解題步驟

1. **後驗概率 $p_k(x)$ 展開**：

$$p_k(x) = \frac{\pi_k \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu_k)^2\right)}{\sum_{l=1}^{K} \pi_l \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu_l)^2\right)}$$

2. **最大化對數的等價性**：
   - 因為 $\log$ 是單調函數，最大化 $p_k(x)$ 等價於最大化 $\log(p_k(x))$。
   - $p_k(x)$ 的對數為：

$$\log(p_k(x)) = \log\left(\pi_k \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu_k)^2\right)\right) - \log\left(\sum_{l=1}^{K} \pi_l \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu_l)^2\right)\right)$$

3. **化簡得出判別函數形式**：
   - 展開並簡化這個對數式後，可以得到 $\delta_k(x) = x \cdot \frac{\mu_k}{\sigma^2} - \frac{\mu_k^2}{2\sigma^2} + \log(\pi_k)$。
   - 因此，最大化 $\log(p_k(x))$ 等價於最大化 $\delta_k(x)$。