1. Differentialrechnung mehrstelliger Funktionen

1.1. Konvergenz im $\mathbb{R}^n$

Wir betrachten eine Folge $\{x^k\}$ von Vektoren $x^k = \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ \vdots \\ x_n^k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ und einen Vektor $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Damit definieren wir den Grenzwert der Folge:

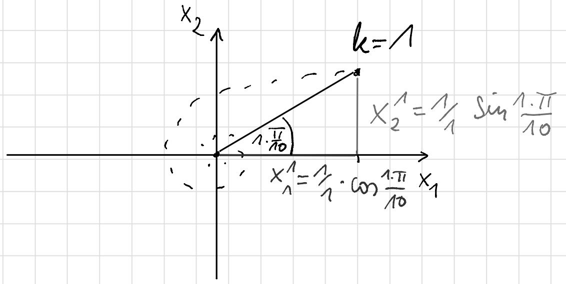
Def: $\lim\limits_{k\to\infty} x^k = x \quad \longleftrightarrow$

$$\|x^k - x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i^k - x_i)^2} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

Anmerkung: Wir verwenden hier meist die euklidische Norm, aber jede Norm im $\mathbb{R}^n$ wäre verwendbar.

Bsp.:

$$x^k = \begin{pmatrix} \frac{1}{k}\cos\frac{k\pi}{10} \\ \frac{1}{k}\sin\frac{k\pi}{10} \end{pmatrix} \quad k = 1, 2, \ldots$$



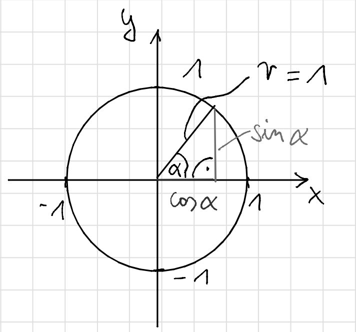
Vermutung: $\lim\limits_{k\to\infty} x^k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

⇝ Nachweis:

$$\lim_{k\to\infty} \left\|x^k - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\| = \lim_{k\to\infty} \sqrt{\left(\frac{1}{k}\cos\frac{k\pi}{10} - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{k}\sin\frac{k\pi}{10} - 0\right)^2}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \sqrt{\frac{1}{k^2}\underbrace{\left(\left[\cos\frac{k\pi}{10}\right]^2 + \left[\sin\frac{k\pi}{10}\right]^2\right)}_{=1}}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0 \qquad \text{allgemein } \sqrt{z^2} = |z|$$



$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = r^2 = 1^2 = 1$

Wie in $\mathbb{R}^1$ gilt:

Satz: Der Grenzwert einer Folge im $\mathbb{R}^n$ ist eindeutig.

Beweis als Hausaufgabe!

Satz: $\lim\limits_{k\to\infty} x^k = x \longleftrightarrow \forall i = 1, \ldots, n: \lim\limits_{k\to\infty} x_i^k = x_i$

⇝ „Konvergenz im $\mathbb{R}^n$" $\longleftrightarrow$ „koordinatenweise Konvergenz"

$r^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2$

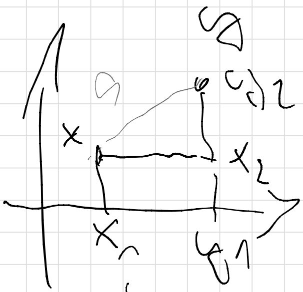
Beweis:

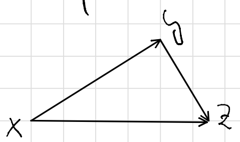
Es sei $\lim x^k = x$ d.h. $\lim \sqrt{\sum^n (x_i^k - x_i)^2} = 0$

Beweis: Es sei $\lim\limits_{k\to\infty} x^k = x$, d.h. $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} (x_i^k - x_i)^2} = 0$

$$\longleftrightarrow \lim_{k\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (x_i^k - x_i)^2 = 0 \longleftrightarrow$$

$$\forall i = 1,\dots,n: \lim_{k\to\infty} \sqrt{(x_i^k - x_i)^2} = \lim_{k\to\infty} |x_i^k - x_i| = 0$$



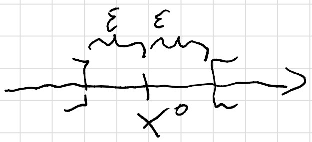


$\overline{xz} \le \overline{xy} + \overline{yz}$

$\|\overrightarrow{xz}\| \le \|\overrightarrow{xy}\| + \|\overrightarrow{yz}\|$

> **Def:** ε-Umgebung eines Punktes $x^0 \in \mathbb{R}^n$:
>
> $$U_\varepsilon(x^0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x^0\| < \varepsilon\}$$
> $$= B[\text{Mittelpunkt, Radius}]$$
>
> (n-dimensionale offene Kugel um x^0)

z.B.: $B[(1,2,3),\ 0.5]$



$|x - x_0| < \varepsilon$

Einschub → Blatt „Metrischer Raum"

1.2 Mehrstellige Funktionen

Wir betrachten die Abbildung: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

oder allgemeiner: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Mitunter – insbesondere in der Physik – wird beispielsweise unterschieden

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ist ein „Skalarfeld", z.B. Temperatur an jedem Raumpunkt

(auch andere $n > 2$ möglich) $\qquad T = T(x,y,z)$

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist ein „Vektorfeld", z.B. Gravitationsfeld – Gravitationskraft

die auf eine Masse in jedem Raumpunkt wirkt ist ein Vektor

$$\vec{F_g} = \vec{F_g}(x,y,z)$$

(auch andere n, m möglich, $n > 2$, $m > 2$)

Mögliche Schreibweisen: $\quad f(x,y,z)$

$f(x_1, x_2, x_3)$

$f(\vec{x})$ mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

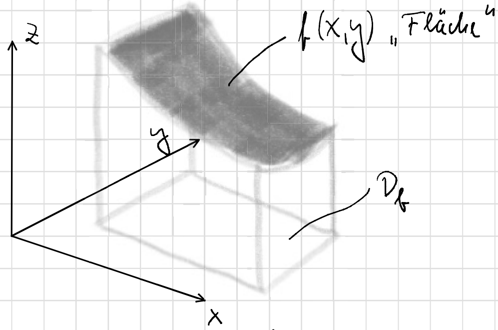
Visualisierungen von Funktionen mehrerer Veränderlicher

Funktionen von 2 Variablen lassen sich graphisch darstellen, bei Funktionen von mehr Variablen ist das nur mit Einschränkungen möglich.

Darstellung als „Fläche":

Darstellung als „Fläche":

$z = f(x,y)$, $(x,y) \in D_f$ (Definitionsbereich)



- „Fläche" im herkömmlichen Sinn falls f stetig ist

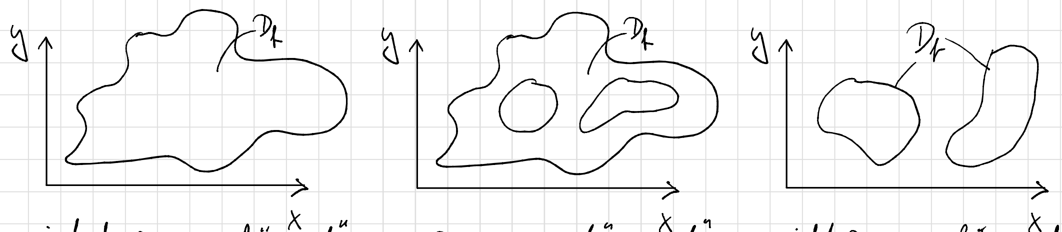
  Erinnerung an Fkt. im $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \text{ rational} \quad (x = \frac{m}{n} \text{ gekürzt}) \\ 0, & \text{falls } x \text{ irrational} \quad (\text{z.B. } \pi, e, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots) \end{cases}$$

oder
$$f(x) = \begin{cases} 1/n, & \text{falls } x \text{ rational} \\ 0, & \text{falls } x \text{ irrational} \end{cases}$$

- Im einfachsten Fall ist D_f ein Rechteck (achsenparallel)

  Möglich sind aber auch allgemeinere & kompliziertere D_f, z.B.

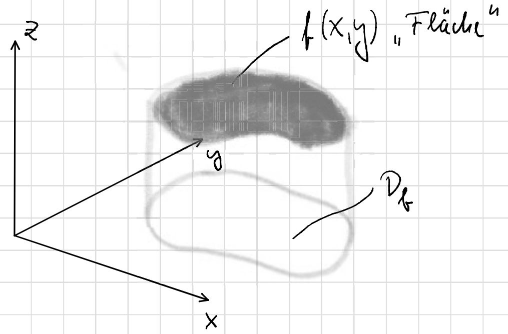


„einfach zusammenhängend" „zusammenhängend" „nicht zusammenhängend"

Darstellungsformen

1. Graph: Entspricht der Menge der Punkte $(x,y,f(x,y)) \in \mathbb{R}^3$

$$\text{Graph} = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in D_f \wedge z = f(x,y) \}$$



Siehe Darstellung im Notebook

2. Höhenlinien:

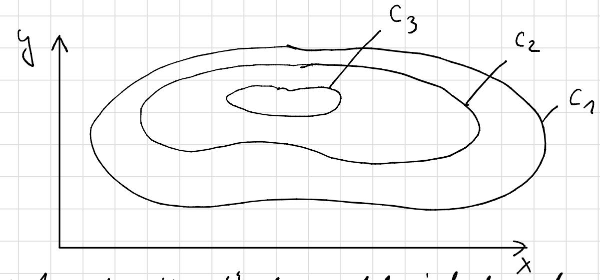
Bsp.: - Höhenlinien auf topografischen Karten
- Isobaren auf Wetterkarten (Kurven gleichen Luftdrucks)

Bsp.: – Höhenlinien auf topografischen Karten

– Isobaren auf Wetterkarten (Kurven gleichen Luftdrucks)

Höhenlinie von f zur Höhe $c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) \in D_f \land f(x,y) = c\}$

Schnitte des Graphen der Funktion mit Ebenen parallel zur x-y-Ebene in der Höhe c:



Die Berechnung ist unter Umständen nicht einfach, da $f(x,y)=c$ eine implizite Gleichung ist.

Siehe Darstellung im Notebook

3. Schnittdiagramme:

Schnitte des 3-dimensionalen Graphen mit Ebenen parallel zur x-z- oder y-z-Ebene:

$$z = f(x, y=c) = \tilde{f}(x) \quad (\parallel \text{ zu x-z-Ebene})$$

Bsp.: Ideales Gas

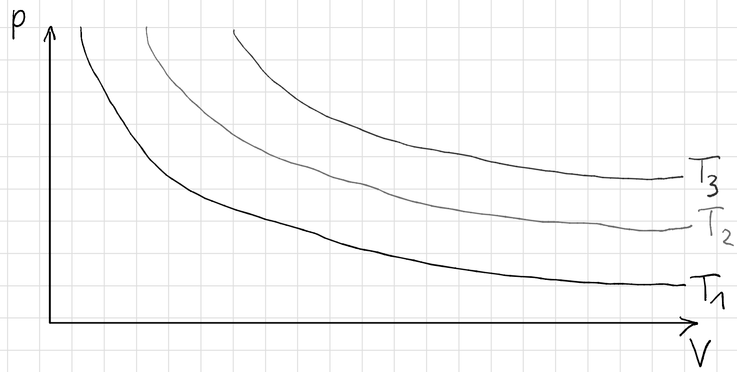
Zustandsgleichung $pV = n \cdot R \cdot T$, R – universelle Gaskonstante

$\rightsquigarrow \; p = f(T,V) = n \cdot R \cdot \frac{T}{V}$

$\rightsquigarrow$ für konstante Temperaturen $\rightsquigarrow$ Kurven gleicher Temperatur

$\hat{=}$ Isotherme

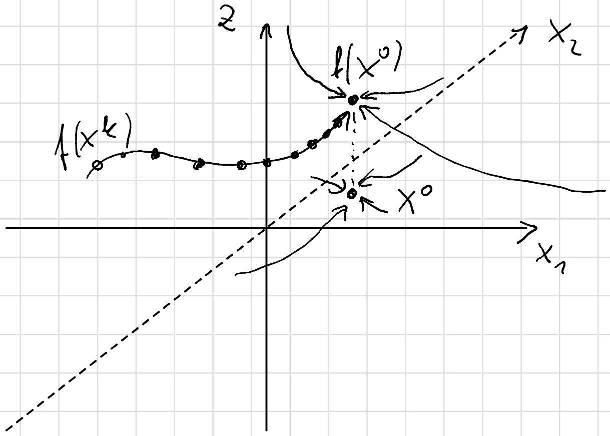
$$p = n \cdot R \cdot \frac{T_{const}}{V} = \frac{C}{V} \rightsquigarrow p \sim \frac{1}{V}$$



$T_1 < T_2 < T_3$

1.3. Stetigkeit

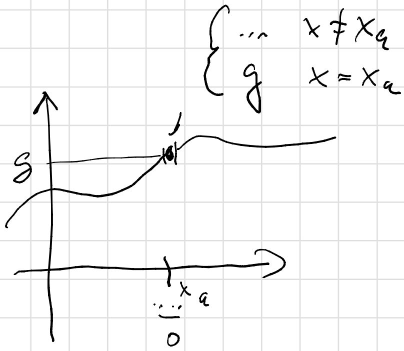
Def.: Eine Funktion $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt stetig im Punkt $x^0 \in D_f \subset \mathbb{R}^n$, wenn für jede Folge $\{x^k\}$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} x^k = x^0$ gilt: $\lim\limits_{k\to\infty} f(x^k) = f(x^0)$.



$$x^k = \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ \vdots \\ x_n^k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad x^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix}$$

Nicht nur entlang der Achsen!!

Bsp. stetiger Funktionen:



- Polynome $f(x,y) = x^3 + x^2 y - 3y^2$
- Summe, Differenzen, Produkt stetiger Funktionen
- Quotient stetiger Fkt., falls Nenner $\neq 0$
- Verkettung stetiger Funktionen

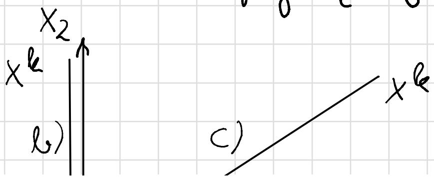
- $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{(x^3 - x^2 y)(y^2 - x)}{x^2 + y^2}}$ außer bei $x = y = 0$, dort ist es nicht definiert
- $f(x,y,z) = \ln(1+x^2) \cdot \sin(x \cdot y) + z$ Wo stetig? $\rightsquigarrow$ $\underline{\mathbb{R}^3}$

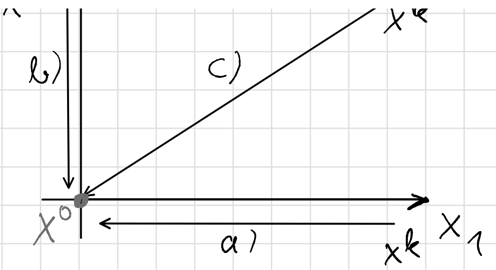
Ausführliche Beispiele:

1.) $$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{2x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{für } (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } x_1 = x_2 = 0 \end{cases}$$

In $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$ stetig, jedoch für $x^0 = (0,0)$ unstetig.

Wir betrachten dafür verschiedene Punktfolgen $\{x^k\}$, die gegen $(0,0)$ (verschieden) konvergieren:





a) $$x^k = \begin{pmatrix} 1/k \\ 0 \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

$$f(x^k) = \frac{2 \cdot 1/k \cdot 0}{(1/k)^2 + 0^2} = \frac{0}{(1/k)^2} = 0 \rightsquigarrow \underline{\lim_{k \to \infty} f(x^k) = 0}$$

b) $$x^k = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/k \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

$$f(x^k) = \frac{2 \cdot 0 \cdot 1/k}{0^2 + (1/k)^2} = \frac{0}{(1/k)^2} = 0 \rightsquigarrow \underline{\lim_{k \to \infty} f(x^k) = 0}$$

↯

c) $$x^k = \begin{pmatrix} 1/k \\ 1/k \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

$$f(x^k) = \frac{2 \cdot 1/k \cdot 1/k}{(1/k)^2 + (1/k)^2} = \frac{\cancel{2 \cdot (1/k)^2}^{\,1}}{\cancel{2 \cdot (1/k)^2}_{\,1}} = 1 \rightsquigarrow \underline{\lim_{k \to \infty} f(x^k) = 1}$$

<u>2.)</u> $$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 \cdot \sin\left(\dfrac{1}{x_1^2 + x_2^2}\right), & \text{für } (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0, & \text{für } x_1 = x_2 = 0 \end{cases}$$

Funktion ist Verkettung stetiger Funktionen $\rightsquigarrow$ ist in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ stetig.

Frage: Stetigkeit in $(0,0)$?

Betrachten beliebige Punktfolge $x^k = \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \end{pmatrix} \xrightarrow[k \to \infty]{} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\rightsquigarrow x_1^k \xrightarrow[k \to \infty]{} 0, \quad x_2^k \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$$

$$0 \leq |f(x_1^k, x_2^k)| = \left| x_1^k \cdot \sin\left(\frac{1}{(x_1^k)^2 + (x_2^k)^2}\right) \right| = |x_1^k| \cdot \underbrace{\left|\sin(\ldots)\right|}_{\leq 1} \leq |x_1^k| \cdot 1$$

$$0 \leq \underbrace{|f(x_1^k, x_2^k)|}_{} \leq \underbrace{|x_1^k|}_{}$$

$k \to \infty$

$$
\begin{array}{llcll}
 & 0 \le & \underbrace{|f(x_1^k, x_2^k)|} & \le & \underbrace{|x_1^k|},\\
k \to \infty: & \downarrow & \downarrow & & \downarrow\\
 & 0 \le & 0 & \le & 0
\end{array}
$$

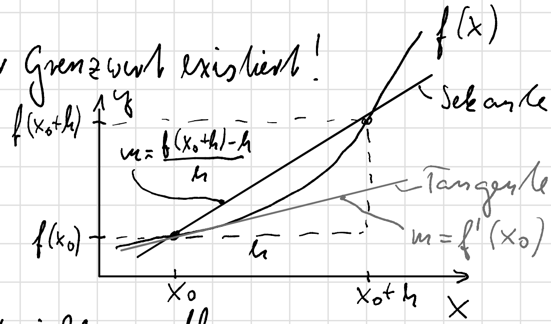
$\leadsto \lim\limits_{k\to\infty} f(x_1^k, x_2^k) = 0 = f(0,0)$

$\leadsto$ <u>stetig in ganz $\mathbb{R}^2$!!!</u>

<u>1.4 Partielle Ableitungen</u>

Rückblick auf $\mathbb{R}$: $\quad f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f'(x_0) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}, \quad \text{falls der Grenzwert existiert!}$$



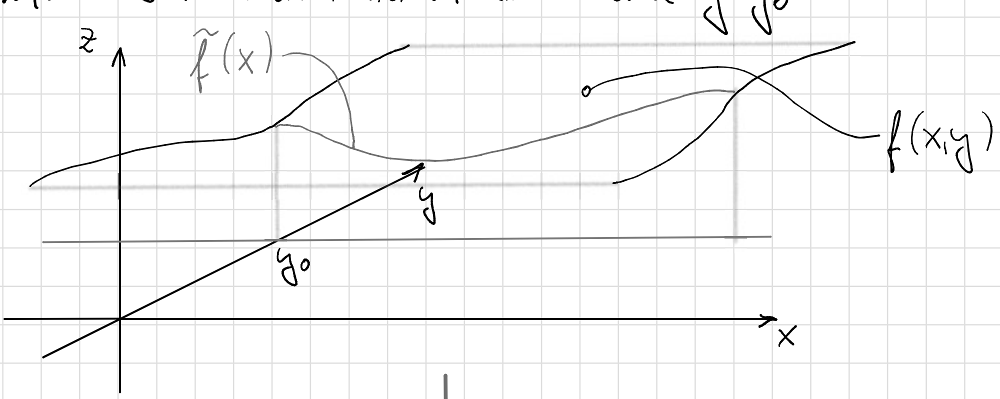
$\leadsto$ Verallgemeinerung auf $\mathbb{R}^2$: $\quad f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

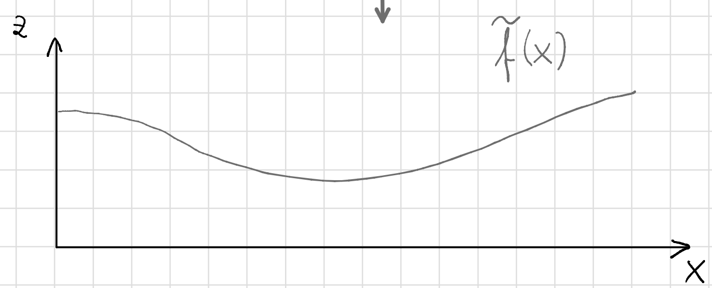
$\leadsto$ Festhalten einer Variable in $f(x,y)$, z.B. $y = y_0$:

f kann man dann als Funktion von nur noch einer Variable x auffassen:

$$f(x, y_0) = \tilde{f}(x)$$

geometrisch: Schnitt der Funktion mit der Ebene $y = y_0$





Def.: Eine Funktion $f(x,y)$ heißt im Punkt (x_0,y_0) partiell nach x differenzierbar, wenn der Grenzwert

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0,y_0)}{h}$$

existiert. Er heißt dann partielle Ableitung von f nach x im Punkt (x_0,y_0):

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \quad \text{oder} \quad f_x(x_0,y_0)$$

Analog dazu:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0,y_0)}{h}$$

Da man übrige Variablen konstant hält gelten alle Ableitungsregeln wie früher (wie für den „$\mathbb{R}$-Fall").

- Analog für Funktionen mit mehr als 2 Variablen

  Symbole: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)$, $f_x(x,y,z)$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, f_x, ...

$\rightsquigarrow$ „partielle Differentialoperatoren":

$$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \ldots$$

erzeugen aus f die entsprechende partielle Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z) = f_x \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y} f(x,y,z) = f_y, \ldots$$

1.) Bsp.:

$$f(x,y,z) = 2x^3 + 2xy + yz^5$$

$$f_x = 6x^2 + 2y$$

$$f_y = 2x + z^5$$

$$f_z = 5yz^4$$

Geometrische Interpretation:

Geometrische Interpretation:

Partielle Ableitungen von $f(x,y)$ sind die Anstiege der Tangentialebene in den Achsenrichtungen (wenn es eine Tangentialebene gibt).

2. Bsp.:

$$f(x,y) = \underbrace{x\,y^2}_{u}\,\underbrace{(\sin x + \sin y)}_{v}$$

Produktregel $(uv)' = u'v + uv'$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot v + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = y^2(\sin x + \sin y) + x y^2 \cos x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}\cdot v + u \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 2xy(\sin x + \sin y) + x y^2 \cos y$$

3. Bsp.:

$$z = f(x,y) = \ln(x+y^2)$$

$u = x + y^2 \quad , \quad z = \ln(u)$

Kettenregel

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{u}\cdot 1 = \frac{1}{x+y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dz}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{u}\cdot 2y = \frac{2y}{x+y^2}$$

4. Bsp.:

$$f(x,y,z) = 2x\,e^{yz} + \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xz\,e^{yz} + \frac{\cancel{2}y}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

5. Bsp.:

$$z = f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

Quotientenregel $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1\cdot(x^2+y^2) - x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{0\cdot(x^2+y^2) - x\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

6. Bsp.:

$$f(x,y) = x^y \qquad (x>0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\,x^{y-1} \qquad \left(\cdot\; x^y = e^{\ln x\cdot y}\right.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\,x^{y-1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^y \cdot \ln x$$

$$\left\{\begin{array}{l} \cdot\ x^y = e^{\ln x \cdot y} \\ \text{oder über} \\ \cdot\ \ln f(x,y) = y \cdot \ln x \quad \Big| \cdot \frac{\partial}{\partial y} \\ \quad \frac{f_y}{f} = \ln x \end{array}\right.$$

$$\rightsquigarrow f_y = f \cdot \ln x = x^y \cdot \ln x$$

1.5 Höhere Ableitungen und der Satz von Schwarz

Siehe zugehöriges Beiblatt

Können partielle Ableitungen einer mehrstelligen Funktion noch einmal partiell differenziert werden, so erhält man „partielle Ableitungen höherer Ordnung":

Bezeichnung: $f(x,y,z) \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial f}{\partial x} \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial z}} \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}$

Symbol: $f \qquad f_x \qquad f_{xz}$

-> Ableitungsbaum siehe Beiblatt!

Ableitungen nach mehreren unterschiedlichen Variablen heißen „gemischte Ableitungen".

$$\boxed{\text{Im Allgemeinen ist die Reihenfolge beim Differenzieren von Bedeutung !!!}}$$

Bsp: Ableitungen bis zur Ordnung 3 von $f(x,y) = x^3 y + y$

$x^3 y + y$

$f_x = 3x^2 y \qquad f_y = x^3 + 1$ — 1. Ordnung

$f_{xx} = 6xy \qquad f_{xy} = 3x^2 \qquad f_{yx} = 3x^2 \qquad f_{yy} = 0$ — 2. Ordnung

$f_{xxx} = 6y \qquad f_{xxy} = 6x \qquad f_{xyx} = 6x \qquad f_{xyy} = 0 \qquad f_{yxx} = 6x \qquad f_{yxy} = 0 \qquad f_{yyx} = 0 \qquad f_{yyy} = 0$ — 3. Ordnung