HW0505　311707021　丁振朝

Q1

a.

(a) 將兩個結構方程轉換為 y_2 的 reduced-form 表達式

原始結構方程：

$$(1) \quad y_1 = \alpha_1 y_2 + e_1$$

$$(2) \quad y_2 = \alpha_2 y_1 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + e_2$$

Step 1: 代入 (1) 至 (2) 得：

$$y_2 = \alpha_2(\alpha_1 y_2 + e_1) + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + e_2 \Rightarrow y_2(1 - \alpha_1\alpha_2) = \alpha_2 e_1 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + e_2$$

Step 2: 解出 y_2：

$$y_2 = \frac{\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \alpha_2 e_1 + e_2}{1 - \alpha_1\alpha_2} = \pi_1 x_1 + \pi_2 x_2 + \nu_2$$

其中

$$\pi_1 = \frac{\beta_1}{1-\alpha_1\alpha_2}$$

$$\pi_2 = \frac{\beta_2}{1-\alpha_1\alpha_2}$$

$$\nu_2 = \frac{\alpha_2 e_1 + e_2}{1-\alpha_1\alpha_2}$$

b.

第一式：$y_1 = \alpha_1 y_2 + \varepsilon_1 \Rightarrow y_2$ 為內生變數，OLS 無法一致估計 α_1。

第二式：$y_2 = \alpha_2 y_1 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$，若 y_1 也為內生變數，亦無法一致估計。

c.

第一條式中 $y_1 = \alpha_1 y_2 + e_1$：因 x_1, x_2 沒有在此式中出現，這兩個外生變數可作為工具變數來識別 α_1 → **可識別**。

第二條式中 $y_2 = \alpha_2 y_1 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + e_2$：因有兩個外生變數且只一個內生變數，**也可識別**。

d.

這些是將 x1,x2 作為工具變數，與誤差項 v 不相關 → 符合 IV/MOM 要求，因此可以一致估計

e.

對於完全外生變數（此例中 x1,x2）的線性回歸，MOM 的條件實際上與 OLS 正好相同（設微分損失函數等於 0 就得到同樣一組一階條件），所以結果一致。

f.

$$\hat{\pi}_1 = \frac{\sum x_{1i}y_{2i}}{\sum x_{1i}^2} = \frac{3}{1} = 3 \quad , \quad \hat{\pi}_2 = \frac{\sum x_{2i}y_{2i}}{\sum x_{2i}^2} = \frac{4}{1} = 4$$

g.

因為 x1,x2 是外生的，所以 y^2 與誤差項 e1 不相關。可作為 y2 的工具變數

h.

這其實與 (g) 結果相同，因為 2SLS 第一階段是將內生變數對外生變數回歸取得 y^2，第二階段將 y1 對 y^2 回歸。

Q16

a.

$$\alpha_1 + \alpha_2 P + e_d = \beta_1 + \beta_2 P + \beta_3 W + e_s \Rightarrow P(\alpha_2 - \beta_2) = \beta_1 - \alpha_1 + \beta_3 W + e_s - e_d$$

$$\Rightarrow P = \frac{\beta_1 - \alpha_1 + \beta_3 W + e_s - e_d}{\alpha_2 - \beta_2} = \pi_1 + \pi_2 W + \nu_1$$

其中

- $\pi_1 = \frac{\beta_1 - \alpha_1}{\alpha_2 - \beta_2}$
- $\pi_2 = \frac{\beta_3}{\alpha_2 - \beta_2}$
- $\nu_1 = \frac{e_s - e_d}{\alpha_2 - \beta_2}$

帶入得到 Q

$$Q = \alpha_1 + \alpha_2 P + e_d = \alpha_1 + \alpha_2(\pi_1 + \pi_2 W + \nu_1) + e_d = \theta_1 + \theta_2 W + \nu_2$$

其中：

- $\theta_1 = \alpha_1 + \alpha_2 \pi_1$
- $\theta_2 = \alpha_2 \pi_2$
- $\nu_2 = \alpha_2 \nu_1 + e_d$

b.

Demand equation is **identified**

Supply equation is **not identified**

c.

$$\hat{Q} = 5 + 0.5W \quad , \quad \hat{P} = 2.4 + 1W$$

- 所以 $\theta_1 = 5, \theta_2 = 0.5, \pi_1 = 2.4, \pi_2 = 1$
- 已知：

$$\theta_1 = \alpha_1 + \alpha_2 \pi_1 = 5 \quad , \quad \theta_2 = \alpha_2 \pi_2 = 0.5 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{0.5}{1} = 0.5 \Rightarrow \alpha_1 = 5 - 0.5 \cdot 2.4 = 3.8$$

d.

Step 1：用外生變數 W 建立預測值： $\hat{P} = 2.4 + W$

Step 2：以 $\hat{P}$, W 作為 regressors，估計： $Q = \beta_1 + \beta_2 \hat{P} + \beta_3 W$ + 誤差

這即為 2SLS 第二階段回歸，可得到一致估計的 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$。

Q17

a.

- 系統中有 M = 8 個結構方程，每個方程需排除至少 M − 1 = 7 個變數（因為系統中總共有 16 個變數）
- Consumption equation:
    - 含 6 個變數，排除 10 個 ⇒ 條件滿足

- Investment equation:
    - 含 5 個變數，排除 11 個 ⇒ 條件滿足
- Private sector wage equation:
    - 含 5 個變數，排除 11 個 ⇒ 條件滿足

b.

- Consumption equation:
    - 包含 2 個內生變數（RHS），排除 5 個外生變數 ⇒ 條件滿足
- Investment equation:
    - 包含 1 個 RHS 內生變數，排除 5 個外生變數 ⇒ 條件滿足
- Private sector wage equation:
    - 同上，1 個內生變數、排除 5 個外生變數 ⇒ 條件滿足

c.

$$W_t = \pi_1 + \pi_2 G_t + \pi_3 W_{zt} + \pi_4 TX_t + \pi_5 TIME_t + \pi_6 P_{t-1} + \pi_7 K_{t-1} + \pi_8 E_{t-1} + \nu$$

d.

第一階段（**First Stage**）：

- 使用 exogenous variables 對內生變數（如（W_t）、（P_t））進行 OLS 回歸，得到預測值
- 第二階段（**Second Stage**）：
    - 使用 Wt∗,Pt,Pt−1 作為解釋變數，對 consumption CNt 進行 OLS 回歸：

      CNt=β0+β1Wt∗+β2Pt+β3Pt−1+誤差

e.

t-value 不會一樣，原因是：

- 手動做的第二階段 OLS 沒有調整標準誤差
- 軟體提供的 2SLS 指令會用 robust 或 corrected 標準誤（考慮第一階段的不確定性）