Analysis 1*

Wintersemester 2016/17

Stefan Teufel
Mathematisches Institut
Uni Tübingen

20. Januar 2017

* Diese Version des Skriptums ist nur zum Gebrauch parallel zum Besuch der Vorlesung gedacht. Das Studium des Skripts kann den Besuch der Vorlesung **nicht** ersetzen! Falls Sie Fehler finden, teilen Sie mir diese (auch die offensichtlichen) bitte mit!

Inhaltsverzeichnis

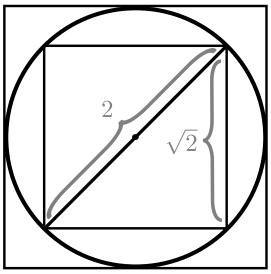
0 Einleitung: Besondere Zahlen, kleine Wunder und große Fragen

0.1 Die Kreiszahl π

Wie Sie aus der Schule wissen, hat der Einheitskreis, also der Kreis mit Radius 1, den Umfang $U = 2\pi$ und die Fläche $F = \pi$. **Aber wie bestimmt man π?**

Archimedes: Man approximiere den Kreis durch regelmäßige n-Ecke von außen bzw. von innen:

$$u_n \leq 2\pi \leq U_n \quad , \quad f_n \leq \pi \leq F_n \,.$$



Für $n = 4$ ergibt sich leicht

$$\left.\begin{array}{rcl} u_4 & = & 4\sqrt{2} \approx 5,7 \\ U_4 & = & 8 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad 2,8 \leq \pi \leq 4 \,.$$

Für $n = 96$ fand schon Archimedes

$$\left.\begin{array}{rcl} u_{96}/2 & = & 3\frac{10}{71} \\ U_{96}/2 & = & 3\frac{1}{7} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad 3,1408 \leq \pi \leq 3,1428 \,.$$

Es stellt sich nun die Frage, ob $U_n - u_n \overset{n\to\infty}{\to} 0$ gilt? Und wenn ja, gibt es genau eine Zahl π mit $u_n \overset{n\to\infty}{\to} 2\pi$ und $U_n \overset{n\to\infty}{\to} 2\pi$?

Der Einfachheit halber betrachten wir an dieser Stelle die gleiche Fragestellung für $\sqrt{2}$. Definiert wird $\sqrt{2}$ durch die Eigenschaft $(\sqrt{2})^2 = 2$. Aber was und wie groß ist $\sqrt{2}$?

Ein erster Versuch ist $x_0 = \frac{3}{2}$ also $(x_0)^2 = \frac{9}{4} = 2,25$. Das können wir mit folgender Beobachtung verbessern: da wir offenbar x_0 zu groß gewählt haben, also $x_0 > \sqrt{2}$ ist, gilt $\frac{2}{x_0} < \sqrt{2}$. Es liegt also $\sqrt{2}$ im Intervall $(\frac{2}{x_0}, x_0)$ und ist tatsächlich das geometrische Mittel der beiden Randpunkte

$$\sqrt{\tfrac{2}{x_0} \cdot x_0} = \sqrt{2} \,.$$

Ersetzt man das geometrische Mittel durch das arithmetische Mittel

$$x_1 := \tfrac{1}{2}(x_0 + \tfrac{2}{x_0}) \,,$$

so liefert $2/x_0 < x_1 < x_0$ eine bessere Approximation an $\sqrt{2}$ als der Startwert x_0:

$$x_1 = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{3}{2} + \tfrac{4}{3}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{9+8}{6}\right) = \tfrac{17}{12}$$

mit

$$(x_1)^2 = \tfrac{289}{144} \approx 2,0069 \,.$$

Diesen Schritt können wir nun beliebig oft wiederholen. Für x_2 ergibt sich

$$x_2 = \tfrac{1}{2}\left(x_1 + \tfrac{2}{x_1}\right) = \frac{577}{408}\,, \qquad \text{also} \qquad (x_2)^2 = 2{,}000006\,,$$

und die allgemeine Vorschrift des "Babylonischen Algorithmus" lautet

$$x_{n+1} = \tfrac{1}{2}\left(x_n + \tfrac{2}{x_n}\right)\,.$$

Unsere Fragen von oben können wir nun präzisieren:

(a) Konvergiert die Folge x_n von Brüchen gegen eine Zahl $\sqrt{2}$?

(b) Wenn ja, ist $\sqrt{2}$ auch ein Bruch?

Die Antwort auf (b) kannten schon die Griechen: $\sqrt{2}$ **ist kein Bruch**, also nicht rational, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Beweis durch Widerspruch: Angenommen $\sqrt{2}$ ist ein Bruch, also $\sqrt{2} = \frac{q}{p}$ für $q, p \in \mathbb{N}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit (O.B.d.A.) nehmen wir q und p als teilerfremd an, da wir ja sonst kürzen könnten.

Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{q^2}{p^2} = 2 \quad &\Rightarrow \quad q^2 = 2p^2 \quad \Rightarrow \quad q^2 \text{ ist gerade} \quad \Rightarrow \quad q \text{ ist gerade} \\ &\Rightarrow \quad q^2 \text{ ist durch 4 teilbar} \quad \Rightarrow \quad p^2 \text{ ist gerade} \quad \Rightarrow \quad p \text{ ist gerade} \\ &\Rightarrow \quad p \text{ und } q \text{ sind beide durch 2 teilbar}\,. \end{aligned}$$

Dies steht aber im Widerspruch zur Annahme, dass q und p teilerfremd sind. Somit kann es solche $q, p \in \mathbb{N}$ nicht geben und es gilt $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Eine der **große Fragen** der Mathematik lautete einmal: Was genau sind irrationale bzw. reelle Zahlen?

Eine wirklich befriedigende Antwort wurde erst Ende des 19. Jahrhunderts von Cauchy und Dedekind gegeben.

0.2 Die Eulersche Zahl e

Wir betrachten als **Beispiel** die Verzinsung eines anfänglichen Kapitals K_{anf} mit dem Zinssatz x. Bei einmaliger Verzinsung zum Ende der Periode ergibt sich

$$K_{\text{end}} = (1 + x) \cdot K_{\text{anf}}\,,$$

bei zweimaliger Verzinsung jeweils zur Mitte und zum Ende der Periode

$$K_{\text{end}} = \left(1 + \tfrac{x}{2}\right) \cdot \left(1 + \tfrac{x}{2}\right) \cdot K_{\text{anf}}\,,$$

und bei n-maliger Verzinsung

$$K_{\text{end}} = \left(1 + \tfrac{x}{n}\right)^n \cdot K_{\text{anf}}\,.$$

Was passiert im Limes kontinuierlicher Verzinsung, was ist also $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{x}{n})^n$?

Wir werden zeigen, dass auch der Limes dieser Folge existiert und

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \tfrac{x}{n}\right)^n =: \mathrm{e}^x$$

definieren. Die Eulersche Zahl ist

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^n =: \mathrm{e} \approx 2{,}718$$

und sie ist (wie π und $\sqrt{2}$) irrational, aber im Gegensatz zu $\sqrt{2}$ nicht algebraisch, d.h. nicht Nullstelle eines Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten.

Die so definierte Funktion $x \mapsto \mathrm{e}^x$ hat erstaunliche Eigenschaften. Beispielsweise läßt sich e^x als konvergente Potenzreihe schreiben,

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^3}{3!} + \ldots ,$$

und die Ableitung erfüllt

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^x .$$

0.3 Die imaginäre Einheit i

Man definiert die imeganäre Einheit i durch ihre Eigenschaft, dass $\mathrm{i}^2 = -1$. Man schreibt deshalb auch $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$.

Da für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, dass $x^2 \geq 0$ ist, kann man i nicht durch bekannte Zahlen approximieren.

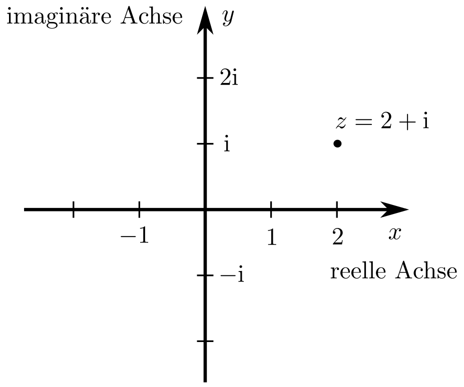
Das macht aber nichts: Man nimmt i einfach als neue Zahl hinzu und rechnet wie gewohnt weiter, beispielsweise ist

$$\mathrm{i} + \mathrm{i} = 2\mathrm{i}\,, \quad 2 + \mathrm{i} - (1 + 2\mathrm{i}) = 1 - \mathrm{i}\,, \quad \tfrac{2\mathrm{i}}{\mathrm{i}} = 2\,, \quad (3\mathrm{i}) \cdot (2\mathrm{i}) = 6\mathrm{i}^2 = -6 \quad \text{usw.}$$

Das sieht zunächst sehr formal aus und wir werden zeigen müssen, dass das Rechnen mit diesen neuen Zahlen, den sogenannten komplexen Zahlen, wirklich Sinn macht. Man kann die komplexen Zahlen aber auch visualisieren, indem man vom Zahlenstrahl zur sogenannten **Gaußschen Zahlenebene** übergeht. Eine **komplexe Zahl**

$$z = x + \mathrm{i}y \quad \text{mit} \quad x, y \in \mathbb{R}$$

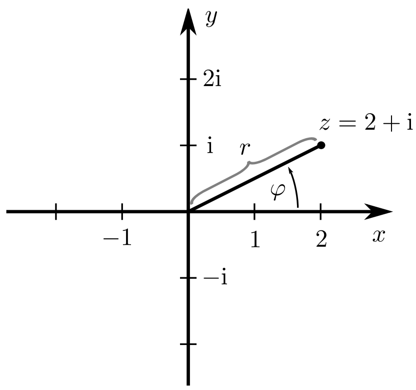
entspricht dann einem Punkt in der Ebene.



Einen Punkt in der Ebene, und somit jede komplexe Zahl, kann man aber auch mit Hilfe von **Polarkoordinaten** angeben,

$$z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)\,,$$

mit $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $\varphi = \arctan \frac{y}{x}$.



Ein **kleines Wunder** ist, dass all die hier besprochenen Zahlen auf sehr enge Weise zusammenhängen: es gilt nämlich die Eulersche Formel

$$\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\,,$$

die für $\varphi = 2\pi$ die Gleichung

$$\boxed{1 = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}}$$

liefert, wobei die Exponentialfunktion für komplexe Argumente wie zuvor durch die konvergente Reihe $\mathrm{e}^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ gegeben ist.

Das ist aber alles nur der Anfang. Es gibt noch viele großartige Entdeckungen, welche die Mathematik in den kommenden vier Semestern für Sie bereithält.

1 Zahlen: natürliche, ganze, rationale, reelle

Wir beginnen mit einer Wiederholung der üblichen Symbole:

$\mathbb{N}$	$=$	$\{1, 2, 3, \ldots\}$	**natürliche Zahlen**
$\mathbb{N}_0$	$=$	$\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$	
$\mathbb{Z}$	$=$	$\{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$	**ganze Zahlen**
$\mathbb{Q}$	$=$	$\{\text{Brüche } \frac{q}{p} \text{ mit } q, p \in \mathbb{Z} \text{ und } p \neq 0\} = \{\frac{q}{p} \,\vert\, q, p \in \mathbb{Z},\, p \neq 0\}$	**rationale Zahlen**
$\mathbb{R}$	$=$	"Zahlenkontinuum"	**reelle Zahlen**
$\mathbb{C}$	$=$	"Zahlenebene"	**komplexe Zahlen**

Sie kennen natürlich die üblichen Regeln für das Rechnen mit "Zahlen" aus der Schule. Aber was genau sind Zahlen, bzw. mit welchen mathematischen Objekten können wir rechnen wie mit Zahlen? Um das zu klären, definieren wir den Begriff des Zahlenkörpers. Ein Zahlenkörper ist eine Menge $\mathbb{K}$ (deren Elemente wir dann "Zahlen" nennen) auf der zwei Verknüpfungen

$$\begin{aligned} + : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K} \qquad & \text{genannt Addition} \\ \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K} \qquad & \text{genannt Multiplikation} \end{aligned}$$

erklärt sind.

1.1 Definition. **Das Kartesische Produkt von Mengen**
Seien M und N Mengen, so bezeichnet man mit $M \times N$ die Menge

$$M \times N := \{(m, n) \,|\, m \in M,\, n \in N\}$$

der geordneten Paare (m, n) mit $m \in M$ und $n \in N$.
Beachte: Als Elemente des kartesischen Produkts $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sind die Paare $(5, 3)$ und $(3, 5)$ verschieden, $(5, 3) \neq (3, 5)$. Als Teilmengen von $\mathbb{N}$ gilt aber $\{5, 3\} = \{3, 5\}$.

Damit $\mathbb{K}$ tatsächlich ein Zahlenkörper ist, müssen die Abbildungen $+$ und $\cdot$ gewisse grundlegenden Eigenschaften haben, genannt "Körperaxiome". Diese Axiome sind in gewisser Hinsicht minimal und wir werden alle anderen Rechenregeln aus ihnen herleiten. Das hat mehrere Vorteile. Erstens wissen wir genau, woher unsere Rechenregeln kommen. Und zweitens brauchen wir die Regeln nur einmal aus den Axiomen herzuleiten. Denn wenn wir für einen konkreten Zahlenkörper die Gültigkeit der Axiome nachprüfen können, so gelten alle anderen Rechenregeln automatisch auch. Konkret sagt uns dieses Argument später beispielsweise, dass wir in $\mathbb{C}$ rechnen können wie in $\mathbb{R}$.

1.1 Die Körperaxiome

Es sei $\mathbb{K}$ eine Menge, auf der zwei Verknüpfungen

$$\begin{aligned} + : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K} \qquad & \text{genannt Addition} \\ \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K} \qquad & \text{genannt Multiplikation} \end{aligned}$$

definiert sind. Die Addition habe die folgenden Eigenschaften:

Addition

(A1)	$(a+b)+c = a+(b+c)$ für alle $a,b,c \in \mathbb{K}$	(Assoziativität)
(A2)	$a+b = b+a$ für alle $a,b \in \mathbb{K}$	(Kommutativität)
(A3)	Es existiert ein Element $0 \in \mathbb{K}$ mit der Eigenschaft, dass $a+0=a$ für jedes $a \in \mathbb{K}$ gilt.	(Existenz des neutralen Elements der Addition)
(A4)	Für jedes $a \in \mathbb{K}$ exisitert ein Element $\tilde{a} \in \mathbb{K}$ mit $a+\tilde{a}=0$.	(Existenz eines inversen Elements der Addition)

1.2 Folgerungen. Erfüllt eine Verknüpfung + die Axiome (A1)–(A4), dann ergeben sich zwangsläufig weitere Eigenschaften:

(a) Das Nullelement ist eindeutig bestimmt, denn haben 0 und $0'$ die Eigenschaft (A3), so ist

$$0' \stackrel{(A3)}{=} 0'+0 \stackrel{(A2)}{=} 0+0' \stackrel{(A3)}{=} 0\,.$$

(b) Die Gleichung $a+x=b$ wird durch $x=b+\tilde{a}$ gelöst, wobei $\tilde{a}$ das gemäß (A4) existierende Inverse zu a ist:

$$a+(b+\tilde{a}) \stackrel{(A2)}{=} (b+\tilde{a})+a \stackrel{(A1)}{=} b+(\tilde{a}+a) \stackrel{(A2)}{=} b+(a+\tilde{a}) \stackrel{(A4)}{=} b+0 \stackrel{(A3)}{=} b\,.$$

(c) Die Lösung in (b) ist eindeutig. (Übungsaufgabe)

(d) Aus (b) und (c) folgt insbesondere, dass das inverse Element eindeutig bestimmt ist. Daher werden wir es im Folgenden mit $-a := \tilde{a}$ bezeichnen und $b+(-a) =: b-a$ schreiben.

Die Multiplikation habe die folgenden Eigenschaften:

Multiplikation

(M1)	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ für alle $a,b,c \in \mathbb{K}$	(Assoziativität)
(M2)	$a \cdot b = b \cdot a$ für alle $a,b \in \mathbb{K}$	(Kommutativität)
(M3)	Es existiert ein Element $1 \in \mathbb{K}$ mit der Eigenschaft, dass $a \cdot 1 = a$ für jedes $a \in \mathbb{K}$ gilt.	(Existenz des neutralen Elements der Multiplikation)
(M4)	Für jedes $a \in \mathbb{K}$ mit $a \neq 0$ exisitert ein $\hat{a} \in \mathbb{K}$ mit $a \cdot \hat{a} = 1$.	(Existenz eines inversen Elements der Multiplikation)

1.3 Folgerungen. (Übungsaufgaben): Erfüllt eine Verknüpfung $\cdot$ die Axiome (M1)–(M4), dann ergeben sich zwangsläufig weitere Eigenschaften:

(a) Das Einselement ist eindeutig bestimmt.

(b) Für jedes $a \neq 0$ wird die Gleichung $a \cdot x = b$ durch $x = b \cdot \hat{a}$ gelöst.

(c) Die Lösung in (b) und insbesondere das multiplikative Inverse sind eindeutig. Daher werden wir es im Folgenden mit $a^{-1} := \hat{a}$ bezeichnen und $b \cdot \hat{a} =: b/a$ schreiben.

Schließlich fordert man noch, dass Addition und Multiplikation miteinander verträglich sind.

Distributivgesetz

(D) $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ für alle $a,b,c \in \mathbb{K}$

1.4 Definition. Zahlenkörper

Eine mindestens zweielementige Menge $\mathbb{K}$ mit Verknüpfungen $+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ und $\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ welche die Axiome (A1)–(A4), (M1)–(M4) und (D) erfüllen, heißt **Körper** (englisch "field").

1.5 Bemerkung. Sowohl die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ als auch die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ bilden jeweils einen Körper. Da alle Regeln auch für $\mathbb{C}$ gelten, bilden die komplexen Zahlen ebenfalls einen Körper. Es gibt auch Körper mit endlich vielen Elementen (siehe Übungen).

Der Sinn der "abstrakten Körperaxiome" liegt darin, dass man aus ihnen eine Vielzahl von Rechenregeln ableiten kann. Für $\mathbb{R}$ sind Ihnen diese Regeln alle bekannt und scheinen trivial. Sobald man sie aber nur aus den Axiomen hergeleitet hat, kann man sicher sein, dass sie für alle Körper gelten.

1.6 Beispiele. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper.

(a) Für jedes $a \in \mathbb{K}$ gilt $a \cdot 0 = 0$.
Beweis. Es gilt $a \cdot 0 + a \cdot 0 \overset{(D)}{=} a \cdot (0 + 0) \overset{(A3)}{=} a \cdot 0$. Also ist $a \cdot 0$ Lösung der Gleichung $a \cdot 0 + x = a \cdot 0$ und somit gemäß Folgerung 1.2 (b) und (c) gleich 0. □

(b) Für jedes $a \in \mathbb{K}$ gilt $(-1) \cdot a = -a$.
Beweis. Es gilt $0 \overset{1.6\,(a)}{=} a \cdot 0 \overset{(M2)}{=} 0 \cdot a \overset{(A4)}{=} (1 + (-1)) \cdot a \overset{(D)}{=} 1 \cdot a + (-1) \cdot a \overset{(M3)}{=} a + (-1) \cdot a$. Wegen Folgerung 1.2 (d) ist also $(-1) \cdot a$ gleich dem additiven Inversen von a. □

(c) Es gilt $(-1) \cdot (-1) = 1$.
Beweis. Nach (b) ist $(-1) \cdot (-1) = -(-1)$, also gleich dem Inversen von -1. Das ist aber gemäß Folgerung 1.2 (d) eindeutig und somit gleich 1. □

Wir führen an dieser Stelle einige nützliche Sprechweisen ein.

1.7 Definition. Gruppe

Eine Menge G mit einer Verknüpfung $\circ : G \times G \to G$ heißt **Gruppe**, falls gilt:

(G1) $(g \circ h) \circ j = g \circ (h \circ j)$ für alle $g, h, j \in G$. (Assoziativität)

(G2) Es existiert ein neutrales Element $e \in G$ mit $g \circ e = e \circ g = g$ für alle $g \in G$. (Existenz der Eins)

(G3) Zu jedem $g \in G$ existiert ein $g^{-1} \in G$ mit $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$. (Existenz des Inversen)

Falls weiterhin Kommutativität gilt,

(G4) $g \circ h = h \circ g$ für alle $g, h \in G$, (Kommutativität)

so heißt die Gruppe **abelsch**.

Ein Körper $\mathbb{K}$ ist also eine abelsche Gruppe bezüglich der Addition $+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, und $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ ($\mathbb{K}$ ohne die Null) ist ein abelsche Gruppe bezüglich der Multiplikation $\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$.

Nun haben die uns bereits bekannten Körper $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ noch eine weitere wichtige Eigenschaft: Reelle Zahlen sind angeordnet, d.h. für ein Paar (a, b) von reellen Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ gilt entweder $a < b$ oder $a = b$ oder $a > b$.

Formal definiert man eine Relation R auf einer Menge M als Teilmenge des Kartesischen Produkts $R \subset M \times M$. Die Anordnungsrelation auf $\mathbb{R}$ ist also $R_< := \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid a < b\}$. Damit gilt dann, dass $a < b$ genau dann wenn $(a, b) \in R_<$.

Anordnung

Die Kleiner-Relation $a < b$ ("a kleiner b"), auch als Größer-Relation $b > a$ geschrieben, habe die folgenden Eigenschaften:

(O1) Es gilt immer genau eine der Beziehungen $a < b$, $a = b$, $a > b$. (Trichotomie)

(O2) Aus $a < b$ und $b < c$ folgt $a < c$. (Transitivität)

(O3) Aus $a < b$ folgt $a + c < b + c$ für jedes c.

(O4) Aus $a < b$ und $c > 0$ folgt $ac < bc$.

Wieder lassen sich die bekannten Rechenregeln für Ungleichungen aus diesen Anordnungsaxiomen herleiten.

1.8 Beispiele. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper mit einer Relation $R_< \subset \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ welche die Axiome (O1)-(O4) erfüllt. Dann gelten:

(a) Aus $a > 0$ folgt $-a < 0$. Denn $0 = a - a \overset{(O3)}{>} 0 - a = -a$.

(b) Aus $a > 0$ folgt $a^{-1} > 0$.

Beweis. Angenommen, $a^{-1} < 0$. Dann wäre wegen (O4) $1 = a \cdot a^{-1} < 0$, was wegen $1 > 0$ (Übungsaufgabe) ein Widerspruch ist.
Angenommen, $a^{-1} = 0$. Dann wäre $1 = a \cdot a^{-1} = 0$, was wiederum im Widerspruch zu $1 > 0$ stünde. $\square$

(c) Aus $a^2 \leq b^2$ für $a, b > 0$ folgt $a \leq b$.

Beweis. Angenommen, $a > b$, dann wäre nach (O4) $a^2 > a \cdot b$ und $a \cdot b > b^2$. Mit der Transitivität (O2) würde $a^2 > b^2$ folgen, was wegen (O1) im Widerspruch zur Annahme $a^2 \leq b^2$ steht. $\square$

Ein Körper $\mathbb{K}$ mit einer Relation $R_< \subset \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ welche die Axiome (O1)-(O4) erfüllt, heißt **angeordnet**. Der Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen mit der üblichen "$<$"-Relation ist also angeordnet ebenso wie der Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen. Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ sind nicht angeordnet, da $0 < \mathrm{i}$ mit (O4) implizieren würde, dass $\mathrm{i} \cdot 0 < \mathrm{i} \cdot \mathrm{i}$, also $0 < -1$. Analog folgt aus $0 < -\mathrm{i}$ mit (O4), dass $0 < (-\mathrm{i}) \cdot (-\mathrm{i}) = -1$.

1.9 Definition. Eine Zahl $a \in \mathbb{K}$ in einem angeordneten Körper $\mathbb{K}$ heißt positiv, falls $a > 0$ ist. Sie heißt negativ, falls $a < 0$ ist. Man schreibt $a \leq b$ falls $a < b$ oder $a = b$.

1.10 Definition. Betrag

Sei $\mathbb{K}$ ein angeordneter Körper. Der **Betrag** einer Zahl $a \in \mathbb{K}$ ist die nichtnegative Zahl $|a|$ definiert durch

$$|a| := \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0. \end{cases}$$

1.11 Folgerungen. Für alle $a, b \in \mathbb{K}$ gilt:

(a) $|a| \geq 0$ und $|a| = 0$ nur für $a = 0$.

(b) $a \leq |a|$

(c) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

(d) $a \cdot a = |a| \cdot |a|$

(e) $|a + b| \leq |a| + |b|$ (Dreiecksungleichung)

(f) $\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$ (Dreiecksungleichung von unten)

Beweis. (a) Fallunterscheidung: $a > 0 \Rightarrow |a| = a > 0$, $a < 0 \Rightarrow |a| = -a > 0$, $a = 0 \Rightarrow |a| = a = 0$.

(b) Fallunterscheidung: $a > 0 \Rightarrow a = |a|$, $a = 0 \Rightarrow a = |a|$, $a < 0 \Rightarrow 0 < -a = |a| \overset{(O2)}{\Rightarrow} a < |a|$.

(c) Fallunterscheidung ...

(d) Fallunterscheidung und 1.6 (c).

(e) $|a+b|^2 \overset{(d)}{=} (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 \overset{(b),(O3)}{\leq} a^2+|2ab|+b^2 \overset{(c),(d)}{=} |a|^2+2|a|\cdot|b|+|b|^2 = (|a|+|b|)^2$. Da $|a|+|b| \geq 0$ und $|a+b| \geq 0$, folgt mit 1.8 (c) die Behauptung.

(f) Mit (e) ergibt sich $|a| = |b+(a-b)| \leq |b| + |a-b|$, also $|a| - |b| \leq |a-b|$. Analog folgt aus $|b| = |a+(b-a)| \leq |a| + |a-b|$, dass $|b| - |a| \leq |a-b|$, und somit die Behauptung.

□

1.2 Die natürlichen Zahlen und vollständige Induktion

Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, \}$ spielen in vielerlei Hinsicht eine wichtige Rolle. Man kann sie als die kleinste induktive Teilmenge von $\mathbb{R}$ definieren. Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ heißt **induktiv**, falls

(a) $1 \in M$

(b) aus $x \in M$ folgt $x + 1 \in M$.

Da $\mathbb{N}$ die kleinste induktive Menge ist, gilt das

Induktionsprinzip

Ist M eine induktive Teilmenge von $\mathbb{N}$, so ist $M = \mathbb{N}$.

Daraus leitet sich das wichtige **Beweisprinzip der vollständigen Induktion** ab:

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $A(n)$ eine Aussage (die wahr oder falsch sein kann).

Kann man zeigen, dass

(a) $A(1)$ wahr ist (**Induktionsanfang**) und

(b) aus der Gültigkeit von $A(n)$ (**Induktionsannahme**) auch die Gültigkeit von $A(n+1)$ folgt (**Induktionsschritt**),

so ist $A(n)$ wahr für jedes $n \in \mathbb{N}$. Denn $M = \{n \in \mathbb{N} \,|\, A(n) \text{ ist wahr}\}$ ist dann eine induktive Teilmenge von $\mathbb{N}$ und aufgrund des Induktionsprizips gilt $M = \mathbb{N}$.

1.12 Beispiel. Als Beispiel beweisen wir die Formel

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 := 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \tfrac{1}{6}\, n(n+1)(2n+1)\,.$$

Beweis. durch Induktion:

Induktionsanfang: Für $n = 1$ besagt die Formel $1 = 1$, eine wahre Aussage.

Induktionsannahme: Es gelte die Formel für n, also

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \tfrac{1}{6}\, n(n+1)(2n+1)\,.$$

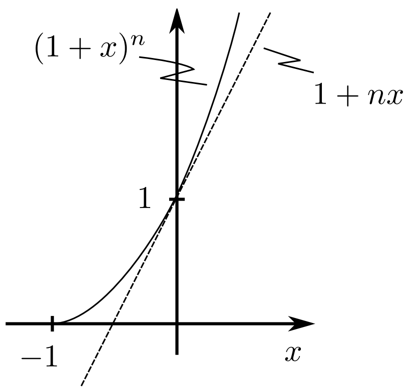
Induktionsschritt: Nachrechnen liefert

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 \quad = \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{\text{I.Ann.}}{=} && \tfrac{1}{6}\,n(n+1)(2n+1)+(n+1)^2\\
&= && \tfrac{1}{6}(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]\\
&= && \tfrac{1}{6}(n+1)[2n^2+7n+6]\\
&= && \tfrac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)\\
&= && \tfrac{1}{6}(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1),
\end{aligned}
$$

also die entsprechende Formel für $n+1$ statt n.
Induktionsschluss: Die Formel gilt für alle $n \in \mathbb{N}$. □

1.13 Satz. Bernoullische Ungleichung



Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$(1+x)^n \geq 1+nx\,.$$

Ist $n \geq 2$ und $x \neq 0$, so gilt sogar

$$(1+x)^n > 1+nx\,.$$

Beweis. durch Induktion: Für $n=1$ oder $x=0$ ist die Aussage offenbar richtig. Also müssen wir nur $(1+x)^n > 1+nx$ für $x \neq 0$ und $n \geq 2$ zeigen:
Induktionsanfang: Für $n=2$ ist $(1+x)^2 = 1+2x+x^2 > 1+2x$.
Induktionsannahme: $(1+x)^n > 1+nx$.
Induktionsschritt:

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1+(n+1)x+nx^2 > 1+(n+1)x\,.$$

□

1.14 Definition. Fakultät und Binomialkoeffizienten

(a) Für $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ definiert man $n!$ (sprich "n-Fakultät") induktiv durch

$$0! = 1 \quad \text{und} \quad (n+1)! = (n+1)\cdot n!\,.$$

Es ist also $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots n = \prod_{k=1}^n k$ für $n \in \mathbb{N}$.

(b) Für $x \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}_0$ definiert man den **Binominalkoeffizienten** $\binom{x}{k}$ (sprich "k aus x" oder "x über k") durch

$$\binom{x}{k} := \frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!} \quad \text{falls } k \geq 1 \quad \text{und} \quad \binom{x}{0} := 1\,.$$

1.15 Bemerkung. Eigenschaften der Binomialkoeffizienten

(a) Für $x \in \mathbb{N}_0$ und $k > x$ ist $\binom{x}{k} = 0$, da ein Faktor im Zähler gleich 0 ist.

(b) Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ und $k \leq n$ gilt

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\,.$$

Es ist $\binom{n}{k}$ die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge. Beispielsweise ist $\binom{49}{6} = 13.983.816$ die Anzahl der möglichen Ergebnisse beim Lotto.

(c) Für $k \in \mathbb{N}$ gilt (nachrechnen!)

$$\binom{x+1}{k} = \binom{x}{k-1} + \binom{x}{k}.$$

Daraus erhält man für $n, k \in \mathbb{N}_0$, $k \leq n$, das **Pascalsche Dreieck**

$$\xrightarrow{k=0,\dots,n}$$

$$n = 0, \dots \Big\downarrow \qquad \begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

In der $(n+1)$-ten Zeile stehen $\binom{n}{0}$ bis $\binom{n}{n}$.

1.16 Satz. **Binomischer Lehrsatz**

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Für $x, y \in \mathbb{K}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \, y^{n-k}.$$

Der Satz gilt sogar viel allgemeiner, da nur Addition und Multiplikation vorkommen, aber keine Inversen. Die binomische Formel gilt in dieser Form für kommutierende Elemente x, y eines beliebigen unitären Rings R.

Beweis. Vollständige Induktion (Übungsaufgabe). □

2 Vollständigkeit und Konvergenz

2.1 Vollständigkeit

Wir haben gesehen, dass sowohl $\mathbb{Q}$ als auch $\mathbb{R}$ angeordnete Körper sind. Andererseits gehen wir davon aus, dass $\mathbb{Q}$ eine echte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist, da die Gleichung $x^2 = 2$ in $\mathbb{Q}$ keine Lösung hat, in $\mathbb{R}$ aber schon. Es stellt sich nun die Frage, welche zusätzliche Eigenschaft von $\mathbb{R}$ die Existenz von $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ sicherstellt.

Die Eigenschaft von $\mathbb{R}$, die uns fehlt, ist die Vollständigkeit. Dafür gibt es mindestens fünf zumindest in gewisser Hinsicht äquivalente Definitionen (Supremumsaxiom, Monotonieprinzip, Cauchy-Kriterium, Bolzano-Weierstraß, Intervallschachtelungsprinzip), die wir nach und nach kennenlernen werden. Die Vollständigkeit ist von zentraler Bedeutung, für die Analysis, da sie die Existenz von Grenzwerten sicherstellt (vgl. $x_n \in \mathbb{Q}$, $x_n \overset{n\to\infty}{\to} \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.)

2.1 Definition. Beschränktheit

Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{K}$ eines angeordneten Körpers heißt **nach oben beschränkt**, falls es ein $s \in \mathbb{K}$ gibt so, dass

$$x \le s \quad \text{für jedes } x \in M.$$

Jedes solche s heißt **obere Schranke** an M.
Analog definiert man die Begriffe **nach unten beschränkt** und **untere Schranke**.

2.2 Definition. Supremum und Infimum

Sei M eine beschränkte Teilmenge eines angeordneten Körpers $\mathbb{K}$. Falls M eine kleinste obere Schranke $s \in \mathbb{K}$ besitzt, d.h. s ist obere Schranke von M und für jede andere obere Schranke $t \in \mathbb{K}$ von M gilt $s \le t$, so nennt man s das **Supremum** von M, kurz $\sup M$.

Analog definiert man das **Infimum** $\inf M$ von M als die größte untere Schranke, falls diese existiert.

2.3 Beispiele. (a) Das halboffene Intervall $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \le x < b\} \subset \mathbb{R}$ mit $a < b$ hat das Supremum b und das Infimum a.

Beweis. Es ist b offenbar obere Schranke, da jedes $x \in [a, b)$ per Definition $x < b$ erfüllt. Zu jedem $\tilde{b} < b$ gilt aber für $x := \frac{b-\tilde{b}}{2}$, dass $\tilde{b} < x < b$, also dass $x \in [a, b)$ und somit, dass $\tilde{b}$ keine obere Schranke an $[a, b)$ ist. Also ist b die kleinste obere Schranke. Für $a = \inf[a, b)$ argumentiert man analog. □

(b) Für $M = \{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{Q}$ ist $\sup M = 1$ und $\inf M = 0$.

(c) Die Menge $M = \{x \in \mathbb{Q} \,|\, x^2 < 2\} \subset \mathbb{Q}$ hat keine kleinste obere Schranke in $\mathbb{Q}$. Denn jede obere Schranke s an M erfüllt $s^2 > 2$ und unter diesen gibt es kein kleinstes Element, wie man sich beispielsweise an der in Abschnitt 0.1 konstruierten Folge x_n klarmacht. Es ist nämlich $\sup\{x \in \mathbb{Q} \,|\, x^2 < 2\} = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

2.4 Bemerkung. (a) Aufgrund der Trichotomie (O1) sind Supremum und Infimum, falls sie existieren, eindeutig bestimmt.

(b) Falls $s = \sup M$ existiert, so ist s also eine obere Schranke von M, zu jedem $t < s$ gibt es aber ein $x \in M$ mit $x > t$. Denn sonst wäre ja t ebenfalls obere Schranke und gleichzeitig kleiner als s, im Widerspruch zur Definition von s als kleinster oberer Schranke.

(c) Es ist $\inf M = -\sup(-M)$.

Ein angeordneter Körper $\mathbb{K}$ heißt anordnungsvollständig, wenn er das

Supremumsaxiom:
Jede nach oben beschränkte Teilmenge M von $\mathbb{K}$ besitzt ein Supremum.

erfüllt.

2.5 Bemerkung. (a) Der Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist nicht anordnungsvollständig, vgl. Beispiel 2.3 (c).

(b) Der Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist anordnungsvollständig. Die reellen Zahlen bilden das Zahlenkontinuum und haben keine Löcher. Man kann sogar zeigen, dass $\mathbb{R}$ bis auf Isomorphie der einzige anordnungsvollständige Körper ist. Aber dazu muss man zunächst einmal $\mathbb{R}$ konstruieren und dann zeigen, dass jeder andere angeordnete Körper isomorph zu $\mathbb{R}$ ist (was immer das genau bedeutet!). Solche Dinge macht man aber besser, wenn man etwas Mathematikerfahrung gesammelt hat. Wir stellen uns zunächst auf den Standpunkt, dass die reellen Zahlen z.B. als Dezimalzahlen mit möglicherweise nicht abbrechender Folge von Ziffern gegeben sind, und die durch die Axiome formulierten Eigenschaften haben. Für alle weiteren Überlegungen verwenden wir dann aber nur diese axiomatisch fixierten Eigenschaften.

Aus dem Supremumaxiom ergibt sich die Archimedische Eigenschaft von $\mathbb{R}$.

2.6 Satz. Archimedische Eigenschaft von $\mathbb{R}$
Zu je zwei positiven reellen Zahlen $a, b > 0$ gibt es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n \cdot a > b$.

Beweis. Da $a, b > 0$ gilt, ist auch $r := \frac{a}{b} > 0$. Es ist also zu zeigen, dass es zu jedem $r > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $n > r$, also, dass $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ unbeschränkt ist. Das zeigen wir durch Widerspruch. Angenommen, $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ ist beschränkt, dann existiert nach dem Supremumsaxiom eine kleinste obere Schranke $s := \sup \mathbb{N}$ von $\mathbb{N}$. Da mit $n \in \mathbb{N}$ auch $n + 1 \in \mathbb{N}$ ist, wäre dann $n + 1 \leq s$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und somit $n \leq s - 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $s - 1$ ebenfalls obere Schranke an $\mathbb{N}$, im Widerspruch zur Definition von s als kleinste obere Schranke. □

2.7 Bemerkung. Äquivalent zur Archimedischen Eigenschaft sind:

(a) Zu jeder positiven Zahl $r > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > r$.

(b) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

(c) Zu jeder reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ existiert eine ganze Zahl $k \in \mathbb{Z}$ mit $k \leq x < k+1$. Man schreibt für diese Zahl auch $k = \lfloor x \rfloor$ und nennt das Symbol die Gaußklammer.

Aus der Archimedischen Eigenschaft folgt, dass die rationalen Zahlen dicht in den reellen Zahlen liegen.

2.8 Satz. $\mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$
In jedem nichtleeren Intervall $(a, b) \subset \mathbb{R}$, also $a < b$, liegt eine (und somit sogar unendlich viele) rationale Zahl. Man sagt, $\mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$.

Beweis. Wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < b - a$ und $m := \min\{k \in \mathbb{Z} \mid k > a \cdot n\}$, dann ist

$$a < \frac{m}{n} = \frac{m-1}{n} + \frac{1}{n} < a + (b - a) = b\,,$$

da $m - 1 \leq a \cdot n$. □

2.9 Bemerkung. Wir haben hier verwendet, dass die nach unten beschränkte Teilmenge von $\mathbb{Z}$

$$\{k \in \mathbb{Z} \,|\, k > n \cdot a\}$$

ein Minimum, also ein kleinstes Element besitzt. Das ist zwar auch anschaulich klar, kann aber aus dem Induktionsprinzip gefolgert werden.

2.10 Satz. Jede nichtleere Teilmenge von $\mathbb{N}$ und somit jede nach unten beschränkte Teilmenge von $\mathbb{Z}$ enthält ein kleinstes Element.

Beweis. Sei $M \subset \mathbb{N}$ nichtleer, also $M \neq \emptyset$. Angenommen, M enthält kein kleinstes Element, dann ist sicherlich $1 \notin M$ also $1 \in M^c := \mathbb{N} \setminus M$. Per Induktion folgt nun aus $\{1, 2, \ldots, n\} \subset M^c$ auch $n+1 \in M^c$, da sonst ja $n+1$ kleinstes Element von M wäre. Somit ist $M^c = \mathbb{N}$ und $M = \emptyset$, was im Widerspruch zur Annahme $M \neq \emptyset$ steht. □

2.11 Bemerkung. Im Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$ verwendet man, dass jeder Bruch vollständig gekürzt werden kann. Machen Sie sich klar, dass auch das eine Konsequenz des vorangegangenen Satzes ist.

2.12 Bemerkung. Für $\mathbb{R}$ gilt die analoge Aussage nicht: Nicht jede nach unten beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat ein kleinstes Element. Beispielsweise ist für

$$M = (0,1) := \{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 < x < 1\}$$

zwar $\inf M = 0$, aber $\inf M \notin M$. Die Menge M hat kein kleinstes Element, das Minimum $\min M$ der Menge existiert nicht.

Wir merken uns also: Jede nach oben (bzw. unten) beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat ein Supremum (bzw. Infimum) aber nicht notwendigerweise ein Maximum (bzw. Minimum).

2.13 Satz. **Existenz von $\sqrt{2}$**

Die Zahl 2 hat eine positive reelle Quadratwurzel, d.h. es gibt ein $q \in \mathbb{R}$ mit $q > 0$ und $q^2 = 2$. (Entsprechend existiert zu jeder Zahl $a > 0$ aus $\mathbb{R}$ die n-te Wurzel, wobei $n \in \mathbb{N}$).

Beweis. Sei $M := \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 < 2\}$. M ist nichtleer, (z.B. $1 \in M$) und nach oben beschränkt (z.B. durch 2). Somit existiert $q := \sup M \in \mathbb{R}$. Wir zeigen $q^2 = 2$. Nach obigem gilt $1 \leq q \leq 2$.

Angenommen $q^2 > 2$. Dann gibt es einerseits wegen des Archimedischen Prinzips ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $\frac{1}{n} < q^2 - 2$ also $q^2 > 2 + \frac{1}{n}$. Aufgrund der Definition des Supremums gibt es andererseits ein $x \in M$ mit $x > q - \frac{1}{4n}$. Insgesamt liefert das

$$x^2 > q^2 - \frac{q}{2n} + \frac{1}{16n^2} \overset{q \leq 2}{\geq} 2 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{16n^2} > 2\,,$$

also einen Widerspruch zu $x \in M$.

Angenommen $q^2 < 2$, also $q^2 < 2 - \frac{1}{n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Wähle nun ein $x \in \mathbb{R}$ mit $q < x < q + \frac{1}{8n}$, dann ist einerseits $x \notin M$, aber andererseits

$$x^2 < q^2 + \frac{q}{4n} + \frac{1}{64n^2} \overset{q \leq 2}{\leq} 2 - \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{64n}\right) \cdot \frac{1}{n} < 2\,,$$

also wiederum ein Widerspruch. Damit bleibt nur $q^2 = 2$. □

2.2 Folgen

Eine Folge (x_n) in $\mathbb{R}$ (oder entsprechend in jeder beliebigen Menge M) ist eine Zuordnung, die jedem $n \in \mathbb{N}$ (oder $\mathbb{N}_0$) ein Element $x_n \in \mathbb{R}$ (oder allgemein $x_n \in M$) zuordnet. Genau genommen ist also eine Folge (x_n) eine Abbildung (Funktion) von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$,

$$(x_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R},$$

oder kurz $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Man schreibt auch oft $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$, also konkret z.B.

$$\left(\frac{1}{n}\right) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right)$$

oder

$$((-1)^n) = (-1, 1, -1, 1, -1, \ldots) .$$

Ein für die Analysis zentrales Konzept ist das der Konvergenz von Folgen. Man sagt eine reelle Folge (x_n) konvergiert gegen $x \in \mathbb{R}$, wenn die Folgenglieder beliebig nahe an x kommen und dort auch bleiben. Das ist nicht präzise genug, deshalb nun die mathematische Definition.

2.14 Definition. Folgenkonvergenz
Sei (x_n) eine reelle Folge. Wir sagen, dass (x_n) gegen $x \in \mathbb{R}$ konvergiert und schreiben

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \text{oder} \quad x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} x$$

falls gilt:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n \geq n_\varepsilon$ gilt $|x - x_n| < \varepsilon$.

Mit sogenannten **Quantoren** $\exists$ „es existiert" und $\forall$ „für alle" schreibt man abgekürzt

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \geq n_\varepsilon \quad |x_n - x| < \varepsilon .$$

Eine gegen 0 konvergente Folge wird auch als **Nullfolge** bezeichnet. Es ist also (x_n) eine Nullfolge, falls

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \geq n_\varepsilon \quad |x_n| < \varepsilon .$$

2.15 Beispiele. Nullfolgen

(a) Die Folge $x_n = \frac{1}{n}$ ist eine Nullfolge, da man zu $\varepsilon > 0$ beispielsweise $n_\varepsilon = \lceil 1/\varepsilon \rceil + 1$ (für $a \in \mathbb{R}$ ist $\lceil a \rceil$ die kleinste ganze Zahl größer oder gleich a, also $\lceil a \rceil = \lfloor a \rfloor + 1$ falls $a \notin \mathbb{Z}$) wählen kann. Für alle $n \geq n_\varepsilon$ gilt dann nämlich

$$|x_n| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon .$$

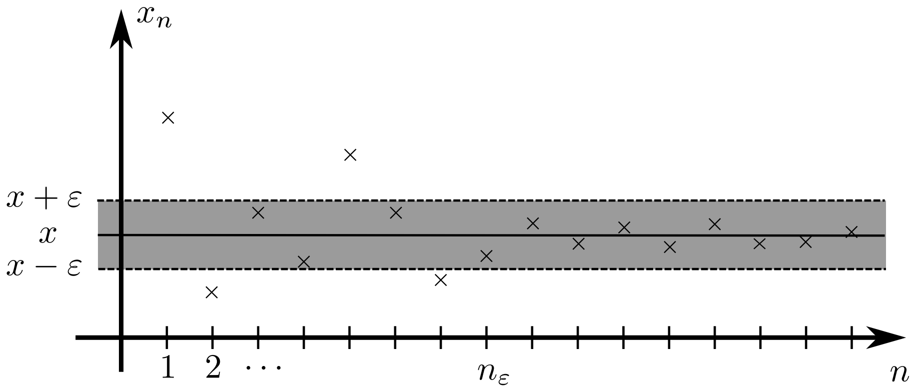
(b) Die Folge

$$(x_n) = (1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, \ldots) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 2^m \text{ für ein } m \in \mathbb{N}_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist keine Nullfolge, da es selbst zu $\varepsilon = 1$ kein passendes n_ε gibt. Denn zu jedem $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $n = 2^m \geq n_\varepsilon$ für welches dann gilt $|x_n| = 1 \geq \varepsilon$.

2.16 Merkregel. **zur Folgenkonvergenz**

Eine Folge (x_n) konvergiert gegen den Wert x falls gilt: Zu jedem ε-Schlauch (sei er auch noch so schmal) um den Grenzwert x muss es ein n_ε geben, so dass ab n_ε **alle** Folgenglieder x_n in diesem ε-Schlauch bleiben. Man sagt auch, dass schließlich alle Folgenglieder in dem ε-Schlauch liegen.



Lässt man in einer Folge (x_n) Glieder weg, so spricht man von einer **Teilfolge**, z.B. sind

$$(x_1, x_3, x_5, x_7, \ldots) \quad \text{oder} \quad (x_1, x_4, x_9, x_{16}, \ldots)$$

Teilfolgen von (x_n). Man schreibt für eine Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, d.h. das k-te Folgenglied der Teilfolge ist das n_k-te Glied der ursprünglichen Folge. Z.B. ist $(x_1, x_3, x_5, x_7, \ldots) = (x_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$, also $n_k = 2k-1$, oder $(x_1, x_4, x_9, x_{16}, \ldots) = (x_{k^2})_{k\in\mathbb{N}}$, also $n_k = k^2$. Im Allgemeinen bezeichnet $k \mapsto n_k$ eine streng monoton wachsende Funktion von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$.

Da man durch Verschieben jede konvergente Folge (x_n) mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ zu einer Nullfolge $(x_n - x)$ mit $\lim_{n\to\infty}(x_n - x) = 0$ machen kann, untersuchen wir zunächst Nullfolgen genauer.

2.17 Proposition. **Eigenschaften von Nullfolgen**

(a) Ist (y_n) eine Nullfolge und gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass $|x_n| \le |y_n|$ für alle $n \ge N$, so ist auch (x_n) eine Nullfolge.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $n_\varepsilon \ge N$ so, dass $|y_n| < \varepsilon$ für alle $n \ge n_\varepsilon$. Dann gilt auch $|x_n| \le |y_n| < \varepsilon$ für alle $n \ge n_\varepsilon$ und $|x_n|$ ist eine Nullfolge. □

Insbesondere kann man endlich viele Glieder einer Nullfolge beliebig abändern und erhält immer noch eine Nullfolge.

(b) Ist (x_n) eine Nullfolge, so ist für jedes $c \in \mathbb{R}$ auch (cx_n) eine Nullfolge.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so, dass $|x_n| \le \frac{\varepsilon}{|c|}$ für alle $n \ge n_\varepsilon$. Dann gilt $|cx_n| < \varepsilon$ für alle $n \ge n_\varepsilon$ und $|cx_n|$ ist eine Nullfolge. □

(c) Für $|q| < 1$ ist (q^n) eine Nullfolge (für $|q| \ge 1$ offensichtlich nicht, da $|q^n| \ge 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$).

Beweis. Sei $|q| < 1$ also $|q| = \frac{1}{1+h}$ für ein $h > 0$. Dann folgt aus der Bernoullischen Ungleichung

$$\frac{1}{|q^n|} = \frac{1}{|q|^n} = (1+h)^n \ge 1 + nh > nh\,,$$

also $|q^n| \le \frac{1}{nh}$, und die Aussage folgt mit (a), (b) und Beispiel 2.15 (a). □

(d) Jede Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ einer Nullfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ und wähle $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so, dass $|x_n| < \varepsilon$ für alle $n \ge n_\varepsilon$. Dann ist wegen $n_k \ge k$ auch $|x_{n_k}| < \varepsilon$ für alle $k \ge n_\varepsilon$. □

(e) Mit (x_n) und (y_n) sind auch $(x_n \pm y_n)$ Nullfolgen.

Beweis. Folgt aus der Dreiecksungleichung $|x_n \pm y_n| \leq |x_n| + |y_n|$. □

(f) Ist (x_n) eine Nullfolge und (y_n) beschränkt, d.h. es gibt ein $c \in \mathbb{R}$ mit $|y_n| \leq c$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist auch $(x_n y_n)$ eine Nullfolge.

Beweis. Folgt aus $|x_n y_n| \leq c|x_n|$. □

(g) Jede Nullfolge (x_n) ist beschränkt.

Beweis. Zu $\varepsilon = 1$ existiert ein n_1 mit $|x_n| < 1$ für alle $n \geq n_1$. Also gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, dass $|x_n| \leq \max\{1, |x_1|, |x_2|, \ldots |x_{n_1-1}|\}$. □

(h) Ist (x_n) eine Nullfolge, so ist auch $(\sqrt[m]{|x_n|})$ eine Nullfolge.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ und n_ε so, dass $|x_n| < \varepsilon^m$. Dann ist $\sqrt[m]{|x_n|} < \varepsilon$ für alle $n \geq n_\varepsilon$. □

2.18 Proposition. Eigenschaften konvergenter Folgen

(a) Grenzwerte sind eindeutig, d.h. aus $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = y$ folgt $x = y$.

Beweis. Angenommen, $x \neq y$. Setze $\varepsilon = \frac{1}{2}|x - y| > 0$, dann impliziert $|x_n - x| < \varepsilon$ aber $|x_n - y| > \varepsilon$. Also kann (x_n) nicht gleichzeitig gegen x und gegen y konvergieren. □

(b) Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Beweis. $|x_n| \leq |x_n - x| + |x|$ und $|x_n - x|$ ist nach Proposition 2.17 (g) beschränkt. □

(c) Konvergiert (x_n) gegen x, so ist $(|x_n|)$ konvergent gegen $|x|$.

Beweis. $\Big||x_n| - |x|\Big| \leq |x_n - x|$. □

(d) Dreifolgensatz: Gilt $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = a$ und $x_n \leq y_n \leq z_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist auch $\lim_{n\to\infty} y_n = a$.

Beweis. Übungsaufgabe. □

(e) Ist $M \subset \mathbb{R}$ beschränkt und $s = \sup M$, so gibt es eine Folge (x_n) in M mit $\lim_{n\to\infty} x_n = s$.

Beweis. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ wähle $x_n \in M$ mit $x_n > s - \frac{1}{n}$. So ein x_n gibt es immer, denn sonst wäre ja $s - \frac{1}{n} < s = \sup M$ schon eine obere Schranke an M. Also ist $s - \frac{1}{n} < x_n \leq s$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = s$ folgt aus (d). □

(f) Seien $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ und $a, b \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} (ax_n + by_n) = ax + by$$

und

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = xy\,.$$

Falls $y \neq 0$ ist, so gilt auch

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y}\,.$$

Beweis. Wir zeigen exemplarisch die letzte Aussage: Für n groß genug ist $|y_n| > \frac{1}{2}|y|$ also $y_n \neq 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{x}{y}\right| &= \left|\frac{x_n y - x y_n}{y_n y}\right| \leq \frac{2}{|y|^2}\Big|x_n y - x y_n\Big| \\ &= \frac{2}{|y|^2}\Big|(x_n y - xy) + (xy - x y_n)\Big| \\ &\leq \frac{2}{|y|^2}\Big(|x_n - x||y| + |y_n - y||x|\Big) \\ &= \frac{2}{|y|}|x_n - x| + \frac{2|x|}{|y|^2}|y_n - y| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,. \end{aligned}$$

□

(g) Jede Teilfolge einer konvergenten Folge konvergiert gegen den gleichen Grenzwert.

(h) Ist $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, so ist für jedes $m \in \mathbb{N}$ auch $\lim_{n\to\infty} \sqrt[m]{|x_n|} = \sqrt[m]{|x|}$.

Beweis. Übungsaufgabe. □

Oft ist die folgende Schreibweise zum Vergleich von Folgen (und später auch Funktionen) nützlich.

2.19 Definition. Landau-Symbole

Seien (x_n) und (y_n) Folgen, wobei (y_n) positiv sei, also $y_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(a) Falls ein $C > 0$ existiert, sodass $|x_n| \leq C y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so schreibt man dafür

$$(x_n) = \mathcal{O}(y_n)$$

und sagt “die Folge (x_n) ist groß oh von (y_n).” Die Folge (x_n) wird also bis auf einen n-unabhängigen Faktor betragsmäßig durch die Folge (y_n) dominiert.

(b) Falls $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$ gilt, so schreibt man dafür

$$(x_n) = o(y_n)$$

und sagt “die Folge (x_n) ist klein oh von (y_n).” Die Folge (x_n) geht also schneller gegen Null bzw. wächst langsamer als die Folge (y_n).

2.20 Beispiele. (a) Die Folge $x_n = n^2 - n - 1$ erfüllt $(x_n) = \mathcal{O}(n^2)$ und $(x_n) = o(n^3)$, sie ist aber **nicht** $o(n^2)$.

(b) Falls y_n eine Nullfolge ist, so folgt aus $(x_n) = \mathcal{O}(y_n)$, dass (x_n) ebenfalls eine Nullfolge ist. Vgl. Proposition 2.17 (a) und (b).

Oft ist es nicht ganz einfach, die Konvergenz einer Folge direkt zu zeigen, insbesondere, wenn man den Grenzwert nicht kennt. Häufig genügt es aber auch zu wissen, dass die Folge überhaupt konvergiert und dafür zeigen wir einfache aber wichtige Kriterien.

2.21 Definition. Monotone Folgen

Eine Folge (x_n) heißt **monoton wachsend** (bzw. **fallend**), falls $x_n \leq x_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (bzw. $x_n \geq x_{n+1}$). Sie heißt **streng monoton** wachsend (bzw. fallend), falls sogar $x_n < x_{n+1}$ (bzw. $x_n > x_{n+1}$) für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

2.22 Satz. Monotoniekriterium

Jede monoton wachsende und nach oben beschränkte Folge (x_n) in $\mathbb{R}$ konvergiert gegen $x := \sup\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.

Beweis. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es aufgrund der Definition des Supremums ein n_ε so, dass $x - \varepsilon < x_{n_\varepsilon} \leq x$. Da x_n monton wächst, ist aber auch

$$x - \varepsilon < x_n \leq x \quad \text{für alle } n \geq n_\varepsilon \,,$$

woraus die Konvergenz folgt. □

2.23 Bemerkung. Da man bei einer Folge endlich viele Glieder beliebig abändern oder auch weglassen kann, ohne das Konvergenzverhalten zu ändern, reicht es beispielsweise die Monotonie der Folge ab einem endlichen $N \in \mathbb{N}$ zu fordern. Man sagt dann auch, eine Eigenschaft (Monotonie, Positivität etc.) gilt für n groß genug.

2.24 Beispiele. (a) Für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist die Folge $a_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ ab $n_0 := \min\{n \in \mathbb{N} \,|\, n > -x\}$ streng monoton wachsend und beschränkt und somit konvergent:

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(1+\frac{x}{n+1})^{n+1}}{(1+\frac{x}{n})^n} = (1+\tfrac{x}{n})\left(\frac{1+\frac{x}{n+1}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n+1} \\
&= (1+\tfrac{x}{n})\left(1+\frac{\frac{x}{n+1}-\frac{x}{n}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n+1} = (1+\tfrac{x}{n})\left(1-\frac{\frac{x}{n(n+1)}}{\frac{n+x}{n}}\right)^{n+1} \\
&= (1+\tfrac{x}{n})\Bigl(1+\underbrace{\frac{-x}{(n+1)(n+x)}}_{>-1 \text{ für } n>-x}\Bigr)^{n+1} \\
&\overset{\text{Bernoulli}}{>} (1+\tfrac{x}{n})(1-\tfrac{x}{n+x}) = (1+\tfrac{x}{n})(1+\tfrac{x}{n})^{-1} = 1\,.
\end{aligned}$$

Somit ist die Folge a_n ab n_0 streng monoton wachsend. Weiterhin ist $(1+\frac{x}{n})^n$ beschränkt durch $(1-\frac{x}{n})^{-n}$, da

$$\frac{(1+\frac{x}{n})^n}{(1-\frac{x}{n})^{-n}} = \Bigl((1+\tfrac{x}{n})(1-\tfrac{x}{n})\Bigr)^n = (1-\tfrac{x^2}{n^2})^n < 1$$

für $n > |x|$.

Schließlich ist $(1-\frac{x}{n})^{-n}$ für n groß genug monoton fallend, da ja $(1+\frac{(-x)}{n})^n$ für n groß genug monoton wächst. Also ist $(1-\frac{x}{n})^{-n}$ und somit auch $(1+\frac{x}{n})^n$ beschränkt.

(b) Es gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$: Die Folge $a_n = \sqrt[n]{n}$ ist nach unten beschränkt, denn $a_n \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und monoton fallend für n groß genug, denn

$$\Bigl(\frac{a_{n+1}}{a_n}\Bigr)^{n(n+1)} = \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} = \frac{1}{n}\Bigl(1+\frac{1}{n}\Bigr)^n \overset{\text{(a)}}{\leq} \frac{c}{n} < 1$$

für n groß genug. Also konvergiert (a_n) (und auch die Teilfolge (a_{2n})) nach dem Monotoniekriterium, sagen wir gegen a. Wir zeigen nun, dass $a = \sqrt{a}$ gilt, woraus dann $a^2 = a$ und somit $a = 1$ folgt.

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{2n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{2}\,\sqrt[2n]{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{2} \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = 1 \cdot \sqrt{a} = \sqrt{a}\,.$$

In einer Übungsaufgabe zeigen Sie, dass für $c > 0$ gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$.
Später würden wir übringens folgendermaßen argumentieren:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln n} = \mathrm{e}^0 = 1\,.$$

Wir kommen nun zu einer alternativen Charakterisierung der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$, also der Idee, dass $\mathbb{R}$ keine Lücken hat. Wir formulieren die Aussage als Satz, da sie eine Konsequenz aus dem Supremumsaxiom ist.

2.25 Definition. **Intervallschachtelung**

Eine Folge von Intervallen $[a_n, b_n] = \{x \in \mathbb{R} \mid a_n \leq x \leq b_n\}$ mit $a_n < b_n$ und $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ sowie $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ heißt Intervallschachtelung.

2.26 Satz. **Intervallschachtelungsprinzip**

Zu jeder Intervallschachtelung $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ gibt es ein eindeutiges $x \in \mathbb{R}$ mit $x \in [a_n, b_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = x$.

Beweis. Aus der Schachtelungseigenschaft $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ folgt sofort, dass (a_n) monoton wächst und (b_n) monoton fällt. Weiterhin ist

$$a_n < b_m \quad \text{für alle } n, m \in \mathbb{N},$$

denn aus $a_n \geq b_m$ folgt entweder $a_n \geq b_m \geq b_n$ falls $n > m$ oder $a_m \geq a_n \geq b_m$ falls $n < m$, beides ein Widerspruch zur Annahme, dass $a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgrund des Monotoniekriteriums gilt also

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a := \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = b := \inf\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

mit

$$a \leq b\,.$$

Für jedes n gilt

$$0 \leq b - a \leq b_n - a_n\,,$$

was wegen $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ schon $b - a = 0$ impliziert. Mit $x := b = a$ gilt dann

$$a_n \leq a = x = b \leq b_n\,, \qquad \text{also} \qquad x \in [a_n, b_n] \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Jedes $\tilde{x} \in \mathbb{R}$ mit $\tilde{x} \neq x$ liegt aber schließlich außerhalb von $[a_n, b_n]$: Falls $\tilde{x} < x = a$, dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n > \tilde{x}$, falls $\tilde{x} > x = b$, dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $b_n < \tilde{x}$. Damit ist x eindeutig. □

Für eine reelle Zahl $x > 0$ sei die **Dezimalbruchentwicklung** definiert durch

$$\begin{aligned}
x_0 &:= \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k < x\} \\
x_1 &:= \max\{k \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\} \mid x_0 + k \cdot 10^{-1} < x\} \\
&\;\vdots \\
x_{n+1} &:= \max\{k \in \{0, \ldots, 9\} \mid x_0 + x_1 \cdot 10^{-1} + \ldots + x_n \cdot 10^{-n} + k \cdot 10^{-n-1} < x\} \\
&\;\vdots
\end{aligned}$$

Es wird also jedem $x > 0$ eine Folge (x_n) mit $x_n \in \{0, \ldots, 9\}$ für $n \geq 1$ zugeordnet, die nicht ab einer Stelle identisch Null ist. (Warum ?)

2.27 Korollar. **Dezimalbruchentwicklung**

Zu jeder Dezimalfolge (x_n), also $x_n \in \{0, \ldots, 9\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x_n \neq 0$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$, gibt es genau eine reelle Zahl x im Intervall $(0, 1]$, welche die Folge (x_n) als Dezimalbruchentwicklung hat.

Beweis. Durch (x_n) wird die Intervallschachtelung

$$a_n := x_1 \cdot 10^{-1} + \ldots + x_n \cdot 10^{-n}\,, \quad b_n := a_n + 10^{-n}$$

definiert. Gemäß Satz 2.26 gilt also $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = x$. Da $x_n \neq 0$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ gilt, ist $a_n < x \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ergibt sich aber auch sofort die Behauptung, dass (x_n) die Dezimalbruchentwicklung von x ist. □

Man schreibt natürlich für die Dezimalbruchentwicklung einer reellen Zahl wieder

$$x = x_0, x_1 x_2 x_3 \ldots .$$

Nach obigem Satz gilt: Verschiedene Zahlen haben verschiedene Dezimalbruchentwicklungen und verschiedene Dezimalbruchentwicklungen stehen für verschiedene Zahlen, sofern man Entwicklungen die schließlich nur Nullen (oder alternativ schließlich nur Neunen) enthalten ausschließt. Denn $0,9999\ldots$ und $1,0000\ldots$ sind beide Entwicklungen der selben Zahl, nämlich von 1.

2.28 Bemerkung. Analog definiert man die b-adische Entwicklung für $b \in \mathbb{N}, b \geq 2$.

$$x = x_0 + x_1 \cdot b^{-1} + x_2 \cdot b^{-2} + \cdots .$$

Ein weiteres Konvergenzkriterium und eine weitere Charakterisierung der Vollständigkeit liefert das Konzept der Cauchyfolge.

2.29 Definition. Cauchyfolge
Eine Folge (x_n) in $\mathbb{R}$ heißt **Cauchyfolge**, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $n, m \geq n_\varepsilon$ gilt $|x_n - x_m| < \varepsilon$. In Quantorenschreibweise

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \geq n_\varepsilon \quad |x_n - x_m| < \varepsilon .$$

In einer Cauchyfolge liegen also je zwei beliebige Folgenglieder ab einem n_ε höchstens ε voneinander entfernt.

2.30 Bemerkung. Jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge: sei $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so, dass $|x - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_\varepsilon$, dann gilt für alle $n, m \geq n_\varepsilon$

$$|x_n - x_m| = |x_n - x + x - x_m| \leq |x_n - x| + |x - x_m| < \varepsilon .$$

2.31 Satz. Konvergenzkriterium von Cauchy
Jede Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ konvergiert.

Den Beweis holen wir gleich nach.

2.32 Bemerkung. Die Definition der Cauchyfolge kann man sofort auf Folgen in metrischen Räumen (das sind Räume, in denen ein Abstand $d(x_n, x_m)$ zwischen Punkten definiert ist) verallgemeinern. Man sagt, ein metrischer Raum ist **vollständig**, falls jede Cauchyfolge in diesem Raum konvergiert. Die reellen Zahlen sind also auch gemäß dieser Definition vollständig.

Die im Supremumsaxiom ausgedrückte Ordnungsvollständigkeit von $\mathbb{R}$ besagt mehr als die Vollständigkeit nach Cauchy, da sie auch die Archimedische Eigenschaft impliziert. Wir könnten allerdings das Supremumsaxiom durch die zwei Axiome "Cauchykriterium" und "Archimedische Eigenschaft" ersetzen.

2.33 Lemma. Jede Cauchyfolge ist beschränkt.

Beweis. Sei (x_n) eine Cauchyfolge, $\varepsilon = 1$ und n_1 so, dass $|x_n - x_m| < 1$ für $m, n \geq n_1$. Dann gilt für $n \geq n_1$

$$|x_n| = |x_n - x_{n_1} + x_{n_1}| \leq |x_n - x_{n_1}| + |x_{n_1}| < 1 + |x_{n_1}| ,$$

also

$$|x_n| \leq \max x\{|x_1|, \cdots, |x_{n_1 - 1}|, 1 + |x_{n_1}|\} .$$

□

2.34 Definition. Häufungspunkt

Eine Zahl x heißt **Häufungspunkt** einer Folge (x_n), falls (x_n) eine Teilfolge besitzt, die gegen x konvergiert.

2.35 Beispiele. (a) Die Folge

$$(x_n) = ((-1)^n) = (-1, 1, -1, 1, -1, \ldots)$$

konvergiert zwar nicht, hat aber die Häufungspunkte 1 und -1.

(b) Eine konvergente Folge hat als einzigen Häufungspunkt ihren Grenzwert, da nach Proposition 2.18 (g) jede Teilfolge einer konvergenten Folge ebenfalls gegen den Grenzwert der ursprünglichen Folge konvergiert.

(c) Eine Folge kann sogar ∞-viele Häufungspunkte haben, z.B. ist für

$$(x_n) = (1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, 1, \ldots)$$

jede natürliche Zahl ein Häufungspunkt.

(d) Manche Folgen haben gar keinen Häufungspunkt, z.B.

$$(x_n) = (n) = (1, 2, 3, 4, \ldots)\,.$$

2.36 Merkregel. Konvergenz und Häufungspunkt

Eine Folge (x_n) konvergiert gegen x, wenn in jeder ε-Umgebung von x schließlich alle Folgenglieder liegen.

Eine Folge (x_n) hat x als Häufungspunkt, wenn in jeder ε-Umgebung von x unendlich-viele Folgenglieder liegen.

2.37 Satz. Bolzano-Weierstraß

Jede beschränkte Folge (x_n) in $\mathbb{R}$ hat mindestens einen Häufungspunkt.

Beweis. Da (x_n) beschränkt, gibt es ein Intervall $[a, b]$ in dem die Folge enthalten ist, also $x_n \in [a, b]$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Halbiert man das Intervall gemäß $[a, b] = [a, \frac{a+b}{2}] \cup [\frac{a+b}{2}, b]$, so sind in mindestens einem der Teilintervalle unendlich-viele Folgenglieder enthalten. Wir nennen diese Teilintervall I_1 und setzen $n_1 := \min\{n \in \mathbb{N} \,|\, x_n \in I_1\}$. Nun wiederholen wir diesen Schritt rekursiv: im k-ten Schritt wird das zuvor definierte Intervall I_k, welches unendlich-viele Folgenglieder enthält, halbiert. Mindestens eines der Teilintervalle, nennen wir es I_{k+1}, enthält wieder unendlich-viele Folgenglieder und wir setzen $n_{k+1} := \min\{n \in \mathbb{N} \,|\, n > n_k \text{ und } x_n \in I_{k+1}\}$.

Die Intervallfolge I_k ist eine Intervallschachtelung, die nach Satz 2.26 genau einen Punkt x enthält, gegen den die Teilfolge (x_{n_k}) dann konvergiert. □

Nun können wir den Beweis des Cauchykriteriums, Satz 2.31 nachreichen.

Beweis. des Cauchykriteriums. Nach Lemma 2.33 ist jede Cauchyfolge beschränkt und hat somit einen Häufungspunkt x, d.h. eine gegen x konvergente Teilfolge. Die Konvergenz einer Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ einer Cauchyfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x impliziert aber die Konvergenz der ganzen Folge gegen x. Das sieht man so:

Sei $\varepsilon > 0$. Da (x_n) Cauchy ist, gibt es ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so, dass $|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n, m \geq n_\varepsilon$. Da (x_{n_k}) gegen x konvergiert, existiert ein $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so, dass $n_{k_\varepsilon} \geq n_\varepsilon$ und $|x_{n_{k_\varepsilon}} - x| < \frac{\varepsilon}{2}$. Dann ist für alle $n \geq n_\varepsilon$

$$|x_n - x| = |x_n - x_{n_{k_\varepsilon}} + x_{n_{k_\varepsilon}} - x| \leq |x_n - x_{n_{k_\varepsilon}}| + |x_{n_{k_\varepsilon}} - x| < \varepsilon.$$

□

2.38 Definition. Divergente Folgen

Eine Folge (x_n) die nicht konvergiert, heißt **divergent**. Sie heißt **bestimmt divergent** und man schreibt

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \quad \text{bzw.} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \,,$$

falls gilt

Zu jedem $M \in \mathbb{R}$ existiert ein $n_M \in \mathbb{N}$ so, dass $x_n \geq M$ (bzw. $x_n \leq M$) für alle $n \geq n_M$.

Eine Folge divergiert also bestimmt gegen Unendlich, wenn für jedes (noch so große) $M \in \mathbb{R}$ gilt, dass schließlich alle Folgenglieder größer als M sind.

2.39 Beispiel. Die Folge $(x_n) = (n) = (1, 2, 3, 4, \ldots)$ ist bestimmt divergent gegen Unendlich.

2.3 Mächtigkeit von Mengen und Abbildungen zwischen Mengen

2.40 Definition. Endliche Mengen

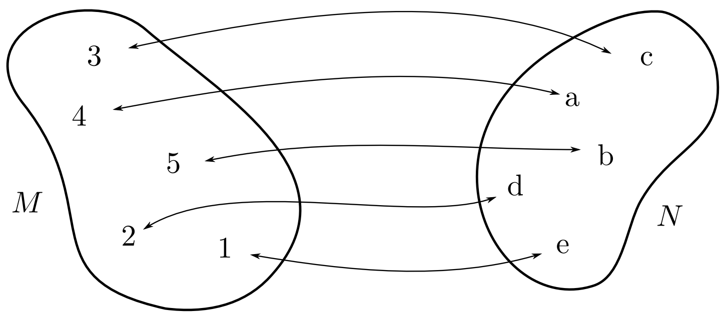
Eine Menge M heißt **endlich**, falls sie endlich viele Elemente enthält. Ihre Mächtigkeit $|M|$ ist dann die Zahl ihrer Elemente, $|M| \in \mathbb{N}_0$.

2.41 Beispiele. (a) Die leere Menge $\emptyset$ enthält keine Element, es gilt also $|\emptyset| = 0$.

(b) Die Menge $M = \{n \in \mathbb{N} \,|\, n^2 \leq 10\}$ hat Mächtigkeit $|M| = 3$.

Bei unendlichen Mengen ist die Frage nach der Mächtigkeit nicht ganz so offensichtlich zu beantworten. Was ist beispielsweise mit $|\mathbb{N}|$ und $|\mathbb{R}|$? Sicherlich ist $|\mathbb{N}| = \infty$ und $|\mathbb{R}| = \infty$, aber gilt auch $|\mathbb{N}| = |\mathbb{R}|$ und macht die Frage überhaupt Sinn?

Klar, zwei Mengen sind gleichmächtig, falls wir eine eins-zu-eins Zuordnung zwischen ihren Elementen finden können:



$\Rightarrow |M| = |N|$

2.42 Definition. Funktion/Abbildung

Eine Funktion oder Abbildung

$$f : M \to N \,, \; x \mapsto f(x) \,,$$

ordnet **jedem** Element $x \in M$ ein Element $f(x) \in N$ zu.

Dabei können zwei verschiedene $x, x' \in M$, $x \neq x'$, auf dasselbe $y \in N$ abgebildet werden, also $f(x) = f(x') = y$. Es kann aber auch Werte $y \in N$ geben, auf die kein $x \in M$ abgebildet wird, also $f(x) \neq y$ für alle $x \in M$.

Wir nennen M die Definitionsmenge oder der Urbildbereich, N die Zielmenge oder den Bildbereich, sowie

$$\mathrm{Bild} f := \{y \in N \,|\, \text{es gibt ein } x \in M \text{ mit } y = f(x)\} \subset N$$

das Bild von f.

Eine Funktion $f : M \to N$ heißt **injektiv**, falls jeder Wert $y \in N$ höchstens einmal angenommen wird. Also

$$\begin{aligned} f \text{ ist injektiv} \quad &\Leftrightarrow \quad f(x) = f(x') \text{ impliziert } x = x' \\ &\Leftrightarrow \quad x \neq x' \text{ impliziert } f(x) \neq f(x')\,. \end{aligned}$$

Eine Funktion $f : M \to N$ heißt **surjektiv**, falls jeder Wert $y \in N$ mindestens einmal angenommen wird. Also

$$\begin{aligned} f \text{ ist surjektiv} \quad &\Leftrightarrow \quad \forall\, y \in N \ \ \exists\, x \in M \text{ mit } f(x) = y \\ &\Leftrightarrow \quad \mathrm{Bild} f = N\,. \end{aligned}$$

Eine Funktion $f : M \to N$ heißt **bijektiv**, falls sie injektiv und surjektiv ist, falls also jeder Wert $y \in N$ genau einmal angenommen wird. Eine Bijektion ist somit eine eins-zu-eins Zuordnung der Elemente von M und N.

2.43 Beispiele. (a) Die Funktion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $z \mapsto f(z) = z^2$ ist weder injektiv, da $f(z) = f(-z)$, noch surjektiv, da $\mathrm{Bild} f \neq \mathbb{Z}$.

(b) Die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto f(n) = n^2$ ist injektiv, da für $n, m \in \mathbb{N}$ aus $n^2 = m^2$ schon $n = m$ folgt. Wegen $\mathrm{Bild} f \neq \mathbb{N}$ ist f wieder nicht surjektiv.

(c) Die Funktion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $z \mapsto f(z) = -z$ ist injektiv und surjektiv, also bijektiv.

2.44 Bemerkung. <u>**Umkehrabbildung**</u>

Offenbar existiert zu $f : M \to N$ genau dann eine Umkehrabbildung $f^{-1} : N \to M$ mit

$$(f^{-1} \circ f)(x) := f^{-1}(f(x)) = x \qquad \text{für alle } x \in M$$

und

$$(f \circ f^{-1})(y) := f(f^{-1}(y)) = y \qquad \text{für alle } y \in N,$$

falls f bijektiv ist.

Achtung: Die Umkehrabbildung f^{-1} ist nicht zu verwechseln mit der Funktion $\frac{1}{f}$, welche für $f : M \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definiert ist durch $\frac{1}{f} : M \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x \mapsto \frac{1}{f(x)}$.

2.45 Definition. <u>**Gleichmächtige Mengen**</u>

Zwei Mengen M und N heißen gleichmächtig, $|M| = |N|$, falls es eine Bijektion $f : M \to N$ gibt.

2.46 Beispiel. Die Mengen $M = \mathbb{N}$ und $N = \{n \in \mathbb{N} \,|\, n \text{ gerade}\}$ sind gleichmächtig, da $f : M \to N$, $n \mapsto f(n) = 2n$ bijektiv ist.

2.47 Definition. <u>**Abzählbar unendliche Mengen**</u>

Eine Menge M heißt **abzählbar unendlich**, falls sie die gleiche Mächtigkeit wie die natürlichen Zahlen hat, also $|M| = |\mathbb{N}|$ gilt.

Eine Menge M heißt **abzählbar**, falls $|M| = |\mathbb{N}|$ oder $|M| \in \mathbb{N}_0$.

Offenbar ist M genau dann abzählbar, wenn sich M als Folge $M = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ schreiben lässt.

2.48 Satz. <u>**Abzählbarkeit der rationalen Zahlen**</u>

Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist abzählbar.

Beweis. **Cantors Diagonaltrick Nummer 1**: Das folgende Schema liefert eine „Abzählung“ $(q_1, q_2, q_3, \ldots)$ der positiven rationalen Zahlen, wobei kürzbare Brüche weggelassen werden,

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\frac{1}{1} & & \frac{2}{1} & \to & \frac{3}{1} & & \frac{4}{1} & \to & \frac{5}{1} & & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & \\
\frac{1}{2} & & \frac{2}{2} & & \frac{3}{2} & & \frac{4}{2} & & \frac{5}{2} & & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & & \\
\frac{1}{3} & & \frac{2}{3} & & \frac{3}{3} & & \frac{4}{3} & & \frac{5}{3} & & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & & & & \\
\frac{1}{4} & & \frac{2}{4} & & \frac{3}{4} & & \frac{4}{4} & & \frac{5}{4} & & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & & & & & & \\
\frac{1}{5} & & \frac{2}{5} & & \frac{3}{5} & & \frac{4}{5} & & \frac{5}{5} & & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

also $(q_1, q_2, q_3, \ldots) = (1, \frac{1}{2}, 2, 3, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 4, 5, \frac{1}{5}, \ldots)$. In der k-ten Zeile steht hier die Folge $(\frac{n}{k})_{n\in\mathbb{N}}$. Somit ist sichergestellt, dass jeder positive Bruch in der so konstruierten Folge $(q_1, q_2, q_3, \ldots)$ vorkommt. Eine Abzählung von $\mathbb{Q}$ erhält man dann durch $(0, q_1, -q_1, q_2, -q_2, \ldots)$. □

2.49 Satz. Die Vereinigung abzählbar vieler abzählbarer Mengen ist wieder abzählbar.

Beweis. Cantors Diagonaltrick Nummer 1. □

2.50 Satz. Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$

Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind nicht abzählbar, man sagt, sie sind überabzählbar.

Beweis. Cantors Digonaltrick Nummer 2: Wir zeigen, dass schon das Intervall $(0,1) \subset \mathbb{R}$ nicht abzählbar ist. Angenommen, es existiert eine Abzählung von $(0,1)$, also $(0,1) = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. In Dezimalbruchentwicklung schreiben wir

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0, x_{11}\, x_{12}\, x_{13}\, x_{14} \cdots \\
x_2 &= 0, x_{21}\, x_{22}\, x_{23}\, x_{24} \cdots \\
x_3 &= 0, x_{31}\, x_{32}\, x_{33}\, x_{34} \cdots \\
x_4 &= 0, x_{41}\, x_{42}\, x_{43}\, x_{44} \cdots
\end{aligned}$$

Die Zahl $y = 0, y_1\, y_2\, y_3 \ldots$ mit der Dezimalbruchentwicklung

$$y_n = \begin{cases} 1 & \text{falls } x_{nn} \neq 1 \\ 2 & \text{falls } x_{nn} = 1 \end{cases}$$

liegt im Intervall $(0,1)$, kommt aber in obigem Schema nicht vor. Das steht im Widerspruch zur Annahme $(0,1) = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. □

2.51 Bemerkung. Kontinuumshypothese von Cantor (1878)

Die Kontinuumshypothese besagt, dass jede Teilmenge von $\mathbb{R}$ entweder abzählbar oder gleichmächtig zu $\mathbb{R}$ ist, also für jedes $M \subset \mathbb{R}$ gilt, dass entweder $|M| < \infty$ oder $|M| = |\mathbb{N}|$ oder $|M| = |\mathbb{R}|$.

Kurt Gödel (1938): die Kontinuumshypothese läßt sich aus den üblichen Axiomen der Mengenlehre (Zermelo-Fraenkel-Axiome) heraus nicht widerlegen.

Paul Cohen (1960): die Kontinuumshypothese läßt sich mit Hilfe der üblichen Axiome der Mengenlehre (Zermelo-Fraenkel-Axiome) nicht beweisen.

Die Kontinuumshypothese ist also innerhalb der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre nicht entscheidbar.

3 Elementare Funktionen und Stetigkeit

3.1 Die Exponentialfunktion

Wie wir im letzten Abschnitt gezeigt haben, konvergieren die Folgen $(1+\frac{x}{n})^n$ und $(1-\frac{x}{n})^{-n}$ gegen denselben Grenzwert und wir definieren die Exponentialfunktion zunächst durch

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto \exp(x) := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n} .$$

3.1 Satz. **Exponentialgesetz**

Es gilt

(a) $\exp(0) = 1$

(b) $\exp(x+y) = \exp(x)\cdot\exp(y) \quad$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$

Daraus folgt sofort, dass $\exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ (Übung)

Beweis. Teil (a) ist offensichtlich. Für (b) stellen wir fest, dass

$$\exp(x+y) - \exp(x)\exp(y) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(\left(1+\tfrac{x+y}{n}\right)^n - \left(1+\tfrac{x}{n}\right)^n\left(1+\tfrac{y}{n}\right)^n\right)}_{(*)} .$$

Der Ausdruck $(*)$ hat die Form

$$c^n - (ab)^n = (c-ab)\sum_{k=1}^{n} c^{n-k}\cdot(ab)^{k-1} \qquad \text{(vgl. Übung)}$$

wobei

$$|ab| \le \left(1+\tfrac{|x|}{n}\right)\left(1+\tfrac{|y|}{n}\right), \qquad |c| \le 1+\tfrac{|x|}{n}+\tfrac{|y|}{n} \le \left(1+\tfrac{|x|}{n}\right)\left(1+\tfrac{|y|}{n}\right)$$

und

$$c - ab = -\frac{xy}{n^2} .$$

Also gilt

$$|c^{n-k}(ab)^{k-1}| \le \left(1+\tfrac{|x|}{n}\right)^{n-1}\left(1+\tfrac{|y|}{n}\right)^{n-1} \le \left(1+\tfrac{|x|}{n}\right)^{n}\left(1+\tfrac{|y|}{n}\right)^{n} \le \exp(|x|)\exp(|y|)$$

und somit

$$|(*)| \le \frac{|x|\,|y|}{n^2}\cdot n\cdot\exp(|x|)\exp(|y|) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 .$$

□

3.2 Definition und Satz. **Die Eulersche Zahl**

Die Eulersche Zahl e ist definiert durch

$$\mathrm{e} := \exp(1) .$$

Für jede rationale Zahl $x = \frac{q}{p} \in \mathbb{Q}$ gilt $\exp(x) = \mathrm{e}^x := \sqrt[p]{\mathrm{e}^q}$, also

$$\left(\exp\left(\tfrac{q}{p}\right)\right)^p = (\exp(1))^q .$$

Beweis. Übungsaufgabe. □

Daher liegt es nahe, für jede reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{e}^x := \exp(x)$$

zu *definieren.*

3.3 Satz. Eigenschaften der Exponentialfunktion

(a) $\mathrm{e}^0 = 1$ und $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^y$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

(b) $\mathrm{e}^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(c) $\mathrm{e}^x > 1 + x$ für $x \neq 0$.

(d) e^x ist streng monoton wachsend, d.h. aus $x < y$ folgt $\mathrm{e}^x < \mathrm{e}^y$.

(e) e^x wächst schneller als jede Potenz von x, d.h. für jedes $m \in \mathbb{N}$ und jedes $c \geq 0$ gibt es ein $x_0 \in \mathbb{R}$ so, dass $\mathrm{e}^x > cx^m$ für $x > x_0$.

(f) e^{-x} fällt schneller als jede inverse Potenz von x, d.h. für jedes $m \in \mathbb{N}$ und jedes $c > 0$ gibt es ein $x_0 \in \mathbb{R}$ so, dass $\mathrm{e}^{-x} < cx^{-m}$ für $x > x_0$.
Man verwendet die Landausymbole (vgl. Definition 2.19) analog auch für Funktionen. In diesem Fall schreibt man also $\mathrm{e}^{-x} = \mathcal{O}(x^{-m})$ für $x \to \infty$ und alle $m \in \mathbb{N}$.

(g) Für $|x| < 1$ ist $|\mathrm{e}^x - 1| \leq \frac{|x|}{1-|x|}$.

Beweis. (a) und (b) wurden schon gezeigt.

(c) Für $x > -1$ (außer $x = 0$) ist $n \mapsto (1 + \frac{x}{n})^n$ ab $n = 1$ streng monoton wachsend (vgl. Beispiel 2.24 (a)), also

$$1 + x = (1 + \tfrac{x}{1})^1 < (1 + \tfrac{x}{n})^n < \mathrm{e}^x\,.$$

Für $x \leq -1$ ist $1 + x \leq 0 < \mathrm{e}^x$.

(d) Nach (b) und (c) ist $\mathrm{e}^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $\mathrm{e}^x > 1$ falls $x > 0$. Für $x < y$ folgt daher

$$\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x(\mathrm{e}^{y-x} - 1) > 0.$$

(e) Sei $\tilde{c} := c^{\frac{1}{m}}$. Für $x > 4m^2\tilde{c} =: x_0$ ist $\sqrt{x} > 2m\sqrt{\tilde{c}}$ also $\frac{x}{2m} > \sqrt{\tilde{c}}\sqrt{x}$. Somit gilt

$$\mathrm{e}^x > \left(1 + \tfrac{x}{2m}\right)^{2m} > \left(1 + \sqrt{\tilde{c}x}\right)^{2m} > (\sqrt{\tilde{c}x})^{2m} = cx^m\,.$$

(f) Folgt sofort aus (e) und (a).

(g) Da $\left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n}$ für $x < 1$ streng monoton gegen e^x fällt, ist $\mathrm{e}^x \leq \frac{1}{1-x}$, also $\mathrm{e}^x - 1 \leq \frac{x}{1-x}$, was für $x \geq 0$ die Behauptung ist. Für $-1 < x < 0$ ist nach (c) $1 - \mathrm{e}^x \leq -x = |x| < \frac{|x|}{1-|x|}$. □

3.4 Definition. Monotone Funktionen

Eine reelle Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ auf einer Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$ heißt **monoton wachsend (fallend)**, falls aus $x < y$ folgt, dass $f(x) \leq f(y)$. Sie heißt **streng monoton wachsend (fallend)**, falls aus $x < y$ folgt, dass $f(x) < f(y)$.

3.5 Bemerkung. Streng monotone Funktionen sind injektiv. Denn sei $f(x) = f(y)$, dann kann weder $x < y$ noch $x > y$ gelten. Also folgt $x = y$.

Wir wissen also, dass $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x\}$ injektiv ist. Falls exp auch surjektiv ist, so können wir die Umkehrfunktion $\ln = \exp^{-1}(0, \infty) \to \mathbb{R}$ definieren. Surjektivität ist eigentlich klar, da einerseits $\lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-n} = 0$ und $\lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{n} = \infty$ und andererseits e^x keine „Sprünge" hat, also stetig ist.

Umgangssprachlich heißt eine Funktion f stetig, wenn sich der Wert $f(x)$ mit x kontinuierlich ändert, oder anders gesagt, wenn man den Graphen in einem Zug zeichnen kann.

3.6 Definition. **Folgenstetigkeit**
Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ auf einer Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$ heißt stetig im Punkt $x_0 \in D$, wenn für jede Folge (x_n) in D mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt, dass

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)\,.$$

Die Funktion f heißt stetig, falls sie in allen Punkten $x_0 \in D$ stetig ist.

3.7 Bemerkung. Folgenstetigkeit bedeutet also, dass man den Limes in die Funktion ziehen kann, also für gegen ein $x_0 \in D$ konvergente Folgen (x_n) in D gilt, dass

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n)\,.$$

3.8 Beispiele. (a) Die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = \frac{1}{x}$ ist stetig, da für $x_n \to x_0 \neq 0$ gilt, dass $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x_0}$.

(b) Die Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto g(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

ist nicht stetig, da für $x_n = -\frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = 0 \neq g(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(0) = 1$$

gilt.

3.9 Satz. Die Exponentialfunktion ist stetig.

Beweis. Sei $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Dann gilt für $|x_n - x_0| < 1$, dass

$$|\mathrm{e}^{x_n} - \mathrm{e}^{x_0}| = \mathrm{e}^{x_0}|\mathrm{e}^{x_n - x_0} - 1| \leq \mathrm{e}^{x_0}\frac{|x_n - x_0|}{1 - |x_n - x_0|} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

□

3.10 Satz. **Zwischenwertsatz**
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f(a) < f(b)$. Dann gibt es zu jedem Zwischenwert $y_0 \in (f(a), f(b))$ mindestens ein Urbild $x_0 \in (a, b)$ mit $f(x_0) = y_0$.
Die analoge Aussage gilt für $f(b) < f(a)$.

Beweis. Sei $f(a) < y_0 < f(b)$ und

$$M := \{x \in [a, b] \mid f(x) < y_0\}\,.$$

Dann ist $\{a\} \in M \neq \emptyset$ und M ist durch b nach oben beschränkt. Also existieren $x_0 := \sup M$ und eine Folge (x_n) in $M \subset [a, b]$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$.
Wegen der Stetigkeit von f und $f(x_n) < y_0$ gilt nun

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \leq y_0$$

und somit insbesondere $x_0 < b$. Da andererseits $x_0 + \frac{1}{n} \notin M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x_0 + \frac{1}{n} \in [a, b]$ für n groß genug, folgt wiederum aus der Stetigkeit von f, dass $f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(x_0 + \frac{1}{n}) \geq y_0$. Also muss $f(x_0) = y_0$ gelten. □

3.11 Satz. <u>über die Umkehrfunktion</u>

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend. Dann bildet f das Intervall $[a, b]$ bijektiv auf das Intervall $[f(a), f(b)]$ ab.

Die Umkehrfunktion

$$\begin{aligned} f^{-1} : [f(a), f(b)] &\to [a, b] \\ y &\mapsto x \in [a, b] \text{ mit } f(x) = y\,, \end{aligned}$$

ist ebenfalls stetig und streng monoton wachsend.

Die analoge Aussage gilt für streng monoton fallende Funktionen.

Beweis. Setze $A := f(a)$ und $B := f(b)$. Aus $a < x < b$ folgt $A < f(x) < B$ für alle $x \in (a, b)$, also insbesondere $A < B$. Wegen der strengen Monotonie ist f injektiv und aus dem Zwischenwertsatz folgt, dass f jeden Wert zwischen A und B annimmt, d.h.

$$f : [a, b] \to [A, B]$$

ist bijektiv. Somit existiert die Umkehrfunktion $f^{-1} : [A, B] \to [a, b]$.

<u>**f^{-1} ist streng monoton wachsend:**</u> Für streng monoton wachsende Funktionen gilt offenbar <u>$x < y \Leftrightarrow f(x) < f(y)$</u>. Die Implikation $\Rightarrow$ ist die Definition und die Implikation $\Leftarrow$ sieht man so: ist $f(x) > f(y)$, so kann weder $x = y$ noch $x < y$ gelten, also muss $x > y$ sein. Diese Richtung ist aber die Monotonie der Umkehrfunktion:

$$f(x) < f(y) \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(f(x)) = x < y = f^{-1}(f(y))\,.$$

<u>**f^{-1} ist stetig in $y_0 \in [A, B]$:**</u> Zunächst bemerken wir, dass $(f^{-1}(y_0 + \frac{1}{n}))_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fällt und durch $f^{-1}(y_0)$ nach unten beschränkt ist und somit gegen ein $x_0 \in [a, b]$ konvergiert. Mit der Stetigkeit von f folgt daraus

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f\left(f^{-1}\left(y_0 + \tfrac{1}{n}\right)\right) = y_0,$$

d.h. es gilt $f^{-1}(y_0) = x_0$. Entsprechend folgt

$$f^{-1}\left(y_0 - \tfrac{1}{n}\right) \overset{n\to\infty}{\to} f^{-1}(y_0) = x_0.$$

Für $y_0 = A$ macht nur die erste Aussage Sinn, für $y_0 = B$ nur die zweite. Man nennt das dann "rechtsseitige" bzw. "linksseitige" Stetigkeit.

Sei nun (y_n) eine beliebige Folge in $[A, B]$ mit $y_n \to y_0$. Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert nach der Vorbemerkung ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$f^{-1}(y_0) - f^{-1}\left(y_0 - \tfrac{1}{N}\right) < \tfrac{\varepsilon}{2}$$

und

$$f^{-1}\left(y_0 + \tfrac{1}{N}\right) - f^{-1}(y_0) < \tfrac{\varepsilon}{2}\,.$$

Außerdem gibt es ein $N' \in \mathbb{N}$ mit $N' \geq N$ und

$$|y_n - y_0| < \tfrac{1}{N} \quad \text{für alle } n \geq N'\,.$$

Da f^{-1} streng monoton steigt, gilt für $n \geq N'$

$$\begin{aligned} \left|f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y_0)\right| &\leq \left|f^{-1}\left(y_0 + \tfrac{1}{N}\right) - f^{-1}\left(y_0 - \tfrac{1}{N}\right)\right| \\ &\leq \left|f^{-1}\left(y_0 + \tfrac{1}{N}\right) - f^{-1}(y_0)\right| + \left|f^{-1}(y_0) - f^{-1}\left(y_0 + \tfrac{1}{N}\right)\right| < \varepsilon, \end{aligned}$$

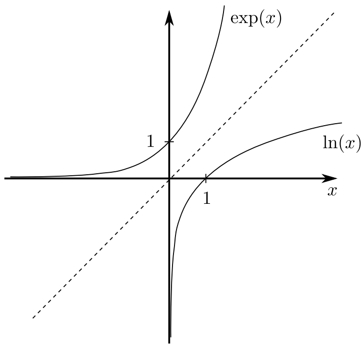
d.h. $f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(y_0)$. □

3.12 Definition und Satz. **Die Logarithmusfunktion**

Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ ist bijektiv und stetig. Die Umkehrfunktion wird mit

$$\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto \ln(x)$$

bezeichnet. Die Logarithmusfunktion ln ist streng monoton wachsend und stetig.



Beweis. Die Exponentialfunktion ist streng monoton wachsend, also injektiv. Nach Satz 3.3 (e) und (f) gilt $\lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^n = \infty$ und $\lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-n} = 0$. Also existieren zu $y_0 \in (0,\infty)$ Werte $n_+, n_- \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{e}^{-n_-} < y_0 < \mathrm{e}^{n_+}$. Da exp stetig ist, existiert nach dem Zwischenwertsatz $x_0 \in (-n_-, n_+)$ mit $\exp(x_0) = y_0$. Also ist exp surjektiv und somit bijektiv.
Der Satz über die Umkehrfunktion besagt nun, dass der Logarithmus ln auf jedem endlichen abgeschlossenen Intervall und somit auf ganz $(0,\infty)$ stetig und streng monoton wachsend ist. □

3.13 Korollar. **Eigenschaften des Logarithmus**

(a) Es gilt $\mathrm{e}^{\ln y} = y$ für alle $y > 0$ und $\ln(\mathrm{e}^x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Insbesondere ist $\ln 1 = 0$ und $\ln \mathrm{e} = 1$.

(b) Für $a, b > 0$ gilt

$$\ln(a\cdot b) = \ln(a) + \ln(b) \qquad \text{und} \qquad \ln\left(\tfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)\,.$$

(c) Für $x > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ ist $\ln(x^n) = n\ln(x)$.

(d) Für $x > -1$ und $x \neq 0$ ist $\ln(1+x) < x$.

(e) Der Logarithmus wächst langsamer als jede Potenz $x^{\frac{1}{n}}$, $n \in \mathbb{N}$, für $x \to \infty$, d.h.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall c > 0 \quad \exists\, x_0 \in (0,\infty) \quad \forall x > x_0 \quad \ln x < c x^{\frac{1}{n}}.$$

(f) Der Logarithmus fällt langsamer als jede Potenz $x^{-\frac{1}{n}}$, $n \in \mathbb{N}$, für $x \to 0$, d.h.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall c > 0 \quad \exists\, x_0 \in (0,\infty) \quad \forall x < x_0 \quad \ln x > -c x^{-\frac{1}{n}}\,.$$

Beweis. (a) ist klar, da ln die Umkehrfunktion zu exp ist. (b)-(d) werden in den Übungen gezeigt. Zu (e): Da exp streng monoton ist gilt

$$\ln x < c x^{\frac{1}{n}} \;\Leftrightarrow\; \exp(\ln x) < \exp\left(c x^{\frac{1}{n}}\right) \;\Leftrightarrow\; x < \exp\Big(\underbrace{c x^{\frac{1}{n}}}_{=:y}\Big) \;\Leftrightarrow\; \tfrac{1}{c^n} y^n < \mathrm{e}^y\,.$$

Damit läßt sich die Aussage (und analog auch (f)) auf Satz 3.3 (e) zurückführen. □

3.14 Definition und Satz. **Reelle Exponenten**

Für $x > 0$ und $y \in \mathbb{R}$ setzen wir

$$x^y := \mathrm{e}^{y\ln x}\,.$$

Für $y \in \mathbb{Q}$ stimmt das mit der üblichen Definition $x^{\frac{q}{p}} = \sqrt[p]{x^q}$ überein.
Für $x, y > 0$ und $r, s \in \mathbb{R}$ gelten

$$(x\cdot y)^r \;=\; x^r y^r\,, \qquad (x^r)^s \;=\; x^{r\cdot s}\,, \qquad x^{r+s} \;=\; x^r x^s\,.$$

Insbesondere ist also $x^0 = 1$ und $x^{-r} = \frac{1}{x^r}$.

Beweis. Übungen. □

3.15 Bemerkung. So wie man den „Logarithmus naturalis“ ln als Umkehrfunktion zu e^x definiert, kann man den Logarithums $\log_a$ zur Basis $a > 1$ als Umkehrfunktion von a^x definieren.

Es gilt dann

$$\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}\,,$$

denn $\ln a^x = \ln e^{x \ln a} = x \ln a$.

3.2 Polynome und rationale Funktionen

Einige Möglichkeiten aus gegebenen Funktionen $f, g : D \to \mathbb{K}$ mit Werten in einem Körper $\mathbb{K}$ neue Funktionen zusammenzusetzen sind

$$\begin{aligned} f+g:&\quad D \to \mathbb{K}\,, \quad x \mapsto f(x)+g(x)\\ f\cdot g:&\quad D \to \mathbb{K}\,, \quad x \mapsto f(x)\cdot g(x)\\ \lambda f:&\quad D \to \mathbb{K}\,, \quad x \mapsto \lambda \cdot f(x)\,, \quad \lambda \in \mathbb{K} \end{aligned}$$

und

$$\tfrac{f}{g} : D \setminus \{x \in D \,|\, g(x) = 0\} \to \mathbb{K}\,, \quad x \mapsto \tfrac{f(x)}{g(x)}\,.$$

Die Nullfunktion auf D ist $0 : D \to \mathbb{K}$, $x \mapsto 0$. Dementsprechend bedeutet $f \neq 0$ lediglich, dass es mindestens ein $x \in D$ gibt mit $f(x) \neq 0$.

Für $f : D \to M$ und $g : M \to N$ ist die **Komposition** $g \circ f : D \to N$ gegeben durch $x \to (g \circ f)(x) := g(f(x))$.

Besonders einfache Funktionen sind die **Monomfunktionen**

$$\mathbb{K} \to \mathbb{K}\,, \quad x \mapsto x^n \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0\,.$$

Durch Zusammensetzen erhält man **Polynomfunktionen**

$$\mathbb{K} \to \mathbb{K}\,, \quad x \mapsto a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \;=:\; p(x)\,,$$

wobei $a_j \in \mathbb{K}$ für $j = 1, \ldots, n$. Ist $a_n \neq 0$ so heißt n der Grad von p. Der Grad einer konstanten Funktion ist also 0. Wir nehmen im folgenden immer implizit an, dass eine Polynomfunktion gegeben in der Form $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ auch tatsächlich Grad n hat, also $a_n \neq 0$ ist.

Während man in der Algebra die Begriffe Polynom und Polynomfunktion klar trennen sollte, spricht man in der Analysis manchmal auch abkürzend von Polynomen, wenn man eigentlich Polynomfunktionen meint.

3.16 Satz. Stimmen zwei Polynomfunktionen $p(x) = a_0 + \ldots + a_n x^n$ und $q(x) = b_0 + \ldots + b_m x^m$ auf $\mathbb{R}$ überein, d.h. $p(x) = q(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so gilt

$$n = m \quad \text{und} \quad a_j = b_j \quad \text{für alle} \quad j = 0, \ldots, n\,.$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $n \geq m$. Auch $r := p - q$ ist eine Polynomfunktion, hat also die Form $r(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n$. Zu zeigen ist $c_0 = c_1 = \cdots = c_n = 0$. Nach Voraussetzung gilt $r(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und es folgt $c_0 = r(0) = 0$. Für $x \neq 0$ ist dann aber auch

$$0 = \frac{r(x)}{x} = c_1 + c_2 x + \cdots + c_n x^{n-1}$$

und für (x_k) mit $x_k \neq 0$ und $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$ folgt

$$0 = \lim_{k\to\infty} (c_1 + c_2 x_k + \cdots + c_n x_k^{n-1}) = c_1.$$

Der Rest folgt durch Induktion. □

3.17 Bemerkung. Tatsächlich reicht es schon, dass zwei Polynomfunktionen vom Grad kleiner gleich n an $n+1$ verschiedenen Punkten $x_1, \dots, x_{n+1}$ übereinstimmen, um ihre Gleichheit zu folgern.

Offenbar sind Summen und Produkte von Polynomfunktionen wieder Polynomfunktionen. Sei $p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ und $q(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$ dann ist

$$p(x) + q(x) = \sum_{j=0}^{\max\{n,m\}} (a_j + b_j)\, x^j$$

und

$$p(x) \cdot q(x) = \sum_{j=0}^{n+m} c_j x^j \quad \text{mit} \quad c_j = \sum_{\mu+\nu=j} a_\mu b_\nu = \sum_{k=0}^{j} a_k b_{j-k}\,.$$

Dabei setzen wir $a_{n+1} = a_{n+2} = \cdots = 0 = b_{m+1} = \cdots$. Es gilt also

$$\text{Grad}\,(p \cdot q) = \text{Grad}\,(p) + \text{Grad}\,(q).$$

Rationale Funktionen sind von der Form

$$x \mapsto \frac{p_1(x)}{p_2(x)}$$

wobei p_1 und p_2 Polynomfunktionen und $p_2 \neq 0$ ist (also nicht die Nullfunktion). Als Definitionsbereich kommt zunächst nur $D = \{x \in \mathbb{K} \,|\, p_2(x) \neq 0\}$ in Frage. Aber für $p_1(x) = 1 - x^2$ und $p_2 = (1 + x)$ ist das unbefriedigend,

$$\frac{p_1(x)}{p_2(x)} = \frac{1 - x^2}{1 + x} = 1 - x \quad \text{für} \quad x \neq -1\,,$$

da die Singularität hebbar ist.

3.18 Satz. **Polynomdivision**
Sind p_1 und p_2 Polynome und $\text{Grad}(p_2) \geq 1$, so gibt es eindeutig bestimmte Poylnome q und r mit

$$p_1 = p_2 \cdot q + r \quad \text{und} \quad \text{Grad}(r) < \text{Grad}(p_2).$$

3.19 Bemerkung. Das ist analog zur Division mit Rest in $\mathbb{N}$: für je zwei natürliche Zahlen n_1 und n_2 gibt es eindeutig bestimmte Zahlen $q, r \in \mathbb{N}_0$ mit

$$n_1 = n_2 \cdot q + r \quad \text{und} \quad r < n_2\,,$$

also $n_1 : n_2 = q$ Rest r.

Beweis. Skizze: Man dividiert wie bei natürlichen Zahlen, beispielsweise

$$\begin{array}{l}
\big(\;10x^3 + 5x^2 + 3x - 4\big) : \big(2x^2 + 2x - 1\big) = 5x - \frac{5}{2} + \dfrac{13x - \frac{13}{2}}{2x^2 + 2x - 1} \\
\underline{-\,10x^3 - 10x^2 + 5x} \\
\qquad\quad -\,5x^2 + 8x - 4 \\
\qquad\quad \underline{\;\;5x^2 + 5x - \tfrac{5}{2}} \\
\qquad\qquad\quad 13x - \tfrac{13}{2}
\end{array}$$

also $p_1 = p_2 \cdot (5x - \frac{5}{2}) + (13x - \frac{13}{2})$. Die Eindeutigkeit folgt so: Ist $p_1 = p_2 q + r = p_2 \tilde{q} + \tilde{r}$, also $p_2(q - \tilde{q}) = r - \tilde{r}$, so wäre bei $q \neq \tilde{q}$ der Grad der rechten Seite mindestens $\text{Grad}(p_2)$, aber Grad $(r - \tilde{r}) <$ Grad (p_2). Also gilt $q = \tilde{q}$ und somit auch $r = \tilde{r}$. □

3.20 Definition. Man sagt "p_2 teilt p_1", falls $p_2 \neq 0$ und $p_1 = p_2 \cdot q$ für ein Polynom q. Man schreibt dann $p_2 \,|\, p_1$.
Es gelten die folgenden Aussagen

(a) Aus $p_3 \,|\, p_2$ und $p_2 \,|\, p_1$ folgt $p_3 \,|\, p_1$, denn aus $p_2 = p_3 \cdot q$ und $p_1 = p_2 \cdot \tilde{q}$ folgt $p_1 = p_3(q \cdot \tilde{q})$.

(b) Aus $p \,|\, p_1$ und $p \,|\, p_2$ folgt, dass $p \,|(q_1 p_1 + q_2 p_2)$ für beliebige Polynome q_1, q_2.

(c) Gilt $p_2 \,|\, p_1$ und $p_1 \neq 0$, so ist $\mathrm{Grad}(p_2) \leq \mathrm{Grad}(p_1)$.

(d) Aus $p_2 \,|\, p_1$ und $p_1 \,|\, p_2$ folgt $p_1 = cp_2$ für ein $c \neq 0$.

Eine Zahl λ heißt **Nullstelle** von p, falls $p(\lambda) = 0$. Es gilt (Übungsaufgabe)

$$p(\lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - \lambda) \,|\, p\,.$$

Es heißt λ eine k**-fache Nullstelle** von p, falls $(x - \lambda)^k \,|\, p$, aber nicht $(x - \lambda)^{k+1} \,|\, p$, also falls

$$p(x) = (x - \lambda)^k q(x)$$

für ein Polynom q mit $q(\lambda) \neq 0$.

3.21 Bemerkung. Offenbar hat ein Polynom p vom Grade n höchstens n verschiedene Nullstellen.

3.22 Bemerkung. Man kann rationale Funktionen $\frac{p_1(x)}{p_2(x)}$ kürzen, falls p_1 und p_2 einen gemeinsamen Teiler haben, also insbesondere dann, wenn sie gemeinsame Nullstellen haben.

3.23 Satz. **Stetigkeit von Summen und Produkten von Funktionen**
Sind $f, g : \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R}$ stetig, so sind auch

$$\begin{aligned} f + g : &\quad D \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto f(x) + g(x) \\ f \cdot g : &\quad D \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto f(x) \cdot g(x) \\ \lambda f : &\quad D \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto \lambda \cdot f(x)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

und

$$\tfrac{f}{g} : D \setminus \{x \in D \,|\, g(x) = 0\} \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto \tfrac{f(x)}{g(x)}\,.$$

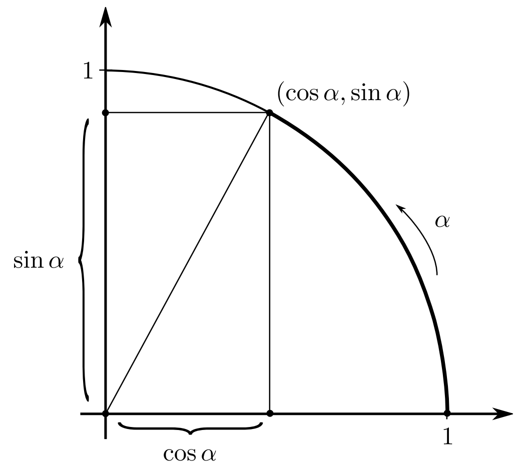
stetig. Insbesondere sind also Polynomfunktionen und rationale Funktionen stetig.

Beweis. Sei (x_n) eine Folge in D mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \in D$. Dann ist

$$\lim_{n\to\infty} (f+g)(x_n) = \lim_{n\to\infty} (f(x_n)+g(x_n)) \stackrel{(1)}{=} \lim_{n\to\infty} f(x_n) + \lim_{n\to\infty} g(x_n) \stackrel{(2)}{=} f(x_0)+g(x_0) = (f+g)(x_0)\,.$$

Bei (1) haben wir verwendet, dass Summen konvergenter Folgen nach Proposition 2.18 (f) wieder konvergent sind, oder anders ausgedrückt, dass die Abbildung $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x + y$ stetig ist. Schritt (2) ist einfach die Stetigkeit von f und g.
Die anderen Aussagen zeigt man analog. $\square$

3.3 Die trigonometrischen Funktionen



Wir definieren die trigonometrischen Funktionen zunächst geometrisch am Einheitskreis

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1\}\,.$$

Im Bogenmaß ist der Winkel α gleich der Länge des entsprechenden Kreisbogens im Einheitskreis.

Man definiert

$$\sin\alpha \;:=\; \frac{\text{Länge der Gegenkathete}}{\text{Länge der Hypothenuse}} \;=\; y\text{-Koordinate des Punktes auf dem Einheitskreis}$$

und

$$\cos\alpha \;:=\; \frac{\text{Länge der Ankathete}}{\text{Länge der Hypothenuse}} \;=\; x\text{-Koordinate des Punktes auf dem Einheitskreis.}$$

Plots von Funktionsgraphen von Sinus und Kosinus sowie von allen weiteren in diesem Kapitel definierten Funktionen finden Sie beispielsweise auf Wikipedia.

Aus der geometrischen Anschauung ergeben sich folgende Aussagen:

(a) Pythagoras: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ (wobei $\sin^2\alpha := (\sin\alpha)^2$).

(b) Symmetrie: $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha\,,$ der Sinus ist ungerade
$\cos(-\alpha) = \cos\alpha\,,$ der Kosinus ist gerade.

(c) Periodizität: $\sin(\alpha + 2\pi\, n) = \sin\alpha$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.
$\cos(\alpha + 2\pi\, n) = \cos\alpha$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

(d) Die Abbildungen

$$\sin : [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$$

und

$$\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$$

sind stetig und bijektiv.

Damit können wir die Umkehrfunktionen $\arcsin = \sin^{-1}$ und $\arccos = \cos^{-1}$

$$\begin{aligned} \arcsin : [-1, 1] &\;\to\; [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \\ \arccos : [-1, 1] &\;\to\; [0, \pi] \end{aligned}$$

definieren.

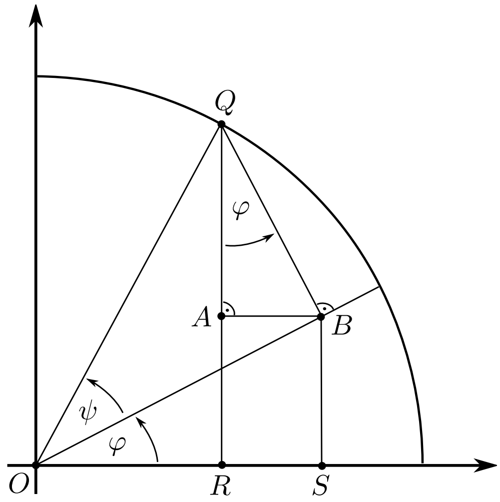
Weiterhin gelten die **Additionstheoreme**

$$\begin{aligned} \cos(\varphi + \psi) &= \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi \\ \sin(\varphi + \psi) &= \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi \end{aligned}$$

und die **Halbwinkelformeln**

$$\begin{aligned} 1-\cos\varphi &= 2\sin^2\tfrac{\varphi}{2} \\ 1+\cos\varphi &= 2\cos^2\tfrac{\varphi}{2}\,. \end{aligned}$$

Die Additionstheorme liest man aus dieser Figur ab:



$$\begin{aligned} \overline{QA} &= \overline{QB}\cdot\cos\varphi \;=\; \sin\psi\cos\varphi \\ \overline{AR} &= \overline{BS} \;=\; \overline{OB}\cdot\sin\varphi \;=\; \cos\psi\sin\varphi \\ \overline{OS} &= \overline{OB}\cdot\cos\varphi \;=\; \cos\psi\cos\varphi \\ \overline{RS} &= \overline{AB} \;=\; \overline{QB}\cdot\sin\varphi \;=\; \sin\psi\sin\varphi \end{aligned}$$

also

$$\cos(\varphi+\psi) = \overline{OR} = \overline{OS}-\overline{RS} = \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\sin\varphi$$

$$\sin(\varphi+\psi) = \overline{QR} = \overline{QA}+\overline{AR} = \sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\sin\varphi$$

Die Halbwinkelformeln sind Übungsaufgaben.
Man definiert noch die **Tangensfunktion**,

$$\tan : (-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}\,, \quad \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

und den **Kotangens**,

$$\cot : (0,\pi) \to \mathbb{R}\,, \quad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\tan\alpha}.$$

Der **Tangens** wächst streng monoton und ist surjektiv, also bijektiv. Die Umkehrfunktion heißt **Arcustangens**,

$$\arctan : \mathbb{R} \to (-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2})\,, \quad \arctan = \tan^{-1}\,.$$

4 Komplexe Zahlen

4.1 Definitionen und elementare Eigenschaften

Historisch wurde die neue Zahl i, die imaginäre Einheit mit $\mathrm{i}^2 = -1$, eingeführt, um Rechnungen ausführen zu können, bei denen in Zwischenschritten aus negativen Zahlen Wurzeln gezogen werden mussten

Eine modernere Sichtweise ist es, $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ als Körper aufzufassen: Mit der üblichen Vektorschreibweise $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ist es klar, wie man die Addition zu definieren hat:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix},$$

also

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)\,. \qquad \text{(A)}$$

Diese Addition von Vektoren ist kommutativ, assoziativ, hat das neutrale Element $(0, 0)$, und das zu (x_1, x_2) inverse Element ist $(-x_1, -x_2)$. Geometrisch entspricht die Addition dem Aneinandersetzen von Vektoren.

Da wir $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x + \mathrm{i}y$ identifizieren wollen, legt

$$(x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 + \mathrm{i}y_2) = x_1x_2 + \mathrm{i}x_1y_2 + \mathrm{i}y_1x_2 + \mathrm{i}^2y_1y_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + \mathrm{i}(x_1y_2 + x_2y_1)$$

die Multiplikation $\cdot : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1x_2 - y_1y_2,\ x_1y_2 + x_2y_1) \qquad \text{(M)}$$

nahe. Diese Multiplikation in $\mathbb{R}^2$ ist kommutativ (offensichtlich), assoziativ (nachrechnen oder aus geometrischer Interpretation folgern), hat das neutrale Element $(1, 0)$, und das Inverse zu $(x, y) \neq (0, 0)$ ist $\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$. Das Distributivgesetz gilt ebenfalls.

Es bildet also die Zahlenebene $\mathbb{R}^2$ mit der Addition (A) und der Multiplikation (M) einen Körper, den Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$. Insbesondere gelten dieselben algebraischen Rechenregeln wie für reelle Zahlen. Wie Sie in den Übungen zeigen werden, ist $\mathbb{C}$ vollständig in dem Sinne, dass jede Cauchyfolge in $\mathbb{C}$ konvergiert. Allerdings ist $\mathbb{C}$ nicht angeordnet.

Für $z \in \mathbb{C}$ schreiben wir statt $z = (x, y)$ oft $z = x + \mathrm{i}y$, was im Sinne von

$$(x, y) = (x, 0) + (0, 1)\ \cdot\ (y, 0)$$

zu lesen ist. Es gilt

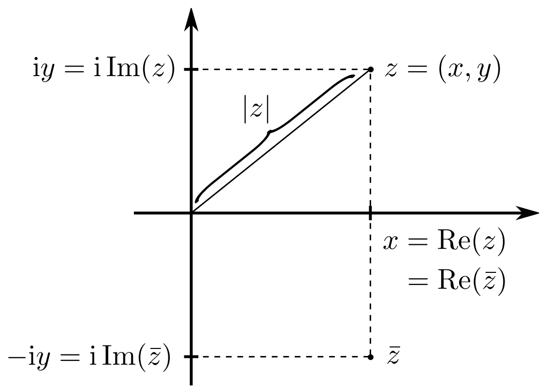
$$\mathrm{i} \cdot \mathrm{i} = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)\,.$$

Wenn wir reelle Zahlen x mit den Punkten $(x, 0)$ in $\mathbb{C}$ identifizieren, so setzt das Rechnen in $\mathbb{C}$ das Rechnen in $\mathbb{R}$ fort,

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0)\,, \qquad (x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1x_2, 0)\,.$$

Man sagt, $\mathbb{R}$ ist ein Unterkörper von $\mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{C}$ ist ein Oberkörper von $\mathbb{R}$ und nennt $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ eine Körpererweiterung. Übrigens ist auch $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ eine Körpererweiterung. Mehr dazu lernen Sie in der Algebra.

Nun noch einige Definitionen:



Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ heißen

- $\mathrm{Re}\, z = x$ der Realteil
- $\mathrm{Im}\, z = y$ der Imaginärteil
- $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ der Betrag
- $\bar{z} = x - iy$ das komplex Konjugierte von z.

4.1 Beispiel. Für

$$z = \frac{2+i}{1+i} = \frac{(2+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2+i-2i-i^2}{1-i^2} = \frac{3-i}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$$

ist

$$\mathrm{Re}\, z = \tfrac{3}{2}, \quad \mathrm{Im}\, z = -\tfrac{1}{2}, \quad |z| = \sqrt{\tfrac{9}{4} + \tfrac{1}{4}} = \tfrac{\sqrt{10}}{2}, \quad \bar{z} = \tfrac{3}{2} + \tfrac{i}{2}.$$

4.2 Bemerkung. **Einfache Folgerungen**

Für $z, w \in \mathbb{C}$ gelten die folgenden Beziehungen:

(a) $|z|^2 = z\bar{z}$

(b) $|z| = |\bar{z}|$

(c) $\mathrm{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ und $\mathrm{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$

(d) $|\mathrm{Re} z| \leq |z|$ und $|\mathrm{Im} z| \leq |z|$

(e) $|zw| = |z||w|$

(f) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ und $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$

(g) $\bar{\bar{z}} = z$

(h) Die Dreiecksungleichung $|z + w| \leq |z| + |w|$

Beweis. (a) bis (g) sind einfache Übungsaufgaben. Die Dreiecksungleichung folgt aus

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) = |z|^2 + |w|^2 + z\overline{w} + \overline{z}w \\ &= |z|^2 + |w|^2 + 2\mathrm{Re}\,(z\overline{w}) \leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z\bar{w}| \\ &= |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w| = (|z| + |w|)^2. \end{aligned}$$

□

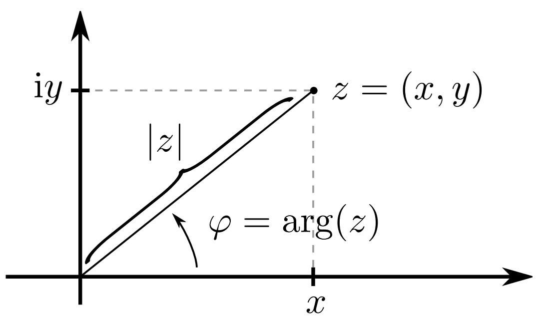
Weiter in den Definitionen. Statt durch kartesische Koordinaten (x, y) kann man Punkte in der Ebene auch durch Polarkoordinaten (r, φ) charakterisieren. Für eine komplexe Zahl $z = x + iy \neq 0$ definiert man daher das **Argument** von z, kurz $\arg(z) \in (-\pi, \pi]$ als den Winkel zwischen dem Vektor $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und der positiven reellen Achse.

Es ist also

$$x = |z| \cos\varphi \qquad y = |z| \sin\varphi$$

und

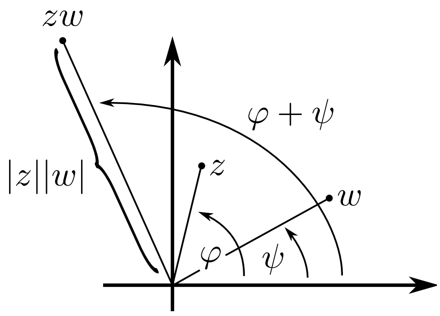
$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$



Für die Multiplikation komplexer Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$ ergibt sich dann mit $\varphi = \arg(z)$ und $\psi = \arg(w)$

$$\begin{aligned} z \cdot w &= |z|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) \cdot |w|(\cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi) \\ &= |z||w|\left((\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi) + \mathrm{i}(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi)\right) \\ &= |z||w|(\cos(\varphi+\psi) + \mathrm{i}\sin(\varphi+\psi)) \,. \end{aligned}$$

Es werden also die Beträge multipliziert und die Winkel addiert. Damit entspricht die komplexe Multiplikation geometrisch einer **Drehstreckung !** Genauer: Multiplikation mit z operiert auf der Zahlenebene als Drehung um den Winkel $\varphi = \arg(z)$ und Streckung um den Faktor $|z|$.



4.2 Exponentialfunktion und Logarithmus im Komplexen

4.3 Definition. **Die komplexe Exponentialfunktion**

Wir definieren die komplexe Exponentialfunktion zunächst durch

$$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,, \quad z = x + \mathrm{i}y \mapsto \exp(z) = \mathrm{e}^z := \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)\,.$$

Wir werden aber später sehen, dass das wieder mit $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ übereinstimmt.

Die so definierte komplexe Exponentialfunktion setzt offenbar die reelle Exponentialfunktion fort, d.h. für $y = 0$ ist $\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}0} = \mathrm{e}^x$, und sie erfüllt das Exponentialgesetz

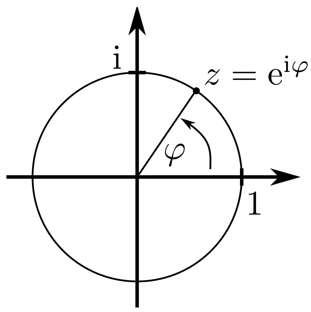
$$\begin{aligned} \mathrm{e}^z\mathrm{e}^w &= \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y}\mathrm{e}^{u+\mathrm{i}v} = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^u(\cos y + \mathrm{i}\sin y)(\cos v + \mathrm{i}\sin v) \\ &= \mathrm{e}^{x+u}(\cos(y+v) + \mathrm{i}\sin(y+v)) = \mathrm{e}^{z+w}\,. \end{aligned}$$

Insbesondere liegt also für $\varphi \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$$

auf dem Einheitskreis, d.h. $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}| = 1$. Für $z \in \mathbb{C}$ mit $\varphi = \arg z$ ist

$$\boxed{z = |z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}$$



Diese Polardarstellung ist für $z \neq 0$ eindeutig, falls man φ auf ein halboffenes Intervall der Länge 2π, z.B. auf $[0, 2\pi)$ oder $(-\pi, \pi]$, einschränkt. Es gilt aber offensichtlich

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi + 2\pi n)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}.$$

Damit ist

$$\exp : \{z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C} \,|\, x \in \mathbb{R}\,,\ y \in (-\pi, \pi]\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

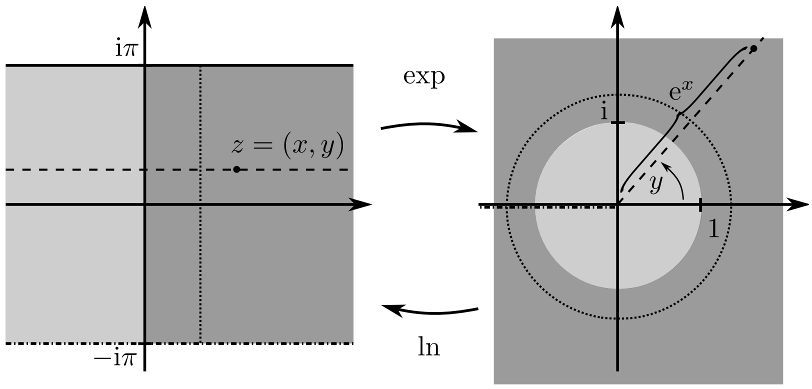
bijektiv. Die Umkehrfunktion ist der **komplexe Logarithmus**,

$$\ln : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \{z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C} \,|\, x \in \mathbb{R}\,,\ y \in (-\pi, \pi]\}$$

der explizit durch

$$\ln(w) = \ln|w| + \mathrm{i}\arg(w)$$

gegeben ist.



Da $\arg : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to (-\pi, \pi]$ auf der negativen reellen Achse einen Sprung hat, also unstetig ist, springt dort auch der Logarithmus. Man spricht von einem Schnitt (engl. "cut") bei $(-\infty, 0]$ durch die komplexe Ebene. Den Definitionsbereich des Logarithmus nenn man dann auch die "geschlitzte Ebene".

Man kann den Logarithmus auch zu jedem anderen Streifen der Breite 2π definieren, indem man $\arg : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to (\alpha, \alpha + 2\pi]$ umdefiniert. Den Schnitt kann man dann auf jede beliebige Halbgerade legen, die im Ursprung beginnt. Er ist dann wieder die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion eingeschränkt auf den entsprechenden Streifen. Die obige Wahl nennt man Hauptzweig des Logarithmus.

4.4 Bemerkung. Der Definitionsbereich des Logarithmus als Riemannsche Fläche

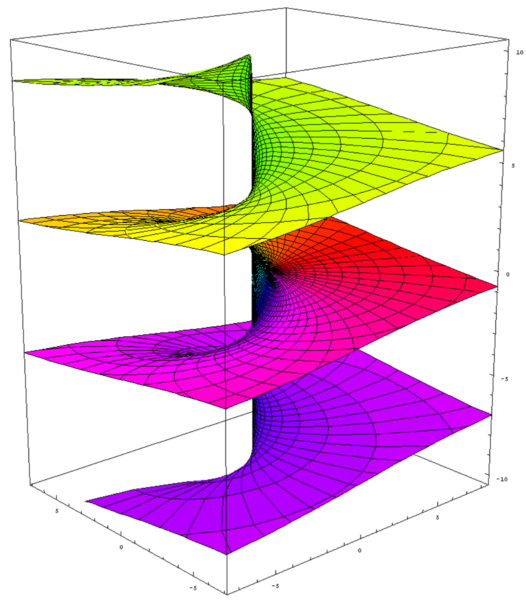
Da die Exponentialfunktion auf ganz $\mathbb{C}$ stetig ist, aber nur Streifen der Form

$$S_n := \{z = x + \mathrm{i}y \,|\, x \in \mathbb{R}\,,\; y \in (2\pi n, 2\pi(n+1)]\}\,, \qquad n \in \mathbb{R}\,,$$

bijektiv auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ abbildet, stellt man sich vor, dass exp die disjunkte Vereinigung solcher Streifen auf die disjunkte Vereinigung der Bilder abbildet, also

$$\exp : \mathbb{C} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n \;\to\; \biguplus_{n \in \mathbb{N}} \exp(S_n)\,.$$

Auf der rechten Seite steht jetzt die disjunkte Vereinigung von geschlitzten Ebenen, also $\mathbb{N}$ Kopien von $\mathbb{C}$ mit Schnitt. Nun ist aber aus Sicht der Funktion exp die Wahl der Streifen völlig beliebig und insbesondere ist exp an den Übergängen von S_n nach S_{n+1} stetig. Deshalb stellt man sich die Bilder der Streifen, also die geschlitzten Ebenen $\exp(S_n)$ und $\exp(S_{n+1})$ an den entsprechenden Stellen "aneinandergeklebt" vor. Der natürliche Definitionsbereich des Logarithmus ist die "Spirale", die man aus den abzählbar unendlich vielen verklebten Ebenen erhält. Man nennt so eine Fläche eine "Riemannsche Fläche".



4.3 Komplexe Wurzeln

4.5 Bemerkung. **Die Wurzel im Komplexen**
Zu jeder komplexen Zahl $z \neq 0$ existieren genau n verschiedene n-te Wurzeln:
Sei $z = |z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, dann sind

$$w_1 = \sqrt[n]{|z|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi}{n}}\,, \quad w_2 = \sqrt[n]{|z|}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi+2\pi}{n}}\,, \ \dots\,, \quad w_n = \sqrt[n]{|z|}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi+2\pi(n-1)}{n}}$$

alle verschieden und es gilt

$$(w_j)^n = \left(\sqrt[n]{|z|}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi+2\pi(j-1)}{n}}\right)^n = |z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi+2\pi(j-1))} = z.$$

Es bezeichnet $\sqrt[n]{|z|}$ hier immer die eindeutige positive reelle n-te Wurzel. Die Zahlen

$$1\,, \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}\,, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{n}}\,, \ \dots\,, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi(n-1)}{n}}$$

sind die n verschiedenen n-ten Wurzlen von 1 und heißen die n-ten Einheitswurzeln.

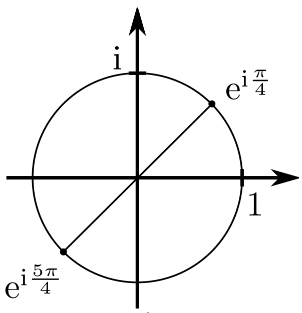
4.6 Beispiele. **Komplexe Wurzeln**

(a) Die beiden Quadratwurzeln von $\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$ sind

$$(\sqrt{\mathrm{i}})_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1+\mathrm{i})$$

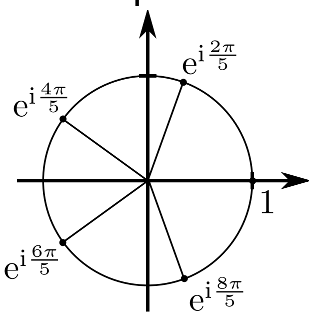
und

$$(\sqrt{\mathrm{i}})_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{4}} = -(\sqrt{\mathrm{i}})_1\,.$$



(b) Die 5-ten Wurzeln von 1 sind

$$1\,, \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}\,, \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{5}}\,, \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{6\pi}{5}}\,, \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{8\pi}{5}}\,.$$



4.7 Bemerkung. **Die Riemannsche Fläche der Wurzelfunktion**
Die n-te Wurzelfunktion ist lokal die Umkehrfunktion zu

$$z \mapsto z^n\,.$$

Allerdings ist $z \mapsto z^n$ nur auf Sektoren der Form

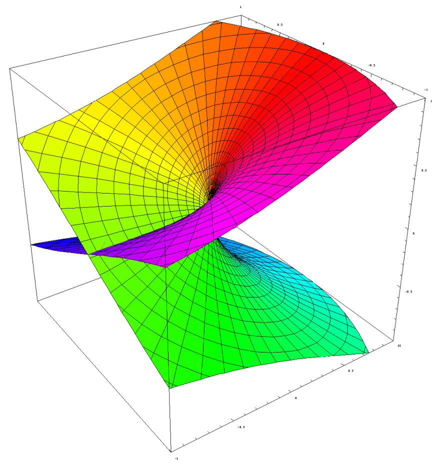
$$T_\alpha := \{z = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \,|\, |z| \geq 0\,, \ \ \varphi \in (\alpha, \alpha + \tfrac{2\pi}{n}]\} \subset \mathbb{C}$$

bijektiv. Das Bild eines solchen Sektors ist wieder eine geschlitzte Ebene: für $n = 2$ und $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ ist beispielsweise

$$\{z = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \,|\, |z| \geq 0\,, \ \ \varphi \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]\}$$

einfach die rechte Halbebene, welche unter $z \mapsto z^2$ bijektiv auf ganz $\mathbb{C}$ abgebildet wird. Die Umkehrfunktion wird der Hauptzweig der Wurzel genannt und ist auf dem Schnitt $(-\infty, 0)$ wieder unstetig.

Es bildet also $z \mapsto z^n$ die n disjunkten Sektoren $T_{j\frac{2\pi}{n}}$ bijektiv auf geschlitzte Ebenen ab, welche man wie beim Logarithmus an den Schnitten entsprechen verkleben kann. Man erhält so als den natürlichen Definitionsbereich der Wurzelfunktion wieder entsprechende Riemannsche Flächen. Im Bild ist die Riemannsche Fläche der Quadratwurzel skizziert.



4.8 Bemerkung. Komplexe Exponenten und Basen

Für $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ kann man mit Hilfe der komplexen Exponentialfunktion und des reellen Logarithmus $x^w := \exp(w \ln(x))$ für komplexe Exponenten $w \in \mathbb{C}$ definieren. Man kann $z \mapsto z^w$ mit Hilfe des komplexen Logarithmus aber auch für komplexe Basen definieren: Für $z \neq 0$ setzt man wieder

$$z^w \ := \ \mathrm{e}^{w \ln z} .$$

Der Wert von z^w hängt allerdings von der Wahl des Zweiges für den Logarithmus ab. Beispielsweise gibt es für $z^{\frac{1}{n}}$ mit $n \in \mathbb{N}$ genau die n verschiedenen Möglichkeiten, die wir zuvor besprochen haben.

Die oben beschriebene Standardwahl für reelles und positives $x > 0$ entspricht dem Hauptzweig des Logarithmus.

4.9 Bemerkung. Komplexe Polynome

Die Ergebnisse aus Abschnitt 3.2 lassen sich alle eins-zu-eins auf komplexe Polynomfunktionen

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$$

mit Koeffizienten $a_j \in \mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}$ übertragen.

Im Komplexen gilt aber sogar der

4.10 Satz. Fundamentalsatz der Algebra

Jedes komplexe Polynom

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots a_n z^n$$

vom Grad $n \geq 1$ hat mindestens eine Nullstelle $\lambda \in \mathbb{C}$.

Es ist also $p(z) = (z - \lambda) q(z)$ mit Grad $q = n - 1$. Induktiv ergibt sich

$$p(z) = a_n \cdot (z - \lambda_1) \cdots (z - \lambda_n),$$

es "zerfällt" also jedes Polynom über $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren. Fasst man die gleichen Nullstellen zusammen und bezeichnet mit k_j die Vielfachheit von λ_j, so schreibt man auch

$$p(z) = a_n \cdot (z - \lambda_1)^{k_1} \cdots (z - \lambda_m)^{k_m}$$

wobei $k_1 + \cdots + k_m = n$ ist.

Einen eleganten Beweis des Fundamentalsatzes werden Sie in der Analysis 4 im Rahmen der Funktionentheorie kennenlernen.

5 Unendliche Reihen

Sei (x_n) eine reelle oder komplexe Folge. Man möchte der „formalen unendlichen Summe“, genannt Reihe,

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ “=” } x_1 + x_2 + x_3 + \cdots$$

einen Wert zuordnen. Es ist aber zunächst nur für jedes $m \in \mathbb{N}$

$$s_m := \sum_{n=1}^{m} x_n = x_1 + \cdots + x_m \,,$$

die sogenannte m-te Partialsumme, definiert.

5.1 Definition. <u>**Reihenkonvergenz**</u>
Sei (x_n) eine Folge in $\mathbb{C}$. Man sagt, die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergiert bzw. divergiert, wenn die Folge (s_m) der Partialsummen konvergiert bzw. divergiert. Konvergiert die Partialsummenfolge (oder divergiert sie bestimmt), so nennt man

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n := \lim_{m\to\infty} s_m$$

den Wert oder die Summe der Reihe.

5.2 Beispiele. (a) Sei $x_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann ist $s_m = m$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Die Partialsummenfolge divergiert also bestimmt und es ist $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim_{m\to\infty} s_m = +\infty$.

(b) Sei $x_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann ist $s_m = 0$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Die Partialsummenfolge konvergiert also gegen 0 und es ist $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim_{m\to\infty} s_m = 0$.

(c) Sei $x_n = (-1)^n$, dann ist

$$s_m = \begin{cases} 0 & \text{falls } m \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } m \text{ ungerade} \end{cases} \,.$$

Also ist mit (s_m) auch $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ divergent.

5.3 Bemerkung. Reihen sind also nichts anderes als etwas anders aufgeschriebene Folgen:

Reihe:	$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$	$\longrightarrow$	Folge:	$s_m = \sum_{n=1}^{m} x_n$
Folge:	s_m	$\longrightarrow$	Reihe:	für $x_n = s_n - s_{n-1}$ ist $s_m = \sum_{n=1}^{m} x_n$

5.4 Beispiel. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \ldots$ ist konvergent und hat den Wert 1, denn wegen

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

ist jede Partialsumme eine Teleskopsumme und

$$s_m = \sum_{n=1}^{m} \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \cdots + \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} = 1 - \frac{1}{m+1} \overset{m\to\infty}{\to} 1 \,.$$

5.5 Definition und Satz. <u>**Die geometrische Reihe**</u>
Die **geometrische Reihe**
$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n, \qquad q \in \mathbb{C},$$
konvergiert genau dann, wenn $|q| < 1$ ist. In diesem Fall ist
$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Beweis. Laut Übung 13 (a) ist für $q \neq 1$
$$s_m = \sum_{n=0}^{m} q^n = \frac{1-q^{m+1}}{1-q}.$$
Also ist für $|q| < 1$ wegen $\lim_{m\to\infty} q^{m+1} = 0$
$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n := \lim_{m\to\infty} s_m = \frac{1}{1-q}.$$
Für $|q| \geq 1$ bilden die Folgenglieder q^n keine Nullfolge, die Reihe kann also nicht konvergieren (vgl. Satz 5.8 (b)). □

5.6 Satz. <u>**Die harmonische Reihe**</u>
Die **harmonische Reihe**
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$
ist divergent, es gilt $\lim_{m\to\infty} s_m = +\infty$.

Beweis. Als Spezialfall des später noch zu zeigenden Verdichtungskriteriums finden wir, dass
$$\begin{aligned} s_{2^m} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{m-1}+1} + \frac{1}{2^{m-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^m}\right) \\ &> 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + 2^{m-1}\frac{1}{2^m} \\ &= 1 + \frac{m}{2}. \end{aligned}$$
Da s_m offenbar monoton wächst, folgt die Behauptung. □

5.7 Bemerkung. Die Partialsummenfolge $\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n}$ der harmonischen Reihe divergiert aber sehr langsam, da die Inkremente immer kleiner werden ($\frac{1}{n}$ ist eine Nullfolge!). Wie wir später noch präzisieren werden, ist
$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} \approx \int_1^m \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(m).$$

5.8 Satz. <u>**Eigenschaften konvergenter Reihen**</u>
Seien (x_n) und (y_n) Folgen in $\mathbb{C}$.

(a) Aus $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x$ und $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = y$ folgt für $a, b \in \mathbb{C}$, dass $\sum_{n=1}^{\infty}(ax_n + by_n) = ax + by$.

(b) Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergent, so ist (x_n) eine Nullfolge.
Eine notwendige Bedingung für die Konvergenz einer Reihe ist also, dass die Summandenfolge eine Nullfolge ist. Dass diese Bedingung nicht hinreichend ist, haben wir am Beispiel der harmonischen Reihe gesehen.

(c) Die Abänderung endlich vieler Glieder in einer Reihe ändert nichts am Konvergenzverhalten (aber im Allgemeinen natürlich am Wert).

Beweis. (a) Seien $(s_m), (t_m)$ und (u_m) die Partialsummenfolgen zu $\sum x_n$, $\sum y_n$ und $\sum(ax_n + by_n)$. Dann gilt

$$u_m = a\, s_m + b\, t_m\,,$$

woraus die Behauptung folgt.

(b) Ist (s_m) konvergent und somit Cauchy, so gilt

$$x_n = s_n - s_{n-1} \overset{n\to\infty}{\to} 0\,.$$

(c) Klar, denn die Partialsummenfolge wird für hinreichend große m nur um eine Konstante verschoben.

□

Aus den Konvergenzkriterien für (reelle) Folgen ergeben sich sofort Konvergenzkriterien für (reelle) Reihen.

5.9 Satz. Monotoniekriterium

Sei (x_n) eine Folge in $\mathbb{R}$. Sind alle bis auf endlich viele $x_n \geq 0$ und ist die Partialsummenfolge nach oben beschränkt, so ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \qquad \text{konvergent.}$$

Beweis. Ab einem hinreichend großen m ist s_m monoton wachsend und beschränkt, also konvergent. □

5.10 Satz. Cauchy-Kriterium

Sei (x_n) eine Folge in $\mathbb{C}$. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ ist genau dann konvergent, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} x_k\right| < \varepsilon \qquad \text{für alle } m, n \geq n_\varepsilon\,.$$

Beweis. Wegen $\sum_{k=n+1}^{m} x_k = s_m - s_n$ bedeutet die Bedingung, dass (s_m) eine Cauchyfolge ist. □

5.11 Definition. Absolute Konvergenz von Reihen

Sei (x_n) eine Folge in $\mathbb{C}$. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ heißt **absolut konvergent**, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ konvergiert.

5.12 Lemma. Jede absolut konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ist konvergent.

Beweis. Übungsaufgabe. □

5.13 Lemma. Majorantenkriterium

Sei (x_n) eine Folge in $\mathbb{C}$ und (y_n) eine Folge in $\mathbb{R}$. Sei weiterhin $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ konvergent und $|x_n| \leq y_n$ für n groß genug. Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ absolut konvergent.

Beweis. Übungsaufgabe. □

5.14 Satz. Umordnungssatz

Sei (x_n) eine Folge in $\mathbb{C}$. Ist $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ absolut konvergent, so ist auch jede Umordnung absolut konvergent und hat die gleiche Summe.

Beweis. Sei (y_n) eine Umordnung von (x_n), d.h. $y_n = x_{f(n)}$ für eine Bijektion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Wähle zu jedem $m \in \mathbb{N}$ ein $N(m) \in \mathbb{N}$ so, dass $\{y_1, \dots, y_m\} \subset \{x_1, \dots, x_{N(m)}\}$. Dann ist

$$\sum_{n=1}^{m} |y_n| \leq \sum_{n=1}^{N(m)} |x_n| \leq \tilde{s} := \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \,.$$

Daraus folgt mit dem Monotoniekriterium die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|$ und somit die absolute Konvergenz der umgeordneten Reihe.

Sei nun $s := \sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Zu $\varepsilon > 0$ wähle $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so, dass $\sum_{n=n_\varepsilon+1}^{\infty} |x_n| < \frac{\varepsilon}{3}$, und $m_\varepsilon = m_\varepsilon(n_\varepsilon) \in \mathbb{N}$ so, dass $\{x_1, \dots, x_{n_\varepsilon}\} \subset \{y_1, \dots, y_{m_\varepsilon}\}$.

Dann gilt für $m \geq m_\varepsilon$, dass

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{m} y_n - s \right| &\leq \left| \sum_{n=1}^{m} y_n - \sum_{n=1}^{m_\varepsilon} y_n \right| + \left| \sum_{n=1}^{m_\varepsilon} y_n - \sum_{n=1}^{n_\varepsilon} x_n \right| + \left| \sum_{n=1}^{n_\varepsilon} x_n - s \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

Also gilt $\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} y_n = s$. □

5.15 Satz. **Leibniz-Kriterium für alternierende Reihe**

Ist (x_n) eine monoton fallende reelle Nullfolge, so ist die alternierende Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n$$

konvergent. Für die Summe s und die Partialsumme s_m gilt

$$|s - s_m| \leq x_{m+1} \qquad \text{für alle } m \in \mathbb{N} \,.$$

Beweis. Für die Partialsummen gilt (O.B.d.A. $m \leq l$)

$$|s_l - s_m| = \left| \sum_{n=m+1}^{l} (-1)^n x_n \right| \leq x_{m+1} \stackrel{m\to\infty}{\to} 0 \,.$$

Also ist (s_m) eine Cauchyfolge und für $l \to \infty$ folgt die zweite Behauptung. □

5.16 Beispiel. Die alternierende harmonische Reihe

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

ist demnach konvergent, sagen wir gegen s (Später werden wir sehen, dass $s = \ln 2$).

Wir können aber leicht durch Umordnen eine Reihe erzeugen, deren Grenzwert ein beliebiges $c \in \mathbb{R}$ ist: solange $s_m < c$, addiere positive Glieder. Da die Reihe $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots$ der positiven Glieder divergiert, wird irgendwann $s_m \geq c$ gelten. Dann addiere negative Glieder, bis wieder $s_m < c$ usw.

5.17 Satz. **Riemannscher Umordnungssatz**

Sei (x_n) eine Folge in $\mathbb{R}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergent. Falls $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ absolut konvergiert, so hat jede Umordnung die gleiche Summe. Andernfalls existiert zu jedem $c \in \mathbb{R}$ eine Umordnung mit $\sum_{n=1}^{\infty} x_{f(n)} = c$.

Wir zeigen nun zwei sehr nützliche Konvergenzkriterien für Reihen, die beide aus einer Anwendung des Majorantenkriteriums auf die geometrische Reihe hervorgehen.

Die Idee des Wurzelkriteriums ist die folgende: Ist $\sqrt[n]{|x_n|} \leq q < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $|x_n| \leq q^n$ und somit $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ konvergent. Allerdings reicht es natürlich, wenn $\sqrt[n]{|x_n|} \leq q$ für alle bis auf endlich viele n gilt, also, wenn alle Häufungspunkte der Folge $(\sqrt[n]{|x_n|})$ echt kleiner als 1 sind.

5.18 Definition. **Limes superior und Limes inferior**

Sei (x_n) eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Der **Limes superior** von (x_n) ist die Zahl

$$\limsup_{n\to\infty} x_n := \sup\{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ ist Häufungspunkt von } (x_n)\}.$$

Man überlegt sich leicht, dass $\limsup_{n\to\infty} x_n$ der größte Häufungspunkt von (x_n) ist. Analog definiert man den **Limes inferior** als den kleinsten Häufungspunkt.

Auf unbeschränkte Folgen verallgemeinert man das so: Ist (x_n) nicht nach oben beschränkt, so setzt man $\limsup_{n\to\infty} x_n := \infty$. Ist (x_n) nach oben beschränkt aber nicht nach unten, so ist $\limsup_{n\to\infty} x_n$ gleich dem größten Häufungspunkt, falls dieser existiert, und $\limsup_{n\to\infty} x_n = -\infty$, falls (x_n) keine Häufungspunkte hat. Analog verallgemeinert man den Limes inferior.

5.19 Proposition. Sei (x_n) eine Folge. Dann gilt

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{k\to\infty} \sup\{x_n \,|\, n \geq k\} \qquad \text{und} \qquad \liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{k\to\infty} \inf\{x_n \,|\, n \geq k\}.$$

Beweis. Übungsaufgabe. □

Ist $\limsup_{n\to\infty} |x_n| = q$, so gilt offenbar für jedes $\varepsilon > 0$, dass $|x_n| < q + \varepsilon$ bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$.

5.20 Satz. **Wurzelkriterium**

Sei (x_n) eine Folge in $\mathbb{C}$. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ist absolut konvergent, wenn

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} < 1$$

ist. Sie ist divergent, wenn

$$\sqrt[n]{|x_n|} \geq 1 \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N}$$

gilt.

Beweis. Ist $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = \tilde{q} < 1$, so gilt $\sqrt[n]{|x_n|} \leq \frac{1+\tilde{q}}{2} =: q < 1$ und somit

$$|x_n| \leq q^n$$

für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$. Also wird $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ durch die geometrische Reihe majorisiert und ist absolut konvergent.

Ist andererseits $\sqrt[n]{|x_n|} \geq 1$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$, so ist $|x_n|$ keine Nullfolge und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ mit Satz 5.8 b) divergent. □

5.21 Satz. **Quotientenkriterium**

Sei (x_n) eine Folge in $\mathbb{C}$. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ist absolut konvergent, wenn

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| < 1$$

gilt, und sie ist divergent, wenn

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \geq 1 \quad \text{für fast alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dabei sei (nur hier!) $\frac{0}{0} := 0$ und $\frac{x}{0} = \infty$ für $x > 0$.

Beweis. Ist $\limsup_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \tilde{q} < 1$, so existiert zu $q = \frac{\tilde{q}+1}{2}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|x_{n+1}| \leq q \cdot |x_n| \quad \text{für alle } n \geq n_0,$$

woraus

$$|x_n| \leq |x_{n_0}| \cdot q^{n-n_0} \quad \text{für alle } n \geq n_0$$

folgt. Also wird $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ durch die geometrische Reihe majorisiert und ist absolut konvergent. Gilt andererseits $\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} \geq 1$ für $n \geq n_0$, so ist $|x_n| \geq |x_{n_0}| > 0$ für $n \geq n_0$ und somit (x_n) keine Nullfolge. □

5.22 Beispiel. <u>Die Exponentialreihe</u>

Die Exponentialreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

ist für jedes $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergent, da

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \left|\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{z^n}\right| = \left|\frac{z}{n+1}\right| \leq \frac{1}{2} < 1$$

für $n \geq 2|z|$.

5.23 Definition. <u>Potenzreihen</u>

Sei (x_n) eine Folge in $\mathbb{C}$, so heißt

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n$$

eine **Potenzreihe**.

Später werden wir Funktionen, wie z.B. die Exponentialfunktion durch Potenzreihen ausdrücken: $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

5.24 Definition und Satz. <u>Konvergenzradius</u>

Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n$ hat den **Konvergenzradius**

$$\varrho := \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|x_n|}},$$

wobei $\varrho := \infty$ falls $\limsup \sqrt[n]{|x_n|} = 0$ und $\varrho := 0$ falls $\limsup \sqrt[n]{|x_n|} = \infty$.

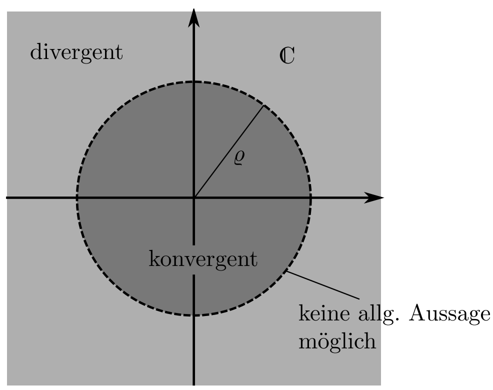
Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n$

(a) konvergiert absolut für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \varrho$

(b) divergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > \varrho$.

Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = \varrho$ ist keine allgemeine Konvergenzaussage möglich.

Der Konvergenzbereich einer Potenzreihe ist also **immer** eine Kreisscheibe.



Beweis. Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \varrho$, also auch $|z| \leq \varrho' < \varrho$ für ein geeignetes ϱ'. Nun ist

$$\limsup \sqrt[n]{|x_n||z|^n} = |z| \limsup \sqrt[n]{|x_n|} = |z|\frac{1}{\varrho} \leq \frac{\varrho'}{\varrho} < 1\,.$$

Mit dem Wurzelkriterium ist $\sum x_n z^n$ also absolut konvergent.
Ist $|z| > \varrho$, also $|z| \geq \varrho' > \varrho$ für ein geeignetes ϱ', so ist

$$\limsup \sqrt[n]{|x||z|^n} \geq \frac{\varrho'}{\varrho} > 1$$

und somit $\sqrt[n]{|x_n|} \geq 1$ für unendlich viele n. Mit dem Wurzelkriterium ist $\sum x_n z^n$ also divergent. □

5.25 Beispiele. zum Verhalten bei $|z| = \varrho$.

(a) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$ hat den Konvergenzradius $\varrho = 1$, da $\limsup \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$. Sie divergiert für $z = 1$ (harmonische Reihe) und konvergiert für $z = -1$ (alternierende harmonische Reihe).

(b) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^n$ hat ebenfalls den Konvergenzradius $\varrho = 1$, da auch $\limsup \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \limsup \mathrm{e}^{\frac{2}{n}\ln n} = 1$. Für jedes $|z| = \rho = 1$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^n$ aber absolut, da sie dann durch die absolut konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ majorisiert wird.

5.26 Satz. **Cauchyscher Verdichtungssatz**
Sei (x_n) eine monton fallende nichtnegative Folge in $\mathbb{R}$, also $0 \leq x_{n+1} \leq x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ genau dann, wenn die verdichtete Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k x_{2^k}$$

konvergiert.

Beweis. Gruppiert man jeweils 2^k Terme und schätzt sie durch 2^k-mal den kleinsten ab, so erhält man eine untere Schranke

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2^n} x_k &= x_1 + x_2 + (x_3 + x_4) + (x_5 + x_6 + x_7 + x_8) + \cdots + (x_{2^{n-1}+1} + \cdots + x_{2^n})\\ &\geq \tfrac{1}{2}x_1 + x_2 + 2x_4 + 4x_8 + \cdots + 2^{n-1}x_{2^n} = \tfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} 2^k x_{2^k}\end{aligned}$$

an die Partialsummen. Die selbe Idee liefert auch die obere Schranke,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2^n-1} x_k &= x_1 + (x_2 + x_3) + (x_4 + x_5 + x_6 + x_7) + \cdots + (x_{2^{n-1}} + \cdots + x_{2^n-1})\\ &\leq x_1 + 2x_2 + 4x_4 + \cdots + 2^{n-1}x_{2^{n-1}} = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k x_{2^k}\,.\end{aligned}$$

Die Partialsummen von $\sum 2^k x_{2^k}$ sind also genau dann beschränkt, wenn die Partialsummen von $\sum x_k$ beschränkt sind. Das Monotomiekriterium impliziert dann die Aussage des Satzes. □

5.27 Beispiel. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, ist genau dann konvergent, wenn $\alpha > 1$ ist. Die verdichtete Reihe ist nämlich

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} (2^{1-\alpha})^k = \sum_{k=0}^{\infty} q^k$$

mit $q = 2^{1-\alpha}$. Es ist $q < 1$ genau dann wenn $\alpha > 1$.

Summiert man Folgen mit zwei Indices, also $x_{kl} \in \mathbb{C}$, $k, l \in \mathbb{N}$, so spricht man von **Doppelreihen**. Es stellt sich die Frage, wie man

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} x_{kl}$$

definieren soll, da es ja jetzt keine kanonische Partialsummenfolge mehr gibt. Verschiedene Möglichkeiten wären

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^{\infty} x_{kl} \right)$ falls $y_k := \sum_{l=1}^{\infty} x_{kl}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ konvergieren.

(b) $\sum_{l=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_{kl} \right)$ falls $z_l := \sum_{k=1}^{\infty} x_{kl}$ und $\sum_{l=1}^{\infty} z_l$ konvergieren.

(c) Man durchläuft die x_{kl} mit Hilfe einer Folge, $(x_{f(n)})$, wobei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ bijektiv ist (vgl. Cantors Diagonaltrick 1) und betrachtet $\sum_{n=1}^{\infty} x_{f(n)}$.

Der folgende Satz besagt, dass für absolut konvergente Reihen die Veränderung der Summationsreihenfolge wieder keine Rolle spielt.

5.28 Satz. Großer Umordnungssatz

Für jede Doppelfolge (x_{kl}) in $\mathbb{C}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} |x_{f(n)}|$ konvergiert für eine Anordnung f.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} |x_{f(n)}|$ konvergiert für jede Anordnung f.

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^{\infty} |x_{kl}| \right)$ konvergiert.

(d) $\sum_{l=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_{kl}| \right)$ konvergiert.

Ist eine (und somit alle) dieser vier Aussagen erfüllt, so gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Big(\sum_{l=1}^{\infty} x_{kl} \Big) = \sum_{l=1}^{\infty} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} x_{kl} \Big) = \sum_{n=1}^{\infty} x_{f(n)}$$

für jede Anordnung f.

5.29 Merkregel. Ist eine Doppelreihe absolut konvergent, so kann man die Summationsreihenfolge beliebig verändern, ohne den Grenzwert zu ändern.

5.30 Beispiel. Ist eine Doppelreihe **nicht** absolut konvergent, so kann die Vertauschung der Summationsreihenfolge das Ergebnis verändern:
Sei

$$x_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad k = l \\ -1 & \text{falls} \quad k = l - 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \qquad \begin{array}{c|cccc} & \multicolumn{4}{c}{\xrightarrow{\;l\;}} \\ \hline & 1 & -1 & 0 & 0 \\ k\downarrow & 0 & 1 & -1 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}$$

Dann ist $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^{\infty} x_{kl} \right) = 0$ aber $\sum_{l=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_{kl} \right) = 1$. Der Satz findet keine Anwendung, da die Reihe nicht absolut konvergiert, $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} |x_{kl}| = \infty$.

Beweis. des Umordnungssatzes:
Die Äquivalenz von (a) und (b) ist einfach der Umordnungssatz, Satz 5.14, da $\sum |x_{f(n)}|$ und $\sum |x_{\tilde{f}(n)}|$ Umordnungen derselben absolut konvergenten Reihe sind.

Nun gelte (a) mit $\sum_{n=1}^{\infty} |x_{f(n)}| =: \tilde{x}$ und wir zeigen (d) ((c) folgt natürlich völlig analog). Da es für alle $K, L \in \mathbb{N}$ ein $N(K,L) \in \mathbb{N}$ mit $\{(k,l) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \,|\, k \leq K,\, l \leq L\} \subset f(\{1,\ldots,N(K,L)\})$ gibt und somit

$$\sum_{k=1}^{K} |x_{kl}| \leq \sum_{n=1}^{N(K,l)} |x_{f(n)}| \leq \tilde{x}\,,$$

folgt aus dem Monotoniekriterium, dass $\sum_{k=1}^{\infty} |x_{kl}|$ für jedes $l \in \mathbb{N}$ konvergiert. Weiter gilt für jedes $L \in \mathbb{N}$

$$\sum_{l=1}^{L}\sum_{k=1}^{\infty} |x_{kl}| = \sum_{l=1}^{L} \lim_{K\to\infty} \sum_{k=1}^{K} |x_{kl}| = \lim_{K\to\infty} \sum_{l=1}^{L}\sum_{k=1}^{K} |x_{kl}| \leq \lim_{K\to\infty} \sum_{n=1}^{N(K,L)} |x_{f(n)}| = \tilde{x}\,,$$

und wiederum liefert das Monotoniekriterium, dass $\sum_{l=1}^{\infty} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |x_{kl}|\Big)$ konvergiert mit

$$\sum_{l=1}^{\infty} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |x_{kl}|\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_{f(n)}|\,.$$

Also gilt (a) $\Rightarrow$ (d).

Die umgekehrte Richtung zeigt man völlig analog: Es gelte (d) mit $\sum_{l=1}^{\infty} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |x_{kl}|\Big) =: \tilde{x}$. Da zu jedem $N \in \mathbb{N}$ ein Tupel $(K_N, L_N) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ mit $f(\{1,\ldots,N\}) \subset \{(k,l) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \,|\, k \leq K_N,\, l \leq L_N\}$ existiert, ist

$$\sum_{n=1}^{N} |x_{f(n)}| \leq \sum_{l=1}^{L_N}\sum_{k=1}^{K_N} |x_{kl}| \leq \sum_{l=1}^{L_N} \lim_{K\to\infty} \sum_{k=1}^{K} |x_{kl}| \leq \lim_{L\to\infty} \sum_{l=1}^{L} \lim_{K\to\infty} \sum_{k=1}^{K} |x_{kl}| = \tilde{x}$$

und mit dem Monotoniekriterium ist $\sum_{n=1}^{\infty} |x_{f(n)}|$ konvergent und

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_{f(n)}| \leq \sum_{l=1}^{\infty} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |x_{kl}|\Big)\,.$$

Insgesamt haben wir also die Äquivalenz von (a), (b), (c) und (d) gezeigt und zusätzlich auch schon

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_{f(n)}| = \sum_{l=1}^{\infty} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |x_{kl}|\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\sum_{l=1}^{\infty} |x_{kl}|\Big)\,.$$

Für Folgen mit $x_{kl} \geq 0$ gilt daher dann auch der zweite Teil der Behauptung, nämlich

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_{f(n)} = \sum_{l=1}^{\infty} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} x_{kl}\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\sum_{l=1}^{\infty} x_{kl}\Big).$$

Für $x_{kl} \in \mathbb{R}$ setze

$$x_{kl,+} = \max\{0, x_{kl}\} \quad \text{und} \quad x_{kl,-} = \max\{0, -x_{kl}\}$$

also $x_{kl} = x_{kl,+} - x_{kl,-}$. Es ist dann $\sum_{n=1}^{\infty} x_{f(n),\pm} \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_{f(n),\pm}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_{f(n)}| < \infty$, also mit dem Resultat für positive Folgen

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_{f(n),\pm} = \sum_{l=1}^{\infty} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} x_{kl,\pm}\Big).$$

Die Behauptung folgt nun durch Subtraktion:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{l=1}^{\infty} x_{kl}\Big) &= \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{l=1}^{\infty} x_{kl,+} - \sum_{l=1}^{\infty} x_{kl,-}\Big) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} x_{kl,+} - \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} x_{kl,-} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} x_{f(n),+} - \sum_{n=1}^{\infty} x_{f(n),-} = \sum_{n=1}^{\infty} x_{f(n)}.\end{aligned}$$

Für komplexe x_{kl} zerlegt man analog in Real- und Imaginärteil.

□

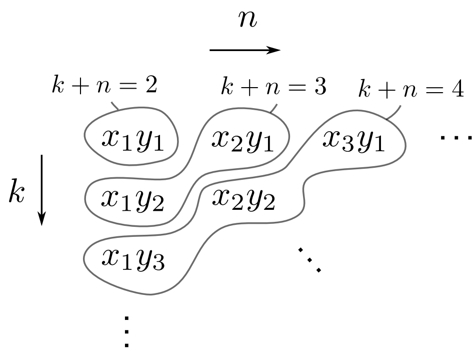
5.31 Korollar. **Das Cauchy-Produkt von Reihen**

Sind die Reihen $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ und $y = \sum_{k=1}^{\infty} y_k$ absolut konvergent, so ist auch die Reihe

$$\sum_{m=1}^{\infty} z_m$$

mit den Gliedern

$$\begin{aligned} z_m &= x_1 y_m + x_2 y_{m-1} + \ldots + x_m y_1 \\ &= \sum_{n+k=m+1} x_n y_k = \sum_{n=1}^{m} x_n y_{m+1-n}\end{aligned}$$



absolut konvergent, und es gilt

$$x \cdot y = \sum_{m=1}^{\infty} z_m.$$

Beweis. Sei $\tilde{z}_{nk} = x_n y_k$. Dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{k=1}^{\infty} |\tilde{z}_{nk}|\Big) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\lim_{K\to\infty}\sum_{k=1}^{K} |x_n||y_k| = \underbrace{\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}|x_n|}_{=:\tilde{x}<\infty}\,\underbrace{\lim_{K\to\infty}\sum_{k=1}^{K}|y_k|}_{=:\tilde{y}<\infty} = \tilde{x}\cdot\tilde{y} < \infty$$

und Satz 5.28 ist anwendbar. Der Wert der Doppelreihe ist

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{z}_{nk}\Big) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\lim_{K\to\infty}\sum_{k=1}^{K} x_n \cdot y_k = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} x_n \underbrace{\lim_{K\to\infty}\sum_{k=1}^{K} y_k}_{=y} = x \cdot y$$

und die Umordnung $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{m} x_n y_{m+1-n} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{m} \tilde{z}_{n,m+1-n}$ hat nach Satz 5.28 denselben Grenzwert. □

5.32 Beispiel. **Die Exponentialreihe**

Die Exponentialreihe $E(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ ist nach Beispiel 5.22 absolut konvergent. Daher gilt

$$\begin{aligned} E(z)E(w) &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{m} \frac{z^n}{n!}\cdot\frac{w^{m-n}}{(m-n)!} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\underbrace{\sum_{n=0}^{m}\binom{m}{n} z^n w^{m-n}}_{(z+w)^m} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(z+w)^m}{m!} = E(z+w).\end{aligned}$$

Also erfüllt $E(z)$ das Exponentialgesetz. Wir zeigen später, dass tatsächlich $E(z) = \exp(z)$ gilt.

6 Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit

6.1 Grenzwerte von Funktionen

6.1 Definition. **Der Abschluss**

Für $D \subset \mathbb{R}$ definieren wir den **Abschluss** in $\mathbb{R}$ durch

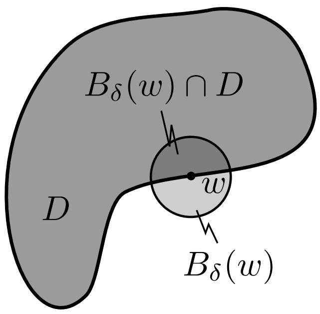
$$\begin{aligned} \overline{D} &:= \{w \in \mathbb{R} \,|\, \text{für jedes } \delta > 0 \text{ gibt es ein } z \in D \text{ mit } |z - w| < \delta\} \\ &= \{w \in \mathbb{R} \,|\, B_\delta(w) \cap D \neq \emptyset \ \text{ für alle } \delta > 0\}, \end{aligned}$$

wobei $B_\delta(w) := \{z \in \mathbb{R} \,|\, |z - w| < \delta\}$ das offene δ-Intervall um $w \in \mathbb{R}$ ist.
Für $D \subset \mathbb{C}$ definieren wir den **Abschluss** in $\mathbb{C}$ völlig analog durch

$$\begin{aligned} \overline{D} &:= \{w \in \mathbb{C} \,|\, \text{für jedes } \delta > 0 \text{ gibt es ein } z \in D \text{ mit } |z - w| < \delta\} \\ &= \{w \in \mathbb{C} \,|\, B_\delta(w) \cap D \neq \emptyset \ \text{ für alle } \delta > 0\}, \end{aligned}$$

wobei $B_\delta(w) := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - w| < \delta\}$ jetzt der offene δ-Ball bzw. die offene Kreisscheibe um $w \in \mathbb{C}$ ist.

Als Übungsaufgabe zeigt man leicht, dass $w \in \overline{D}$ genau dann gilt, wenn es eine Folge (z_n) in D gibt mit $\lim_{n\to\infty} z_n = w$.



6.2 Beispiele. Der Abschluss eines offenen Intervalls ist das abgeschlossene Intervall, z.B. $\overline{(0,1)} = [0,1]$, und der Abschluss einer offenen Kreisscheibe ist die abgeschlossene Kreisscheibe, z.B. $\overline{B_\delta(0)} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \leq \delta\}$.

6.3 Definition. **Grenzwerte von Funktionen**

Sei $D \subset \mathbb{C}$ der Definitionsbereich der Funktion $f : D \to \mathbb{C}$. Der Grenzwert von f an der Stelle $z_0 \in \overline{D}$ ist $w \in \mathbb{C}$, geschrieben

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w\,,$$

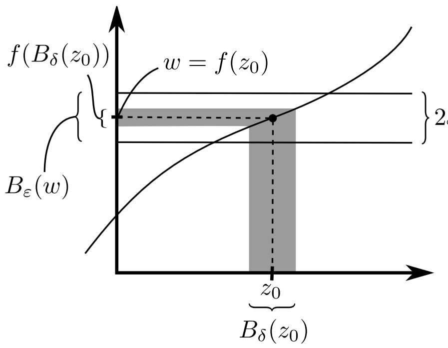
wenn gilt:

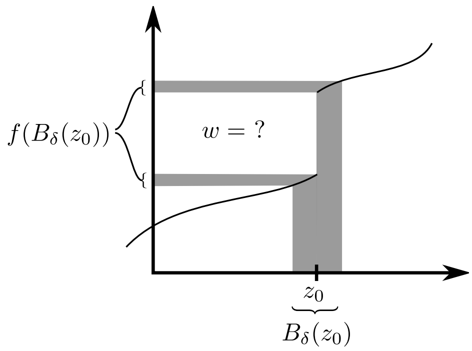
Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ so, dass für alle $z \in D$ mit $|z - z_0| < \delta$ gilt, dass $|f(z) - w| \leq \varepsilon$.

Mit Quantoren schreibt sich das so:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, z \in D \ : \quad |z - z_0| < \delta \ \Rightarrow \ |f(z) - w| \leq \varepsilon\,.$$

Falls $z_0 \in D$ liegt, muss also insbesondere $f(z_0) = w$ sein, da dann $|f(z_0) - w| \leq \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$ gelten muss.





Nochmals anders formuliert gilt also $\lim_{z\to z_0} f(z) = w$ genau dann wenn:

Zu jedem ε-Ball $B_\varepsilon(w)$ um w gibt es einen δ-Ball $B_\delta(z_0)$ um z_0, so dass $f(B_\delta(z_0) \cap D) \subset B_\varepsilon(w)$.

Für $f : D \to \mathbb{R}$ sagen wir

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \pm\infty\,,$$

wenn

$$\forall\, M > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, z \in D\,: \quad |z - z_0| < \delta \;\Rightarrow\; \pm f(z) > M\,.$$

Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sagen wir

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = c\,, \qquad c \in \mathbb{C}\,,$$

falls

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, R \in \mathbb{R}\,: \quad x > R \;\Rightarrow\; |f(x) - c| < \varepsilon\,,$$

und für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty \quad \text{falls} \quad \forall\, M > 0 \quad \exists\, R \in \mathbb{R}\,: \quad x > R \;\Rightarrow\; \pm f(x) > M\,.$$

6.4 Beispiel. Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = \frac{1}{x}$ mit Definitionsbereich $D = (0, \infty)$. Dann ist einerseits $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$, da für $M > 0$ und $\delta = \frac{1}{M}$ gilt

$$f(x) > f(\delta) = M \quad \text{falls} \;\; x < \delta\,.$$

Andererseits ist $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, da für für $\varepsilon > 0$ und $R = \frac{1}{\varepsilon}$ gilt, dass

$$|f(x) - 0| = |f(x)| < \varepsilon \quad \text{falls} \;\; x > R\,.$$

Wir sehen nun leicht, dass der Grenzwert einer Funktion f bei z_0 gleich w ist, wenn für jede Folge $z_n \to z_0$ in D gilt, dass $f(z_n) \to w$.

6.5 Proposition. Für $f : D \to \mathbb{C}$ und $z_0 \in \overline{D}$ sind äquivalent:

(a) Der Grenzwert $\lim_{z\to z_0} f(z)$ existiert.

(b) Für jede Folge (z_n) in D mit $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ existiert der Limes $\lim_{n\to\infty} f(z_n)$.

Falls eine der Aussagen und somit beide erfüllt sind, so gilt für jede Folge (z_n) in D mit $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$, dass

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = \lim_{z\to z_0} f(z)\,.$$

Beweis. Zu zeigen ist

$$\begin{aligned} &\text{(a) } \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall z \in D\,:\; |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w| < \varepsilon \\ &\quad\Longleftrightarrow \quad \text{(b') } \forall\, (z_n) \text{ in } D \text{ mit } \lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \text{ gilt } \lim_{n\to\infty} f(z_n) = w\,, \end{aligned}$$

da (b) impliziert, dass alle Grenzwerte $\lim_{n\to\infty} f(z_n)$ übereinstimmen müssen: seien (x_n) und (y_n) zwei solche Folgen, dann konvergiert auch $(z_n) := (x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots)$ gegen z_0. Da $(f(x_n))$ und $(f(y_n))$ Teilfolgen von $(f(z_n))$ sind, müssen sie beiden den gleichen Limes wie $(f(z_n))$ haben. Wir zeigen also die Äquivalenz von (a) und (b').

(a)⇒(b'): Sei $\lim z_n = z_0$ und wähle zu $\varepsilon > 0$ ein passendes δ nach (a). Wähle nun $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $|z_n - z_0| < \delta$ für $n \geq n_0$. Dann ist $|f(z_n) - w| < \varepsilon$ für $n \geq n_0$, also $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = w$.

(b')⇒(a): Angenommen (a) ist falsch, also

$$\exists\, \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists\, z \in D\ :\ |z - z_0| < \delta \text{ aber } |f(z) - w| \geq \varepsilon.$$

Wähle zu $\delta = \frac{1}{n}$ ein entsprechendes $z_n \in D$ mit $|z_n - z_0| < \frac{1}{n}$, aber $|f(z_n) - w| \geq \varepsilon$. Dann ist $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ aber $\lim f(z_n) \neq w$, im Widerspruch zur Annahme, dass (b') gilt. □

6.6 Korollar. Äquivalente Charakterisierungen von Stetigkeit

Für $f : D \to \mathbb{C}$ und $z_0 \in D$ sind äquivalent

(a) $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$

(b) f ist stetig bei z_0 im Sinne von Folgenstetigkeit, Definition 3.6

Man nennt (a) manchmal auch ε-δ-Definition von Stetigkeit, da

$$f \text{ ist stetig bei } z_0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall z \in D\ :\ |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon\,. \tag{6.1}$$

6.7 Beispiele. (a) Sei $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Wegen $|\sin x| \leq |x| \leq |\tan x|$ für $|x| < \frac{\pi}{2}$ gilt für (x_n) mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, dass

$$1 = \lim_{n\to\infty} \cos x_n = \lim_{n\to\infty} \tfrac{x_n}{\tan x_n} \cdot \tfrac{\sin x_n}{x_n} \leq \lim_{n\to\infty} \tfrac{\sin x_n}{x_n} \leq 1\,,$$

also $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin x_n}{x_n} = 1$, oder äquivalent

$$\lim_{x\to 0} \tfrac{\sin x}{x} = 1\,.$$

Man kann also die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ **stetig** auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen, indem man $f(0) = 1$ definiert.

Bemerkung: Später werden wir sehen, dass $\frac{\sin x}{x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \cdots \to 1$.

(b) Die Funktion $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ hat keinen Grenzwert bei $x = 0$, da für $x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}(2n-1)}$ zwar $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ aber

$$f(x_n) = (-1)^{n+1}$$

offenbar nicht konvergiert. Man kann also die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin\frac{1}{x}$ **nicht** stetig auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen.

6.8 Erinnerung. Nochmals nachlesen!

Für stetige Funktionen $f : \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R}$ gelten

- der Zwischenwertsatz, Satz 3.10
- der „Umkehrsatz“, Satz 3.11.

Für beliebige stetige Funktionen gilt

- Summen und Produkte stetiger Funktionen sind stetig, Satz 3.23,
- Kompositionen $g \circ f$ stetiger Funktionen sind stetig, Übung 24 (b).

Kann man das δ zu gegebenem $\varepsilon > 0$ in der ε-δ-Charakterisierung der Stetigkeit unabhängig vom Punkt z_0 wählen, so spricht man von gleichmäßiger Stetigkeit.

6.9 Definition. Gleichmäßige Stetigkeit
Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ heißt **gleichmäßig stetig**, wenn gilt:

Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ so, dass für alle $w, z \in D$ gilt

$$|w - z| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(w) - f(z)| < \varepsilon\,.$$

6.10 Bemerkung. Jede gleichmäßig stetige Funktion ist offenbar auch stetig. Dass die Umkehrung nicht gilt, überlegt man sich leicht am Beispiel $f : (0,1) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$.

6.11 Definition. Beschränkte, offene, abgeschlossene, kompakte Teilmengen von $\mathbb{C}$
Eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$ bzw. $D \subset \mathbb{C}$ heißt

(i) **beschränkt**, falls ein $R > 0$ existiert so, dass $|z| < R$ für alle $z \in D$ gilt,

(ii) **offen**, falls es zu jedem $z \in D$ ein $\delta > 0$ gibt so, dass $B_\delta(z) \subset D$,

(iii) **abgeschlossen**, falls $\mathbb{R} \setminus D$ bzw. $\mathbb{C} \setminus D$ offen ist,

(iv) **kompakt**, falls D abgeschlossen und beschränkt ist.

6.12 Beispiele.
- Das Intervall $(0,1)$ ist beschränkt (offenbar) und offen in $\mathbb{R}$, da für $0 < x < 1$ und $\delta := \min\{x, 1-x\}$ gilt, dass $B_\delta(x) = (x-\delta, x+\delta) \subset (0,1)$. Es ist aber nicht offen als Teilmenge von $\mathbb{C}$!
- Das Intervall $[0,1]$ ist beschränkt und abgeschlossen in $\mathbb{R}$, da $\mathbb{R} \setminus [0,1] = (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ offen ist. Also ist $[0,1]$ kompakt.
- Für $D \subset \mathbb{C}$ ist der Abschluss $\overline{D}$ abgeschlossen, da $\mathbb{C} \setminus \overline{D}$ nach Definition von $\overline{D}$ offen ist.
- Die Kreisscheibe $B_R = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < R\}$ ist offen, denn für $z \in B_R$ sei $\delta = R - |z|$. Dann ist $B_\delta(z) \subset B_R(0)$, da für $w \in B_\delta(z)$ gilt, dass $|w| = |w - z + z| \le |w - z| + |z| < \delta + |z| = R$.
- Beliebige Vereinigungen offener Mengen sind offen: seien $M_\alpha \subset \mathbb{C}$ offene Mengen und $M = \cup_\alpha M_\alpha$. Zu $z \in M$ gibt es ein α so, dass $z \in M_\alpha$. Da M_α offen ist, gibt es ein $\delta > 0$ so, dass $B_\delta(z) \subset M_\alpha$. Dann ist aber auch $B_\delta(z) \subset M$.

Warnung: Die meisten Mengen sind weder abgeschlossen noch offen, z.B. $[0,1)$.

6.13 Bemerkung. Die leere Menge ist offen (per Definition) und abgeschlossen, da $\mathbb{R} \setminus \emptyset = \mathbb{R}$ offen ist. Demnach sind auch $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ jeweils offen und abgeschlossen in sich.

6.14 Proposition. Für $D \subset \mathbb{C}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) D ist abgeschlossen

(b) $D = \overline{D}$

(c) Für jede konvergente Folge (z_n) in D, liegt auch der Grenzwert z_0 wieder in D.

Beweis. Übung □

6.15 Satz. Bolzano-Weierstraß in $\mathbb{C}$
Jede beschränkte Folge (z_n) in $\mathbb{C}$ hat mindestens einen Häufungspunkt.

Beweis. $\mathrm{Re}(z_n)$ ist eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ und hat somit einen Häufungspunkt. Sei $\mathrm{Re}(z_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge. Dann hat $\mathrm{Im}(z_{n_k})$ als beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ einen Häufungspunkt. Sei $\mathrm{Im}(z_{n_{k_m}})_{m\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge. Dann konvergiert $(z_{n_{k_m}})_{m\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$, da Real- und Imaginärteil konvergieren. □

6.16 Korollar. Jede Folge (z_n) in einem Kompaktum $K \subset \mathbb{C}$ hat eine in K konvergente Teilfolge.

Beweis. Da K beschränkt ist, hat (z_n) einen Häufungspunkt. Da K abgeschlossen ist, liegt dieser in K. □

6.17 Satz. **Stetige Funktionen auf Kompakta sind gleichmäßig stetig**
Sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt und $f : K \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f gleichmäßig stetig.

Beweis. Angenommen f ist nicht gleichmäßig stetig. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ so, dass zu jedem $n \in \mathbb{N}$ zwei Zahlen $z_n, w_n \in K$ existieren, die zwar $|z_n - w_n| < \frac{1}{n}$ erfüllen, aber dennoch $|f(z_n) - f(w_n)| \geq \varepsilon$ gilt. Die Folge (z_n) hat als Folge im Kompaktum K einen Häufungspunkt z_0, also eine konvergente Teilfolge $(z_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\to\infty} z_{n_k} = z_0$. Da ja $|z_{n_k} - w_{n_k}| < \frac{1}{n_k}$ gilt, konvergiert auch $(w_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen z_0. Die Stetigkeit von f impliziert nun

$$\lim_{k\to\infty} (f(z_{n_k}) - f(w_{n_k})) = f(z_0) - f(z_0) = 0\,,$$

im Widerspruch zu $|f(z_{n_k}) - f(w_{n_k})| \geq \varepsilon > 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. □

6.18 Satz. **vom Maximum**
Sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt und $f : K \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f beschränkt und nimmt sein Supremum und sein Infimum an, hat also ein Maximum und ein Minimum.

Beweis. **Beschränktheit:** Angenommen, f ist unbeschränkt. Dann existiert eine Folge (z_n) in K mit $|f(z_n)| \geq n$. Da K kompakt ist existiert eine konvergente Teilfolge (z_{n_k}) mit $\lim_{k\to\infty} z_{n_k} = z_0 \in K$. Da f stetig ist, gilt $\lim_{k\to\infty} f(z_{n_k}) = f(z_0)$, also $f(z_{n_k}) \leq n_k$ für k groß genug, ein Widerspruch!
Existenz des Maximums: Da $\mathrm{Bild} f = \{f(z) \,|\, z \in K\} \subset \mathbb{R}$ beschränkt ist, existiert das Supremum $\sup f := \sup \mathrm{Bild} f$. Somit gibt es eine Folge (z_n) aus K mit

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = \sup f\,.$$

Da K kompakt ist, existiert eine konvergente Teilfolge (z_{n_k}) mit $\lim_{k\to\infty} z_{n_k} =: z_{\max}$.
Aufgrund der Stetigkeit ist

$$f(z_{\max}) = \lim_{k\to\infty} f(z_{n_k}) = \sup f\,.$$

□

6.19 Bemerkung. Auf unbeschränkten oder offenen Gebieten gilt die Aussage nicht. So ist

$$\arctan : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

zwar stetig und beschränkt, nimmt aber sein Supremum nicht an: $\sup\{\arctan x \,|\, x \in \mathbb{R}\} = \frac{\pi}{2}$ aber $\arctan x \neq \frac{\pi}{2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Andererseits ist

$$f : (0,1) \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto \frac{1}{x}\,,$$

zwar stetig, aber dennoch unbeschränkt.

6.20 Satz. **Stetige Bilder kompakter Mengen sind kompakt**
Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig. Ist $K \subset \mathbb{C}$ kompakt, so ist auch $f(K) = \{f(z) \,|\, z \in K\}$ kompakt.

Beweis. Wenden wir Satz 6.18 auf die Funktion $z \mapsto |f(z)|$ an, so folgt die Beschränktheit von $f(K)$. Wir müssen also noch die Abgeschlossenheit zeigen. Sei dazu (w_n) eine konvergente Folge in $f(K)$ mit $\lim w_n = w$. Nach Proposition 6.14 ist $w \in f(K)$ zu zeigen. Sei (z_n) in K so, dass $f(z_n) = w_n$. Da K kompakt ist, gibt es eine konvergente Teilfolge (z_{n_k}) mit $\lim_{k\to\infty} z_{n_k} = z_0 \in K$. Wegen der Stetigkeit von f gilt aber

$$w = \lim_{k\to\infty} w_{n_k} = \lim_{k\to\infty} f(z_{n_k}) = f(z_0)\,.$$

also $w \in f(K)$ □

6.2 Folgen von Funktionen

Wir betrachten nun Folgen, deren Elemente Funktionen sind.

6.21 Definition. **Punktweise und gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen**
Sei (f_n) eine Folge von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$ und $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Wir sagen

(a) (f_n) **konvergiert punktweise** gegen f, falls

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \qquad \text{für alle } x \in D.$$

(b) (f_n) **konvergiert gleichmäßig** gegen f, falls

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| = 0\,,$$

oder kürzer

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0\,,$$

mit der Supremumsnorm

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in D} |f(x)| := \sup\{|f(x)|\,|\,x \in D\}\,.$$

6.22 Bemerkung. In Quantorenschreibweise gilt also

$$f_n \to f \text{ punktweise} \quad \Leftrightarrow \quad \forall\,\varepsilon > 0 \;\; \forall\, x \in D \;\; \exists\, n_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N} \;\; \forall\, n \geq n_{\varepsilon,x} \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

und

$$f_n \to f \text{ gleichmäßig} \quad \Leftrightarrow \quad \forall\,\varepsilon > 0 \;\; \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} \;\; \forall\, x \in D \;\; \forall\, n \geq n_\varepsilon \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\,.$$

Offenbar impliziert die gleichmäßige Konvergenz auch die punktweise Konvergenz, die Umkehrung gilt aber nicht: Sei $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad x \in [0,1) \\ 1 & \text{falls} \quad x = 1 \end{cases}$$

punktweise. Wegen $f_n(\sqrt[n]{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}$ ist $\|f_n - f\|_\infty \geq \frac{1}{2}$ und somit konvergiert f_n nicht gleichmäßig gegen f.

Dieses Beispiel zeigt auch, dass der punktweise Limes stetiger Funktionen nicht notwendigerweise stetig ist. Es gilt aber:

6.23 Satz. **Gleichmäßige Grenzwerte stetiger Funktionen sind stetig**
Es sei (f_n) eine Folge stetiger Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$, die gleichmäßig gegen $f : D \to \mathbb{C}$ konvergiert. Dann ist auch f stetig.

Beweis. Sei $z_0 \in D$. Wir müssen zeigen, dass $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$, also dass

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\delta > 0 \;\; \forall z \in D: \;\; |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon\,.$$

Sei also $\varepsilon > 0$ gegeben. Wie bekommen wir ein passendes δ? In der Aufspaltung

$$|f(z) - f(z_0)| \;\leq\; |f(z) - f_n(z)| \;+\; |f_n(z) - f_n(z_0)| \;+\; |f_n(z_0) - f(z_0)|$$

sind der erste und der letzte Term klein für n groß genug, und zwar unabhängig von $z \in D$, da f_n gleichmäßig gegen f konvergiert. Der zweite Term ist klein für $|z - z_0|$ klein genug, da jedes f_n stetig ist. **Also:** Wähle $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so, dass

$$|f(z) - f_{n_\varepsilon}(z)| < \tfrac{\varepsilon}{3} \quad \text{für alle } z \in D\,.$$

So ein n_ε gibt es, da f_n gleichmäßig gegen f konvergiert. Dann wähle $\delta > 0$ so, dass

$$|f_{n_\varepsilon}(z) - f_{n_\varepsilon}(z_0)| < \tfrac{\varepsilon}{3} \qquad \text{für alle } \; z \in D \text{ mit } \; |z - z_0| < \delta\,.$$

So ein δ gibt es, da f_{n_ε} stetig ist. Insgesamt folgt für $z \in D$ mit $|z - z_0| < \delta$, dass

$$|f(z) - f(z_0)| \le |f(z) - f_{n_\varepsilon}(z)| + |f_{n_\varepsilon}(z) - f_{n_\varepsilon}(z_0)| + |f_{n_\varepsilon}(z_0) - f(z_0)| < \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\,.$$

Also ist f stetig. □

6.24 Korollar. Potenzreihen konvergieren gleichmäßig
Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^\infty x_n z^n$ habe positiven Konvergenzradius ρ. Dann ist die Funktion

$$f : B_\rho(0) \to \mathbb{C}\,, \quad z \mapsto \sum_{n=0}^\infty x_n z^n$$

stetig und die Folge (f_m) der Polynome $f_m(z) = \sum_{n=0}^m x_n z^n$ konvergiert gleichmäßig gegen f auf jedem Kompaktum in $B_\rho(0)$.

Beweis. Wir zeigen die zweite Aussage, aus der dann die erste mit Satz 6.23 folgt. Sei $K \subset B_\rho(0)$ kompakt, dann ist $K \subset B_\tau(0)$ für ein $\tau < \rho$. (Sonst gäbe es eine Folge (z_n) in K mit $|z_n| \to \rho$, die dann aufgrund der Kompaktheit von K einen Häufungspunkt z in K hätte mit $|z| = \rho$, im Widerspruch zu $K \subset B_\rho(0)$.) Also gilt

$$\sup_{z\in K} |f(z) - f_m(z)| = \sup_{z\in K} \left| \sum_{n=m+1}^\infty x_n z^n \right| \le \sum_{n=m+1}^\infty |x_n| \tau^n \;\stackrel{N\to\infty}{\to}\; 0\,.$$

□

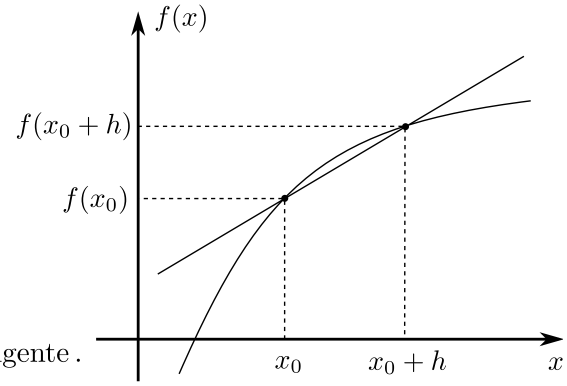
7 Eindimensionale Differentialrechnung

7.1 Differenzierbarkeit und Ableitungsregeln

7.1 Erinnerung. Das Tangentenproblem

Wann hat eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine eindeutig bestimmte Tangente im Punkt x_0 und welche Steigung hat diese?

Approximation durch Differenzenquotienten:



$$\text{Steigung der Sekante} \;=\; \frac{\Delta f}{\Delta x} \;:=\; \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}\,.$$

Für $h \to 0$ erhält man den Differentialquotienten:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) \;:=\; \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \;=\; \text{Steigung der Tangente}\,.$$

7.2 Definition. Differenzierbarkeit in einem Punkt

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{C}$ heißt im Punkt $x_0 \in I$ **differenzierbar**, wenn der Grenzwert

$$f'(x_0) := \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad (*)$$

existiert. Dann heißt $f'(x_0)$ die **Ableitung** von f an der Stelle x_0. Man schreibt dafür auch

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x_0) \quad \text{oder} \quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) \quad \text{oder} \quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)\Big|_{x=x_0}.$$

7.3 Bemerkung. In $(*)$ ist gemeint, dass die Funktion $x \mapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ von $I \setminus \{x_0\}$ nach $\mathbb{C}$ einen Grenzwert bei x_0 im Sinne von Definition 6.3 hat.

Wegen Proposition 6.5 ist das genau dann der Fall, wenn der Limes

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$$

für jede Folge (x_n) in $I \setminus \{x_0\}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ existiert.

7.4 Satz. Lineare Approximierbarkeit

Eine Funktion $f : I \to \mathbb{C}$ ist in $x_0 \in I$ genau dann differenzierbar, wenn gilt

$$(**) \qquad f(x) \;=\; \underset{\substack{\uparrow \\ \text{konstant}}}{f(x_0)} \;+\; \underset{\substack{\uparrow \\ \text{linear}}}{a \cdot (x - x_0)} \;+\; \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Rest}}}{\varphi_{x_0}(x - x_0)}$$

für ein $a \in \mathbb{C}$ und eine Funktion $\varphi_{x_0} : \{h \in \mathbb{R} \,|\, h + x_0 \in I\} \to \mathbb{R}$ mit

$$\lim_{h\to 0} \frac{\varphi_{x_0}(h)}{h} = 0.$$

Der „Restterm" φ_{x_0} geht für $x \to x_0$ also schneller als linear gegen Null. Man verwendet auch hier wieder die Landausymbole, vgl. Definition 2.19, und schreibt $\varphi_{x_0}(h) = o(|h|)$, bzw. statt $(**)$

$$f(x) = f(x_0) + a \cdot (x - x_0) + o(|x - x_0|)\,.$$

Beweis. Ist f in x_0 differenzierbar, so gilt

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \;=\; f'(x_0)\,.$$

Für $\varphi_{x_0}(h) := f(x_0+h) - f(x_0) - h\cdot f'(x_0)$ gilt somit

$$\lim_{h\to 0} \frac{\varphi_{x_0}(h)}{h} = \lim_{x\to x_0} \frac{\varphi_{x_0}(x-x_0)}{x-x_0} = \Big(\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\Big) - f'(x_0) = 0.$$

Also gilt $(**)$ mit $a = f'(x_0)$.
Ist umgekehrt f in x_0 linear approximierbar, so gilt

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = a + \lim_{x\to x_0} \frac{\varphi_{x_0}(x-x_0)}{x-x_0} \;=\; a\,,$$

d.h. f ist differenzierbar bei x_0 mit $f'(x_0) = a$. □

7.5 Definition. Differenzierbare Funktionen
Eine Funktion $f : I \to \mathbb{C}$ heißt differenzierbar, falls sie in jedem Punkt $x_0 \in I$ differenzierbar ist.

7.6 Satz. Differenzierbare Funktionen sind stetig
Ist $f : I \to \mathbb{C}$ differenzierbar in x_0, so ist f stetig in x_0.

Beweis. Aus der linearen Approximierbarkeit folgt

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \big(f(x_0) + a\cdot(x-x_0) + \varphi_{x_0}(x-x_0)\big) = f(x_0).$$

Also ist f stetig in x_0. □

7.7 Beispiele. (a) Die konstante Funktion $f(x) \equiv c$ hat überall die Ableitung 0, da

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{0}{x-x_0} = 0.$$

(b) Die Identität $f(x) = x$ hat überall die Ableitung 1, da

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x-x_0}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} 1 = 1\,.$$

(c) Die Funktion $f(x) = x^2$ hat die Ableitung

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{x^2-x_0^2}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} (x+x_0) = 2x_0\,.$$

7.8 Satz. Ableitung der Exponentialfunktion
Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ die Ableitung $\exp(x)$.

Beweis. Wir zeigen zunächst $(\mathrm{e}^x)'|_{x=0} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^0}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x-1}{x} = 1 = \mathrm{e}^0$ und folgern danach $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$ aus dem Exponentialgesetz.
In Satz 3.3 wurde gezeigt, dass $\mathrm{e}^x \geq 1+x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $|\mathrm{e}^x - 1| \leq \frac{|x|}{1-|x|}$ für $|x| < 1$. Man mache sich klar, dass daraus für $|x| < 1$

$$\frac{1}{1+|x|} \leq \frac{\mathrm{e}^x-1}{x} \leq \frac{1}{1-|x|}$$

folgt. Also ist

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$$

und für $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt damit

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{x_0}}{x - x_0} = \mathrm{e}^{x_0} \lim_{x\to x_0} \frac{\mathrm{e}^{x-x_0} - 1}{x - x_0} = \mathrm{e}^{x_0}\,.$$

□

7.9 Beispiel. Die Betragsfunktion

Die Betragsfunktion abs: $x \mapsto |x|$ ist für $x \neq 0$ differenzierbar

$$\operatorname{abs}'(x) = \begin{cases} -1 & \text{für} \quad x < 0 \\ 1 & \text{für} \quad x > 0\,. \end{cases}$$

Im Punkt $x = 0$ ist sie nicht differenzierbar, da

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = -1.$$

Um zusammengesetzte Funktionen bequem differenzieren zu können, benötigen wir noch die bekannten Ableitungsregeln.

7.10 Satz. Ableitungsregeln

Seien $f, g : I \to \mathbb{C}$ differenzierbar (in x_0). Dann gilt:

(a) Für $a, b \in \mathbb{C}$ ist $af + bg : I \to \mathbb{C}$ differenzierbar (in x_0) und es gilt

$$(af + bg)' = af' + bg'\,. \qquad \text{Linearität der Ableitung}$$

(b) $f \cdot g$ ist differenzierbar (in x_0) und es gilt

$$(f \cdot g)' = f'g + f \cdot g'\,. \qquad \text{Produktregel}$$

(c) Dort wo $g(x) \neq 0$ ist, gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}\,. \qquad \text{Quotientenregel}$$

Beweis. (a) Das folgt aus Proposition 2.18 (f).

(b) Da f insbesondere auch stetig ist, folgt die Behauptung, indem man in

$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)f(x_0)}{x - x_0} = f(x) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + g(x_0) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

den Limes $x \to x_0$ bildet.

(c) Zunächst ist $\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$, da analog zu (b)

$$\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = \frac{1}{g(x_0)g(x)} \cdot \frac{g(x_0) - g(x)}{(x - x_0)} \overset{x\to x_0}{\longrightarrow} \frac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

gilt. Mit der Produktregel folgt dann sofort

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = f' \cdot \frac{1}{g} + f\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}\,.$$

□

7.11 Satz. **Kettenregel**
Seien $f : I \to \mathbb{R}$ und $g : J \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $g(J) \subset I$. Dann ist auch $f \circ g : J \to \mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt

$$(f \circ g)'(x) = (f' \circ g)(x) \cdot g'(x) \quad \Big(:= f'\left(g(x)\right) g'(x) \Big)$$

Beweis. Sei zunächst $g'(x_0) \neq 0$. Da $g'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$ ist, muss für x hinreichend nahe bei x_0 (aber $x \neq x_0$) gelten, dass $g(x) \neq g(x_0)$. Also gilt für x nahe bei x_0

$$\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} = \underbrace{\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)}}_{\to f'(g(x_0)),} \underbrace{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}_{\to g'(x_0)} \overset{x \to x_0}{\longrightarrow} f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0) \,,$$

da $g(x) \to g(x_0)$ für $x \to x_0$. Sei nun $g'(x_0) = 0$. Da f im Punkt $g(x_0)$ differenzierbar ist gilt wegen Satz 7.4 für y nahe bei $g(x_0)$

$$\left| \frac{f(y) - f(g(x_0))}{y - g(x_0)} \right| \leq L \,,$$

also

$$|f(y) - f(g(x_0))| \leq L|y - g(x_0)| \,,$$

und somit

$$\left| \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} \right| \leq \frac{L|(g(x) - g(x_0)|}{|x - x_0|} \overset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0.$$

□

7.12 Satz. **Die Ableitung der Umkehrfunktion**
Es sei $f : I \to J$ stetig und bijektiv, $I, J \subset \mathbb{R}$ Intervalle. Es sei f differenzierbar in $x_0 \in I$ mit $f'(x_0) \neq 0$. Dann ist die Inverse $f^{-1} : J \to I$ differenzierbar in $y_0 := f(x_0) \in J$ mit

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} \,.$$

Beweis. (a) **Graphisch**: Eine Spiegelung an der Diagonalen invertiert die Steigung.

(b) **Analytisch:** Mit Satz 3.11 ist $f^{-1} : J \to I$ ebenfalls stetig. Für jede Folge (y_n) in J mit $y_n \to y_0\,, y_n \neq y_0$, gilt daher $x_n := f^{-1}(y_n) \in I$, $x_n \neq x_0$ und $x_n \to f^{-1}(y_0) = x_0$. Da f in x_0 differenzierbar ist, folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y_0)}{y_n - y_0} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

□

Nun können wir die uns bisher bekannten Funktionen differenzieren:

7.13 Beispiele. (a) Für $f_n(x) := x^n$, $n \in \mathbb{N}_0$, gilt

$$f_0'(x) = 0 \quad \text{ und } \quad f_n'(x) = nx^{n-1} \text{ für } n \in \mathbb{N} \,.$$

Beweis durch Induktion: Die Fälle $n = 0, 1, 2$ haben wir bereits gezeigt.
Der Schritt $n \Rightarrow n + 1$ folgt aus der Produktregel:

$$f_{n+1}' = (xf_n)' = 1f_n + xf_n' = f_n + xnf_{n-1} = (n + 1)x^n \,.$$

Für Polynome $p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ gilt also

$$p'(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j\, j\, x^{j-1} = \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1}(j+1)x^j \,.$$

(b) Die **Logarithmusfunktion** $\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ hat mit Satz 7.12 die Ableitung

$$\ln'(y) = \frac{1}{\exp'(\ln(y))} = \frac{1}{\exp(\ln(y))} = \frac{1}{y} \,.$$

(c) Die Ableitung von **Sinus und Kosinus.**
Wir wissen bereits, dass $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, und aus

$$0 \le 1 - \cos x = 2\sin^2 \tfrac{x}{2} \le 2\left(\tfrac{x}{2}\right)^2 = \tfrac{x^2}{2}$$

folgt

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0 \,.$$

Mit Hilfe der Additionstheoreme folgt dann

$$\begin{aligned} \sin'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \Big(\cos x \frac{\sin h}{h} + \sin x \frac{\cos h - 1}{h} \Big) = \cos x \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \cos'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \Big(- \sin x \frac{\sin h}{h} + \cos x \frac{\cos h - 1}{h} \Big) = - \sin x. \end{aligned}$$

(d) Für $\arcsin : (-1,1) \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ergibt sich

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sin'(\arcsin y)} = \frac{1}{\cos(\arcsin y)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin y)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \,,$$

da $\cos x > 0$ für $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

(e) Für $\arccos : (-1,1) \to (0,\pi)$ zeigen Sie in den Übungen, dass $\arccos'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

(f) Ebenfalls in den Übungen wird $\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ mit Hilfe der Quotientenregel gezeigt.

(g) Schließlich gilt für $\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\arctan' y = \frac{1}{\tan'(\arctan y)} = (1 + \tan^2(\arctan y))^{-1} = (1 + y^2)^{-1} = \frac{1}{1 + y^2} \,.$$

Wie Sie aus der Schule wissen, liefern die Nullstellen der Ableitung Kandidaten für lokale Extrema.

7.14 Definition. Lokale Extrema

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Wir sagen, dass $f : I \to \mathbb{R}$ bei $x_0 \in I$ ein

- **lokales Maximum** hat, falls

$$\exists \delta > 0 \;\; \forall x \in B_\delta(x_0) \cap I : \;\; f(x) \le f(x_0)$$

- **lokales Minimum** hat, falls

$$\exists \delta > 0 \ \forall x \in B_\delta(x_0) \cap I : \ f(x) \geq f(x_0)$$

7.15 Satz. **Notwendiges Kriterium für lokales Extremum**
Sei I ein offenes Intervall. Hat $f : I \to \mathbb{R}$ bei $x_0 \in I$ ein lokales Extremum (Maximum oder Minimum) und ist f bei x_0 differenzierbar, so ist $f'(x_0) = 0$.

Beweis. Sei x_0 lokales Maximum, dann gilt

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

und

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

also $f'(x_0) = 0$. Für ein Minimum verfahre man analog. □

7.2 Der Mittelwertsatz

7.16 Satz. **Satz von Rolle**
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a, b) differenzierbar und $f(a) = f(b)$. Dann existiert ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x_0) = 0$.

Beweis. Ist $f(x) = f(a)$ für alle $x \in (a, b)$, so ist $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$. Andernfalls ist $\sup f > f(a)$ oder $\inf f < f(a)$. Nach Satz 6.18 nimmt f sein Maximum (oder Minimum) in einem Punkt $x_0 \in (a, b)$ an, wo nach Satz 7.15 $f'(x_0) = 0$ gilt. □

7.17 Satz. **Mittelwertsatz**
Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a, b) differenzierbar, so gibt es (mindestens) ein $x_0 \in (a, b)$ mit

$$\begin{array}{rcl} f'(x_0) & = & \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \\ \text{Steigung der Tangentebei } x_0 & = & \text{Steigung der Sekante durch die Punkte } (a, f(a)) \text{ und } (b, f(b)). \end{array}$$

Beweis. Satz von Rolle “gekippt”: Betrachte die Funktion

$$h : [a, b] \to \mathbb{R}\,, \quad h(x) := f(x) - (x - a)\, \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,.$$

Es ist g in (a, b) differenzierbar, in $[a, b]$ stetig und es gilt $h(a) = f(a) = h(b)$. Also liefert der Satz von Rolle die Existenz eines $x_0 \in (a, b)$ mit

$$0 = h'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,.$$

□

7.18 Korollar. Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Dann gilt

$$f \text{ ist differenzierbar mit } f'(x) = 0 \text{ für alle } x \in (a, b) \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ ist konstant.}$$

Beweis. Übung. □

7.19 Bemerkung. Dieses Korollar scheint offensichtlich, spielt aber eine wichtige Rolle, da es die Eindeutigkeit von Lösungen von Differentialgleichungen liefert: haben zwei Funktionen auf einem Intervall I die gleiche Ableitung, also $f'(x) = g'(x)$ und stimmen sie für ein $x_0 \in I$ überein, also $f(x_0) = g(x_0)$, so muss schon $f(x) = g(x)$ für alle $x \in I$ gelten.

Beweis. Nach dem Korollar impliziert $f'(x) - g'(x) = 0$, dass $f(x) - g(x)$ konstant ist. Die Konstante kann aber wegen $f(x_0) = g(x_0)$ nur Null sein. □

7.20 Korollar. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a, b). Dann gilt:

(a) Es ist f genau dann monoton wachsend (bzw. fallend), wenn für alle $x \in (a, b)$ gilt, dass $f'(x) \geq 0$ (bzw. $f'(x) \leq 0$).

(b) Ist $f'(x) > 0$ (bzw. $f'(x) < 0$) für alle $x \in (a, b)$, so ist f streng monoton wachsend (bzw. fallend).

Beweis. (a) „$\Rightarrow$“ liest man aus dem Differenzquotienten ab.

„$\Leftarrow$“ Für $a \leq x < y \leq b$ existiert nach dem Mittelwertsatz ein $\xi \in (x, y)$ mit $f(y) - f(x) = f'(\xi)\,(y - x)$. Ist $f'(\xi) \geq 0$ so folgt $f(y) \geq f(x)$, ist $f'(\xi) \leq 0$ so folgt $f(y) \leq f(x)$.

(b) Wie (a) „$\Leftarrow$“, nur mit strikter Ungleichung.

□

7.21 Bemerkung. Es gibt aber streng monotone Funktionen deren Ableitung in einem Punkt verschwindet, z.B. $x \mapsto x^3$.

7.22 Satz. **Verallgemeinerter Mittelwertsatz**

Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a, b) differenzierbar. Sei weiterhin $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Dann gibt es ein $x_0 \in (a, b)$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}\,.$$

(Für $g(x) = x$ ist das der obige Mittelwertsatz.)

Beweis. Zunächst ein Hinweis: Man kann nicht einfach die Aussagen des Mittelwertsatzes

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(x_0)\,, \quad g(b) - g(a) = (b - a)f'(\tilde{x}_0)$$

durcheinander teilen, da ja im Allgemeinen $x_0 \neq \tilde{x}_0$ gilt. Allerdings kann man den Beweis des Mittelwertsatzes eins zu eins auf die allgemeinere Situation übertragen: Wegen $g'(x) \neq 0$ ist mit dem Mittelwertsatz

$$g(b) - g(a) = (b - a)g'(x_0) \neq 0\,.$$

Wir können also

$$h(x) := f(x) - (g(x) - g(a))\,\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

betrachten. Wieder ist h in (a, b) differenzierbar und $h(a) = f(a) = h(b)$. Also gibt es nach Rolle ein $x_0 \in (a, b)$ mit

$$0 = h'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(x_0)\,.$$

□

7.3 Der Satz von Taylor und Taylorreihen

7.23 Definition. **Ableitungen höherer Ordnung**

Ist $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so ist $f' : I \to \mathbb{R}$ wieder eine Funktion. Falls f' ebenfalls differenzierbar ist, so nennt man $f'' := (f')' =: f^{(2)}$ die zweite Ableitung von f. Entsprechend definiert man die n-te Ableitung $f^{(n)}$,

$$f^{(n+1)} := \left(f^{(n)}\right)' \quad \text{für} \ \ n \geq 1\,.$$

Man schreibt auch

$$f^{(n)} = \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n} = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} f = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n f.$$

7.24 Satz. **Leibniz-Regel**

Sind $f : I \to \mathbb{C}$ und $g : I \to \mathbb{C}$ je n-mal differenzierbar, so ist auch das Produkt fg der Funktionen n-mal differenzierbar und es gilt

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}\,,$$

wobei $f^{(0)} := f$ ist.

Beweis. durch Induktion: $\underline{n = 0}$ $\quad (f \cdot g)^{(0)} = f \cdot g = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} f^{(k)} g^{(0-k)}$

$\underline{n \Rightarrow n+1}$

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)^{(n+1)} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f \cdot g)^{(n)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n-k+1)}\right) \\
&= \binom{n}{0} f^{(0)} g^{(n+1)} + \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right] f^{(1)} g^{(n)} \\
&\quad + \cdots + \left[\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}\right] f^{(n)} g^{(n)} + \binom{n}{n} f^{(n+1)} g^{(0)} \\
&= \binom{n+1}{0} f^{(0)} g^{(n+1)} + \binom{n+1}{1} f^{(1)} g^{(n)} + \cdots + \binom{n+1}{n} f^{(n)} g^{(1)} \\
&\quad + \binom{n+1}{n+1} f^{(n+1)} f^{(n+1)} g^{(0)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}\,.
\end{aligned}$$

□

7.25 Definition. **Stetig differenzierbare Funktionen**

Eine Funktion $f : I \to \mathbb{C}$ heißt **stetig differenzierbar**, falls f differenzierbar ist und $f' : I \to \mathbb{C}$ stetig ist.
Eine Funktion $f : I \to \mathbb{C}$ heißt **n-mal stetig differenzierbar**, falls f n-mal differenzierbar ist und $f^{(n)} : I \to \mathbb{C}$ stetig ist. Die Funktionen $f^{(k)}$, $k = 0, \ldots, n-1$ sind dann offenbar auch stetig, da sie differenzierbar sind.
Mit $C^n(I)$ bezeichnet man den Raum der n-mal stetig differenzierbaren Funktionen auf I.

Wir kommen nun zu einem der wichtigsten Sätze der Analysis, dem Satz von Taylor. Wir haben in Satz 7.4 gesehen, dass Differenzierbarkeit äquivalent zu linearer Approximierbarkeit ist. Der Satz von Taylor sagt nun, dass sich Funktionen in $C^{n+1}(I)$ durch Polynome vom Grade n lokal bis auf Fehler der Ordnung $(x - x_0)^{n+1}$ approximieren lassen.

7.26 Satz. Satz von Taylor
Sei $f \in C^{n+1}(I)$ und $x_0 \in I$. Dann läßt sich $f(x)$ für $x \in I$ wie folgt näherungsweise durch ein Polynom (das Taylorpolynom vom Grad n bei x_0) in $(x - x_0)$ darstellen:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x,x_0) \\ &= \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{\text{Taylorpolynom vom Grad } n \text{ bei } x_0} + R_n(x,x_0)\,. \end{aligned}$$

Das Restglied hat die Form

$$R_n(x,x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\,,$$

wobei $\xi = \xi(x)$ zwischen x_0 und x liegt, also $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$ mit $0 < \theta < 1$.

7.27 Bemerkung. (a) Für $n = 1$ ist sowohl die Annahme, $f \in C^2$, als auch die Aussage, $R_2 = C(x - x_0)^2$, stärker als in Satz 7.4. Dort haben wir lediglich f differenzierbar angenommen und vom Restglied wissen wir dann nur, dass

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_2(x,x_0)}{x - x_0} = 0.$$

(b) Die Form des sog. Lagrangeschen Restglieds merkt man sich wie folgt: $R_n(x)$ sieht so aus, wie das $(n+1)$-te Glied aussehen würde, nur wird $f^{(n+1)}$ an der Stelle ξ statt bei x_0 ausgewertet. Dabei hängt ξ nun von x ab und wir kennen $\xi(x)$ im Allgemeinen nicht.
Sobald wir integrieren können, werden wir noch eine andere Form des Restglieds kennenlernen.

Beweis. des Satzes von Taylor: Für festes $x \in I$ seien

$$F(t) := f(x) - \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(t)}{j!}(x-t)^j \quad \text{und} \quad G(t) := \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\,.$$

Nun ist

$$F'(t) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(t) = -\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{f^{(j+1)}(t)}{j!}(x-t)^j - \frac{f^{(j)}(t)}{(j-1)!}(x-t)^{j-1}\right) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

und

$$G'(t) = -\frac{(x-t)^n}{n!}\,.$$

Setzen wir nun $t = x_0$ bzw. x, so liefert der verallgemeinerte Mittelwertsatz, Satz 7.22, ein ξ zwischen x_0 und x mit

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{G(x) - G(x_0)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} = f^{(n+1)}(\xi)\,.$$

Da

$$F(x) = G(x) = 0\,, \quad \text{folgt} \quad F(x_0) = G(x_0)\, f^{(n+1)}(\xi)\,,$$

also die Behauptung. □

7.28 Korollar. Sei $f \in C^n(I)$ und $x_0 \in I$. Dann gilt für $x \in I$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o(|x - x_0|^n).$$

Beweis. Nach dem Satz von Taylor existiert zu $x \in I$ ein $\xi(x)$ zwischen x und x_0 so, dass

$$\frac{f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k}{(x - x_0)^n} = \frac{1}{n!}(f^{(n)}(\xi(x)) - f^{(n)}(x_0)),$$

was aufgrund der Stetigkeit von $f^{(n)}$ für $x \to x_0$ gegen Null geht. □

Ist eine Funktion f beliebig oft differenzierbar, man schreibt dann $f \in C^\infty(I)$, so heißt die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

die Taylorreihe von f an der Stelle x_0.

Es stellt sich die Frage, ob die Taylorreihe konvergiert, und wenn ja, ob ihre Summe dann gleich $f(x)$ ist. Letzteres gilt offenbar genau dann, wenn das Restglied $R_n(x)$ für $n \to \infty$ gegen Null geht.

7.29 Korollar. **Reihendarstellung der Exponentialfunktion**
Für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Beweis. Wegen $\exp^{(n)} = \exp$ gilt mit dem Satz von Taylor bei $x_0 = 0$

$$\exp(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{\exp^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j + R_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!} + \frac{\exp(\xi_n)x^{n+1}}{(n+1)!}$$

für ein ξ_n mit $|\xi_n| < |x|$. Damit ist auch $\exp(\xi_n) \leq \exp(|x|)$ und es folgt

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\exp(\xi_n)x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq \exp(|x|) \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

□

7.30 Korollar. **Die Eulersche Zahl ist irrational**
Die Eulersche Zahl e ist irrational.

Beweis. Wegen $2 < \mathrm{e} < 3$ ist e keine ganze Zahl. Angenommen, $\mathrm{e} = \frac{p}{q}$ für $p, q \in \mathbb{N}$. Multipliziert man

$$\frac{p}{q} = \mathrm{e} = \exp(1) = \sum_{j=0}^{q} \frac{1}{j!} + \frac{\exp(\xi)}{(q+1)!}$$

mit $q!$ durch, so ergibt sich

$$\frac{\exp(\xi)}{q+1} = (q-1)! \cdot p - \sum_{j=0}^{q} \frac{q!}{j!},$$

wobei ja $0 < \xi < 1$. Da die rechte Seite eine ganze Zahl ist, die linke Seite wegen $q \geq 2$ und $0 < \exp(\xi) < \exp(1) < 3$ aber im Intervall $(0, 1)$ liegt, ist das ein Widerspruch. □

7.31 Beispiel. **Taylorreihen von Kosinus und Sinus**
Es gilt

$$\cos^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^k \cos x & \text{für} \quad n = 2k \\ (-1)^{k+1} \sin x & \text{für} \quad n = 2k+1 \end{cases}$$

Also fallen in der Entwicklung um $x_0 = 0$ die ungeraden Terme weg und es bleibt

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \underbrace{(-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \sin \xi}_{R_{2n+1}}$$

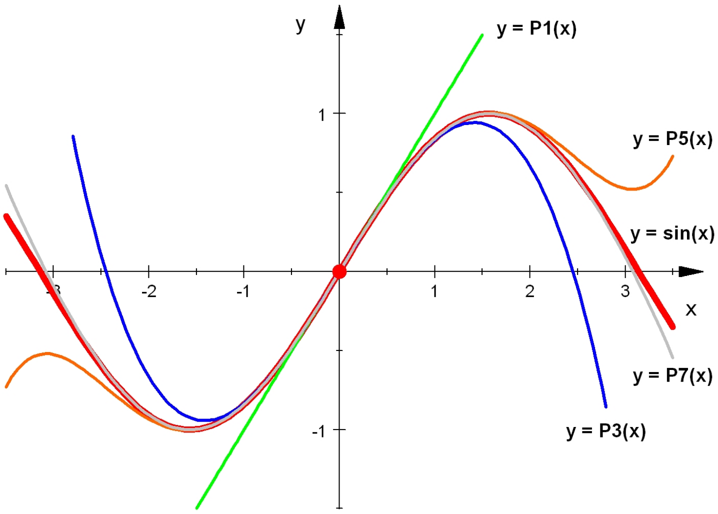
Offenbar gilt $\lim_{n\to\infty} R_{2n+1} = 0$, also

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

Analog findet man

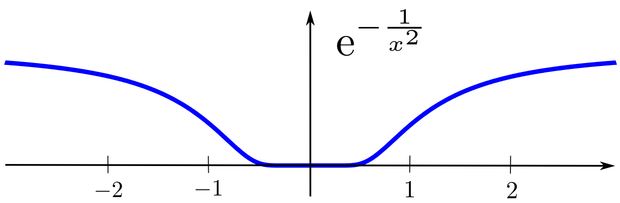
$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \,.$$

Im Bild sind die Taylorpolynome zu $\sin(x)$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ vom Grade 1, 3, 5 und 7 geplottet. Die dicke rote Kurve ist die Sinusfunktion selbst.



7.32 Beispiel. Es gibt aber auch Funktionen f, deren Taylorreihe auf ganz $\mathbb{R}$ konvergiert, aber nur bei $x = x_0$ gegen $f(x)$. Sei beispielsweise $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad x = 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{falls} \quad x \neq 0\,. \end{cases}$$



Außerhalb von 0 ist f beliebig oft differenzierbar, und die n-te Ableitung hat die Form

$$f^{(n)}(x) = p_n\left(\tfrac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}$$

mit einem geeigneten Polynom p_n. Somit gilt $\lim_{x\to 0} f^{(n)}(x) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Es ist also f stetig bei 0 und $f^{(n)}$ stetig fortsetzbar bei 0 durch $f^{(n)}(0) := 0$. Wegen

$$\lim_{x\to 0} \tfrac{1}{x} \left(f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0) \right) = \lim_{x\to 0} \tfrac{1}{x} p_n\left(\tfrac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

ist $f^{(n)}$ dann auch bei 0 differenzierbar und

$$f^{(n)\prime}(0) = 0 = f^{(n+1)}(0)\,.$$

Somit ist die Taylorreihe von f bei $x_0 = 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \equiv 0 \quad \neq f(x) \quad \text{für } x \neq x_0\,.$$

7.33 Beispiel. Die Funktion $f(x) = \frac{1}{1-x}$ für $x \neq 1$ hat die Ableitungen

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}\,, \quad f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}\,, \quad \ldots\,, \quad f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}\,.$$

Die Taylorreihe um $x_0 = 0$ ist also die geometrische Reihe,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n\,.$$

Obwohl die Funktion auf ganz $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ definiert ist, konvergiert die Taylorreihe nur auf dem Intervall $(-1,1)$. Wir erinnern uns, dass das Konvergenzgebiet einer Potenzreihe immer ein Kreis in $\mathbb{C}$ um den Entwicklungspunkt ist. Wegen der Singularität bei $x = 1$ kann die Taylorreihe daher auch nicht für $x \leq -1$ konvergieren!
Als Übung bestimme man den Konvergenzradius der Taylorreihe von

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \text{ um den Entwicklungspunkt } x_0 = -1\,.$$

Es stellt sich die Frage, ob man Funktionen differenzieren kann, indem man ihre Taylorreihe gliedweise ableitet. Probieren wir das für den Sinus,

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,,$$

so finden wir tatsächlich

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos x\,.$$

7.34 Satz. **Differentiation von Potenzreihen**
Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ habe Konvergenzradius $\varrho \in (0, \infty]$.

(a) Die Reihe konvergiert gleichmäßig und absolut für $|z - z_0| \leq \tau$ mit $0 \leq \tau < \varrho$ und divergiert für $|z - z_0| > \varrho$.

(b) Die Reihe die durch gliedweise Ableitung aus ihr hervorgeht,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1}\, (z - z_0)^n\,,$$

hat den gleichen Konvergenzradius $\varrho' = \varrho$.

(c) Für $z = x, z_0 = x_0 \in \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$f : (x_0 - \varrho, x_0 + \varrho) \to \mathbb{C}\,, \quad f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

differenzierbar und die Ableitung ergibt sich durch gliedweise Differentiation,

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (x - x_0)^n.$$

Insbesondere ist $f \in C^\infty(x_0 - \varrho, x_0 + \varrho)$ und

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0,$$

d.h. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ ist die Taylorreihe von f in x_0.

Beweis. (a) Das ist einfach Korollar 6.24.

(b) Sei $\tilde{z} \neq z_0$. Die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (\tilde{z} - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n a_n}{\tilde{z} - z_0} (\tilde{z} - z_0)^n$$

konvergiert nach Satz 5.24, falls

$$\frac{1}{|\tilde{z} - z_0|} > \frac{1}{\varrho'} = \limsup_{n \to \infty} \underbrace{\sqrt[n]{\frac{n}{|\tilde{z} - z_0|}}}_{\to 1} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\varrho},$$

und divergiert entsprechend, falls $|\tilde{z} - z_0| > \varrho$.

(c) Es ist $f(x) = \lim_{N \to \infty} P_N(x) := \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} a_n (x - x_0)^n$ und die Frage ist, ob

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\lim_{N \to \infty} P_N(x) \right) \stackrel{?}{=} \lim_{N \to \infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} P_N(x).$$

Der folgende Satz sagt, dass Ableitung und Limes vertauscht werden können, wenn die Konvergenz von (P_N') gleichmäßig ist.

□

7.35 Satz. **Vertauschen von Ableitung und Limes**

Es seien $f_n : [a, b] \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbare Funktionen. Die Folge (f_n) konvergiere punktweise gegen eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ und die Folge (f_n') konvergiere gleichmäßig gegen eine Funktion $g : [a, b] \to \mathbb{C}$. Dann ist f auf $[a, b]$ stetig differenzierbar und es gilt $f' = g$.

Beweis. Nach Satz 6.23 ist $g : [a, b] \to \mathbb{C}$ stetig. Für $x < y \in [a, b]$ und $n \in \mathbb{N}$ existiert nach dem Mittelwertsatz ein $\xi_n \in (x, y)$ mit

$$\frac{f_n(y) - f_n(x)}{y - x} = f_n'(\xi_n). \qquad (*)$$

Für eine Teilfolge konvergiert $\xi_n \to \xi \in [x, y]$ und somit liefert $\lim_{n \to \infty}$ in $(*)$, dass

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = g(\xi). \qquad (**)$$

Hier haben wir die gleichmäßige Konvergenz von $f' \to g$ verwendet:

$$|f_n'(\xi_n) - g(\xi)| \leq \underbrace{|f_n'(\xi_n) - g(\xi_n)|}_{< \varepsilon \text{ für } n \text{ groß genug unab. von } \xi_n} + \underbrace{|g(\xi_n) - g(\xi)|}_{< \varepsilon \text{ für } n \text{ groß genug da } g \text{ stetig}}$$

Aus $(**)$ folgt nun

$$\lim_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=\lim_{y\to x} g(\underbrace{\xi(x,y)}_{\to x})=g(x)\,,\qquad \text{da } g \text{ stetig ist.}$$

Also ist f stetig differenzierbar und $f'=g$. □

7.36 Beispiel. Taylorreihe des Logarithmus

Wie wir wissen ist $\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^\infty(-1)^n x^n$ für $|x|<1$. Setzen wir

$$f(x)=\sum_{n=1}^\infty(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\qquad \text{für } |x|<1\,,$$

so ist

$$f'(x)=\sum_{n=0}^\infty(-1)^n x^n=\frac{1}{1+x}\qquad \text{für } |x|<1.$$

Da auch $\ln(1+x)'=\frac{1}{1+x}$ und $\ln(1)=f(0)=0$ ist, folgt mit Korollar 7.18, dass $\ln(1+x)=f(x)$ und somit

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^\infty(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\qquad \text{für } |x|<1.$$

Wieder ist das Konvergenzgebiet durch die Singularität bei $x=-1$ beschränkt.

7.37 Satz. Hinreichendes Kriterium für lokales Extremum

Sei I ein offenes Intervall und $f\in C^2(I)$.

(a) Hat f bei $x_0\in I$ ein lokales Maximum (bzw. Minimum), so gilt notwendigerweise

$$f'(x_0)=0\quad \text{und}\quad f''(x_0)\le 0\quad (\text{bzw. } f''(x_0)\ge 0)\,.$$

(b) Gilt bei $x_0\in I$

$$f'(x_0)=0\quad \text{und}\quad f''(x_0)< 0\quad (\text{bzw. } f''(x_0)> 0)\,,$$

so hat f bei x_0 ein lokales Maximum (bzw. Minimum).

Beweis. Das folgt sofort aus der Taylorentwicklung um den Punkt x_0 (Übungsaufgabe). □

7.38 Satz. Regel von de l'Hospital

Es seien $f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$ differenzierbar, wobei $-\infty\le a<b\le\infty$ und $g'(x)\neq 0$ für alle $x\in(a,b)$. Weiter gelte

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0$$

oder

$$\lim_{x\to a}g(x)=\pm\infty.$$

Dann gilt

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

falls der rechtsstehende Grenzwert existiert. Die analogen Aussagen gelten für $x\to b$.

Beweis. Wir betrachten den Fall $a \in \mathbb{R}$ und $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$, können also mittels der Setzung $f(a) = g(a) = 0$ die Funktionen f und g stetig auf das Intervall $[a, b)$ fortsetzen. Der verallgemeinerte Mittelwertsatz liefert dann für $x \in (a, b)$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \quad \text{für ein } a < x_0 < x\,.$$

Daraus folgt die Behauptung dann für $x \to a$. Für die anderen Fälle siehe W. Walter, Analysis I, Satz 10.11. □

7.39 Beispiele. (a) Für $\alpha > 0$ gilt

$$\lim_{x\to 0} x^\alpha \ln x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{x^{-\alpha}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{-1}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^\alpha}{-\alpha} = 0\,.$$

(b) Ebenfalls für $\alpha > 0$ gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{-1}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0\,.$$

(c) Wie wir bereits wissen ist

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1\,.$$

(d) Oft muss man de l'Hospital auch mehrfach anwenden:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)^2}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin x \cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2(\cos^2 x - \sin^2 x)}{6x} = \infty\,.$$

In solchen Fällen ist es meist einfacher, die führenden Glieder der Taylorreihe zu betrachten

$$\frac{(\sin x)^2}{x^3} = \frac{x^2 + \mathcal{O}(x^3)}{x^3} = \frac{1}{x} + \mathcal{O}(1) \overset{x\to 0}{\to} \infty\,.$$

(e) Schließlich zeigen wir noch, dass sich der Arcustangens wie x^{-1} an seine Asymptote bei Unendlich annähert:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{x^{-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1.$$

8 Eindimensionale Integration

8.1 Das Integral für Regelfunktionen

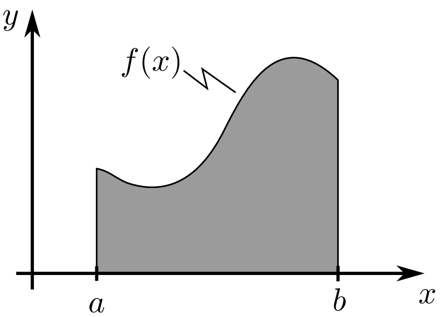
8.1 Bemerkung. Wir werden in diesem Kapitel das sogenannte Regelintegral einführen, da es mit dem geringsten technischen Aufwand präzise formuliert werden kann. Wenn wir später die allgemeine Integrationstheorie im Sinne von Lebesgue besprechen, werden viele der folgenden Begriffe und Sätze deutlich verallgemeinert.

8.2 Motivation. Das Flächenproblem

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Kann man dem Gebiet

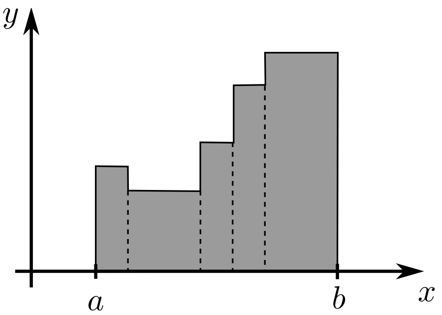
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b \text{ und } 0 \le y \le f(x)\}$$

unter dem Graphen von f einen Flächeninhalt zuordnen?



Für **Treppenfunktionen** ist das einfach, da die Flächenberechnung für Rechtecke elementar ist.

Idee: Approximiere allgemeine Funktionen durch Treppenfunktionen.



8.3 Definition. Treppenfunktion
Eine Funktion $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ heißt **Treppenfunktion** auf $[a, b]$, wenn Punkte $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_K = b$ existieren so, dass φ auf $I_k = (x_{k-1}, x_k)$ für $k = 1, \ldots, K$ jeweils konstant gleich φ_k ist. Die Werte an den endlich vielen Punkten x_k spielen im Folgenden keine Rolle.

8.4 Proposition. (a) Mit φ sind auch $|\varphi|$ und $c \cdot \varphi$ für $c \in \mathbb{C}$ Treppenfunktionen.

(b) Mit φ und ψ sind auch $\varphi + \psi$ und $\varphi \cdot \psi$ Treppenfunktionen.

Beweis. (a) Klar, denn auf I_k gilt $|\varphi(x)| = |\varphi_k|$ und $|c\varphi(x)| = |c\varphi_k|$.

(b) Sei $\varphi(x) = \varphi_k$ auf $I_k = (x_{k-1}, x_k)$, $k = 1, \ldots, K$, und $\psi(x) = \psi_\ell$ auf $\tilde{I}_\ell = (y_{\ell-1}, y_\ell)$, $\ell = 1, \ldots, L$. Sei nun

$$\{a = w_0 < w_1 < \cdots < w_M = b\} := \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_K = b\} \cup \{a = y_0 < \cdots < y_L = b\}$$

die Vereinigung der Zwischenpunkte. Dann ist $\varphi(x) + \psi(x) = \varphi_{k(m)} + \psi_{\ell(m)}$ auf (w_{m-1}, w_m), wobei $k^{(m)}$ und $\ell^{(m)}$ so gewählt sind, dass

$$I_{k(m)} \supset (w_{m-1}, w_m) \text{ und } \tilde{I}_{\ell(m)} \supset (w_{m-1}, w_m)\,.$$

Also ist $\varphi + \psi$ wieder Treppenfunktion und $\varphi \cdot \psi$ ebenfalls.

$\square$

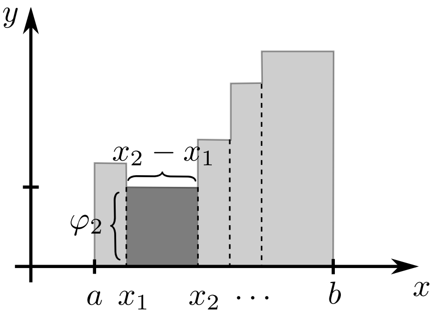
8.5 Definition. Äquivalente Treppenfunktionen

Zwei Treppenfunktionen φ, ψ auf $[a, b]$ heißen **äquivalent**, falls $\varphi(x) \neq \psi(x)$ für höchstens endlich viele $x \in [a, b]$ gilt.

8.6 Definition. Das Integral für Treppenfunktionen

Für eine Treppenfunktion $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ definieren wir das Integral von φ über $[a, b]$ durch

$$\int_a^b \varphi := \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x := \sum_{k=1}^{K} (x_k - x_{k-1}) \cdot \varphi_k$$



8.7 Proposition. Äquivalente Treppenfunktionen haben das gleiche Integral.

Beweis. Seien φ, ψ äquivalent und $\{a = w_1 < \cdots < w_M = b\}$ wie im Beweis von Proposition 8.4. Dann gilt $\varphi(x) = \psi(x)$ für $x \in J_m = (w_{m-1}, w_m)$, da φ und ψ dort ja beide konstant sind. Es ist somit

$$\begin{aligned}\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{k=1}^{K}(x_k - x_{k-1}) \cdot \varphi_k = \sum_{m=1}^{M}(w_m - w_{m-1}) \cdot \varphi_{k(m)} \\ &= \sum_{m=1}^{M}(w_m - w_{m-1}) \cdot \psi_{\ell(m)} = \sum_{\ell=1}^{L}(y_\ell - y_{\ell-1}) \cdot \psi_\ell = \int_a^b \psi(x)\,\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

$\square$

8.8 Proposition. Eigenschaften des Integrals für Treppenfunktionen

Es seien φ, ψ Treppenfunktionen auf $[a, b]$ und $c \in \mathbb{C}$. Dann gilt

(a) $\int(\varphi + \psi) = \int \varphi + \int \psi$ und $\int c\varphi = c \int \varphi$ (Linearität)

(b) Für $\varphi \leq \psi$ reellwertig gilt

$$\int \varphi \leq \int \psi \qquad \text{(Monotonie)}$$

(c) $\left|\int_a^b \varphi\right| \leq \int_a^b |\varphi| \leq \|\varphi\|_\infty \cdot (b - a)$

Beweis. (a) Mit gewohnter Notation ist

$$\begin{aligned}\int(\varphi + \psi) &= \sum_{m=1}^{M}(\varphi_{k(m)} + \psi_{\ell(m)}) \cdot (w_m - w_{m-1}) \\ &= \sum_{m=1}^{M} \varphi_{k(m)} \cdot (w_m - w_{m-1}) + \sum_{m=1}^{M} \psi_{\ell(m)} \cdot (w_m - w_{m-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{K} \varphi_k \cdot (x_k - x_{k-1}) + \sum_{\ell=1}^{L} \psi_\ell \cdot (y_\ell - y_{\ell-1}) \;=\; \int \varphi + \int \psi\,.\end{aligned}$$

(b) $$\int \varphi = \sum_{m=1}^{M} \varphi_{k(m)} \cdot (w_m - w_{m-1}) \leq \sum_{m=1}^{M} \psi_{\ell(m)} \cdot (w_m - w_{m-1}) = \int \psi$$

(c) $$\begin{aligned} \Big|\int \varphi\Big| &= \Big|\sum_{k=1}^{K} \varphi_k (x_k - x_{k-1})\Big| \leq \underbrace{\sum_{k=1}^{K} |\varphi_k|(x_k - x_{k-1})}_{=\int|\varphi|} \\ &\leq \max\{|\varphi_k|\} \sum_{k=1}^{K} (x_k - x_{k-1}) \leq \|\varphi\|_\infty (b-a)\,. \end{aligned}$$

□

8.9 Definition. **Regelfunktionen und ihr Integral**
Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ heißt **Regelfunktion**, wenn es eine Folge (φ_n) von Treppenfunktionen gibt, die gleichmäßig auf $[a,b]$ gegen f konvergiert.
Für eine Regelfunktion f definieren wir das Integral über $[a,b]$ durch

$$\int_a^b f := \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n\,.$$

Weiterhin setzen wir $\int_a^a f := 0$ und $\int_b^a f := -\int_a^b f$.

Beweis. der Wohldefiniertheit. Damit die Definition Sinn macht, müssen wir zunächst zeigen, dass der Limes immer existiert und nicht von der Wahl der Folge (φ_n) abhängt. Zunächst sehen wir, dass

$$\Big|\int \varphi_n - \int \varphi_m\Big| = \Big|\int (\varphi_n - \varphi_m)\Big| \leq \|\varphi_n - \varphi_m\|_\infty (b-a) \leq (\|\varphi_n - f\|_\infty + \|f - \varphi_m\|_\infty)(b-a)\,.$$

Da $\varphi_n \to f$ gleichmäßig, also $\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n - f\|_\infty = 0$, ist $\left(\int \varphi_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{C}$ und somit konvergent. Sei nun (ψ_n) eine weitere Folge von Treppenfunktionen, die ebenfalls gleichmäßig gegen f konvergiert. Dann ist wie oben

$$\Big|\int \varphi_n - \int \psi_n\Big| \leq \int |\varphi_n - \psi_n| \leq (\|\varphi_n - f\|_\infty + \|f - \psi_n\|_\infty)(b-a) \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Also ist $\lim_{n\to\infty} \int \varphi_n = \lim_{n\to\infty} \int \psi_n$. □

8.10 Bemerkung. **Der Begriff der Orientierung**
Das Integral hat kein festes Vorzeichen. Dass wir "Flächen überhalb der x-Achse" einen positiven Flächeninhalt zuordnen ist reine Konvention, man hätte das Vorzeichen auch umkehren können. Mathematisch nennt man diese Konvention "Orientierung" des Integrationsgebiets. Das Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$ wird mit einer "Richtung" versehen, nämlich mit der Richtung "von a nach b". Wenn wir über höherdimensionale Gebilde integrieren, werden wir den Begriff der Orientierung präzisieren.

8.11 Proposition. Mit f und g sind auch $f+g$ und $f \cdot g$ Regelfunktionen.

Beweis. Übung. □

8.12 Proposition. **Eigenschaften des Integrals für Regelfunktionen**
Es seien f, g Regelfunktionen auf $[a,b]$ und $c \in \mathbb{C}$. Dann gilt

(a) $\int (f+g) = \int f + \int g$ und $\int cf = c\int f$ (Linearität)

(b) Für $f \le g$ reellwertig gilt

$$\int f \le \int g \qquad\qquad \text{(Monotonie)}$$

(c) $\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f| \le \|f\|_\infty \cdot (b-a)$

Beweis. Die Aussagen folgen sofort aus Proposition 8.8 und Grenzübergang: seien $\varphi_n \to f$ und $\psi_n \to g$ gleichmäßige Approximationen durch Treppenfunktionen, dann gilt z.B.

$$\int (f+g) = \lim_{n\to\infty} \int (\varphi_n + \psi_n) = \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n + \lim_{n\to\infty} \int \psi_n = \int f + \int g\,.$$

□

8.13 Definition. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ eine Regelfunktion und $[c,d] \subset [a,b]$ ein Teilintervall. Dann setzen wir

$$\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x \ := \ \int_a^b f(x)\chi_{[c,d]}(x)\,\mathrm{d}x,$$

wobei

$$\chi_{[c,d]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad x \in [c,d] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die charakteristische Funktion der Menge $[c,d]$ heißt. Offenbar ist mit f auch $f\chi_{[c,d]}$ eine Regelfunktion, da aus $\varphi_n \to f$ auch $\varphi_n\chi_{[c,d]} \to f\chi_{[c,d]}$ folgt.

Es stellt sich nun die Frage, welche Klassen von Funktionen tatsächlich Regelfunktionen und somit in obigem Sinne integrierbar sind?

8.14 Satz. Monotone Funktionen sind Regelfunktionen
Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton (wachsend oder fallend), so ist f eine Regelfunktion.

Beweis. Sei f monoton wachsend und $h_K := \frac{1}{K}(f(b) - f(a))$. Setze $\varphi_k := f(a) + (k-1)\cdot h_K$ für $k = 1, \dots, K+1$, und $x_k := \sup\{x \in [a,b] \,|\, f(x) \le \varphi_{k+1}\}$ für $k = 1, \dots, K$ und $x_0 := a$. Dann ist $\varphi_K(x) = \varphi_k$ auf (x_{k-1}, x_k) eine Treppenfunktion auf $[a,b]$ und

$$\|f - \varphi_K\|_\infty \le h_K = \frac{f(b) - f(a)}{K} \overset{K\to\infty}{\to} 0.$$

□

8.15 Bemerkung. Eine Funktion $f \cdot [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt von beschränkter Variation, wenn sie als Differenz zweier monoton wachsender Funktionen geschrieben werden kann. Funktionen beschränkter Variationen sind also Regelfunktionen.

8.16 Satz. Stetige Funktionen sind Regelfunktionen
Ist $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig, so ist f eine Regelfunktion.

Beweis. Nach Satz 6.17 ist f gleichmäßig stetig, also

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, y \in [a,b] \ : \ |x - y| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(y)| < \varepsilon\,.$$

Also gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \text{ falls } \quad |x - y| < \frac{b-a}{K(\varepsilon)}\,.$$

Mit $x_k := a + \frac{b-a}{K(\varepsilon)}$ für $k = 0, \ldots, K(\varepsilon)$ und $\varphi_{K(\varepsilon)}(x) := f(x_k)$ für $x \in (x_{k-1}, x_k)$ ist dann

$$\|\varphi_{K(\varepsilon)} - f\|_\infty \leq \varepsilon\,.$$

Somit ist f eine Regelfunktion. □

8.17 Bemerkung. Offenbar sind auch stückweise stetige Funktionen Regelfuntionen.

8.18 Bemerkung. **Riemannintegrierbarkeit**
Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt Riemann-integrierbar, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ Treppenfunktionen φ und ψ existieren so, dass $\varphi \leq f \leq \psi$ und

$$\int_a^b \psi - \int_a^b \varphi < \varepsilon\,. \qquad (*)$$

Die Klasse der Riemann-integrierbaren Funktionen ist etwas größer als die der Regelfunktionen. Beispielsweise ist die Funktion

$$f : [0, 1] \to \mathbb{R}\,, \qquad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0 \\ \sin\frac{1}{x} & \text{sonst} \end{cases}$$

Riemann-integrierbar aber keine Regelfunktion. Letzteres liegt daran, dass die unendlich vielen Oszillationen der Funktion f nicht gleichmäßig durch Treppenfunktionen mit endlich vielen Stützstellen approximiert werden können. Außerhalb jeder noch so kleinen Umgebung um die Null ist die Funktion aber stetig und es gibt kein Problem mehr. Im Riemannintegral spielen solche kleinen Umgebungen aber keine Rolle, da in $(*)$ die Differenz der eingeschlossenen Flächen relevant ist.

8.19 Satz. **Zweiter Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung**
Für eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ und jedes $x \in [a, b]$ sei

$$F(x) := \int_a^x f\,.$$

Dann ist $F : [a, b] \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar und

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F(x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in [a, b]\,.$$

Beweis. Seien $x, x + h \in [a, b]$ mit $h > 0$. Dann gilt aufgrund der Stetigkeit von f, dass

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x)\right| &= \left|\frac{1}{h}\Big(\int_a^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\Big) - f(x)\right| \\
&= \left|\frac{1}{h}\int_a^b f(t)\Big(\underbrace{\chi_{[a,x+h]}(t) - \chi_{[a,x]}(t)}_{\chi_{[x,x+h]}(t)}\Big)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)\,\mathrm{d}t\right| \\
&= \left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h}\Big(f(t) - f(x)\Big)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leq (x + h - x) \cdot \sup_{t\in[x,x+h]} \tfrac{1}{h}|f(t) - f(x)| \\
&= \sup_{t\in[x,x+h]} |f(t) - f(x)| \overset{h\to 0}{\to} 0\,.
\end{aligned}$$

Analog folgert man für $x, x+h \in [a,b]$ mit $h < 0$, dass

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)\right| \to 0$$

und schließt, dass

$$F'(x) := \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)\,.$$

□

8.20 Definition. Stammfunktion
Eine Funktion $F : [a,b] \to \mathbb{C}$ heißt **Stammfunktion** von $f : [a,b] \to \mathbb{C}$, wenn F differenzierbar ist und

$$F' = f$$

gilt. Wir schreiben dann auch $F(x) = \int^x f$.

8.21 Bemerkung. Der zweite Hauptsatz besagt also, dass jedes stetige f eine Stammfunktion hat, nämlich

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Offenbar ist mit $F(x)$ auch $F(x)+c$, $c \in \mathbb{C}$ eine Stammfunktion von f. Das sind dann aber auch schon alle Stammfunktionen. Denn seien F und $\tilde{F}$ Stammfunktionen von f, so gilt $(F-\tilde{F})' = f - f = 0$, also $F - \tilde{F} =$ konstant.

8.22 Korollar. Erster Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig und F eine Stammfunktion von f. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; F(b) - F(a) \;=:\; [F(x)]_a^b\,.$$

Beweis. Für $F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ gilt offenbar

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) = F(b) - F(a)\,.$$

Mit der vorangegangenen Bemerkung ist jede Stammfunktion $\tilde{F}$ von f von der Form $\tilde{F} = F + c$, also

$$\tilde{F}(b) - \tilde{F}(a) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

□

8.23 Bemerkung. Äquivalent zu Korollar 8.22 formuliert man den ersten Hauptsatz auch oft so: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar, so ist $f(b) = f(a) + \int_a^b f'(x)\mathrm{d}x$.

8.24 Beispiele. (a) Für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ und $0 < a < b$ ist

$$\int_a^b x^\alpha\,\mathrm{d}x = \left.\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right|_a^b = \frac{1}{\alpha+1}\left(b^{\alpha-1} - a^{\alpha+1}\right)\,.$$

(b) Im Fall $\alpha = -1$ ergibt sich

$$\int_a^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln x\Big|_a^b = \ln b - \ln a = \ln\frac{b}{a}\,.$$

(c) Schließlich ist

$$\int_0^x \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^t\Big|_0^x = \mathrm{e}^x - 1\,.$$

Sucht man nur irgendeine Stammfunktion, so schreibt man auch

$$\int^x \mathrm{e}^t \mathrm{d}t = \mathrm{e}^x\,.$$

8.25 Korollar. **Integralrestglied der Taylorformel**
Es sei $f \in C^{n+1}([a,b])$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt für $x, x_0 \in [a,b]$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \,\mathrm{d}t.$$

Beweis. Wir setzen für $t \in [a,b]$

$$F(t) := f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k\,.$$

Es ist $F(t)$ stetig differenzierbar und $F(x) = 0$, also gilt mit dem Hauptsatz, Satz 8.22,

$$F(x_0) = F(x) - \int_{x_0}^{x} F'(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{x_0}^{x} F'(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Mit

$$F'(t) = -\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1} = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

folgt die Behauptung. □

8.2 Integrationsmethoden

8.26 Satz. **Partielle Integration**
Es seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{C}$. Es sei f stetig, g stetig differenzierbar und F eine Stammfunktion von f. Dann gilt

$$\int_a^b fg = [Fg]_a^b - \int_a^b Fg'\,,$$

wobei $[Fg]_a^b := (Fg)(b) - (Fg)(a)$.

Beweis. Das ist einfach der erste Hauptsatz, denn

$$[Fg]_a^b = \int_a^b (Fg)' = \int_a^b (fg + Fg') = \int_a^b fg + \int_a^b Fg'\,.$$

□

8.27 Bemerkung. In Form von Stammfunktionen schreibt sich die partielle Integration so:

$$\int^x fg = Fg(x) - \int^x Fg'$$

8.28 Beispiele. (a)

$$\int^x \ln(y)\,\mathrm{d}y = \int^x 1\cdot\ln(y)\,\mathrm{d}y = x\ln(x) - \int^x y\cdot\tfrac{1}{y}\,\mathrm{d}y = x\ln(x) - x\,.$$

(b)

$$\int_a^b x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x\Big|_a^b - \int_a^b \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = [x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x]_a^b$$

und analog

$$\int_a^b x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x^2\mathrm{e}^x\Big|_a^b - \int_a^b 2x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \left[(x^2-2x+2)\mathrm{e}^x\right]_a^b .$$

Auf diese Weise kann für jedes Polynom p das Integral

$$\int_a^b p(x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$$

berechnet werden.

(c) Manchmal reproduziert sich der Integrand nach mehrfacher partieller Integration,

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = [h(x)]_a^b + c\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x .$$

Falls $c \neq 1$, so ist man fertig, denn dann ist

$$\int_a^b fg = \frac{1}{1-c}[h]_a^b .$$

Beispielsweise ist

$$\begin{aligned}\int^x \cos^2 y\,\mathrm{d}y &= \int^x \cos y\cdot\cos y\,\mathrm{d}y = \sin x\cdot\cos x + \int^x \sin y\cdot\sin y\,\mathrm{d}y\\ &= \sin x\cdot\cos x + \int^x (1-\cos^2 y)\,\mathrm{d}y\\ &= \sin x\cdot\cos x + x - \int^x \cos^2 y\,\mathrm{d}y .\end{aligned}$$

Also gilt

$$\int^x \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\sin x\cos x + x) .$$

8.29 Satz. Substitutionsregel

Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig und $g : [c,d] \to [a,b]$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f = \int_c^d (f\circ g)\,g' .$$

Beweis. Sei F Stammfunktion von f. Dann folgt aus der Kettenregel und dem Hauptsatz

$$\begin{aligned}\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)\,\mathrm{d}x &= F(g(d)) - F(g(c)) \;=\; (F\circ g)(d) - (F\circ g)(c)\\ &= \int_c^d (F\circ g)'(y)\,\mathrm{d}y \;=\; \int_c^d (F'\circ g)(y)\,g'(t)\,\mathrm{d}y\\ &= \int_c^d (f\circ g)(y)\,g'(y)\,\mathrm{d}y .\end{aligned}$$

□

8.30 Beispiel. Um das Integral

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{x \ln x} \,\mathrm{d}x = ?$$

mit Hilfe der Substitutionsregel zu bestimmen, gibt es zwei Möglichkeiten:

(a) Wir fassen das Integral als

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{x \ln x} \mathrm{d}x = \int_{g(c)}^{g(d)} f$$

auf und wählen g so, dass $(f \circ g)'$ möglichst einfach ist. Das entspricht der „Substitution" im eigentlichen Sinne.

(b) Oder wir finden f und g so, dass

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{x \ln x} \mathrm{d}x = \int_{c}^{d} (f \circ g) g' ,$$

und hoffen, dass f leichter zu integrieren ist. Hier muss man „sehen", dass $\frac{1}{x \ln x}$ schon die Struktur $(f \circ g)g'$ hat.

Zu (a) Wähle $g : [c, d] \to [x_1, x_2]$, $y \mapsto \mathrm{e}^y$, mit $c = \ln x_1$ und $d = \ln x_2$. Dann ist

$$\int_{x_1}^{x_2} \underbrace{\frac{1}{x \ln x}}_{f} \,\mathrm{d}x = \int_{c}^{d} \underbrace{\frac{1}{\mathrm{e}^y \ln \mathrm{e}^y}}_{f \circ g} \underbrace{\mathrm{e}^y}_{g'} \,\mathrm{d}y = \int_{\ln x_1}^{\ln x_2} \frac{1}{y} \,\mathrm{d}y \,.$$

In der Praxis würde man eher so vorgehen: Man setzt $\ln x := y$, gibt also $y = g^{-1}(x)$ vor. Dann ist

$$g'(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} g(y) = \frac{1}{g^{-1\prime}(g(y))} = \frac{1}{g^{-1\prime}(x)} = x$$

und es ergibt sich

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{x \ln x} \mathrm{d}x = \int_{\ln x_1}^{\ln x_2} \frac{1}{xy} x \mathrm{d}y = \int_{\ln x_1}^{\ln x_2} \frac{1}{y} \mathrm{d}y \,.$$

Man beachte aber, dass im allgemeinen g nicht umkehrbar sein muss.
Noch einfacher merkt man sich die Substitutionsregel in dieser Form durch folgende symbolische Schreibweise (den Leibnizschen Differentialkalkül): In

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d} \ln x}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}$$

löst man nach $\mathrm{d}x$ auf und findet

$$\mathrm{d}x = x \mathrm{d}y \,.$$

Das setzt man im Integral einfach ein und kürzt,

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{x \underbrace{\ln x}_{=y}} \underbrace{\mathrm{d}x}_{= x\mathrm{d}y} = \int_{\ln x_1}^{\ln x_2} \frac{1}{xy} x \mathrm{d}y = \int_{\ln x_1}^{\ln x_2} \frac{1}{y} \mathrm{d}y \,.$$

Zu (b) Es ist $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, also

$$\frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} = (f \circ g)(x) g'(x)$$

mit $g : [x_1, x_2] \to [\ln(x_1), \ln x_2]$, $x \mapsto \ln x$ und $f : [\ln x_1, \ln x_2] \to \mathbb{R}$, $y \mapsto \frac{1}{y}$. Wieder liefert die Substitutionsregel

$$\int_{c}^{d} \frac{1}{x \ln x} \,\mathrm{d}x = \int_{c}^{d} \underbrace{f(g(x))}_{\frac{1}{\ln x}} \underbrace{g'(x)}_{\frac{1}{x}} \,\mathrm{d}x = \int_{g(c)}^{g(d)} f(y) \,\mathrm{d}y = \int_{\ln x_1}^{\ln x_2} \frac{1}{y} \,\mathrm{d}y.$$

Beide Ansätze führen zum Ziel und wir haben

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{x \ln x} \,\mathrm{d}x = \int_{\ln x_1}^{\ln x_2} \frac{1}{y} \,\mathrm{d}y = \ln \frac{\ln x_2}{\ln x_1}$$

gezeigt.

Das Argument in (b) können wir aber leicht auf beliebige g mit $g(x) \neq 0$ in $[c, d]$ verallgemeinern. Es gilt nämlich (wieder mit $f(y) = \frac{1}{y}$), dass

$$\int_c^d \frac{g'(x)}{g(x)} \,\mathrm{d}x = \int_c^d f(g(x))\, g'(x) \,\mathrm{d}x = \int_{g(c)}^{g(d)} f(y) \,\mathrm{d}y = \ln \left(\frac{g(d)}{g(c)} \right)$$

Beispielsweise folgt so für $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{\cos' x}{\cos x}$, dass

$$\int_c^d \tan x \,\mathrm{d}x = \ln \left(\frac{\cos c}{\cos d} \right) .$$

8.31 Bemerkung. <u>**Merkhilfe zur Substitutionsregel**</u>

Eine gute Merkhilfe ist folgende Notation,

$$\int_c^d f(g(x))\, g'(x) \,\mathrm{d}x = \int_c^d f(g(x)) \,\mathrm{d}(g(x)) = \int_{g(c)}^{g(d)} f(y) \,\mathrm{d}y$$

da $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} = g'(x)$, also $g'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}g$. Wenn wir Differentialformen einführen, wird diese Schreibweise einen präzisen Sinn bekommen.

Formal hilft sie einem aber schon jetzt bei der Anwendung der Substitutionsregel. Beispielsweise ist

$$\int_c^d \frac{f(\ln x)}{x} \,\mathrm{d}x = \int_c^d f(\ln x) \,\mathrm{d}(\ln x) = \int_{\ln c}^{\ln d} f(y) \,\mathrm{d}y \,,$$

oder

$$\int_c^d f(\sin x) \cos x \,\mathrm{d}x = \int_c^d f(\sin x) \,\mathrm{d}(\sin x) = \int_{\sin c}^{\sin d} f(y) \,\mathrm{d}y$$

oder

$$\int_a^b \frac{x^3}{(x^4+1)^2} \,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{1}{(x^4+1)^2} \frac{\mathrm{d}(x^4)}{4} = \frac{1}{4} \int_{a^4}^{b^4} \frac{1}{(y+1)^2} \,\mathrm{d}y = \frac{1}{4} \Big(\frac{1}{a^4+1} - \frac{1}{b^4+1} \Big) .$$

8.32 Beispiel. <u>**Die Kreisfläche**</u>

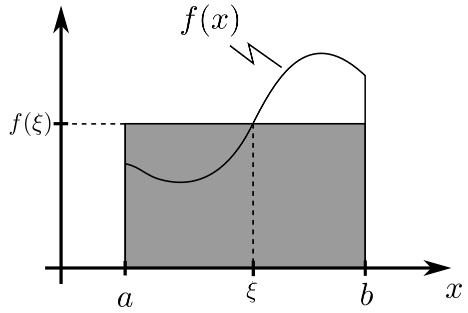
Um die Fläche F des Kreises mit Radius r zu bestimmen, berechnen wir die Fläche des halben Kreises als Integral über die Funktion $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ von $-r$ bis r,

$$\frac{F}{2} = \int_{-r}^{r} f(x) \,\mathrm{d}x = \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \,\mathrm{d}x \,.$$

Geometrisch liegt es nahe, das Integral durch den Winkel statt durch den Achsenabschnitt zu parametrisieren, also $g : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-r, r]$, $x = g(\varphi) = r \sin \varphi$, zu substituieren. Das liefert dann

$$\begin{aligned} \frac{F}{2} &= \int_{g(-\frac{\pi}{2})}^{g(\frac{\pi}{2})} f(x) \,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(g(\varphi)) \,\mathrm{d}g(\varphi) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - g(\varphi)^2}\, g'(\varphi) \,\mathrm{d}\varphi \\ &= r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}\, \cos \varphi \,\mathrm{d}\varphi = r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi \,\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{2} r^2 \,. \end{aligned}$$

8.33 Satz. **Der Mittelwertsatz der Integralrechnung**



(a) Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, so existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\cdot(b-a)\,.$$

(b) Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine positive Regelfunktion, so existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Beweis. (a) folgt aus (b) für $\varphi(x) = 1$.

(b) Ist $\min f = \max f$, so ist f konstant und die Behauptung gilt für jedes $\xi \in [a,b]$. Ist $\min f < \max f$, so gilt

$$\min f \cdot \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x < \int_a^b f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x < \max f \cdot \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

also

$$\min f < \frac{\int_a^b f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x} < \max f\,.$$

Mit dem Zwischenwertsatz für die stetige Funktion f folgt die Behauptung.

□

8.34 Bemerkung. Mit Hilfe des Mittelwertsatzes erhält man aus dem Integralrestglied das Lagrangsche Restglied der Taylorformel: Es gilt

$$\begin{aligned} R_n(x,x_0) &= \int_{x_0}^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,\mathrm{d}t = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\int_{x_0}^x (x-t)^n\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\,\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\,, \end{aligned}$$

da $(x-t)^n$ im Integranden immer ein festes Vorzeichen hat.

8.35 Satz. **Vertauschung von Integration und Grenzübergang**

Sei $f_n : [a,b] \to \mathbb{C}$ eine Folge von Regelfunktionen, die gleichmäßig gegen eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ konvergiert, also $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$. Dann ist f eine Regelfunktion und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$\|f - f_n\|_\infty < \tfrac{\varepsilon}{2} \quad \text{für} \quad n \geq n_\varepsilon\,.$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $(\varphi_{n,m})_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Treppenfunktionen mit $\lim_{m\to\infty} \|f_n - \varphi_{n,m}\|_\infty = 0$. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ existiert also ein $m(n)$ so, dass

$$\|f_n - \varphi_{n,m(n)}\|_\infty < \tfrac{\varepsilon}{2}\,.$$

Also ist $\|f - \varphi_{n,m(n)}\|_\infty \leq \|f - f_n\|_\infty + \|f_n + \varphi_{n,m(n)}\|_\infty < \varepsilon$ für $n \geq n_\varepsilon$. Somit ist f eine Regelfunktion und es gilt

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)|\,\mathrm{d}x \leq \|f - f_n\|_\infty (b-a) \overset{n\to\infty}{\to} 0\,.$$

□

8.36 Korollar. Sind $f_n : [a,b] \to \mathbb{C}$ Regelfunktionen und konvergiert die Reihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

gleichmäßig auf $[a,b]$, so ist f eine Regelfunktion und

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Insbesondere können also Potenzreihen im Inneren des Konvergenzgebiets gliedweise intergriert werden,

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}\Big|_a^b$$

für a, b mit $|a - x_0| < \rho$ und $|b - x_0| < \rho$.

Beweis. Man wende Satz 8.35 auf die Partialsummenfolge

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} f_n(x)$$

an. □

8.37 Definition. <u>Riemann-Summen</u>
Es ist oft nützlich zu wissen, dass das Integral durch Riemann-Summen approximiert werden kann. Eine Zerlegung Z des Intervalls $[a,b]$ mit Stützstellen ist gegeben durch

$$\{a = x_0 < x_1^* < x_1 < x_2^* < \cdots < x_K^* < x_K = b\}$$

also durch Intervalle $I_k = (x_{k-1}, x_k)$ mit Stützstellen $x_k^* \in I_k$. Die Feinheit der Zerlegung ist $\zeta(Z) := \max_{k=1,\cdots,K} |I_k| := \max\{x_k - x_{k-1} \,|\, k = 1, \cdots, k\}$. Die durch die Zerlegung definierte Riemann-Summe für das Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ist

$$S_Z(f) = \sum_{k=1}^{K} f(x_k^*)\,(x_k - x_{k-1}),$$

also genau das Integral über die durch Z definierte Treppenfunktion $\varphi_k = f(x_k^*)$ auf I_k.

8.38 Satz. <u>Riemann-Summen</u>
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ eine Regelfunktion, (Z_n) eine Folge von Zerlegungen des Intervalls $[a,b]$ mit $\lim_{n\to\infty} \zeta(Z_n) = 0$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} S_{Z_n}(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Beweis. Warnung: Im Allgemeinen wird die durch die Zerlegungen Z_n definierte Folge von Treppenfunktionen **nicht** gleichmäßig gegen f konvergieren.

Sei $\varepsilon > 0$ und φ eine Treppenfunktion mit

$$\|f - \varphi\|_\infty < \tfrac{\varepsilon}{3(b-a)}\,,$$

also

$$\int_a^b |f(x) - \varphi(x)| \mathrm{d}x < \tfrac{\varepsilon}{3}$$

und

$$|S_{Z_n}(f) - S_{Z_n}(\varphi)| = \sum_{k=1}^{N} |f(x_k^*) - \varphi(x_k^*)|(x_k - x_{k-1}) < \tfrac{\varepsilon}{3}\,.$$

Für eine Treppenfunktion φ mit K Stufen gilt aber

$$\left| S_{Z_n}(\varphi) - \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq K\,\zeta(Z_n)\|\varphi\|_\infty$$

also

$$|S_{Z_n}(\varphi) - \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x| < \tfrac{\varepsilon}{3}$$

für n groß genug. Insgesamt ergibt sich also

$$\Big|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - S_{Z_n}(f)\Big| \leq \Big|\int f - \int \varphi\Big| + \Big|\int \varphi - S_{Z_n}(\varphi)\Big| + \Big|S_{Z_n}(\varphi) - S_{Z_n}(f)\Big| < \varepsilon$$

für n groß genug. □

8.3 Uneigentliche Integrale

Integrale der Form $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ oder $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ sind zunächst nicht definiert, da das Intervall bzw. der Integrand am Rand unbeschränkt ist. Aber es liegt nahe, z.B. folgende Setzungen zu machen:

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x := \lim_{b\to\infty} \int_0^b \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \Big[-\mathrm{e}^{-x} \Big]_0^b = \lim_{b\to\infty} (-\mathrm{e}^{-b} + \mathrm{e}^{-0}) = 1\,,$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x := \lim_{a\searrow 0} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\searrow 0} \Big[2\sqrt{x}\Big]_a^1 = \lim_{a\searrow 0} \big(2 - 2\sqrt{a}\big) = 2\,.$$

8.39 Definition. Uneigentliches Integral

Sei $f : [a,b) \to \mathbb{C}$, $-\infty < a < b \leq \infty$, über jedem Intervall $[a,c]$ mit $c \in [a,b)$ eine Regelfunktion. Dann definieren wir das uneigentliche Integral durch

$$\int_a^b f := \lim_{c\nearrow b} \int_a^c f\,,$$

falls dieser Grenzwert existiert.

Das uneigentliche Integral heißt konvergent, falls $\int_a^b f \in \mathbb{C}$ und absolut konvergent, wenn $\int_a^b |f| < \infty$.

8.40 Beispiel. **Die Γ-Funktion**

Die Gamma-Funktion $\Gamma : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist durch

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$$

definiert. Wir werden zeigen, dass $\Gamma(n+1) = n!$ für $n \in \mathbb{N}$ gilt, also, dass Γ die Fakultät interpoliert.

Das Integral ist uneigentlich bei ∞ und falls $\alpha < 1$ auch bei 0. Die Grenzwerte existieren jeweils wegen Monotonie und der folgenden Schranken:

$$\lim_{a\to 0}\int_a^1 x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0}\int_a^1 |x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}|\,\mathrm{d}x \le \lim_{a\to 0}\int_a^1 x^{\alpha-1}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0}\left[\frac{x^\alpha}{\alpha}\right]_a^1 = \frac{1}{\alpha}$$

bzw.

$$\lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_1^0 \underbrace{(x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}})}_{\le c}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x \le \lim_{b\to\infty}\int_1^b c\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x = 2\,c\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\,.$$

Weiterhin gilt mit partieller Integration

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha+1) \quad &= \quad \lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^n x^\alpha\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \;=\; \lim_{n\to\infty}\left(\Big[-x^\alpha\mathrm{e}^{-x}\Big]_{\frac{1}{n}}^n + \int_{\frac{1}{n}}^n \alpha x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\right)\\ &= \quad \lim_{n\to\infty}\left(-n^\alpha\mathrm{e}^{-n} + \left(\frac{1}{n}\right)^\alpha\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}}\right) + \alpha\Gamma(\alpha) = \alpha\Gamma(\alpha)\,.\end{aligned}$$

Außerdem ist $\Gamma(1) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = 1 = 0!$. Daraus folgt induktiv

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)! = n!\,.$$

Tatsächlich ist die Γ-Funktion auch glatt, $\Gamma \in C^\infty(0,\infty)$, was wir aber später zeigen werden.

8.41 Satz. **Integralkriterium für Reihen**

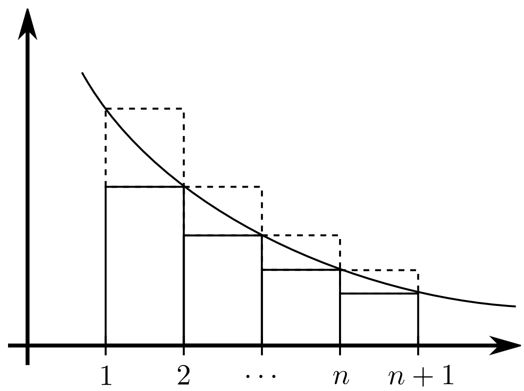
Sei $f : [1,\infty] \to \mathbb{R}$ positiv und monoton fallend. Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^\infty f(n)$$

genau dann, wenn das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$$

existiert.



Beweis. Da f monton fällt, gilt $f(n+1) \le f(x) \le f(n)$ für alle $n \le x \le n+1$, $n \in \mathbb{N}$. Also ist

$$f(n+1) = \int_n^{n+1} f(n+1)\,\mathrm{d}x \le \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_n^{n+1} f(n)\,\mathrm{d}x = f(n)\,,$$

und Summation liefert

$$\sum_{n=1}^N f(n+1) \quad\le\quad \int_1^{N+1} f(x)\,\mathrm{d}x \quad\le\quad \sum_{n=1}^N f(n)\,.$$

Somit implizieren sich die Konvergenzen gegenseitig. $\square$

8.42 Beispiel. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konvergiert genau dann, wenn $\alpha > 1$ ist: für das Integral über $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ gilt.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} \mathrm{d}x = \lim_{a\to\infty} \int_1^a \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \lim_{a\to\infty} \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^a & \text{falls } \alpha \neq 1 \\ \lim_{a\to\infty} [\ln x]_1^a & \text{falls } \alpha = 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{falls } \alpha > 1 \\ \infty & \text{falls } \alpha \le 1 \end{cases}$$

Da für $\alpha > 0$ die Funktion f positiv und monoton fallend ist, kann man das Integralkriterium anwenden. Für $\alpha \le 0$ ist $\frac{1}{n^\alpha}$ keine Nullfolge, die Reihe ist dann sowieso divergent.

8.4 Integration rationaler Funktionen

Sind p, q reelle Polynome mit $p(x) \neq 0$ in $[a, b]$, so lässt sich das Integral

$$\int_a^b \frac{q(x)}{p(x)}\,\mathrm{d}x$$

explizit angeben. Das Verfahren beruht auf der sogenannten Partialbruchzerlegung, d.h. der Zerlegung der rationalen Funktion in eine Summe einfacher Bausteine, die explizit integriert werden können.

8.43 Satz. **Komplexe Partialbruchzerlegung**

Es seien q, p Polynome und es habe p den Grad n und die Nullstellen $\{z_1, \ldots, z_k\}$ mit Vielfachheiten $\{l_1, \ldots, l_k\}$, also $p(z) = a_n \prod_{j=1}^k (z - z_j)^{l_j}$ (Fundamentalsatz der Algebra).
Dann gibt es eindeutig bestimmte Zahlen $A_{ij} \in \mathbb{C}$ und ein Polynom $h(z)$ mit

$$\begin{aligned} \frac{q(z)}{p(z)} &= h(z) + \sum_{j=1}^{k} \sum_{m=1}^{l_j} \frac{A_{jm}}{(z-z_j)^m} \\ &= h(z) + \frac{A_{11}}{(z-z_1)} + \frac{A_{12}}{(z-z_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1l_1}}{(z-z_1)^{l_1}} \\ &\quad + \cdots \\ &\quad + \frac{A_{k1}}{(z-z_k)} + \cdots + \frac{A_{kl_k}}{(z-z_k)^{l_k}} . \end{aligned}$$

Beweis. Das Polynom h ergibt sich eindeutig aus Polynomdivision mit Rest, $q = h \cdot p + r$, also

$$\frac{q(z)}{p(z)} = h(z) + \frac{r(z)}{p(z)} \quad \text{mit Grad } r < \operatorname{Grad} p .$$

Es reicht also $\frac{q}{p}$ mit $\operatorname{Grad} q < \operatorname{Grad} p$ zu betrachten. Induktion nach $n = \operatorname{Grad} p$ liefert für $n = 1$

$$\frac{q(z)}{p(z)} = \frac{c}{z - z_1} .$$

$n - 1 \Rightarrow n$: Sei z_0 Nullstelle von p der Ordnung $l \ge 1$, also

$$p(z) = (z - z_0)^l \tilde{p}(z)$$

mit $\operatorname{Grad} \tilde{p} \le n - 1$, $\tilde{p}(z_0) \neq 0$. Daraus folgt für alle z mit $p(z) \neq 0$, dass

$$\frac{q(z)}{\tilde{p}(z)} - \frac{q(z_0)}{\tilde{p}(z_0)} = \frac{1}{\tilde{p}(z)} \frac{q(z)\tilde{p}(z_0) - q(z_0)\tilde{p}(z)}{\tilde{p}(z_0)} = \frac{(z - z_0)\tilde{q}(z)}{\tilde{p}(z)}$$

mit einem Polynom $\tilde{q}$ vom Grad $\tilde{q} \leq n-2$. Also ist

$$\frac{q(z)}{p(z)} = \frac{q(z)}{(z-z_0)^l \tilde{p}(z)} = \frac{q(z_0)}{\tilde{p}(z_0)} \frac{1}{(z-z_0)^l} + \frac{\tilde{q}(z)}{\tilde{p}(z)} \frac{1}{(z-z_0)^{l-1}}$$

Auf den letzten Term kann man die Induktionsvoraussetzung anwenden, da der Grad des Nenners $n-1$ ist.

Die Eindeutigkeit folgt, wenn wir

$$\sum_{j=1}^{k} \sum_{m=1}^{l_j} \frac{A_{jm}}{(z-z_j)^m} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad A_{jm} = 0 \quad \text{für alle } j, m$$

zeigen können. Das sieht man aber leicht: Multiplikation der linken Seite mit $(z-z_j)^{l_j}$ und Auswertung bei $z = z_j$ liefert $A_{jl_j} = 0$. Multiplikation der linken Seite mit $(z-z_j)^{l_j-1}$ und Auswertung bei $z = z_j$ liefert $A_{j,l_j-1} = 0$ usw. □

8.44 Satz. **Reelle Partialbruchzerlegung**

Seien q, p reelle Polynome, p vom Grad n und

$$p(x) = a_n \prod_{j=1}^{k} (x-x_j)^{lj} \quad \prod_{j=1}^{r} (x^2 + 2b_j x + c_j)^{m_j}$$

mit $b_j^2 < c_j$. Dann gibt es eindeutig bestimmte Zahlen A_{jl}, B_{jm}, C_{jm} so, dass

$$\frac{q(x)}{p(x)} = h(x) + \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=1}^{l_j} \frac{A_{jl}}{(x-x_j)^l} + \sum_{j=1}^{r} \sum_{m=1}^{m_j} \frac{B_{jm}x + C_{jm}}{(x^2 + 2b_j x + c_j)^m} .$$

Beweis. Man fasse die Terme mit komplex konjugierten Nullstellen aus Satz 8.43 zusammen. □

8.45 Beispiel. Betrachte

$$\frac{x^4+2}{x^3-x} = \frac{x^4+2}{x(x^2-1)} = \frac{x^4+2}{x(x+1)(x-1)} ,$$

wobei die Nullstellen $0, 1, -1$ des Nenners alle einfach sind. Polynomdivision mit Rest liefert zunächst

$$\begin{array}{l} \big(\quad x^4 \qquad + 2\big) : \big(x^3 - x\big) = x + \dfrac{x^2+2}{x^3-x} \\ \underline{-\,x^4 + x^2 \quad} \\ \qquad\quad x^2 \end{array}$$

Es ist also

$$\frac{x^2+2}{x^3-x} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{x+1}$$

und Multiplikation mit $x^3 - x$ ergibt

$$x^2 + 2 = (x^2-1)A_1 + x(x+1)A_2 + x(x-1)A_3 .$$

Einsetzen von

$$\begin{array}{rlcll} x = 1 & \text{liefert} & 3 = 2A_2 & \Rightarrow & A_2 = \frac{3}{2} \\ x = 0 & \text{liefert} & 2 = -A_1 & \Rightarrow & A_1 = -2 \\ x = -1 & \text{liefert} & 3 = 2A_3 & \Rightarrow & A_3 = \frac{3}{2}. \end{array}$$

Insgesamt ist also

$$\frac{x^4+2}{x^3-x} = x - \frac{2}{x} + \frac{3}{2}\frac{1}{x-1} + \frac{3}{2}\frac{1}{x+1} .$$