

Q2

a.

β_2 : **WAGE** (時薪), 時薪越高, 工作一小時的報酬越多, 因此婦女工作 (提供勞動) 的誘因越大。正相關

β_3 : **EDUC** (教育年數), 教育程度越高, 通常表示擁有更高的工作技能與收入潛力, 也代表較強的職場參與意願, 因此勞動供給可能增加。正相關

β_4 : **AGE** (年齡) 年輕婦女可能因照顧小孩等因素而勞動參與較少; 中年婦女可能勞動參與率較高; 年紀較大時 (接近退休), 勞動供給又可能下降

β_5 : **KIDSL6** (家中 6 歲以下小孩數量), 年幼小孩需要較多的照顧, 會佔據母親的時間與精力, 因此可能減少其參與工作的意願與時間。負相關

β_6 : **NWIFEINC** (家庭中非妻子收入), 若家庭有足夠的非妻子收入 (例如丈夫的收入), 妻子可能較無經濟壓力去工作, 因此勞動供給會下降。負相關

b.

這個模型不能用 OLS 一致估計, 因為 **WAGE** (時薪) 是內生變數, 與誤差項有相關性, 違反了 OLS 的基本假設。

c.

「經驗」影響你能拿多少薪水, 但不會直接決定你每天要工作幾小時, 那是由薪水來決定的。

d.

內生變數(**Endogenous variable**) : 1 個 (**WAGE**)

工具變數(**Instruments**) : 2 個 (**EXPER** 和 **EXPER²**)

So: 2 instruments \geq 1 endogenous variable \rightarrow The equation is overidentified, which is even better — it means we have extra information to test instrument validity.

e.

Step 1 : Regress WAGE on all **exogenous variables** and the **instruments**

$$WAGE = \pi_0 + \pi_1 EXPER + \pi_2 EXPER^2 + \pi_3 EDUC + \pi_4 AGE + \pi_5 KIDSL6 + \pi_6 NWIFEINC + v$$

From this regression, get $WAGE^{\wedge}$, the **predicted wage**

Step 2 : Substitute WAGE with $WAGE^{\wedge}$ in the labor supply equation

$$HOURS = \beta_1 + \beta_2 \widehat{WAGE} + \beta_3 EDUC + \beta_4 AGE + \beta_5 KIDSL6 + \beta_6 NWIFEINC + e$$

Estimate this equation via OLS to get the **2SLS estimates**.

Q3

a.

要證明：

$$\frac{\text{cov}(z, x)}{\text{var}(z)}$$

是以 x 為應變數、 z 為解釋變數的簡單回歸的係數。

從一元線性回歸的係數公式：

$$\hat{\theta}_1 = \frac{\text{cov}(z, x)}{\text{var}(z)}$$

也就是說， x 對 z 的回歸式是：

$$x = \gamma_1 + \theta_1 z + \nu$$

其中：

- $\theta_1 = \frac{\text{cov}(z, x)}{\text{var}(z)}$
- ν 是誤差項。

這正是 第一階段回歸的結果！

b.

同樣地，證明：

$$\frac{\text{cov}(z, y)}{\text{var}(z)}$$

是以 y 為應變數、 z 為解釋變數的簡單回歸係數。

一樣套用一元迴歸係數公式：

$$\hat{\pi}_1 = \frac{\text{cov}(z, y)}{\text{var}(z)}$$

所以， y 對 z 的回歸式是：

$$y = \pi_0 + \pi_1 z + u$$

其中：

- $\pi_1 = \frac{\text{cov}(z, y)}{\text{var}(z)}$
- u 是誤差項。

c.

原式是：

$$y = \beta_1 + \beta_2 x + e$$

代入 x 的第一階段回歸式：

$$x = \gamma_1 + \theta_1 z + \nu$$

所以：

$$\begin{aligned} y &= \beta_1 + \beta_2(\gamma_1 + \theta_1 z + \nu) + e \\ &= (\beta_1 + \beta_2 \gamma_1) + \beta_2 \theta_1 z + (\beta_2 \nu + e) \end{aligned}$$

整理成：

$$y = \pi_0 + \pi_1 z + u$$

其中：

- $\pi_0 = \beta_1 + \beta_2 \gamma_1$
- $\pi_1 = \beta_2 \theta_1$
- $u = \beta_2 \nu + e$

d.

d. Show that $\beta_2 = \pi_1 / \theta_1$

從上面得知：

$$\pi_1 = \beta_2 \theta_1$$

所以：

$$\beta_2 = \frac{\pi_1}{\theta_1}$$

e.

給定：

- $\hat{\pi}_1$ 是回歸 y 對 z 的 OLS 估計量
- $\hat{\theta}_1$ 是回歸 x 對 z 的 OLS 估計量

則估計：

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\hat{\pi}_1}{\hat{\theta}_1}$$

而因為：

- $\hat{\pi}_1$ 是一致估計量 (consistency)
- $\hat{\theta}_1$ 也是一致估計量 (consistency)

所以 $\hat{\beta}_2$ 是一致的 (consistent estimator) 。