

在 logistic 回歸中，得到 A 的概率可以表示為：

$$P(Y = 1|X_1, X_2) = \frac{1}{1 + \exp(-(\beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2))}$$

解答

(a) 計算一個學習 40 小時且本科 GPA 為 3.5 的學生得到 A 的概率

1. 代入數值：

- $X_1 = 40$
- $X_2 = 3.5$
- 使用 $\beta_0 = -6$ 、 $\beta_1 = 0.05$ 、 $\beta_2 = 1$

2. 計算線性組合 z ：

$$z = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 = -6 + (0.05 \times 40) + (1 \times 3.5)$$

$$z = -6 + 2 + 3.5 = -0.5$$

3. 計算得到 A 的概率 $P(Y = 1|X_1 = 40, X_2 = 3.5)$ ：

$$P(Y = 1) = \frac{1}{1 + \exp(-(-0.5))} = \frac{1}{1 + \exp(0.5)}$$

$$P(Y = 1) \approx \frac{1}{1 + 1.6487} \approx \frac{1}{2.6487} \approx 0.3775$$

所以，該學生得到 A 的概率大約為 37.75%。

(b) 多少小時學習能讓該學生有 50% 的概率得到 A？

要達到 50% 的概率，則 $P(Y = 1) = 0.5$ 。我們設學習時間為 $X_1 = h$ ，本科 GPA 為 3.5，帶入公式並解方程：

$$0.5 = \frac{1}{1 + \exp(-(\beta_0 + \beta_1 h + \beta_2 \cdot 3.5))}$$

取對數並簡化方程，當 $P(Y = 1) = 0.5$ 時，有：

$$\beta_0 + \beta_1 h + \beta_2 \cdot 3.5 = 0$$

代入已知的 β 值：

$$-6 + 0.05h + 1 \cdot 3.5 = 0$$

解這個方程：

$$0.05h - 2.5 = 0$$

$$0.05h = 2.5$$

$$h = \frac{2.5}{0.05} = 50$$

所以，該學生需要學習 50 小時才能有 50% 的概率得到 A。