

CH8 Q6

$$(a) H_0: \sigma_M^2 = \sigma_F^2 \quad \alpha = 0.05$$

$$H_1: \sigma_M^2 \neq \sigma_F^2 \quad df_M = 577 - 4 = 573 \quad df_F = 1000 - 577 - 4 = 419$$

$$\hat{\sigma}_M^2 = \frac{97161.9174}{573} = 169.567$$

$$F = \frac{169.567}{12.024^2} = 1.173$$

$$0.838 < 1.173 < 1.196 \quad \text{接受 } H_0: \sigma_M^2 = \sigma_F^2$$

新資產異相同（在控制教育、經馬念、是否居住都市的條件下）

$$(b) H_0: \sigma_{\text{single}}^2 = \sigma_{\text{married}}^2 \quad \alpha = 0.05$$

$$H_1: \sigma_{\text{single}}^2 < \sigma_{\text{married}}^2 \quad df_{\text{single}} = 400 - 5 = 395 \quad df_{\text{married}} = 600 - 5 = 595$$

$$\hat{\sigma}_{\text{single}}^2 = \frac{56231.0782}{395} = 142.357$$

$$\hat{\sigma}_{\text{married}}^2 = \frac{100703.0411}{595} = 169.249$$

$$F = \frac{142.357}{169.249} = 0.841 \quad 0.841 < 0.859 \quad \text{拒絕 } H_0$$

$\therefore \sigma_{\text{single}}^2 < \sigma_{\text{married}}^2$ 已能找到更多元的享樂選項

(c) $H_0: \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0$ $\alpha = 0.05$

$H_1:$ 有 $\neq 0$ $S = 5$

$$NR^2 = 59.03 \geq \chi^2_{0.05}(4) = 9.488 \quad \text{拒絕 } H_0$$

\therefore 存在有 $\neq 0$ 的，有異質變異性，支持 b 的關注點（已婚未婚存在異質變異性）

(d) $H_0:$ 同質變異性 $\alpha = 0.05$

$$H_1: \text{異質變異性} \quad df = 4+2+6 = 12 \quad \chi^2_{0.05}(12) = 21.026$$

$$NR^2 = 78.82 > 21.026 \quad \text{拒絕 } H_0$$

\therefore 存在異質變異性

(e)

	se	robse	se change	cl change
截距	2.36	2.50	變大	變寬
教育	0.14	0.16	變大	變寬
經驗	0.031	0.029	變小	變窄
都市	1.05	0.84	變小	變窄
性別	0.81	0.80	變小	變窄

差異反映了某些變數的誤差

變異隨變數而變，是 white

檢定結果的一種表現，並不矛盾

(f) $t = |t| < 1.96$ married 對工資的平均影響不顯著

b 檢定的是：是否有異質變異性（變異數不同）

f 檢定的是：是否有平均差異（係數顯著）

不同層面的問題 ∵ 不矛盾

(a)

```

Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -391.548    169.775   -2.306  0.0221 *
income       14.201     1.800    7.889 2.10e-13 ***
age          15.741     3.757    4.189 4.23e-05 ***
kids         -81.826    27.130   -3.016  0.0029 **
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 452.3 on 196 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.3406, Adjusted R-squared:  0.3305
F-statistic: 33.75 on 3 and 196 DF,  p-value: < 2.2e-16

> # 建立信賴區間 (預設為 95%)
> confint(model, level = 0.95)[["kids"], ]
 2.5 %  97.5 %
-135.32981 -28.32302

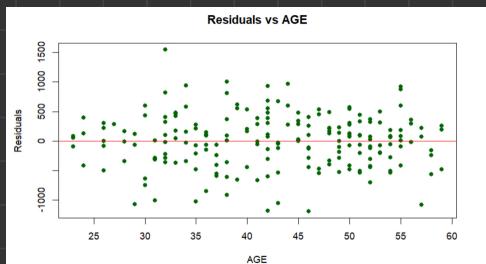
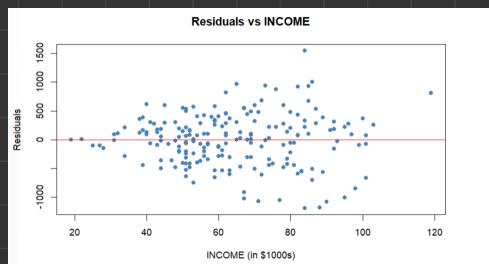
```

每多 1 個孩子，家庭每年旅行的里程減少 81.826 英里

在 95% 的信心水準下，每多 1 個孩子會使旅行

里程減少 $28.32 \sim 135.33$ 英里

(b)



income 增加，殘差的範圍也增加，有異質性

age 圖中的殘差沒有明顯的發散 or 收斂

(c)

```
[1] 3.104061
> alpha <- 0.05
> crit_val <- qf(1 - alpha, df, df) # F 分布臨界值
> crit_val
[1] 1.428617
>
> # 結論
> if (F_stat > crit_val) {
+   cat("Reject H0: Evidence of heteroskedasticity.\n")
+ } else {
+   cat("Fail to reject H0: No strong evidence of heteroskedasticity.\n")
+ }
Reject H0: Evidence of heteroskedasticity.
```

高收入的殘差變異數 > 低收入的， 說明變異數根據收入有所不同

(d)

```
t test of coefficients:

            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -391.5480 142.6548 -2.7447 0.0066190 ***
income       14.2013  1.9389  7.3246 6.083e-12 ***
age          15.7409  3.9657  3.9692 0.0001011 ***
kids         -81.8264 29.1544 -2.8067 0.0055112 **
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

> c(lower, upper)
      kids      kids
-139.32297 -24.32986
```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	-391.548	160.775	-2.306	0.0221 *
income	14.201	1.800	7.889	2.10e-13 ***
age	15.741	3.757	4.189	4.23e-05 ***
kids	-81.826	27.130	-3.016	0.0029 **

Signif. codes:	0 '***'	0.001 '**'	0.01 '*'	0.05 '.'

Residual standard error: 452.3 on 196 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.3406, Adjusted R-squared: 0.3305
F-statistic: 33.75 on 3 and 196 DF, p-value: < 2.2e-16

```
> # 建立信賴區間 (標記為 95%)
> confint(model, level = 0.95)[["kids", ]]
      2.5 %    97.5 %
-135.32981 -28.32302
```

係數相同

標準誤： $29.1544 > 27.130$ \therefore robust se 考慮了異質變異性的影響

95% robust se = $[-139.32297, -24.32986]$ 比 $[-135.32981, -28.32302]$ 寬

傳統 OLS 可能低估了不確定性，結果顯示使用 robust se 更穩健保守

(e)

```

Residual standard error: 6.765 on 196 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.4573, Adjusted R-squared:  0.449
F-statistic: 55.06 on 3 and 196 DF, p-value: < 2.2e-16

+-----+
| kids | kids |
|-----|
| -119.89450 | -33.71808 |
+-----+

```

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	424.996	121.444	-3.500	0.000577 ***
income	13.947	1.481	9.420	< 2e-16 ***
age	16.717	3.025	5.527	1.03e-07 ***
kids	-76.806	21.848	-3.515	0.000545 ***

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

	lower	upper	width of interval
OLS se	-135.32	-28.32	107
robust se	-139.32	-24.33	114.99
WLS	-119.89	-33.72	86.176
HCI	-121.41	-32.20	89.212

WLS [間最窄 (效率最高)]

OLS 最寬 (較保守)

robust 在效率和穩健之間最平衡的

偏誤高 \Rightarrow robust GLS

模型結構 WLS

CH8 Q18

(a)

```
F 統計量 = 0.9489479
> cat("拒絕域：F < ", round(crit_lower, 3), " 或 F > ", round(crit_upper, 3), "\n")
拒絕域：F < 0.945 或 F > 1.058
>
> # 結論
> if (F_stat < crit_lower || F_stat > crit_upper) {
+   cat("\u2192 拒絕虛無假設：有證據顯示男性與女性誤差變異不同。\\n")
+ } else {
+   cat("\u2192 無法拒絕虛無假設：沒有顯著證據顯示變異不同。\\n")
+ }
→ 無法拒絕虛無假設：沒有顯著證據顯示變異不同。
```

沒有足夠的證據表明男性、女性的工具變異數存在差異

(b)

```
> # 檢測部分變數間異質變異性
> bptest(model, ~ metro + female + black, data = cps5)
studentized Breusch-Pagan test
data: model
BP = 23.557, df = 3, p-value = 3.091e-05

> # 全部變數進入異質變異檢定
> bptest(model, ~ educ + exper + I(exper^2) + female + black + metro + south + midwest + west, data = cps5)
studentized Breusch-Pagan test
data: model
BP = 109.42, df = 9, p-value < 2.2e-16
```

$$H_0: \alpha_5 = \alpha_6 = \alpha_7 = 0 \quad H_1: \text{有} \neq 0 \quad S = 4 \quad \alpha = 0.01$$

$$NR^2 = 23.557 > \chi^2_{0.99}(3) = 11.345 \quad \text{拒絕 } H_0 \quad \therefore \text{metro, female, black 和誤差變異數相關}$$

有異質變異數

$$H_0: \alpha_2 = \dots = \alpha_{10} = 0 \quad H_1: \text{有} \neq 0 \quad \alpha = 0.01 \quad S = 10$$

$$NR^2 = 109.42 > \chi^2_{0.99}(9) = 21.67 \quad \text{拒絕 } H_0$$

考慮全部變數時，數據中存在更顯著的異質變異性

(c)

```
> qchisq(0.95, df = 44) # k 為迴歸變數數量 (不含常數項)
[1] 60.48089
> |
```

H_0 : 同質 H_1 : 异質 $\alpha = 0.05$

$NR^2 = 194.44 > \chi^2_{0.95}(44) = 60.48089$ 拒絕 H_0

存在異質性

(d)

```
> print(comparison)
    係數 OLS 標準誤 穩健標準誤 差異
(Intercept) (Intercept) 3.211489e-02 3.279417e-02 6.792844e-04
educ          educ      1.758260e-03 1.905821e-03 1.475607e-04
exper         exper     1.300342e-03 1.314908e-03 1.456591e-05
I(exper^2)   I(exper^2) 2.635448e-05 2.759687e-05 1.242385e-06
female        female    9.529136e-03 9.488260e-03 4.087574e-05
black         black     1.694240e-02 1.609369e-02 -8.487086e-04
metro         metro    1.230675e-02 1.158215e-02 -7.245982e-04
south         south    1.356134e-02 1.390164e-02 3.402918e-04
midwest       midwest  1.410367e-02 1.372426e-02 -3.794126e-04
west          west     1.440237e-02 1.455684e-02 1.544761e-04
```

傳統 OLS 標準誤假設誤差

變異為常數，若假設不成立 OLS

標準誤就有可能偏誤被低估

```
    係數 OLS 置信區間寬度 穩健置信區間寬度 更寬
(Intercept) (Intercept) 0.1259036061 0.1285666813 穩健
educ          educ      0.0068931063 0.0074716051 穩健
exper         exper     0.0050978780 0.0051549824 穩健
I(exper^2)   I(exper^2) 0.0001033205 0.0001081911 穩健
female        female    0.0373581454 0.0371978956 OLS
black         black     0.0664212100 0.0630939222 OLS
metro         metro    0.0482475482 0.0454068242 OLS
south         south    0.0531660647 0.0545001491 穗健
midwest       midwest  0.0552922035 0.0538047496 OLS
west          west     0.0564632233 0.0570688335 穗健
> |
```

white 的穩健標準誤則允許

誤差變異改變，修正異質性

因此這些標準誤通常較大

進而產生較寬的信賴區間

```
    係數 OLS 顯著性 穩健顯著性
(Intercept) (Intercept) TRUE  TRUE
educ          educ      TRUE  TRUE
exper         exper     TRUE  TRUE
I(exper^2)   I(exper^2) TRUE  TRUE
female        female    TRUE  TRUE
black         black     TRUE  TRUE
metro         metro    TRUE  TRUE
south         south    TRUE  TRUE
midwest       midwest  TRUE  TRUE
west          west     FALSE FALSE
> |
```

(e)

```
> print(ci_compare)
```

	係數	FGLS置信區間寬度	OLS穩健置信區間寬度	更寬
(Intercept)	(Intercept)	0.1238409811	0.1285666813	OLS穩健
educ	educ	0.0069169000	0.0074716051	OLS穩健
exper	exper	0.0050784556	0.0051549824	OLS穩健
I(exper^2)	I(exper^2)	0.0001050118	0.0001081911	OLS穩健
female	female	0.0371776267	0.0371978956	OLS穩健
black	black	0.0665505021	0.0630939222	FGLS
metro	metro	0.0453144853	0.0454068242	OLS穩健
south	south	0.0530211780	0.0545001491	OLS穩健
midwest	midwest	0.0548691638	0.0538047496	FGLS
west	west	0.0563583323	0.0570688335	OLS穩健

OLS (white robust) 不假設任何誤差變異的結構，並直接調整標準誤來處理

異質變異性，使結果更具穩健性，但可能降低效率

FGLS 則假設誤差變異可透過 metro · exper 建模，若假設正確，FGLS

較有效率，錯設則表現更差

(f)

```
[1] "置信區間寬度比較 (FGLS vs FGLS穩健 vs OLS穩健) :"
```

```
> print(width_comparison)
```

	係數	FGLS置信區間寬度	FGLS穩健置信區間寬度	OLS穩健置信區間寬度
(Intercept)	(Intercept)	0.1238409811	0.1267302737	0.1285666813
educ	educ	0.0069169000	0.0074119337	0.0074716051
exper	exper	0.0050784556	0.0051130495	0.0051549824
I(exper^2)	I(exper^2)	0.0001050118	0.0001074318	0.0001081911
female	female	0.0371776267	0.0370004269	0.0371978956
black	black	0.0665505021	0.0621853018	0.0630939222
metro	metro	0.0453144853	0.0453100942	0.0454068242
south	south	0.0530211780	0.0542308553	0.0545001491
midwest	midwest	0.0548691638	0.0537409002	0.0538047496
west	west	0.0563583323	0.0568611419	0.0570688335

OLS (white) 不假定任何特定的變異數結構，而是直接調整標準誤來處理

異質變異性，導致區間較寬，但更可靠的區間

FGLS：當異質變異模型是部份正確時，FGLS的信賴區間可能會比OLS更窄

但若加入穩健標準誤，FGLS的區間會比傳統FGLS更寬，因這些穩健標準誤

補償了本模型誤設產生的誤差

(g) 用 FGLS

FGLS 的標準誤通常比 OLS 的小，導致更窄的信賴區間

結果具更高效，使用 white 標準誤可確保即使異質誤差

標準誤和信賴區間仍有穩健性