1. **設置變異數表達式**：

   給定 $Z = \alpha X + (1-\alpha)Y$，$Z$ 的變異數為：

   $$\mathrm{Var}(Z) = \mathrm{Var}(\alpha X + (1-\alpha)Y)$$

2. **利用變異數性質展開**：

   根據變異數的線性組合性質，即$\mathrm{Var}(aX + bY) = a^2\mathrm{Var}(X) + b^2\mathrm{Var}(Y) + 2ab\,\mathrm{Cov}(X, Y)$，可以得到：

   $$\mathrm{Var}(Z) = \alpha^2\sigma_X^2 + (1-\alpha)^2\sigma_Y^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_{XY}$$

   其中 $\sigma_X^2 = \mathrm{Var}(X)$, $\sigma_Y^2 = \mathrm{Var}(Y)$, 而 $\sigma_{XY} = \mathrm{Cov}(X, Y)$。

3. **展開並簡化**：

   展開 $(1-\alpha)^2\sigma_Y^2$ 和 $2\alpha(1-\alpha)\sigma_{XY}$：

   $$\mathrm{Var}(Z) = \alpha^2\sigma_X^2 + (1 - 2\alpha + \alpha^2)\sigma_Y^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_{XY}$$

   簡化後得到：

   $$\mathrm{Var}(Z) = \alpha^2(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 - 2\sigma_{XY}) + \alpha(-2\sigma_Y^2 + 2\sigma_{XY}) + \sigma_Y^2$$

4. **對 α 求導數**：

   為了找到使得 $\mathrm{Var}(Z)$ 最小化的 α 值，對 α 求導並令其為零：

   $$\frac{d}{d\alpha}\mathrm{Var}(Z) = 2\alpha(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 - 2\sigma_{XY}) + (-2\sigma_Y^2 + 2\sigma_{XY}) = 0$$

5. **解出 α**：

   整理方程：

   $$\alpha(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 - 2\sigma_{XY}) = \sigma_Y^2 - \sigma_{XY}$$

   $$\alpha = \frac{\sigma_Y^2 - \sigma_{XY}}{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 - 2\sigma_{XY}}$$

這樣我們就推導出了公式 (5.6)，並證明了此 α 可以最小化 $Z = \alpha X + (1-\alpha)Y$ 的變異數。