j = 1, \dots, k$  in Kombination mit (6). •

**Beispiele:**

- Sei  $r > 0$ . Für den Halbkreisbogen  $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(t) := (r \cos t, r \sin t)$  gilt

$$\|f'(t)\| = r \sqrt{(\sin t)^2 + (\cos t)^2} = r,$$

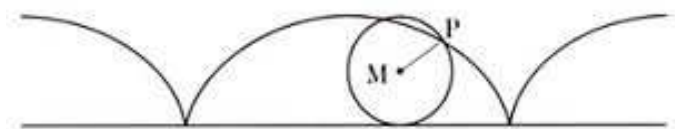
und es folgt also für die Bogenlänge des Halbkreises  $\ell(f) = \int_0^\pi r dt = \pi r$ ; insbesondere ist der Umfang eines Kreises vom Radius  $r$  also  $2\pi r$ .

- Die **Zykloide** ist die Kurve

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t);$$

sie beschreibt die Bahn eines Punktes auf einem Kreis vom Radius 1, der auf der  $x$ -Achse in der  $xy$ -Ebene abrollt (siehe Bild). Hier gilt  $\|f'(t)\| = \sqrt{(1 - \cos t)^2 + (\sin t)^2} = 2 \sin(t/2)$ , so dass sich die folgende Bogenlänge ergibt:

$$\ell(f) = \int_0^{2\pi} \|f'(t)\| dt = 2 \int_0^{2\pi} \sin(t/2) dt = 8.$$



## 10. Volumenberechnung mit mehrdimensionalen Integralen – 6. Juni

Wir starten mit dem Flächeninhalt eines Kreises. Der Kreis sei gegeben durch die Gleichung  $x^2 + y^2 = r^2$ , wobei  $r > 0$  der Radius sei. Nach §8 lässt sich die Kreisgleichung in der oberen Hälfte der  $xy$ -Ebene nach  $y$  durch  $y = \sqrt{r^2 - x^2}$  auflösen. Die Fläche  $F$  des Viertelkreises  $\{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : x^2 + y^2 = r^2\}$  ist also gleich der Fläche zwischen der  $x$ -Achse und dem Graphen von  $x \mapsto y(x) := \sqrt{r^2 - x^2}$  für  $0 \leq x \leq r$ , also

$$F = \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = r^2 \int_0^{\arcsin(1)} \sqrt{1 - (\sin \theta)^2} \cos \theta d\theta$$

vermöge der Substitution  $x = r \sin \theta$  bzw.  $\theta = \arcsin \frac{x}{r}$  mit dem **Arcussinus**  $\arcsin$  als Umkehrfunktion des Sinus eingeschränkt auf dem Intervall  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . Mit dem Satz des Pythagoras in der Form  $1 - \sin^2 = \cos^2$  und partieller Integration ergibt sich

$$F = r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta)^2 d\theta = \frac{1}{4} \pi r^2.$$

Insgesamt folgt also: *Ein Kreis vom Radius  $r$  besitzt die Fläche  $\pi r^2$ .* Entsprechend ergibt sich das Volumen einer Kugel durch Integration der Formel für die Fläche eines Kreises.

Bevor wir dies in Angriff nehmen, sei das Cavalierische Prinzip erwähnt: *Besitzen zwei Körper im Dreidimensionalen für jeden Schnitt parallel zu einer festen Ebene dieselben Flächeninhalte, so haben sie dasselbe Volumen.* Wir denken etwa an zwei Kegelstümpfe derselben Grundfläche  $\pi r^2$  und Höhe  $h$ ; der eine mag seine Spitze senkrecht über dem Mittelpunkt seines Grundkreises haben, der andere mag schief sein. Dann haben also beide dasselbe Volumen und es genügt, zur allgemeinen Volumenberechnung einen Spezialfall zu untersuchen. Der senkrechte Kegel entsteht durch Rotation eines rechtwinkligen Dreiecks mit Hypothenusen  $r$  und  $h$  um die Höhe. Für solche **Rotationskörper** gilt



**Satz 10.1.** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$  stetig und

$$K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \times [a, b] : x^2 + y^2 \leq f(z)^2\},$$

dann gilt

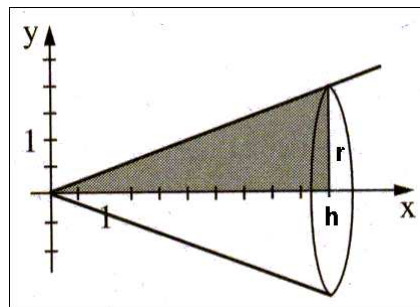
$$\text{vol}(K) = \pi \int_a^b f(z)^2 \, dz.$$

Ohne **Beweis** in der Vorlesung (aber intuitiv klar).

Damit berechnet sich das Kegelvolumens (s.o.) als

$$\pi \int_0^h \left(\frac{r}{h}z\right)^2 \, dz = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Also folgt: Ein Kegel der Höhe  $h$  und Kreisgrundfläche  $\pi r^2$  besitzt das Volumen  $\frac{1}{3}h\pi r^2$ . Ganz ähnlich geht man bei anderen Rotationskörpern vor.



Etwas allgemeiner als oben formuliert gilt

**Satz 10.2 (Prinzip von Cavalieri).** Gegeben zwei Körper  $A, B \subset \mathbb{R}^n$ . Gilt für jedes  $x \in \mathbb{R}$ , dass die Schnitte

$$A_x := \{y \in \mathbb{R}^{n-1} : (x, y) \in A\} \quad \text{und} \quad B_x := \{y \in \mathbb{R}^{n-1} : (x, y) \in B\}$$

dasselbe Volumen besitzen, dann besitzen auch  $A$  und  $B$  dasselbe Volumen.

Ohne **Beweis** in der Vorlesung.

**Beispiel:** Wir wollen das Volumen der  $n$ -dimensionalen Kugel vom Radius  $r > 0$  berechnen. Wir dürfen den Mittelpunkt der Kugel in den Ursprung legen:

$$B_n(r) := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 < r^2\}.$$

(in der Notation von §2 ist dies die Menge  $B_r(0)$ ). Für den Schnitt

$$(B_n(r))_{x_n} = \{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} : x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 < r^2\}$$

gilt

$$\chi_{B_n(r)} = \chi_{(B_n(r))_{x_n}}.$$

Hierbei ist

$$\chi_M(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in M, \\ 0 & \text{falls } x \notin M, \end{cases}$$



die **charakteristische Funktion** der Menge  $M$  ist. Wir erklären das **Volumen** einer Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$  vermöge

$$\text{vol}(M) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_M(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n;$$

wobei anzumerken ist, dass nicht jeder (nicht einmal beschränkten) Menge ein Volumen zugewiesen werden kann (was uns aber nicht hindern soll, bei einfachen geometrischen Objekten mit dem Volumenbegriff recht frei umzugehen). Für das Volumen der Kugel  $B_n(r)$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \text{vol}(B_n(r)) &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{B_n(r)}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi_{(B_n(r))_{x_n}}(x_1, \dots, x_{n-1}) dx_1 \dots dx_{n-1} \right) dx_n \\ &= \int_{-r}^r \text{vol}(B_{n-1}(\sqrt{r^2 - x_n^2}))(x_n) dx_n. \end{aligned}$$

Auf diese Weise lassen sich sukzessive diese Volumina berechnen. Speziell im dreidimensionalen Fall ergibt sich durch Integration über die Fläche

$$\text{vol}(B_2(\sqrt{r^2 - x^2})) = \pi(r^2 - x^2)$$

so das Volumen

$$\text{vol}(B_3(r)) = \int_{-r}^r \text{vol}(B_2(\sqrt{r^2 - x^2})) dx = 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2) dx = \frac{4\pi}{3} r^3.$$

Also: Die dreidimensionale Kugel vom Radius  $r > 0$  besitzt also das Volumen  $\frac{4\pi}{3} r^3$ . Diese Formel können wir in Analogie zur Theorie der Riemann-Summen beim eindimensionalen Integral auch anders berechnen: Wir approximieren eine Halbkugel von innen und außen durch Zylinder der Höhe  $\frac{r}{n}$ . Dann folgt

$$\sum_{k=1}^{n-1} \pi r^2 \left( 1 - \left( \frac{k}{n} \right)^2 \right) \frac{r}{n} < \frac{1}{2} \text{vol}(B_3(r)) < \sum_{k=0}^{n-1} \pi r^2 \left( 1 - \left( \frac{k}{n} \right)^2 \right) \frac{r}{n}$$

und beide Summen konvergieren bei  $n \rightarrow \infty$  gegen  $\frac{2\pi}{3} r^3$ . Tatsächlich kannte bereits Archimedes sämtliche Volumina, die wir hier berechnet haben! Seine Exhaustionsmethode nahm die Idee des Integrals als Grenzwert von Riemannschen Summen vorweg.

Wir haben mehrdimensionale Integrale nicht rigoros erklärt, sondern diese als iterierte Integrale von Funktionen einer Veränderlichen aufgefasst. Dabei haben wir uns auf eine geometrische Interpretation berufen, ähnlich der wie Integrale von Funktionen einer Veränderlichen als Fläche unterhalb des Funktionsgraphen angesehen werden können. Es ist jedoch Vorsicht geboten: Man darf bei mehrdimensionalen Integralen die Integrationsreihenfolge nicht beliebig vertauschen; beispielsweise gilt

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \arctan \frac{x}{y} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

und also

$$\int_0^1 \left( \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} dx \right) dy = -\frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{4} = \int_0^1 \left( \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} dy \right) dx.$$

**Satz 10.3 (Satz von Stolz).** Sei  $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar und die Funktion  $y \mapsto f(x, y)$  sei für jedes  $x \in [a, b]$  auf  $[c, d]$  integrierbar. Dann ist auch

$$x \mapsto \int_c^d f(x, y) dy$$

auf  $[a, b]$  integrierbar und es gilt

$$\int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

Ohne **Beweis** in der Vorlesung. Der Satz von Fubini-Tonelli geht über diesen Satz weit hinaus und erläutert unter welchen Bedingungen, die Integrationsreihenfolge bei Funktionen mehrerer Veränderlicher vertauscht werden darf und liefert somit insbesondere ein Argument mehrdimensionale Integrale sukzessive zu berechnen.

♣ Practise makes perfect – 9. Juni

Die folgenden Aufgaben wiederholen den vorangegangenen Stoff; sie sind entweder ehemalige Staatsexamensaufgaben oder aber sind auf dem Niveau derselben. Wir starten mit einer vielleicht etwas überraschenden Aufgabe zu Distanzen im  $\mathbb{R}^n$ :

**Aufgabe 1.** Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Der  $n$ -dimensionale Einheitswürfel ist gegeben durch

$$Q_n := \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_j \leq 1 \text{ für } j = 1, \dots, n\}$$

- (i) Berechnen Sie die Länge der Diagonalen in  $Q_n$  für  $n = 1, 2, 3$ .
- (ii) Zeigen Sie, dass es unterschiedlich lange Diagonalen in  $Q_4$  gibt; berechnen Sie hierzu die Länge der Diagonalen in  $Q_4$ .
- (iii) Äußern Sie eine Vermutung zur Länge von Diagonalen in  $Q_n$  bei  $n > 4$ .

Nun zur Stetigkeit:

**Aufgabe 2.** Es sei

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1^2 x_2}{x_1^6 + x_2^2} & \text{falls } x_1^2 + x_2^2 > 0, \\ 0 & \text{falls } x_1^2 + x_2^2 = 0, \end{cases}$$

- (i) Berechnen Sie die Grenzwerte  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  für Punkte  $(x, y)$ , die auf Geraden  $y = \alpha x$  mit einem  $\alpha \in \mathbb{R}$  liegen.
- (ii) Berechnen Sie die Grenzwerte  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  für Punkte  $(x, y)$ , die auf der Kurve  $y = x^3$  liegen.
- (iii) Ist  $f$  im Ursprung stetig?

**Aufgabe 3** ((iii) ist Herbst 2005, Thema 2, Aufgabe 5 leicht modifiziert). Die Funktion  $f$  sei erklärt durch  $(x, y) \mapsto f(x, y) = x^y$ .

- (i) Wie ist  $x^y$  definiert?

- (ii) Zeigen Sie, dass  $f$  stetig in  $\mathbb{R}_+^2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$  ist.
- (iii) Zeigen Sie, dass  $f$  nicht stetig in  $(x, y) = (0, 0)$  ist.
- (iv) Zeigen Sie, dass  $f$  auf  $]0, \infty[ \times \mathbb{R}$  kein lokales Extremum besitzt.

Die Schreibweise  $]0, \infty[$  ist gleichbedeutend mit der Schreibweise  $(0, \infty)$ .

Neu bei Funktionen mehrerer Veränderlicher sind die verschiedenen Differentiationsbegriffe. Wir unterscheiden zwischen partieller und totaler Differenzierbarkeit.

**Aufgabe 4 (Herbst 2003, Thema 3, Aufgabe 4).** Bestimmen Sie alle Stellen, an denen die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto |x - y| \cdot y$$

nicht partiell differenzierbar ist.

**Aufgabe 5.** Gegeben eine Funktion  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  mit Gradient

$$\text{grad } f(x, y, z) = (3x^2y + 3yz^2, x^3 + 3xz^2 - 10y, 6xyz - 5y^2);$$

charakterisieren Sie alle  $f$ .

Ein zentrales Thema bildet die Extremwertbestimmung bei Funktionen mehrerer Veränderlicher.

**Aufgabe 6.** Untersuchen Sie  $f(x, y) := x^2 + 4y^2 - 4xy + 1$  für  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  auf Extrema.

**Aufgabe 7 (Herbst 2003, Thema 2, Aufgabe 4).** Gegeben ist die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - e^{xy}.$$

Zeigen Sie:

- a)  $f$  besitzt genau ein relatives Extremum, und zwar ein Minimum.
- b)  $f$  ist weder nach oben noch nach unten beschränkt.

Und abschließend zu Kurven und deren Bogenlänge:

**Aufgabe 8 (Frühjahr 2001, Thema 2, Aufgabe 4).** Sei  $\Gamma$  die durch die Parametrisierung

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (3t^2 - 1, 3t^3 - t) \quad \left( -\frac{1}{\sqrt{3}} \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

gegebene geschlossene Kurve in der  $(x, y)$ -Ebene. Berechnen Sie die Bogenlänge von  $\Gamma$ .

## KAPITEL 2

### Differentialgleichungen

Differentialgleichungen beschreiben das Wachstumsverhalten von Funktionen (einer Veränderlicher) und treten in verschiedensten Zusammenhängen in Natur und Technik auf. Z.B. beschreibt die Differentialgleichung

$$y' = -cy \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial}{\partial t}y(t) = -cy(t)$$

den radioaktiven Zerfall; hierbei ist  $c$  eine positive Zerfallskonstante und gesucht ist eine differenzierbare Funktion  $y(t)$ , die obige Gleichung erfüllt. Die physikalische Herleitung lautet wie folgt: Der Bruchteil  $\frac{\partial}{\partial t}y(t)$  der Atomkerne eines Nuklids pro Zeitintervall, die zerfallen, ist proportional zur Anzahl  $y(t)$  der jeweilig vorhandenen radioaktiven Kerne. Zur mathematischen Lösung beobachten wir, dass die Exponentialfunktion  $\exp(-ct)$  eine solche Lösung darstellt. Es stellen sich sofort Fragen wie: *Wie findet sich eine Lösung ohne zu raten? Gibt es weitere Lösungen?*

#### 11. Einige einfache Differentialgleichungen – 16. Juni

Bekanntlich reproduziert sich die Exponentialfunktion beim Differenzieren:  $\exp' = \exp$ . Anders formuliert wird also die Gleichung

$$y' = y$$

von der Exponentialfunktion  $y = \exp$  gelöst; eine weitere Lösung ist die Nullfunktion, die identisch verschwindet. Dies ist das einfachste Beispiel des Problems, welches wir studieren wollen: Unter einer Differentialgleichung verstehen wir eine Bedingungsgleichung für eine oder mehrere zu bestimmenden Funktion; genauer sei  $U \subset \mathbb{R}^2$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto f(x, y)$  stetig, dann heißt

$$y' = f(x, y)$$

eine **(gewöhnliche) Differentialgleichung erster Ordnung**. Unter einer Lösung derselben versteht man eine auf einem Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  differenzierbare Funktion  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  mit den Eigenschaften:

- Der Graph von  $\varphi$  ist in  $U$  enthalten, d.h.

$$\{(x, y) \in I \times \mathbb{R} : y = \varphi(x)\} \subset U;$$

- für alle  $x \in I$  gilt

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)).$$

Wir können unschwer für einige elementare Funktionen Differentialgleichungen aufstellen, die von eben diesen gelöst werden; z.B.:

- für den Logarithmus gilt  $(\log x)' = \frac{1}{x}$  für  $x > 0$ , also ist der Logarithmus eine Lösung der Differentialgleichung  $y' = \frac{1}{x}$  für  $x > 0$ ;
- $y' = \sin x$  wird von  $\varphi(x) = -\cos x$  gelöst;
- $y' = \cos x$  wird von  $\varphi(x) = \sin x$  gelöst.

Schwieriger ist, die Lösungen zu einer gegebenen Differentialgleichung zu finden.

Bei einer Bakterienpopulation der Größe  $P(t)$  zum Zeitpunkt  $t$  wird nach Ablauf einer Zeitspanne  $\Delta t$  eine Zunahme der Population um

$$\Delta P := P(t + \Delta t) - P(t) \approx \lambda P(t) \Delta t$$

mit einer gewissen positiven Konstanten  $\lambda$  beobachtet. Bei vielen Wachstumsprozessen ist eine Vermehrung proportional zum Anfangszustand und zur Zeitspanne zumindest für kurze Zeitspannen typisch. Umformen der obigen Approximation liefert

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} \approx \lambda P(t);$$

die linke Seite ist ein Differenzenquotient und mittels  $\Delta t \rightarrow 0$  ergibt sich das Wachstumsgesetz

$$P'(t) = \lambda P(t).$$

Diese Differentialgleichung beschreibt tatsächlich Änderungen von Populationsgrößen bei einer Vielzahl von Wachstumsprozessen – zumindest für kleine Zeitspannen. Man sieht leicht, dass jede Funktion

$$P(t) = c \exp(\lambda t)$$

mit einer beliebigen Konstanten  $c$  der Wachstumsdifferentialgleichung genügt. Wir gehen davon aus, dass eben diese Lösung zu unserem Wachstumsprozess passt (rein theoretisch könnte es ja weitere Lösungen geben). Uns interessiert nun, nach welcher Zeit  $\delta$  sich die Bakterienpopulation verdoppelt, also

$$2 = \frac{P(t + \delta)}{P(t)} = \frac{c \exp(\lambda(t + \delta))}{c \exp(\lambda t)} = \exp(\lambda \delta)$$

gilt. Auflösen nach  $\delta$  zeigt  $\delta = \frac{\log 2}{\lambda}$ . Die Erdbevölkerung verdoppelt sich ca. alle 35 Jahre, was bei Annahme eines exponentielles Wachstumsgesetz näherungsweise auf die Vorhersage

$$P(t) = 6,93 \cdot 10^9 \exp(0,02t)$$

führt; hierbei gehen wir zum Zeitpunkt  $t = 0$  also von einer Weltbevölkerung von 6,93 Milliarden Menschen aus (nach Wikipedia zum Jahreswechsel 2010/11). Diese Vorhersage ist für lange Zeiträume aber völlig unrealistisch! (Im Jahr 2100 würden sonst mehr als 40 Milliarden und 2200 bereits mehr als 300 Milliarden Menschen leben.) Der Informatiker Moore beobachtete, dass sich die Anzahl der Transistoren (und damit auch die Rechengeschwindigkeit) auf Mikroprozessoren

ca. alle 18 Monate verdoppelt; ebenfalls einem solchen *Moore'schen Gesetz* folgend verdoppelt sich die Größe des Internet alle fünf Jahre.

Geometrisch bestimmt eine Differentialgleichung (auch kurz **DGL**)  $y' = f(x, y)$  in einer offenen und zusammenhängenden Menge  $U \subset \mathbb{R}^2$  ein **Richtungsfeld**: In jedem Punkt  $(x, y) \in U$  wird durch  $y' = f(x, y)$  eine Steigung vorgegeben und gesucht ist eine differenzierbare Funktion  $y = \varphi(x)$ , deren Graph in jedem seiner Punkte die vorgegebene Steigung besitzt. In trivialen Fällen hilft diese geometrische Sichtweise bereits bei der Findung der Lösung.

### Beispiele:

- Die DGL

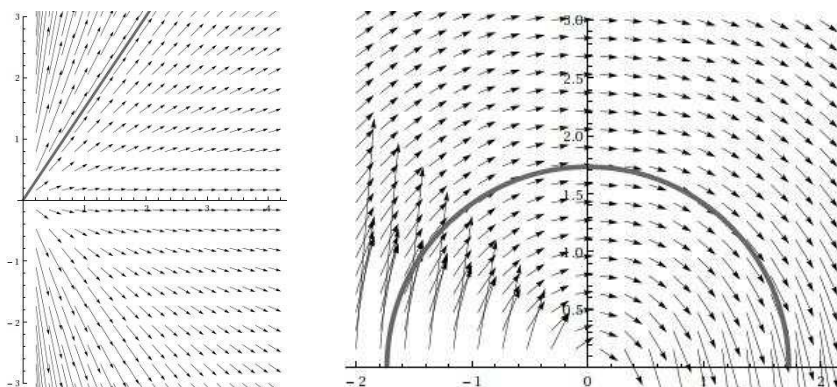
$$y' = \frac{y}{x} \quad \text{für } (x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$$

besitzt die 'Geraden'  $y = cx$  mit  $c \in \mathbb{R}$  als Lösungen (siehe das Bild unten links für das Richtungsfeld und der speziellen Lösung  $y = \frac{3}{2}x$ ).

- Die DGL

$$y' = -\frac{x}{y} \quad \text{für } (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$$

besitzt die 'Halbkreise'  $y = \sqrt{c - x^2}$  als Lösungen mit positiver Konstante  $c$ ; hier existiert eine solche Lösung jedoch nur für  $|x| < \sqrt{c}$  (siehe das Bild unten rechts für das zugehörige Richtungsfeld und der speziellen Lösung  $y = \sqrt{3 - x^2}$ ).



Als Nächstes wollen wir die Differentialgleichung

$$y' = 2xy$$

lösen. Wir machen einen **Potenzreihenansatz**: Dazu nehmen wir an, dass

$$y = \varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

mit gewissen Koeffizienten  $a_k$  gilt, dann liefert summandenweise Differentiation

$$y' = \varphi'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \dots$$

Durch den Vergleich mit dem Ausdruck  $2xy = 2x(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots)$ , also

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \dots = y' = 2xy = 2a_0x + 2a_1x^2 + 2a_2x^3 + \dots,$$

ergeben sich für die Koeffizienten bei den Potenzen  $x^k$  sukzessive die Bedingungen

$$a_1 = 0, \quad 2a_2 = 2a_0, \quad 3a_3 = 2a_1, \quad 4a_4 = 2a_2, \quad \dots$$

Es zeigt sich, dass  $ka_k = 2a_{k-2}$ , was auf  $a_k = 0$  für ungerade  $k$  führt, während für gerade  $k$  sich der Reihe nach

$$a_2 = a_0, \quad a_4 = \frac{2}{4}a_2 = \frac{1}{2}a_0, \quad a_6 = \frac{2}{6}a_4 = \frac{1}{6}a_0, \quad \dots \quad a_k = \frac{1}{(k/2)!}a_0$$

ergibt. Damit folgt (vermöge  $j = \frac{k}{2}$ )

$$y = \varphi(x) = a_0 + a_0x^2 + \frac{1}{2}a_0x^4 + \frac{1}{6}a_0x^6 + \dots = a_0 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{2j}}{j!} = a_0 \exp(x^2).$$

Die Probe  $\frac{\partial}{\partial x} a_0 \exp(x^2) = 2xa_0 \exp(x^2)$  zeigt, dass unser Ansatz uns auf eine wirkliche Lösung geführt hat – *die Probe ist stets eine gute Idee beim Umgang mit DGLen!* – und dass der konstante Term  $a_0 = \varphi(0)$  frei wählbar ist. Potenzreihenansätze funktionieren allerdings nicht immer so gut wie in diesem Beispiel.

## 12. Trennung der Variablen – 20. Juni

Seien  $I$  und  $J$  offene Intervalle in  $\mathbb{R}$  und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  stetige Funktionen, wobei  $g(y) \neq 0$  für  $y \in J$  gelte. Die Differentialgleichung

$$y' = f(x)g(y)$$

heißt **Differentialgleichung mit getrennten Variablen**.

**Satz 12.1.** *Mit den obigen Bezeichnungen seien für einen Punkt  $(x_0, y_0) \in I \times J$  die Funktionen  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $G : J \rightarrow \mathbb{R}$  durch*

$$F(x) := \int_{x_0}^x f(t) dt \quad \text{und} \quad G(y) := \int_{y_0}^y \frac{dt}{g(t)}$$

*definiert. Es sei  $\tilde{I} \subset I$  ein Intervall mit  $x_0 \in \tilde{I}$  und  $F(\tilde{I}) \subset G(J)$ . Dann existiert genau eine Lösung  $\varphi : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}$  der Differentialgleichung*

$$y' = f(x)g(y)$$

*die der Anfangsbedingung  $\varphi(x_0) = y_0$  genügt; diese Lösung erfüllt zudem*

$$(7) \quad G(\varphi(x)) = F(x) \quad \text{für alle } x \in \tilde{I}.$$

**Beispiel:** Die Differentialgleichung

$$y' = -\frac{y}{x} \quad \text{für } (x, y) \in \mathbb{R}_+^2$$

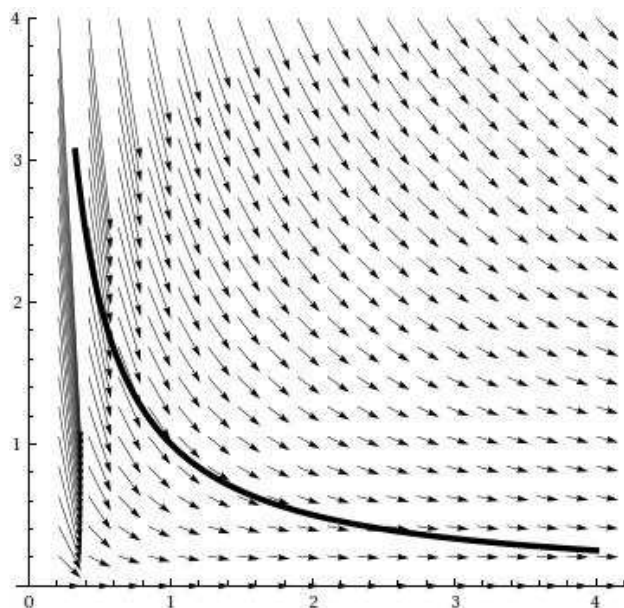
mit der Anfangswertbedingung  $y(1) = c$  mit einer festen positiven Konstanten  $c$  ist zu lösen. Anwenden des Satzes liefert

$$F(x) = -\int_1^x \frac{dt}{t} = -\log x \quad \text{und} \quad G(y) = \int_c^y \frac{dt}{t} = \log \frac{y}{c}.$$

Gemäß (7) gilt

$$\log \frac{\varphi(x)}{c} = -\log x$$

und Anwenden der Exponentialfunktion führt auf die Lösung  $\varphi(x) = \frac{c}{x}$  für alle  $x \in \mathbb{R}_+$ . Die Gesamtheit aller Lösungen der DGL  $y' = -\frac{y}{x}$  ohne Anfangsbedingung ist also gegeben durch die Hyperbelschar  $xy = c$  für  $c > 0$ ; durch jeden Punkt von  $\mathbb{R}_+^2$  geht genau eine Hyperbel (siehe unten stehendes Bild mit Richtungsfeld und eingezeichneter Hyperbel  $xy = 1$ ).



**Beweis.** Zeigen zuerst, dass jede Lösung  $\varphi : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\varphi(x_0) = y_0$  der Gleichung (7) genügt: Da  $\varphi$  eine Lösung der DGL ist, gilt  $\varphi'(t) = f(t)g(\varphi(t))$  und durch Integration mit der Substitution  $u = \varphi(t)$  entsteht

$$\int_{x_0}^x f(t) dt = \int_{x_0}^x \frac{\varphi'(t)}{g(\varphi(t))} dt = \int_{y_0}^{\varphi(x)} \frac{du}{g(u)}$$

bzw.  $F(x) = G(\varphi(x))$  und also (7).

Nun zur Eindeutigkeit der noch nicht als existent nachgewiesenen Lösung: Wir erinnern an den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung in der folgenden Form: *Ist  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, so ist  $F(x) := \int_a^x f(t) dt$  mit  $a \in I$  für  $x \in I$  differenzierbar mit  $F' = f$ .* Also gilt  $G'(y) = g(y)^{-1} \neq 0$  und damit ist  $G$  streng monoton und besitzt eine stetig differenzierbare Umkehrfunktion  $H : G(J) \rightarrow \mathbb{R}$  und mit (7) folgt

$$\varphi(x) = H(F(x)) \quad \text{für alle } x \in \tilde{I}.$$

Insbesondere ist die Lösung – wenn sie existiert – durch die gegebene Anfangsbedingung eindeutig bestimmt.



Verbleibt der Existenznachweis: Sei  $\varphi = H \circ F$  auf  $\tilde{I}$  erklärt. Offensichtlich ist  $\varphi$  stetig differenzierbar mit

$$\varphi(x_0) = H(F(x_0)) = H(0) = y_0$$

nach Konstruktion. Ferner liefert Differentiation von (7) (in Form der Kettenregel) zusammen mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$f(x) = F'(x) = G'(\varphi(x))\varphi'(x) = \frac{1}{g(\varphi(x))}\varphi'(x)$$

bzw.

$$y' = \varphi'(x) = f(x)g(\varphi(x)) = f(x)g(y),$$

was zu zeigen war. •

Etwas unpräzise kann man sich die Methode der Trennung der Variablen auch folgendermaßen merken: Gegeben  $y' = f(x)g(y)$  bzw.  $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$ , integriere man den leicht umgeschriebenen Ausdruck

$$(8) \quad \frac{dy}{g(y)} = f(x) dx;$$

dies führt auf

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx + \text{Konstante}.$$

Man kann der Umformung, die zu (8) geführt hat, eine mathematisch rigorose Bedeutung geben (mit Hilfe von Differentialformen).

**Beispiel:** Es sei gegeben

$$y' = \exp(y) \sin(x)$$

Wir erhalten durch Integration die allgemeine Lösung

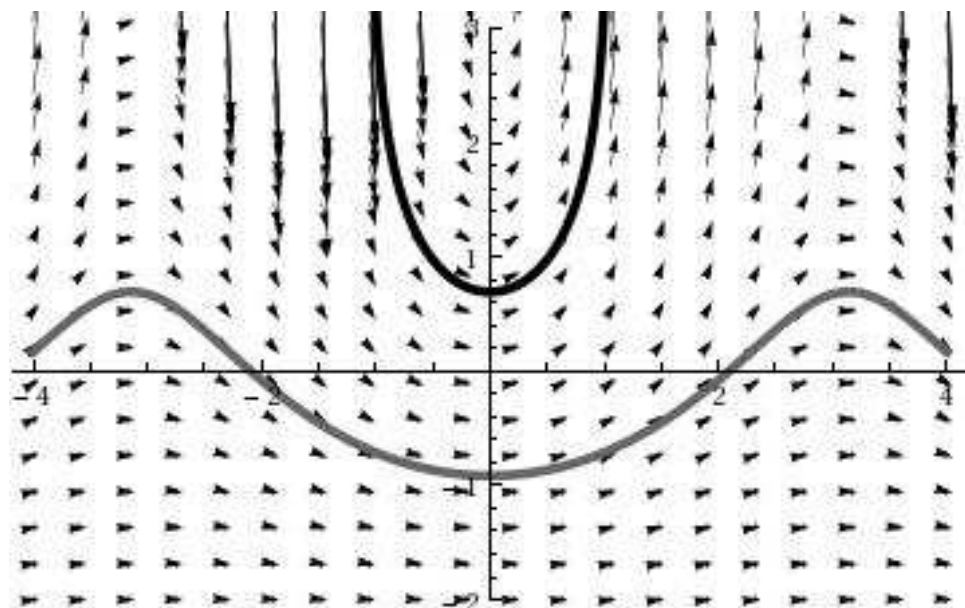
$$y = \varphi(x) = -\log(c + \cos x)$$

mit einer Konstanten  $c$ . Im unten stehenden Bild sind das Richtungsfeld und die zwei Lösungen für  $c = -\frac{1}{2}$  sowie  $c = \frac{3}{2}$  angegeben. Wie auch schon in vorigen Beispielen sind die Lösungen u.U. auf verschiedenen Mengen erklärbar; für eine auf ganz  $\mathbb{R}$  definierte Lösung ist hier  $c > 1$  notwendig und hinreichend.

Ein weiteres Beispiel ist gegeben durch die DGL

$$y' = -x \operatorname{sign}(y) \sqrt{|y|} = \begin{cases} -x\sqrt{y} & \text{falls } y \geq 0, \\ x\sqrt{-y} & \text{falls } y < 0. \end{cases}$$

Diese wird gelöst durch  $y = \varphi(x) = \frac{1}{16}(c - x^2)^2$  für  $|x| < \sqrt{c}$  mit einer positiven Konstanten  $c$ .



### 13. Lineare Differentialgleichungen – 27. Juni

Wir erweitern unsere Liste von Differentialgleichungen durch folgende Beispiele:

$$y'' = y, \quad y'' = y' + y, \quad y' = y^2 + x^2.$$

Die ersten beiden sind Beispiele einer Differentialgleichungen **höherer** Ordnung, da hier *höhere* Ableitungen auftreten; ebenso sind sie Beispiele für eine **lineare Differentialgleichung**, da die Ableitungen (inkl.  $y$ ) nur in erster Potenz auftreten. Das dritte Beispiel hingegen ist nicht-linear.

**Satz 13.1 (homogene lineare DGL erster Ordnung).** *Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann besitzt die Differentialgleichung*

$$y' = g(x)y$$

*zu jedem  $x_0 \in I$  und  $c \in \mathbb{R}$  eine eindeutige Lösung  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ , die der Anfangsbedingung  $\varphi(x_0) = c$  genügt; diese Lösung ist gegeben durch*

$$\varphi(x) = c \exp \left( \int_{x_0}^x g(t) dt \right).$$

**Beweis.** Man verifiziert direkt, dass die angegebene Funktion  $\varphi$  der DGL mit Anfangswertbedingung genügt (oder man bemüht alternativ Satz 12.1). Zum Nachweis der Eindeutigkeit nehmen wir an, dass  $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine weitere Lösung der DGL mit Anfangsbedingung sei. Wir betrachten

$$\eta(x) := \psi(x) \exp \left( - \int_{x_0}^x g(t) dt \right)$$

und erhalten durch Differentiation

$$\eta'(x) = \underbrace{(\psi'(x) - g(x)\psi(x))}_{=0} \exp \left( - \int_{x_0}^x g(t) dt \right) = 0.$$

Also ist  $\eta(x)$  konstant  $\eta(x_0) = \psi(x_0) = c$  für alle  $x \in I$  und somit ergibt sich

$$\psi(x) = c \left( \exp \left( - \int_{x_0}^x g(t) dt \right) \right)^{-1} = \varphi(x)$$

Damit ist der Satz bewiesen. •

**Beispiel:** Die DGL  $y' = \lambda y$  mit festem  $\lambda \in \mathbb{R}$  und Anfangsbedingung  $y(x_0) = c$  wird eindeutig gelöst durch  $\varphi(x) = c \exp(\lambda(x - x_0))$ .

Analog zur Theorie der linearen Gleichungen (siehe *Lineare Algebra*) nun der inhomogene Fall:

**Satz 13.2 (inhomogene lineare DGL erster Ordnung).** Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und  $g, f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann besitzt die Differentialgleichung

$$y' = g(x)y + f(x)$$

zu jedem  $x_0 \in I$  und  $c \in \mathbb{R}$  eine eindeutige Lösung  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ , die der Anfangsbedingung  $\varphi(x_0) = c$  genügt, nämlich

$$\varphi(x) = \eta(x) \left( c + \int_{x_0}^x \frac{f(t)}{\eta(t)} dt \right) \quad \text{mit} \quad \eta(x) := \exp \left( \int_{x_0}^x g(t) dt \right).$$

**Beweis** mit Hilfe der **Variation der Konstanten**. Die Funktion  $\eta(x)$  löst nach Satz 13.1 die zugehörige homogene DGL  $y' = g(x)y$ . Wir machen den Ansatz

$$\varphi(x) = \eta(x)u(x)$$

für die inhomogene DGL mit einem noch nicht näher bestimmten  $u$ . Da  $\eta(x)$  in  $x \in I$  nicht verschwindet, kann jede Funktion  $\varphi$  in der Gestalt unseres Ansatzes geschrieben werden. Angenommen,  $\varphi$  ist eine gewünschte Lösung, so gelten die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \varphi &= \eta u && \text{(nach Konstruktion),} \\ \varphi' &= \eta' u + \eta u' && \text{(nach Ansatz),} \\ \varphi' &= g\varphi + f && \text{(wegen der inhomogenen DGL),} \\ \eta' &= g\eta && \text{(wegen der homogenen DGL).} \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich

$$g\eta u + f = g\varphi + f = \varphi' = \eta' u + \eta u' = g\eta u + \eta u',$$

d.h.  $\varphi$  löst die DGL genau dann, wenn  $\eta u' = f$  bzw. nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$u(x) = \int_{x_0}^x \frac{f(t)}{\eta(t)} dt + C$$

mit einer Konstanten  $C$  gilt. Um zusätzlich der Anfangsbedingung zu genügen, ist hier die Konstante  $C = c$  zu nehmen; die Lösung ist damit eindeutig. •

Die Beweis- und Lösungsmethode trägt ihren Namen deshalb, weil in der allgemeinen Lösung  $\eta(x) = C \exp(\int^x g(t) dt)$  der homogenen DGL die Konstante  $C$

durch eine Funktion  $C(x)$  mit dem Ziel ersetzt wird, durch geeignete Wahl von  $C(x)$  eine Lösung der inhomogenen DGL zu finden.

**Beispiel:** Die homogene DGL  $y' = 2xy$  wird gelöst durch

$$\eta(x) = \exp \int_{x_0}^x 2t \, dt = \exp(x^2) + c \quad \text{mit} \quad c = -\exp(x_0^2)$$

(vgl. §11). Die inhomogene DGL  $y' = 2xy + x^3$  mit der Anfangsbedingung  $y(0) = c$  wird via Variation der Konstanten gelöst durch

$$\varphi(x) = \exp(x^2) \left( c + \int_0^x t^3 \exp(-t^2) \, dt \right) = (c + \tfrac{1}{2}) \exp(x^2) - \tfrac{1}{2}(x^2 + 1).$$

Das **Superpositionsprinzip** besagt, dass wenn

$$y_1' = g(x)y_1 + f(x) \quad \text{und} \quad y_2' = g(x)y_2 + h(x),$$

dann bei beliebigen, aber festen  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  die Funktion  $y = \varphi(x) = \alpha y_1(x) + \beta y_2(x)$  die DGL

$$y' = g(x)y + (\alpha f(x) + \beta h(x))$$

löst. Ein Beispiel für diese Lösungsstrategie liefern die DGLen

$$y' = 2xy \quad \text{und} \quad y' = 2xy + x^3,$$

welche durch (s.o.) etwa

$$y_1(x) = \tfrac{1}{2} \exp(x^2) \quad \text{bzw.} \quad y_2(x) = \tfrac{1}{2} \exp(x^2) - \tfrac{1}{2}(x^2 + 1)$$

gelöst werden, woraus also nach dem Superpositionsprinzip für die DGL

$$y' = 2xy + \alpha + \beta x^3$$

die Lösung  $y = \alpha y_1(x) + \beta y_2(x) = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) \exp(x^2) - \tfrac{\beta}{2}(x^2 + 1)$  entsteht.

♣ No pains - no gains! – 30. Juni

Eine Differentialgleichung der Form

$$y' = f(x/y)$$

heißt **homogene Differentialgleichung**. Mittels der Substitution  $u = y(x)/x$  für  $x \neq 0$  ergibt sich

$$y' = u + xu' = f(u),$$

also eine DGL für  $u$  mit getrennten Variablen:

$$u' = \frac{f(u) - u}{x}.$$

Offensichtlich führt eine Lösung derselben auf eine Lösung  $y(x) = x \cdot u(x)$  der ursprünglichen DGL. Eine so genannte **partikuläre Lösung**  $y = \varphi(x) = \eta x$  ergibt sich durch sämtliche Nullstellen  $\eta$  der Gleichung  $f(\eta) - \eta = 0$ .

**Beispiel:** Die DGL

$$y' = \frac{y}{x} - \frac{x^2}{y^2}$$

mit der Anfangsbedingung  $y(1) = 1$  überträgt sich in

$$u' = -\frac{1}{xu^2}$$

mit der Anfangsbedingung  $u(1) = 1$ . Lösen dieser DGL mit getrennten Variablen führt zunächst auf

$$\frac{1}{3}(u^3 - 1) = -\log x$$

und schließlich auf  $\varphi(x) = x\sqrt[3]{1 - 3\log x}$  als Lösung der gegebenen DGL. Eine partikuläre Lösung existiert hier nicht.

Ein weiteres **Beispiel**: Man finde die allgemeine Lösung der DGL

$$y' = \frac{y}{x} - \sqrt{1 - \frac{y}{x}}$$

für  $x \neq 0$  und  $\frac{y}{x} \leq 1$ . Welche Lösungen ergeben sich bei der Anfangsbedingung  $y(e) = e$ ?

Zur Lösung: Mit  $u(x) = y(x)/x$  ergibt sich die DGL  $u + xu' = y' = u - \sqrt{1 - u}$ . Wegen  $u = u - \sqrt{1 - u}$  erweist sich hier  $u = 1$  bzw.  $y = \varphi(x) = x$  als partikuläre Lösung. Zur Bestimmung der allgemeinen Lösung formen wir um zu

$$u' = -\frac{1}{x}\sqrt{1 - u}.$$

Mit der Lösungsmethode für DGLen mit getrennten Variablen ergibt sich  $u(x) = 1 - \frac{1}{4}(\log x + c)^2$  mit  $x > 0$  und beliebigem  $c \in \mathbb{R}$  als allgemeine Lösung, bzw. nach R“ucksstitution  $y = \varphi(x)$ . Man beachte, dass man die partikuläre Lösung durch keine Wahl von  $c$  erhält. Wir beobachten ferner, dass die Anfangsbedingung  $y(x_0) = x_0$  nicht eindeutig lösbar ist, denn sowohl  $\varphi(x) = x$  als auch  $\varphi(x) = x(1 - \frac{1}{4}(\log x + c)^2)$  mit  $c = -\log |x_0|$  sind (offensichtlich verschiedene) Lösungen. Zur Lösung der Anfangsbedingung setzte man hierbei also  $c = -1$ .

Wir wiederholen weiteren Stoff mit einigen Aufgaben zu den elementaren Lösungsmethoden.

**Aufgabe 9.** Lösen Sie die folgenden DGLn mit Anfangsbedingungen:

- (i)  $y' = y \sin x + \sin x$  und  $y(0) = 0$ ;
- (ii)  $y' = 2y + 1 + x^2$  und  $y(0) = 1$ .

Und noch zwei Beispielaufgaben für DGLen mit getrennten Variablen:

**Aufgabe 10 (Herbst 2008, Thema 1, Aufgabe 5).** Man bestimme die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y' = -\frac{1 + 2x}{1 + 2y}, \quad y(0) = 0,$$

im Bereich

$$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\frac{1}{2} < y\}$$

mit maximalem Definitionsintervall.

**Aufgabe 11 (Frühjahr 2007, Thema 1, Aufgabe 5).** Man bestimme alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = 2xy(y-1),$$

die auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert sind. (Hinweis:  $\frac{1}{y(y-1)} = \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}$ .)

#### 14. Exakte Differentialgleichungen – 4. Juli

Wir sprechen von einer **expliziten** Differentialgleichung, sofern eine Auflösung  $y' = f(x, y)$  besteht (man denke hier an den Satz über implizite Funktionen, andernfalls handelt es sich um eine **implizite** Differentialgleichung. Nicht alle Differentialgleichungen besitzen eine (reelle) Lösung; beispielsweise besitzt die implizite Differentialgleichung  $(y')^2 + 1 = 0$  keine reelle Lösung.

Exakte Differentialgleichungen entstehen durch Differentiation mit der Kettenregel. Im Folgenden sei  $U \subset \mathbb{R}^2$  ein **Gebiet**, d.h. eine offene zusammenhängende Teilmenge der Ebene. Gegeben eine Funktion  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ , bilden wir den Ausdruck  $F(x, y) = c$  mit einer Konstanten  $c$ ; durch Differentiation entsteht mittels der Kettenregel

$$F_x(x, y) + F_y(x, y)y' = 0,$$

wobei  $F_x$  bzw.  $F_y$  die partiellen Ableitungen von  $F(x, y)$  bzgl.  $x$  bzw.  $y$  bezeichnen und die innere Ableitung  $y'$  natürlich wegen  $y = y(x)$  zustande kommt. Im Falle  $F_y \neq 0$  ergibt sich aus dieser impliziten Form die explizite Differentialgleichung

$$y' = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}.$$

Seien nun  $A, B : U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann heißt die Differentialgleichung

$$A(x, y) + B(x, y)y' = 0$$

**exakt**, wenn eine einmal stetig differenzierbare Funktion  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  existiert, so dass

$$F_x = \frac{\partial}{\partial x} F = A \quad \text{und} \quad F_y = \frac{\partial}{\partial y} F = B;$$

in diesem Fall heißt  $F$  **Stammfunktion** der exakten DGL.

**Satz 14.1.** Sei  $U \subset \mathbb{R}^2$  ein Gebiet und  $A, B : U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig sowie die Differentialgleichung

$$A(x, y) + B(x, y)y' = 0$$

exakt mit Stammfunktion  $F$ . Dann gelten:

- (i)  $y = y(x)$  ist auf dem Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  genau dann eine Lösung, wenn  $F(x, y(x))$  konstant für alle  $x \in I$  ist;
- (ii) für alle  $(x_0, y_0) \in U$  mit  $B(x_0, y_0) \neq 0$  ist obige Differentialgleichung mit der Anfangsbedingung  $y(x_0) = y_0$  in einer Umgebung von  $x_0$  eindeutig lösbar und die Lösungskurve liegt auf  $F(x, y) = F(x_0, y_0)$ .

**Beweis.** Mit der Kettenregel ist  $y = y(x)$  genau dann auf  $I$  eine Lösung der DGL, wenn  $(x, y(x)) \in U$  und

$$0 = A(x, y(x)) + B(x, y(x))y'(x) = \frac{\partial}{\partial x}F(x, y(x)) \quad \text{für alle } x \in I;$$

das bedeutet aber nichts anderes als die Konstanz von  $F(x, y)$  auf  $I$ , was (i) beweist. Zum Beweis von (ii) sei bemerkt, dass die Höhenlinie (vgl. §8) durch den Punkt  $(x_0, y_0)$  durch die Gleichung  $F(x, y) = F(x_0, y_0)$  gegeben ist. Wegen  $F_y(x_0, y_0) = B(x_0, y_0) \neq 0$  existiert nach dem Satz 8.1 über implizite Funktionen in einer Umgebung von  $(x_0, y_0)$  eine implizite Funktion  $y(x)$  mit  $F(x, y(x)) = F(x_0, y_0)$ . •

Der folgende Exaktheitstest liefert ein hinreichendes und notwendiges Kriterium für die Exaktheit:

**Satz 14.2 (Exaktheitstest).** *Die Differentialgleichung*

$$A(x, y) + B(x, y)y' = 0$$

*ist genau dann exakt, wenn*

$$\frac{\partial}{\partial y}A(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}B(x, y) \quad \text{für alle } (x, y) \in U.$$

Ohne **Beweis** in der Vorlesung.

**Beispiel & Lösungsmethode:** Die DGL mit Anfangsbedingung

$$2xy + (2y + x^2)y' = 0, \quad y(0) = 1$$

ist exakt, denn für  $A(x, y) = 2xy$  und  $B(x, y) = 2y + x^2$  gilt  $A_y = 2x = B_x$ . Zur Berechnung von  $F$  wird zunächst  $A$  unbestimmt nach  $x$  integriert:

$$F(x, y) = \int A(x, y) dx + C(y) = \int 2xy dx + C(y) = x^2y + C(y)$$

und anschließend  $F$  partiell nach  $y$  differenziert und mit  $B$  gleichgesetzt:

$$F_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \int A(x, y) dx + C'(y) = B(y),$$

also

$$x^2 + C'(y) = 2y + x^2;$$

durch Integration folgt

$$C(y) = \int C'(y) dy = \int 2y dy = y^2.$$

Damit ergibt sich die implizite Lösung  $F(x, y) = F(x_0, y_0)$ , in unserem Beispiel also

$$x^2 + y^2 = F(x, y) = F(0, 1) = 1,$$

bzw. nach  $y$  aufgelöst die explizite Lösung  $y(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{x^4 + 4} - x^2)$  für  $x \in \mathbb{R}$ .

Ein historisches **Beispiel:** Bereits bei Euler findet man folgende exakte DGL

$$2axy dx + axx dy - y^3 dx - 3xyy dy = 0.$$

Hierzu sei angemerkt, dass Quadrate wie  $x^2$  zu Eulers Zeiten noch ausgeschrieben wurden und die gegebene Gleichung zu integrieren sei (in Eulers Worten: *integrare hanc aequationem differentialem*), was auf die Lösung  $axy - y^3x = c$  mit einer Konstanten  $c$  führt. Hierzu ist lediglich die gegebene DGL unbestimmt bzgl.  $x$  bzw.  $y$  zu integrieren.

Ein weiteres ähnliches Beispiel sei gegeben durch

$$(2x + 4y + 2) dx + (4x + 12y + 8) dy = 0$$

bzw. in üblicher Schreibweise

$$y' = -\frac{2x + 4y + 2}{4x + 12y + 8}.$$

Diese ist exakt mit Stammfunktion  $F(x, y) = x^2 + 4xy + 2x + 6y^2 + 8y$ .

Übrigens: Nicht exakt ist die Differentialgleichung  $ydx + x^2dy = 0$ . Demgegenüber ist die DGL mit

$$F(x, y) := \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

exakt; aber der Exaktheitssatz ist nicht anwendbar (siehe §4).

#### ♣ Brain is better than brawn! – 7. Juli

Differentialgleichungen besitzen viele Anwendungen. So folgt beispielsweise der radioaktive Zerfall des Kohlenstoffisotops  $C_{14}$  der nicht-trivialen Lösung der Differentialgleichung

$$y' = -\lambda y$$

mit der Zerfallskonstanten  $\lambda = 0,00012$  (pro Jahr). Wir stellen uns die Frage, *wieviele Gramm  $C_{14}$  nach viertausend Jahren von einer Ausgangsmenge von 100 Gramm noch übrig sind?* Die DGL wird gelöst durch

$$y = \varphi(t) = \exp(-0,00012t),$$

also sind nach  $t = 4000$  Jahren noch  $100 \cdot y(4000) = 61,8 \dots$  Gramm vorhanden. Die *Radiokarbonmethode* zur Datierung fossiler Objekte funktioniert wie folgt: Es bezeichne  $C_{12}$  den nicht-radioaktiven Kohlenstoff. Enthält der tote Organismus das  $\rho$ -fache des Verhältnisses von  $C_{14}$  zu  $C_{12}$  gegenüber dem Verhältniss in heute lebenden Organismen (mit  $0 < \rho < 1$ ), so ist in dem toten Organismus also nur noch das  $\rho$ -fache der  $C_{14}$ -Menge vorhanden, die im Augenblick des Todes in ihm war, womit also

$$y(\tau) = \rho y(0)$$

gilt, wobei  $\tau$  die unbekannte, seit dem Tod verstrichene Zeit bedeute. Dann ergibt sich über  $y(\tau) = \exp(-0,00012\tau)$  durch Logarithmieren

$$\tau = -\frac{\log \rho}{0,00012} \text{ Jahre.}$$

Für diese einfache Methode erhielt übrigens Willard F. Libby 1960 den Chemie-Nobelpreis!



**Beispiel:** Bei Ausgrabungen in Mesopotamien wird verkohltes Holz gefunden, bei dem das Verhältnis von  $C_{14}$  zu  $C_{12}$  nur 60 Prozent des heutigen Verhältnisses beträgt. Wie alt ist die Ruine?

**Aufgabe 12.** *Wie groß ist die Halbwertszeit von Radon? Nach welcher Zeit sind 95 Prozent der Anfangsmasse zerfallen? Wie viel Gramm Radon ist nach einer halben Stunde noch von einem Gramm Radon übrig?*

Mit der Methode der Variation der Konstanten gelingt

**Aufgabe 13 (Herbst 2005, Thema 1, Aufgabe 6).** *Bestimmen Sie die maximale Lösung des Anfangswertproblems*

$$y' = \frac{3y + 2x}{x} \quad (x > 0) \quad y(1) = 0.$$

Zur Sprache: In einiger Literatur werden Differentialgleichungen mit einer Anfangsbedingung auch als **Anfangswertproblem** bezeichnet.

In der folgenden Aufgabe ist nach der **maximalen** Lösung gefragt; hierbei ist eine Lösung gefragt, die sich nicht über ihren Definitionsbereich weiter fortsetzen lässt, dieser also maximal ist.

**Aufgabe 14 (Frühjahr 2008, Thema 3, Aufgabe 5).** *Man bestimme die maximale Lösung des Anfangswertproblems*

$$y' = \cos^2 x + y \cdot \tan x \quad \text{mit} \quad y(0) = 1.$$

Und abschließend noch eine DGL zum Thema Exaktheit:

**Aufgabe 15.** *Zeigen Sie, dass die DGL*

$$dx - x \cot y \, dy = 0$$

*nicht exakt ist, wohl aber*

$$\frac{1}{\sin y} dx - x \frac{\cos y}{(\sin y)^2} dy = 0;$$

*beweisen Sie für die letztere DGL die Lösung*

$$F(x, y) = \frac{x}{\sin y} = c$$

*mit einer beliebigen Konstanten  $c$ .*

## 15. Existenz- und Eindeutigkeitssätze – 11. Juli

Wir wollen nun unter möglichst allgemeinen Bedingungen sicherstellen, dass eine Differentialgleichung lösbar ist.

**Satz 15.1 (Existenzsatz von Peano).** *Die Funktion  $f(x, y)$  sei stetig auf dem Rechteck*

$$R := \{(x, y) : |x - \xi| \leq a, |y - \eta| \leq b\}$$

und es sei  $M := \max\{|f(x, y)| : (x, y) \in R\}$  und  $\alpha := \min\{a, \frac{b}{M}\}$ . Dann gibt es mindestens eine auf  $[\xi - \alpha, \xi + \alpha]$  existierende Lösung der Differentialgleichung mit Anfangsbedingung

$$y' = f(x, y) \quad \text{und} \quad y(\xi) = \eta.$$

Ohne **Beweis** in der Vorlesung.

In vielen Beispielen hatten wir DGLen mit einer eindeutigen Lösung kennen gelernt. Dieses Phänomen beschreibt der folgende

**Satz 15.2 (Satz von Picard-Lindelöf).** Sei  $G \subset \mathbb{R}^2$  und  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  sowie  $(\xi, \eta) \in G$  und  $f(x, y)$  stetig auf dem Rechteck

$$R := \{(x, y) \in G : |x - \xi| \leq a, |y - \eta| \leq b\}$$

für gewisse  $a, b > 0$  und genüge dort der **Lipschitz-Bedingung**

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq \ell |y_1 - y_2| \quad \text{für alle } (x, y_1), (x, y_2) \in R$$

mit einer gewissen Konstanten  $\ell > 0$ . Dann besitzt die Differentialgleichung mit Anfangsbedingung

$$y' = f(x, y) \quad \text{mit} \quad y(\xi) = \eta$$

eine eindeutige Lösung auf einem Intervall  $I$  um  $\xi$ .

Zur Lipschitz-Bedingung sei bemerkt, dass eine bzgl.  $y$  stetig partiell differenzierbare Funktion  $f(x, y)$  lokal stets einer solchen genügt, wie aus dem Mittelwertsatz folgt. Hingegen ist der Satz nicht auf die DGL  $y' = y^{\frac{2}{3}}$  anwendbar, denn etwa mit Hilfe des Satzes 12.1 finden wir neben der Nullfunktion  $\varphi_0$  für beliebiges  $\alpha \in \mathbb{R}$  via

$$\frac{1}{3}y^{\frac{1}{3}} = \int \frac{dy}{y^{\frac{2}{3}}} = \int dx = x - \alpha$$

die weiteren Lösungen

$$\psi_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{27}(x - \alpha)^3.$$

Wegen  $\varphi_0(\alpha) = \psi_\alpha(\alpha) = 0$  ist die Eindeutigkeitsaussage in Satz 15.2 verletzt und also  $f(x, y) = y^{\frac{2}{3}}$  genügt keiner Lipschitz-Bedingung. Zwar ist  $f$  für  $y \neq 0$  differenzierbar mit

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}},$$

so dass  $f(x, y)$  in  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$  lokal einer Lipschitz-Bedingung erfüllt, nicht aber in irgendeinem Punkt  $(\alpha, 0)$ .

**Beweisidee für Satz 15.2:** Ausgehend von einer beliebigen auf  $I$  stetigen Funktion  $\varphi_0$ , die dort  $|\varphi_0(x) - \eta| \leq b$  genügt, bilde man eine durch die Iteration

$$\varphi_{n+1}(x) := \eta + \int_{\xi}^x f(t, \varphi_n(t)) dt$$

erklärte Funktionenfolge  $\varphi_n$ . Mit dem Banachschen Fixpunktsatz erweist sich diese Folge als konvergent und die Grenzfunktion  $\varphi := \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n$  besitzt die gewünschte Eigenschaften:  $\varphi(\xi) = \eta$  und

$$\frac{\partial}{\partial x} \varphi(x) = \frac{\partial}{\partial x} \int_{\xi}^x f(t, \varphi_n(t)) dt = f(x, \varphi).$$

Das dem Beweis entstammende so genannte **Picard-Lindelöfsche – Iterationsverfahren** führt manchmal sogar zu expliziten Lösungen:

**Beispiele:** Gegeben die DGL  $y' = 2xy$  mit der Bedingung  $y(0) = c$  bilden wir der Reihe nach

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= c, \\ \varphi_1(x) &= c + \int_0^x 2tc dt = c(1 + x^2), \\ \varphi_2(x) &= c + \int_0^x 2t(1 + t^2)c dt = c \left( 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} \right), \\ &\dots \\ \varphi_n(x) &= c + \int_0^x 2t\varphi_{n-1}(t) dt = c \left( 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \dots + \frac{x^{2n}}{n!} \right). \end{aligned}$$

Im Vergleich mit der Exponentialreihe ergibt sich daraus als eindeutige Lösung

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = c \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} = c \exp(x^2).$$

Ebenso führt ein Potenzreihenansatz zum Ziel (vgl. §11).

Als Nächstes betrachten wir die ähnlich aussehende DGL  $y' = 2xy^2$ . Die rechte Seite ist auf ganz  $\mathbb{R}^2$  definiert und ist dort stetig partiell nach  $y$  differenzierbar, womit die DGL also insbesondere einer Lipschitz-Bedingung genügt und der Satz 15.2 von Picard-Lindelöf liefert für die Anfangsbedingung  $y(0) = c$  mit beliebigem, aber festen  $c \in \mathbb{R}$  die Existenz einer eindeutigen Lösung. Für  $c = 0$  ist dies die Nullfunktion; für  $c \neq 0$  berechnet sie sich mittels Trennung der Variablen (Satz 12.1) als

$$y = \varphi(x) = \frac{1}{\frac{1}{c} - x^2}.$$

Speziell für  $c > 0$  ist die Lösung bloß für  $|x| < \frac{1}{\sqrt{c}}$  erklärt. Für  $c < 0$  hingegen ist die Lösung auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert. Obwohl die Lipschitz-Bedingung überall lokal erfüllt ist, kann die eindeutige Lösung also u.U. nur in einer sehr kleinen Umgebung von  $\xi$  definiert sein!

Die beiden Existenz- und Eindeutigkeitssätze gelten tatsächlich nicht nur für einzelne Differentialgleichungen sondern sogar für Systeme. Mit solchen Systemen von Differentialgleichungen wollen wir uns im Folgenden beschäftigen.

## 16. Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnung – 14. Juli

Sei  $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  und  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann heißt

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

eine **Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung** und unter einer Lösung verstehen wir eine auf einem Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  erklärte  $n$ -mal differenzierbare Funktion  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ , die folgenden Eigenschaften genügt:

- Die Menge

$$\{(x, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \in I \times \mathbb{R}^n : y_j = \varphi^{(j)}(x) \text{ für } j = 0, 1, \dots, n-1\}$$

ist in  $G$  enthalten, und

- für alle  $x \in I$  gilt

$$\varphi^{(n)}(x) = f(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)).$$

Eine DGL  $n$ -ter Ordnung schreibt also eine Bedingung für die  $n$ -te Ableitung einer Funktion vor, welche zudem auch von Ableitungen niedrigerer Ordnung abhängen kann.

Es gilt ein Analogon des Satzes 15.2 von Picard-Lindelöf:

**Satz 16.1 (Satz von Picard-Lindelöf; beliebige Ordnung).** Sei  $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  und  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, welche lokal einer Lipschitz-Bedingung

$$|f(x, Y) - f(x, \tilde{Y})| \leq \ell \|Y - \tilde{Y}\| \quad \text{für alle } (x, Y), (x, \tilde{Y}) \in G$$

mit einer gewissen Konstanten  $\ell > 0$  genüge. Ist dann  $(\xi, \eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{n-1}) \in G$ , so besitzt die Differentialgleichung

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

mit Anfangsbedingung

$$y(\xi) = \eta_0, \dots, y'(\xi) = \eta_1, \dots, y^{(n-1)}(\xi) = \eta_{n-1}$$

eine eindeutige Lösung auf einem Intervall  $I$  um  $\xi$ .

Der **Beweis** verläuft ähnlich zu dem von Satz 15.2.

**Beispiel:** Die DGL  $y'' + y = 0$  besitzt die auf ganz  $\mathbb{R}$  definierten Lösungen  $y = \cos x$  und  $y = \sin x$ . Allgemeiner löst damit natürlich auch jede Linearkombination

$$y = \varphi_{a,b}(x) := a \cos x + b \sin x \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R}$$

diese DGL. Wegen  $\varphi_{a,b}(0) = a$  und  $\varphi'_{a,b}(0) = b$  ist  $\varphi_{a,b}$  nach Satz 16.1 die eindeutige Lösung dieser DGL mit Anfangsbedingung  $y(0) = a$ ,  $y'(0) = b$ .

Wir betrachten die allgemeinere **homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung**

$$y'' + ay' + by = 0 \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R}.$$

Mit dem Ansatz  $y = \varphi(x) = \exp(\lambda x)$  mit einem nicht weiter bestimmten  $\lambda$  liefert Differentiation eine Lösung für die DGL, wenn

$$0 = \lambda^2 \exp(\lambda x) + a\lambda \exp(\lambda x) + b \exp(\lambda x) = (\lambda^2 + a\lambda + b) \exp(\lambda x).$$

Da die Exponentialfunktion nicht verschwindet, muss also notwendig die **charakteristische Gleichung**

$$0 = \lambda^2 + a\lambda + b$$

erfüllt sein. Die Wurzeln dieser Gleichung berechnen sich als

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}).$$

Wir nehmen zunächst an, dass  $a^2 - 4b > 0$  gilt, so dass beide Nullstellen verschieden und reellwertig sind. In diesem Fall erhalten wir zwei reelle, linear unabhängige Lösungen

$$\varphi_1(x) = \exp(\lambda_1 x) \quad \text{und} \quad \varphi_2(x) = \exp(\lambda_2 x)$$

und auch jede Linearkombination der beiden liefert eine weitere Lösung der gegebenen DGL.

Gilt hingegen  $a - 4b = 0$ , also  $\lambda_1 = \lambda_2$ , so liefert der Ansatz nur eine Basislösung  $\varphi_1(x) = \exp(\lambda_1 x)$ . Mit Variation der Konstanten (Satz 13.2) folgt in diesem Fall via

$$y = \varphi(x) = c(x)\varphi_1(x)$$

die allgemeine Lösung als

$$y = \varphi(x) = (c_1 x + c_0) \exp(\lambda_1 x) \quad \text{mit} \quad c_0, c_1 \in \mathbb{R}.$$

Insbesondere sind dann beispielsweise  $\exp(\lambda_1 x)$  und  $x \exp(\lambda_1 x)$  zwei reelle, linear unabhängige Lösungen.

Gilt nun aber  $a - 4b < 0$ , so lassen sich  $\lambda_1, \lambda_2$  mit Hilfe komplexer Zahlen (vgl. 'Elementare Zahlentheorie') darstellen als

$$\lambda_1 = \alpha + \beta\sqrt{-1} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \alpha - \beta\sqrt{-1}$$

(mit  $\alpha = -\frac{a}{2}$  und einem ebenso expliziten Ausdruck für  $\beta$ ); dann bilden

$$\varphi_1(x) = \exp(\alpha x) \cos \beta x \quad \text{und} \quad \varphi_2(x) = \exp(\alpha x) \sin \beta x$$

zwei linear unabhängige Lösungen der DGL. Damit sind in allen drei Fällen zur Wurzelverteilung der charakteristischen Gleichungen jeweils zwei reelle, linear unabhängige Lösungen der DGL angegeben worden. Wird zudem eine Anfangsbedingung an die erste und zweite Ableitung gestellt (wie im obigen Beispiel), so ergibt sich mit dem Satz 16.1 von Picard-Lindelöf jeweils eine eindeutige Lösung.

**Beispiel:** Die DGL  $y'' - 6y' + 5y = 0$  besitzt die charakteristische Gleichung  $\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$  mit den zwei verschiedenen reellen Nullstellen  $\lambda_1 = 1$  und  $\lambda_2 = 5$ . Damit ist die allgemeine Lösung von der Form  $y = \varphi(x) = a \exp(x) + b \exp(5x)$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Nun betrachten wir noch einen nicht notwendig linearen, aber trotzdem speziellen Typ einer DGL zweiter Ordnung, die sich allgemein behandeln lässt: Sei dazu eine DGL der Form

$$y'' = f(x, y')$$

gegeben. Hier bietet sich eine Substitution  $z = y'$  an; diese führt nämlich die DGL zweiter Ordnung in eine erster Ordnung über:

$$z' = f(x, z).$$

Bestand eine Anfangsbedingung  $y(\xi) = \eta_0, y'(\xi) = \eta_1$ , so löse man zunächst die DGL erster Ordnung mit der Anfangsbedingung  $z(\xi) = \eta_1$  und substituiere danach zurück gemäß

$$y = \varphi(x) = \eta_0 + \int_{\xi}^x z(t) dt.$$

Oftmals ist es sinnvoll eine DGL höherer Ordnung von der Form

$$(9) \quad y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

auf ein System von DGLen erster Ordnung wie im Folgenden zurückführen: Wir setzen

$$(10) \quad y'_0 = y_1, \quad y'_1 = y_2, \quad \dots \quad y'_{n-2} = y_{n-1}, \quad y'_{n-1} = f(x, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}).$$

Setzen wir

$$Y := \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad F(x, Y) := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ f(x, Y) \end{pmatrix},$$

so lässt sich (10) auch kurz als  $Y' = F(x, Y)$  schreiben. Ist nun  $y = \varphi$  eine Lösung von (9), d.h.

$$(11) \quad \varphi^{(n)}(x) = f(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)),$$

dann definieren wir auf  $I$

$$(12) \quad \Phi = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_{n-1} \end{pmatrix}$$

vermöge

$$\varphi_0(x) := \varphi(x), \quad \varphi_1(x) := \varphi'(x), \quad \dots, \quad \varphi_{n-1}(x) := \varphi^{(n-1)}(x).$$

Dann ist  $\Phi$  offensichtlich eine Lösung des Systems (10) von DGLen erster Ordnung.

Ist umgekehrt eine Lösung von (10) der Form (12) gegeben, so entnehmen wir den ersten  $n - 1$  Gleichungen von (9), dass mit  $\varphi := \varphi_0$  sukzessive

$$\varphi_1 = \varphi'_0 = \varphi', \quad \varphi_2 = \varphi'_1 = \varphi'', \quad \dots, \quad \varphi_{n-1} = \varphi'_{n-2} = \varphi^{(n-1)}$$

gilt; dabei folgt aus der Differenzierbarkeit von  $\varphi_{n-1}$ , dass  $\varphi$   $n$ -mal differenzierbar ist und die DGL (11) besteht. Damit stehen die Lösungen von (9) und (10) also in

ein-eindeutiger Beziehung zueinander. Im Folgenden werden Systeme von DGLen behandelt werden.

### 17. Systeme linearer Differentialgleichungen erster Ordnung – 18. Juli

Im Folgenden sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$$

eine stetige Abbildung, d.h. alle Abbildungen  $a_{ij} : I \rightarrow \mathbb{R}$  sind stetig. Ferner sei

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$$

eine stetige vektorwertige Funktion. Dann heißt

$$y' = A(x)y + b(x)$$

ein **lineares Differentialgleichungssystem**; ist hierin  $b$  verschieden vom Nullvektor, so sprechen wir von einem **inhomogenen**, andernfalls, wenn also  $b$  der Nullvektor ist, von einem **homogenen** Differentialgleichungssystem (in Analogie zu linearen Gleichungssystemen in der 'Linearen Algebra'). Unter einer Lösung  $y$  verstehen wir eine vektorwertige Abbildung und  $y'$  ist die zugehörige Abbildung, in der die einzelnen Komponentenfunktionen differenziert vorliegen.

**Satz 17.1.** *Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und  $A$  und  $b$  stetige Abbildungen (wie oben) sowie  $\xi \in I$  und  $\eta \in \mathbb{R}^n$  beliebig. Dann besitzt das lineare Differentialgleichungssystem mit Anfangsbedingung*

$$y' = A(x)y + b(x) \quad \text{mit} \quad y(\xi) = \eta$$

*eine eindeutige Lösung  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ .*

**Beweisidee:** Die Funktion  $f(x, y) = A(x)y + b(x)$  genügt einer globalen Lipschitz-Bedingung auf jeder kompakten Menge  $J \times \mathbb{R}^n$ , wobei  $J \subset I$ . Mit Hilfe der Stetigkeit von  $A$  ergibt sich die Existenz einer Lipschitz-Konstante  $\ell = \sup\{\|A(x)\| \mid x \in J\}$  für  $f$  in Analogie zu den Sätzen 15.2 und 16.1 von Picard-Lindelöf. Mit dem zugehörigen Picard-Lindelöfschen Iterationsverfahren findet sich damit eine auf  $J$  gleichmäßig konvergente Funktionenfolge  $\varphi_n$  und die Grenzfunktion  $\varphi$  erfüllt die DGL. • Im Spezialfall linearer DGLen existieren Lösungen also stets über einem ganzen Intervall.

Zur tatsächlichen Lösung eines linearen DGLssystems betrachten wir (in Analogie zur Theorie der linearen Gleichungssysteme) zunächst das zugehörige homogene DGLssystem.

**Satz 17.2.** *Die Menge  $L_h$  aller Lösungen des homogenen linearen DGLssystems*

$$y' = A(x)y$$

(mit den Bezeichnungen und Bedingungen wie oben) ist ein  $n$ -dimensionaler Vektorraum über  $\mathbb{R}$ . Für ein Tupel von Lösungen  $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in L_h$  sind äquivalent:

- (i) Die Funktionen  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$  sind linear unabhängig über  $\mathbb{R}$ ;
- (ii) es existiert ein  $x \in I$ , so dass die Vektoren  $\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x) \in \mathbb{R}^n$  linear unabhängig sind;
- (iii) für jedes  $x \in I$  sind die Vektoren  $\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x) \in \mathbb{R}^n$  linear unabhängig.

**Beweis** (analog zur Theorie linearer Gleichungssysteme): Trivialerweise ist die identisch verschwindende Abbildung  $0 \in L_h$ . Ferner gilt für  $\varphi, \psi \in L_h$  auch

$$(\varphi + \psi)' = \varphi' + \psi' = A\varphi + A\psi = A(\varphi + \psi),$$

so dass also  $L_h$  additiv abgeschlossen ist, und ähnlich weist man die Abgeschlossenheit bzgl. Multiplikation mit Skalaren nach. Damit ist  $L_h$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Die Implikationen (i) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i) zur linearen Unabhängigkeit weist man routinemäßig nach. Es verbleibt die Dimension von  $L_h$  zu bestimmen: Zu den Standardbasiseinheitsvektoren  $e_1, \dots, e_n$  des  $\mathbb{R}^n$  existieren nach Satz 17.1 Funktionen  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in L_h$  mit  $\varphi_j(\xi) = e_j$  für ein fest gewähltes  $\xi \in I$ . Also folgt  $\dim L_h \geq n$  nach (ii). Gäbe es  $n + 1$  linear unabhängige Lösungen  $\psi_1, \dots, \psi_{n+1}$  folgte nach (iii), dass die Vektoren  $\psi_1(x), \dots, \psi_{n+1}(x)$  im  $\mathbb{R}^n$  linear unabhängig wären, was unmöglich ist. Also gilt  $\dim L_h = n$ . •

Eine Basis von  $L_h$  nennt man ein **(Lösungs-)Fundamentalsystem** des DGDLSsystems; damit ergeben sich alle Elemente von  $L_h$  durch Linearkombinationen der Basiselementen.

**Beispiel:** Gegeben sei das homogene DGLSystem

$$y_1' = -\omega y_2, \quad y_2' = \omega y_1$$

mit einer reellen Konstanten  $\omega$ , bzw. in Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Als Lösungen erkennt man sofort

$$\varphi_1(x) = \begin{pmatrix} \cos \omega x \\ \sin \omega x \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \varphi_2(x) = \begin{pmatrix} -\sin \omega x \\ \cos \omega x \end{pmatrix}.$$

Diese Lösungen sind linear unabhängig, denn (nach einem Kriterium der 'Linearen Algebra' gilt)

$$\det \begin{pmatrix} \cos \omega x & -\sin \omega x \\ \sin \omega x & \cos \omega x \end{pmatrix} = (\cos \omega x)^2 + (\sin \omega x)^2 = 1 \neq 0.$$

Also bilden  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  ein Fundamentalsystem.

Als Nächstes betrachten wir inhomogene lineare DLGssysteme; es besteht ein ähnlicher Zusammenhang wie bei linearen Gleichungssystemen.



**Satz 17.3.** Für die Menge  $L_i$  aller Lösungen des inhomogenen linearen DGLsystems

$$y' = A(x)y + b$$

(mit den Bezeichnungen und Bedingungen wie oben) gilt  $L_i = \varphi_0 + L_h$ , wobei  $y = \varphi_0$  eine beliebige Lösung des DGLsystems sei und  $L_h$  der Vektorraum der Lösungen des zugehörigen homogenen Systems.

Die allgemeine Lösung ergibt sich also als Summe einer beliebigen speziellen Lösung und der allgemeinen Lösung des homogenen DGLsystems.

**Beweis.** Sei  $\phi \in L_i$ , dann ist

$$(\phi - \phi_0)' = \phi' - \phi_0' = A\phi + b - (A\phi_0 + b) = A(\phi - \phi_0),$$

also  $\phi - \phi_0 \in L_h$  bzw.  $L_i \subset \phi_0 + L_h$ . Die umgekehrte Implikation  $\phi_0 + L_h \subset L_i$  zeigt sich ähnlich. •

Zur vollständigen Lösung eines linearen DGLsystems ist also u.a. eine des zugehörigen inhomogenen Systems nötig. Hier hilft die Methode der **Variation der Konstanten** in ihrer allgemeinen Form (vgl. §13):

**Satz 17.4.** Es sei  $\Phi$  ein Lösungsfundamentalsystem von  $y' = A(x)y$  (mit den obigen Bezeichnungen und Bedingungen). Dann ergibt sich eine Lösung  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  des inhomogenen DGLsystems  $y' = A(x)y + b(x)$  durch den Ansatz

$$\varphi(x) = \Phi(x)u(x),$$

wobei  $u$  eine differenzierbare Funktion mit  $\Phi(x)u'(x) = b(x)$  bzw.

$$u(x) = \int_{\xi}^x \Phi^{-1}(t)b(t) dt + \text{const},$$

wobei  $\text{const}$  ein konstanter Vektor ist.

**Beweis** folgt unmittelbar aus  $\varphi' = \Phi'u + \Phi u'$  sowie  $A\varphi + b = A\Phi u + b$ , denn damit folgt aus  $\Phi' = A\Phi$  nun genau dann  $\varphi' = A\varphi + b$ , wenn  $\Phi u' = b$ . •

**Beispiel:** Gegeben sei das inhomogene DGLsystem

$$y_1' = -y_2, \quad y_2' = y_1 + x,$$

bzw. in Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}.$$

Nach dem vorangegangenen Beispiel (mit  $\omega = 1$ ) ist

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

ein Lösungsfundamentalsystem des zugehörigen homogenen DGLsystems. Invertieren der Matrix liefert

$$\Phi^{-1}(x) = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

und somit

$$\Phi^{-1}(x)b(x) = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \sin x \\ x \cos x \end{pmatrix}.$$

Damit folgt nun mit partieller Integration

$$u(x) = \int_0^x \begin{pmatrix} t \sin t \\ t \cos t \end{pmatrix} dt + \text{const} = \begin{pmatrix} -x \cos x + \sin x \\ x \sin x + \cos x \end{pmatrix} + \text{const}.$$

Daraus ergibt sich als spezielle Lösung des inhomogenen DGLssystems

$$\varphi(x) = \Phi(x)u(x) = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x \cos x + \sin x \\ x \sin x + \cos x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ 1 \end{pmatrix},$$

und die allgemeine Lösung ergibt sich durch Addition des homogenen Lösungsraumes  $L_h$ .

## 18. Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung – 21. Juli

Wir hatten in §16 gezeigt, wie sich eine DGL  $n$ -ter Ordnung in ein System von  $n$  DGLen erster Ordnung umwandeln lässt; ferner hatten wir lineare DGLen zweiter Ordnung gelöst. In §17 hatten wir Systeme von DGLen erster Ordnung behandelt und deren Lösungsstruktur untersucht. Nun wollen wir diese Ergebnisse auf allgemeine lineare DGLen höherer Ordnung übertragen:

Eine **lineare Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung** ist gegeben durch

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = b,$$

wobei die  $a_j$  für  $j = 0, 1, \dots, n-1$  sowie  $b$  stetige, auf einem Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  definierte reellwertige Funktionen seien; diese heißt **homogen**, falls  $b$  identisch verschwindet, also  $b(x) = 0$  für alle  $x \in I$ , ansonsten sprechen wir von einer **inhomogenen DGL**.

**Satz 18.1.** Die Menge  $L_h$  der Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$$

ist ein  $n$ -dimensionaler Vektorraum über  $\mathbb{R}$ . Die Menge  $L_i$  der Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = b$$

ist von der Form  $L_i = \varphi_0 + L_h$ , wobei  $\varphi_0 \in L_i$  beliebig ist. Ferner ist ein Tupel  $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in L_h$  genau dann linear unabhängig, wenn für ein und damit für alle  $x \in I$  die **Wronski-Determinante**

$$W(x) := \det \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \dots & \varphi_m(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \dots & \varphi_m'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \dots & \varphi_m^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

nicht verschwindet.

**Beweis** folgt unmittelbar aus den Ergebnissen aus §17. •

**Beispiel:** Die DGL  $y'' + y = 0$  besitzt die Lösungen  $y = \varphi_1(x) = \cos x$  und  $y = \varphi_2(x) = \sin x$  (vgl. die Beispiele aus §16 und §17). Die Wronski-Determinante berechnet sich als

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} = 1 \neq 0.$$

Nach Satz 18.1 bilden also  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  tatsächlich ein Lösungsfundamentalsystem und die allgemeine Lösung ergibt sich als Linearkombinationen der beiden.

Diese DGL ist bereits ein Beispiel einer **linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten**, wobei also die Koeffizienten der Terme  $y^{(j)}$  konstante Funktionen sind; in diesem Fall lassen sich die Lösungen explizit angeben:

**Satz 18.2.** Sei  $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$  ein Polynom mit reellen Koeffizienten mit  $n$  paarweise verschiedenen komplexen Nullstellen  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Dann bilden die Funktionen

$$x \mapsto \varphi_k(x) := \exp(\lambda_k x) \quad \text{für } k = 1, \dots, n$$

ein Lösungsfundamentalsystem der Differentialgleichung

$$P(D)y = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y + a_0 = 0.$$

Das Polynom  $X^2 + 1$  besitzt keine reelle Nullstellen. Mit der **imaginären Einheit**  $i := \sqrt{-1}$  gilt jedoch  $X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$ . Allgemein nennt man eine Zahl der Form  $a + ib$  mit reellen  $a, b$  eine **komplexe Zahl**. Der *Fundamentalsatz der Algebra* besagt, dass jedes Polynom  $P$  vom Grad  $n$  genau  $n$  komplexe Nullstellen besitzt (also Nullstellen von der Form  $\lambda = \alpha + \beta\sqrt{-1}$  mit reellen  $\alpha, \beta$ ); dieser Satz ist für reelle Nullstellen offensichtlich falsch (mit Gegenbeispiel  $X^2 + 1$  etwa). Der Ausdruck  $P(D)y$  erklärt sich durch das Anwenden des Differentialoperators  $D = \frac{\partial}{\partial x}$  auf die Funktion  $y = y(x)$ ; beispielsweise steht  $D^2y$  für  $y''$ . Wir nennen  $P(X) = 0$  auch die **charakteristische Gleichung** bzw.  $P$  das **charakteristische Polynom** der DGL.

**Beweis.** Dass die Funktionen  $\varphi_k(x) = \exp(\lambda_k x)$  Lösungen sind, ergibt sich sofort durch Einsetzen in die DGL:

$$\varphi'_k(x) = \lambda_k \varphi_k(x) \quad \text{bzw.} \quad \varphi_k^{(j)}(x) = \lambda_k^j \varphi_k(x)$$

(vgl. §16). Für die Wronski-Determinante an der Stelle  $x = 0$  zeigt sich

$$W(0) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2(x) & \dots & \lambda_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_m^{n-1} \end{pmatrix};$$

diese Determinante heißt auch **Vandermonde-Determinante** und sie verschwindet nicht für paarweise verschiedene  $\lambda_j$  (wie man per Induktion zeigt).

•

Ein erstes Beispiel hatten wir – wie bereits erwähnt – mit dem allgemeinen Fall zweiter Ordnung bereits in §16 kennen gelernt. Hier ein weiteres

**Beispiel:** Die DGL

$$y''' - 2y'' + y' - 2y = 0$$

besitzt das zugehörige charakteristische Polynom

$$P(X) = X^3 - 2X^2 + X - 2 = (X^2 + 1)(X - 2).$$

Mit der imaginären Einheit  $i = \sqrt{-1}$  sind die zugehörigen Nullstellen  $2, +i, -i$  und somit bilden die Funktionen

$$\varphi_1(x) = \exp(2x), \quad \varphi_2(x) = \exp(ix), \quad \varphi_3(x) = \exp(-ix)$$

ein Fundamentalsystem; die Linearkombinationen

$$\psi_1(x) := \frac{1}{2}(\varphi_2(x) + \varphi_3(x)) = \cos x \quad \text{und} \quad \psi_2(x) := \frac{1}{2i}(\varphi_2(x) - \varphi_3(x)) = \sin x$$

liefern bekannte trigonometrische Lösungen für die gegebene DGL (was aus der Formel  $\exp(i\alpha) = \cos \alpha + i \sin \alpha$  folgt). Es ist nicht schwer zu zeigen, dass die Funktionen  $\sin x, \cos x, \exp(2x)$  ein reelles Lösungsfundamentalsystem bilden.

Im Falle mehrfacher Nullstellen gilt folgendes Analogon zu Satz 18.2:

**Satz 18.3.** *Sei  $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$  ein Polynom mit reellen Koeffizienten mit  $n$  paarweise verschiedenen komplexen Nullstellen  $\lambda_j$  mit den jeweiligen Vielfachheiten  $\kappa_j$  für  $j = 1, \dots, r$ . Dann bilden die Funktionen*

$$x \mapsto \varphi_{jm}(x) := x^m \exp(\lambda_j x) \quad \text{für } m = 0, \dots, \kappa_j - 1, \quad j = 1, \dots, r$$

ein Lösungsfundamentalsystem der Differentialgleichung

$$P(D)y = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y + a_0 = 0.$$

Man beachte, dass  $\kappa_1 + \dots + \kappa_r = n$  gilt.

**Beweis** durch Nachrechnen (vgl. auch den Fall  $n = 2$  in §16); die lineare Unabhängigkeit der Funktionen  $\varphi_{jm}$  zeigt sich per Induktion.

**Beispiel:** Zur DGL

$$y^{(4)} - 6y'' + 9y = 0$$

gehört die charakteristische Gleichung

$$X^4 - 6X^2 + 9 = (X^2 - 3)^2 = (X - \sqrt{3})^2(X + \sqrt{3})^2.$$

Also bilden die Funktionen  $\varphi_{10}(x) = \exp(\sqrt{3}x), \varphi_{11}(x) = x \exp(\sqrt{3}x), \varphi_{20}(x) = \exp(-\sqrt{3}x), \varphi_{21}(x) = x \exp(-\sqrt{3}x)$  ein Lösungsfundamentalsystem.

Nun gilt es noch inhomogene lineare DGLen mit konstanten Koeffizienten zu betrachten; hier geben wir die Resultate ohne Beweis an:

**Satz 18.4.** Sei  $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$  ein Polynom mit reellen Koeffizienten und  $\alpha \in \mathbb{R}$  genüge  $P(\alpha) \neq 0$ . Dann besitzt die Differentialgleichung

$$P(D)y = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y + a_0 = \exp(\alpha x)$$

die spezielle Lösung

$$y = \varphi(x) = \frac{1}{P(\alpha)} \exp(\alpha x)$$

Allgemeiner besitzt die DGL

$$P(D)y = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y + a_0 = f(x) \exp(\alpha x)$$

mit einem Polynom  $f$  vom Grad  $d$  eine spezielle Lösung der Form

$$y = \varphi(x) = g(x) \exp(\alpha x),$$

wobei  $g$  ein Polynom vom Grad  $d$  ist.

**Beweisskizze.** Der allgemeine Fall lässt sich leicht durch Induktion auf den speziellen Fall reduzieren; letzteren rechnet man nach.

Im Falle  $P(\alpha) = 0$  (was man gemeinhin mit 'Resonanz' bezeichnet) findet sich im allgemeinen Fall eine Lösung wie oben mit einem Polynom  $g$  der Form  $g(x) = c_k x^k + c_{k+1} x^{k+1} + \dots + c_{k+d} x^{k+d}$ , wobei  $k$  die Vielfachheit der Nullstelle  $\alpha$  von  $P$  ist.

Tatsächlich gelten die Aussagen der obigen Sätze auch für lineare DGLen mit komplexen Koeffizienten.

## 19. Systeme linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten – 25. Juli

Abschließend wollen wir Differentialgleichungssysteme der Form  $y' = Ay$  betrachten, wobei  $A$  eine quadratische Matrix sei. Bei diesen Untersuchungen ist die Lineare Algebra sehr hilfreich.

**Satz 19.1.** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $v$  ein Eigenvektor von  $A$  zum Eigenwert  $\lambda$  (d.h.  $Av = \lambda v$ ). Dann ist

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto \varphi(x) := v \exp(\lambda x)$$

eine Lösung der Differentialgleichungssystems  $y' = Ay$ . Existiert ferner eine Basis  $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$  bestehend aus Eigenvektoren zu den Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , so bilden die Funktionen  $\varphi_j(x) := v_j \exp(\lambda_j x)$  für  $j = 1, \dots, n$  ein Lösungsfundamentalsystem.

Wir wiederholen aus der linearen Algebra: Zu einer solchen quadratischen Matrix  $A$  gibt es genau dann eine Basis aus Eigenvektoren, wenn eine weitere invertierbare Matrix  $S$  existiert, so dass  $S^{-1}AS$  eine Diagonalmatrix ist; in diesem Fall sind die Diagonaleinträge die Eigenwerte von  $A$  und die Eigenvektoren von  $A$  in den Spalten von  $S$ . Nicht jede Matrix  $A$  kann in diese Gestalt transformiert

werden; auf alle Fälle ist jedoch die Transformation in Jordansche Normalform möglich, wobei diese längs der Diagonalen aus Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

besteht (mit der Konvention, dass Nullen hier nicht eingetragen seien). Das Lösen eines DGLssystems  $y' = Ay$  kann offensichtlich auf den Fall zurückgeführt werden, wo eben  $A$  auf Normalform transformiert ist: Die Funktion  $\psi := S^{-1}\varphi$  löst die DGL  $\eta' = S^{-1}AS\eta$ .

**Beweis.** Es gilt  $y' = \varphi'(x) = \lambda v \exp(\lambda x) = Av \exp(\lambda x) = A\varphi(x) = Ay$ . Die zweite Behauptung folgt aus der linearen Unabhängigkeit der Vektoren  $\varphi_j(0)$  für  $j = 1, \dots, n$ . •

**Beispiel** (*Frühjahr 2005, Thema 2, Aufgabe 4*): Bestimmen Sie die Menge der auf  $\mathbb{R}$  definierten Lösungsfunktionen des Differenzialgleichungssystems

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= y_1(t) + 4y_2(t), \\ y_2'(t) &= 2y_1(t) + 3y_2(t). \end{aligned}$$

In Matrixschreibweise ist dies

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Zur Berechnung der Eigenwerte und -vektoren bilden wir das charakteristische Polynom zur Koeffizientenmatrix  $A$  als

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &:= \det(\lambda E - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -4 \\ -2 & \lambda - 3 \end{pmatrix} \\ &= (\lambda - 1)(\lambda - 3) - 8 = \lambda^2 - 4\lambda - 5, \end{aligned}$$

wobei  $E \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  die Einheitsmatrix sei (vgl. *Lineare Algebra*). Damit berechnen sich die Eigenwerte (also die Nullstellen von  $\chi_A(\lambda)$ ) als  $\lambda_1 = 5$  und  $\lambda_2 = -1$ . Zur Berechnung von Eigenvektoren lösen wir die homogenen Gleichungssysteme  $(A - \lambda_j E)v = 0$ ; nicht-triviale Lösungen liefern zum Beispiel die Eigenvektoren  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  und  $v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  zu  $\lambda_1$  bzw.  $\lambda_2$ . Damit ergeben sich als Lösungen

$$\varphi_1(t) = v_1 \exp(\lambda_1 t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \exp(5t), \quad \varphi_2(t) = v_2 \exp(\lambda_2 t) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \exp(-t);$$

diese bilden offensichtlich ein Lösungsfundamentalsystem und die allgemeine Lösung des DLGssystems ist von der Gestalt

$$y = \varphi(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \exp(5t) + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \exp(-t)$$

mit beliebigen Konstanten  $c_1, c_2$ .

Alternativ kann man zunächst auch die zweite DGL umschreiben zu  $y_1 = \frac{1}{2}(y_2' - 3y_2)$ , was nach Differentiation auf

$$y_1' = \frac{1}{2}(y_2'' - 3y_2')$$

führt. Setzen wir dies in die erste DGL ein, ergibt sich folgende lineare DGL *zweiter* Ordnung

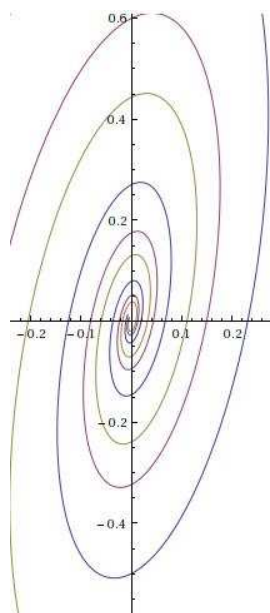
$$y_2'' - 4y_2' - 5y_2 = 0.$$

Diese besitzt dieselbe charakteristische Gleichung wie das DGLssystem und die übliche Vorgehensweise (siehe §18) liefert die bereits bekannte Lösung für  $y_2$ . Weiteres Substituieren liefert die für  $y_1$ .

Unsere linearen Differentialgleichungssysteme sind spezielle Beispiele so genannter **autonomer Systeme**; bei diesen handelt es sich um DGLen der Gestalt  $y' = f(y)$ , wo die rechte Seite also unabhängig von der Variablen ist. Solche Systeme spielen eine wichtige Rolle in diversen Prozessen in den Naturwissenschaften. Hierzu ein abschließendes Beispiel: Gegeben  $a, b \in \mathbb{R}$  besitzt das lineare DGLssystem

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 15 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

eine Vielzahl von Lösungen. Jede dieser Lösungen liefert eine ebene Kurve im  $\mathbb{R}^2$ , auch **Phasenbahn** genannt, und deren Gesamtheit heißt **Phasenporträt** der DGL. Unten eine Phasenbahn, also das Bild einer Lösung  $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$  als Funktion von  $t$ . In diesem Fall besitzt die Koeffizientenmatrix  $A$  keine reellen Eigenwerte;



tatsächlich entsteht immer ein qualitativ ähnliches Bild mit solch einem charakteristischen Strudel, in den alles hinein oder hinaus fließt — ein Szenario wie wir es z.B. von Wetterkarten kennen, wenn keine reellen Eigenwerte vorliegen. Andere Eigenwertkonstellationen führen auf Knoten oder Fixpunkten bzw. Geraden von

Ruhelagen usw., die viel über die Stabilität oder Instabilität der DGL aussagen. Die Gleichgewichtspunkte (wie im obigen Beispiel der Mittelpunkt des Strudels, lassen sich über die reelle Normalform der Koeffizientenmatrix klassifizieren!

Aber man muss nicht notwendig jedes lineare Differentialgleichungssystem mit Methoden der linearen Algebra behandeln, wie folgendes Beispiel zeigt.

**Beispiel** (*Herbst 2005, Thema 1, Aufgabe 3*): Man bestimme die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + y_2 & \text{mit } y_1(0) &= y_2(0) = 1, \\ y_2' &= y_2 + 1. \end{aligned}$$

Dieses DGLssystem ist inhomogen, was wir nicht behandelt haben, lässt sich aber wie folgt behandeln: Wir beobachten, dass die zweite DGL unabhängig von  $y_1$  ist; mit unseren Standardmethoden ergibt sich die allgemeine Lösung als  $y_2 = \varphi_2(x) = c \exp(x) - 1$ . Mit Blick auf die Anfangswertbedingung setzen wir  $c = 2$  und fügen dies in die erste DGL ein:

$$y_1' = y_1 + 2 \exp(x) - 1 \quad \text{mit } y_1(0) = 1.$$

Mit der Methode der Variation der Konstanten lösen wir diese DGL durch  $y_1 = \varphi_1(x) = 2x \exp(x) + 1$ . Beide Lösungen existieren auf ganz  $\mathbb{R}$ .

Abschließend zur Illustration ein klassisches Beispiel aus der angewandten Physik: Ein punktförmiger Körper der Masse  $m$  werde zur Zeit  $t_0 = 0$  aus dem Ursprung der  $xy$ -Ebene mit einer Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  unter dem Winkel  $\phi$  mit  $0 < \phi \leq \frac{\pi}{2}$  gegen die  $x$ -Achse geworfen. Zur Bestimmung der Wurfbahn gehen wir von einem geschwindigkeitsproportionalen Luftwiderstand aus. Zur Zeit  $t$  befinde sich unser Körper im Punkte  $(x(t), y(t))$ . Wirkt in der horizontalen Richtung keine andere Kraft als der verzögerte Luftwiderstand mit Widerstandskoeffizientem  $\rho > 0$  und in der vertikalen neben dem Luftwiderstand noch die Gravitation, so ergibt sich nach dem Newtonschen Gesetz das DGLssystem

$$mx'' = -\rho x' \quad \text{und} \quad my'' = -mg - \rho y'$$

Wir fassen diese Gleichungen als DGLen für die Horizontal- bzw. Vertikalgeschwindigkeiten  $x'$  bzw.  $y'$  auf:

$$\frac{\partial}{\partial t} x'(t) = -\frac{\rho}{m} x'(t) \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial}{\partial t} y'(t) = -\frac{\rho}{m} y'(t) - g.$$

Diese werden hinsichtlich der Anfangsbedingungen  $x'(0) = v_0 \cos \phi$  und  $y'(0) = v_0 \sin \phi$  durch

$$x'(t) = (v_0 \cos \phi) \exp\left(-\frac{\rho t}{m}\right), \quad y'(t) = \left(v_0 \sin \phi + \frac{mg}{\rho}\right) \exp\left(-\frac{\rho t}{m}\right) - \frac{mg}{\rho}$$

gelöst. Mit den weiteren Anfangsbedingungen  $x(0) = 0, y(0) = 0$  ergibt sich so

$$x(t) = \frac{m v_0 \cos \phi}{\rho} (1 - \exp(-\frac{\rho t}{m})), \quad y(t) = \frac{m}{\rho} \left(v_0 \sin \phi + \frac{mg}{\rho}\right) (1 - \exp(-\frac{\rho t}{m})) - \frac{mgt}{\rho}.$$



Mittels  $\rho \rightarrow 0+$  ergibt sich die Parameterdarstellung der Wurfbahn ohne Luftwiderstand

$$x(t) = (\nu_0 \cos \phi)t, \quad y(t) = (\nu_0 \sin \phi)t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Im Falle  $\phi \neq \frac{\pi}{2}$  lässt sich  $t$  aus dieser Darstellung eliminieren und es entsteht

$$y = \frac{\sin \phi}{\cos \phi}x - \frac{g}{2\nu_0^2(\cos \phi)^2}x^2 \quad \text{für } x \geq 0;$$

damit erweist sich die Wurfbahn ohne Luftwiderstand als ein Stück einer Parabel!