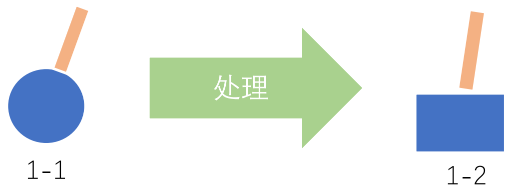
木子羽 陈子龙 程庭轩
1324146673@qq.com

平衡车

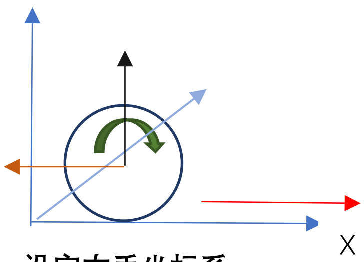
目录

一、 动力学建模



先进行二维倒立摆建模，假设二维平面内存在一个倒立摆，由轮子和杆组成，如 1-1，轮子中有一电机作为驱动，与轮子同轴。地面存在摩擦力。假设不打滑。

对轮子进行坐标建立：



设定右手坐标系：
横向为 X
纵向为 Z
垂直向里为 Y

设置参数：
r：轮子半径
T：电机输出扭矩（顺时针为正）
f：轮子与地面摩擦力
N：轮子与杆在 X 轴的相互作用力
P：轮子与杆在 Z 轴的相互作用力
F：为扭矩在轮子边缘产生的力
x：轮子的位移
v：轮子的绝对速度
a：轮子的加速度
α：轮子的转速加速度
I：轮子的 Y 轴的转动惯量
g：重力加速度

Y 方向力矩平衡方程：

$$T - f * r = I * \alpha \quad (1.1)$$

X 方向力平衡方程：

$$f - N = a * m \quad (1.2)$$

Y 方向上转动惯量：

$$I = \frac{1}{2} * m * r^2 \quad (1.3)$$

为方便 simscape 仿真，倒立摆等效为滑块和杆。设定 F 作为滑块输入，沿 X 轴正方向；Ti 作为杆输入，顺时针为正方向，此时 Ti 为电机实际输出扭矩 T 的反作用扭矩，倒立摆类比修改后，简图为 1-2

对于滑块：

木子羽 陈子龙 程庭轩
1324146673@qq.com

$$F = \frac{T}{r} \qquad (1.4)$$

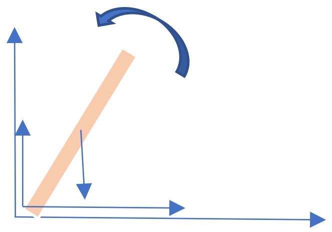
对于杆：

$$F = -\frac{Ti}{r} \qquad (1.5)$$

联立（1.1）（1.2）（1.3）（1.4）
得到：

$$F * r^2 - N * r^2 = (I + m * r^2) * a \quad \text{(a)}$$

对杆进行坐标建立：



Vx：X 方向绝对速度
Vz：Z 方向绝对速度
ax：X 方向加速度
az：Z 方向加速度
M：杆的质量
d：链接点到质心的距离
Tp：P 产生的扭矩
Tn：N 产生的扭矩
Jy：Y 轴的转动惯量
θ：偏转角
β：偏转角角速度
γ：偏转角加速度（顺时针为正

X 方向力平衡方程：

$$N = M * ax \qquad (2.1)$$

Z 方向力平衡方程：

$$P = M * az + Mg \qquad (2.2)$$

杆所处坐标系为非惯性坐标系，合成绝对速度为：
X 方向绝对速度：

$$Vx = V + \beta * d * cos\theta \qquad (2.3)$$

Z 方向绝对速度：

$$Vz = -\beta * d * sin\theta \qquad (2.4)$$

对（2.3）（2.4）求导得：

$$ax = a + \gamma * d * cos\theta - \beta^2 * d * sin\theta \qquad (2.5)$$
$$az = -\gamma * d * sin\theta - \beta^2 * d * cos\theta \qquad (2.6)$$

Y 方向上，N 得 P 产生的扭矩：

$$P * d * sin\theta = Tp \qquad (2.7)$$
$$N * d * cos\theta = Tn \qquad (2.8)$$

Y 方向上，扭矩平衡方程：

$$Jy * \gamma = Tp - Tn + T \qquad (2.9)$$

联立(2.9) (2.7) (2.8) (2.5) (2.6) (2.1) (2.2) (1.5)　并且使用线性化

$$\left(M*d^2+Jy\right)*\gamma = M*g*d*\theta - M*d*a - F*r \qquad (b)$$

联立(a) (2.1) (2.5)

$$\mathbf{F*r^2-M*r^2*d*\gamma=\left(I+m*r^2+M*r^2\right)*a} \qquad (c)$$

对(a) (b)进行重整理得到两条分别关于 a 和γ的微分方程式，可用 matlab 进行整理:

*假设：m=4KG M=1.6KG r=0.1m d=0.2m J=0.064KG*m^2 g=9,81m/s^2*

$$\gamma = \left(\frac{225}{224}*F\right)-\left(\frac{6213}{280}*\theta\right) \qquad (x)$$

$$a = \left(\frac{5}{56}*F\right)-\left(\frac{327}{350}*\theta\right) \qquad (y)$$

二、 LQR 算法

将(x) (y)为状态空间方程形式

选取状态变量 z = [x v a θ β γ] 输出 u = F

```
设定:
a = 43.6852
b = -1.9775
c = -1.8394
e = 0.2148
```

```
矩阵 A:
0 1 0 0
0 0 c 0
0 0 0 1
0 0 a 0
```

```
矩阵 B:
0
e
0
b
```

1)求矩阵 A 的特征根:

$$\begin{matrix}0\\0\\6.6095\\-6.6095\end{matrix}$$

存在特征根大于 0，系统不稳定

2)能控性分析:

矩阵 A 的维度为 4

$$CO=\left[B\ \ A*B\ \ A^2*B\ \ A^3*B\right]$$

$$Rank(CO)=4$$

系统可控

3)引入代价函数:

设定 Q 矩阵和 R 矩阵， QR 分别为半正定矩阵和正定矩阵。Q 为 n*n，R 为 p*p；n 为状态变量个数，p 为输入的个数。

Q 矩阵代表对状态变量的约束，R 矩阵代表对输入的约束，例如随着 R 的增大，会逐渐限制输入大小。由于实际使用中位移不好测量（例如传感器精度或者打滑），因此对位移的约束减少，但不能为 0；电机的扭矩有最大的输出限制，需要选择一个较为合适的 R 的来限制输出；

$$\begin{aligned}Q\ =\ &[0.01,0,0,0\\ &0,1000,0,0\\ &0,0,1000,0\\ &0,0,0,100]\end{aligned}$$

$$R = 0.1$$

4)使用 matlab 的 LQR 工具进行计算：

```
K = lqr(A,B,Q,R);
```

得到输出

```
K =

  -0.3162 -100.2122 -217.3449  -47.4633
```

输出：

$$\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{Kz(t)}$$

$$\boldsymbol{F} = -(\boldsymbol{K1*z1+K2*z2+K2*z3+K4*z4+K5*z5+K6*z6})$$

F 作用的目标是将状态变量收敛为 0，假设需要将速度维持在 2，则需要偏置 z2，也就是说：

$$\boldsymbol{z2} = \boldsymbol{z2' - 2}$$

z2'为真实的速度状态，这样当 z2 收敛为 0 的时候：

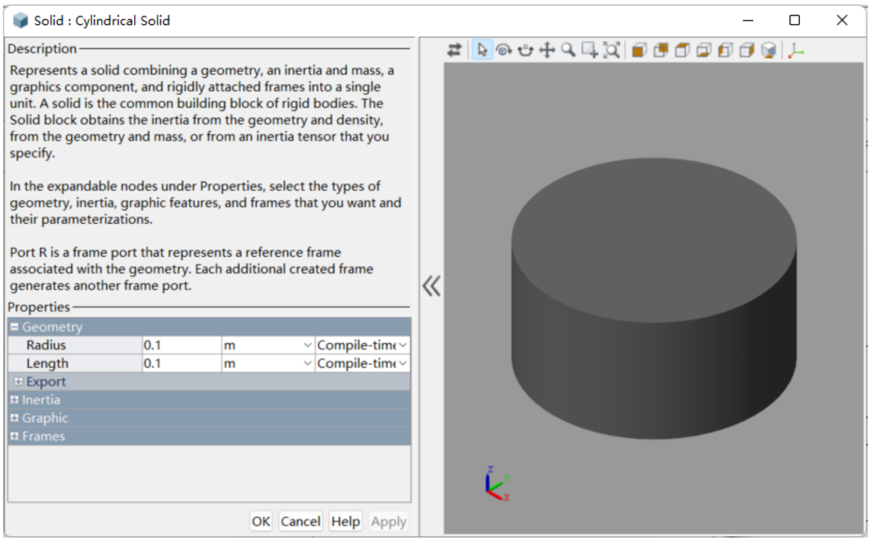
$$\boldsymbol{z2'} = \boldsymbol{2}$$

三、 SIMSCAPE 仿真

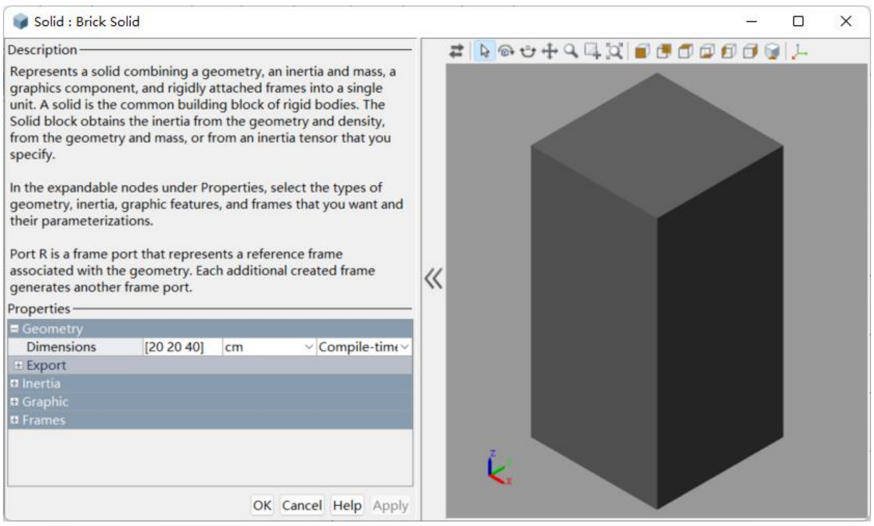
模型搭建：

圆柱模块作为轮子：设定半径、高度，密度修改为 1g/m^3

inertia 是指其惯性相关特性

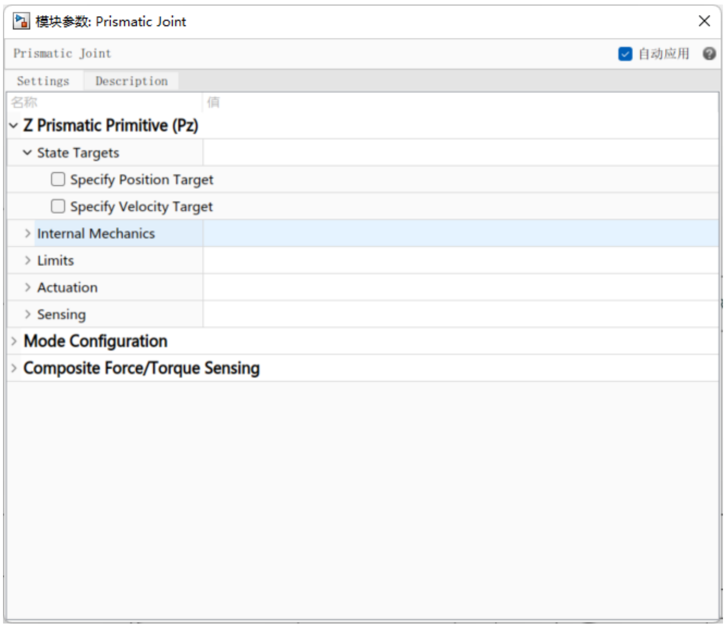


砖块模块作为车体：设定长宽高，密度修改为 0.1g/m^3

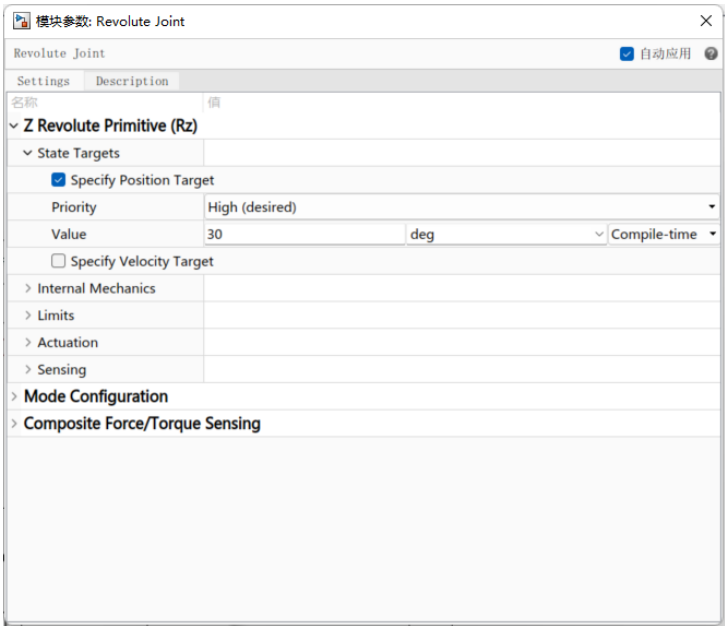


木子羽 陈子龙 程庭轩
1324146673@qq.com

使用滑块作移动动作：沿着+X 轴方向为正
State Targets 是初始角度或者速度
Sensing 为传感器配置
internal Mechanics 可以配置其内部物理属性
actuation 配置驱动力方法

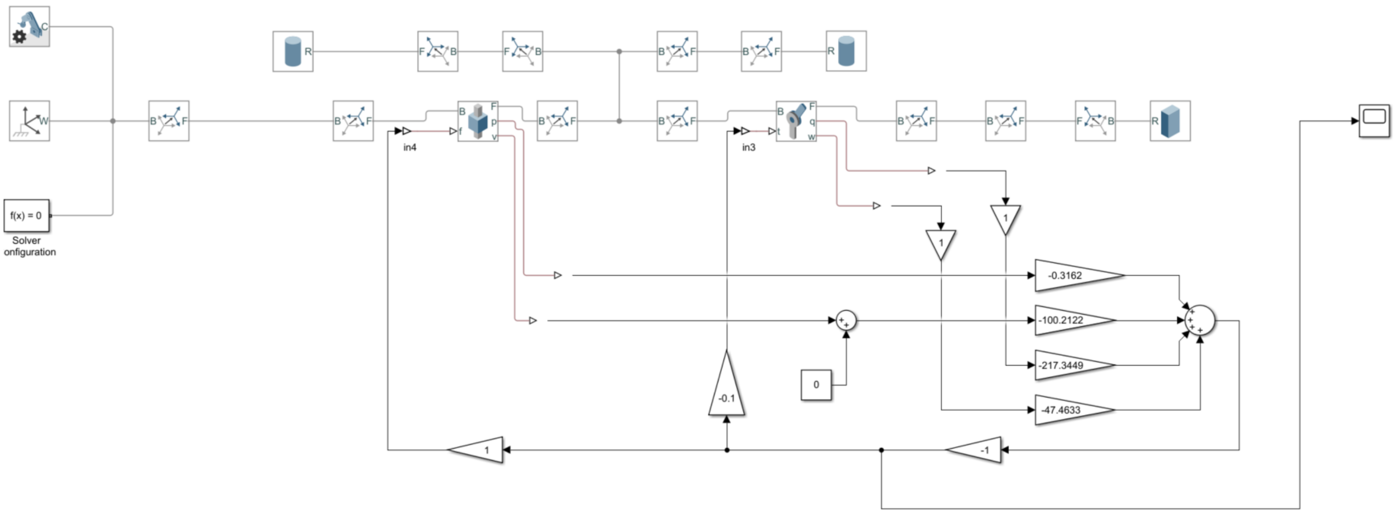


使用转动副作旋转动作：设定初始角度为 30，沿着+Y 方向顺时针为正



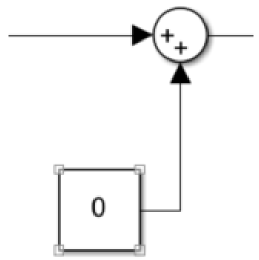
木子羽 陈子龙 程庭轩
1324146673@qq.com

总拓扑：



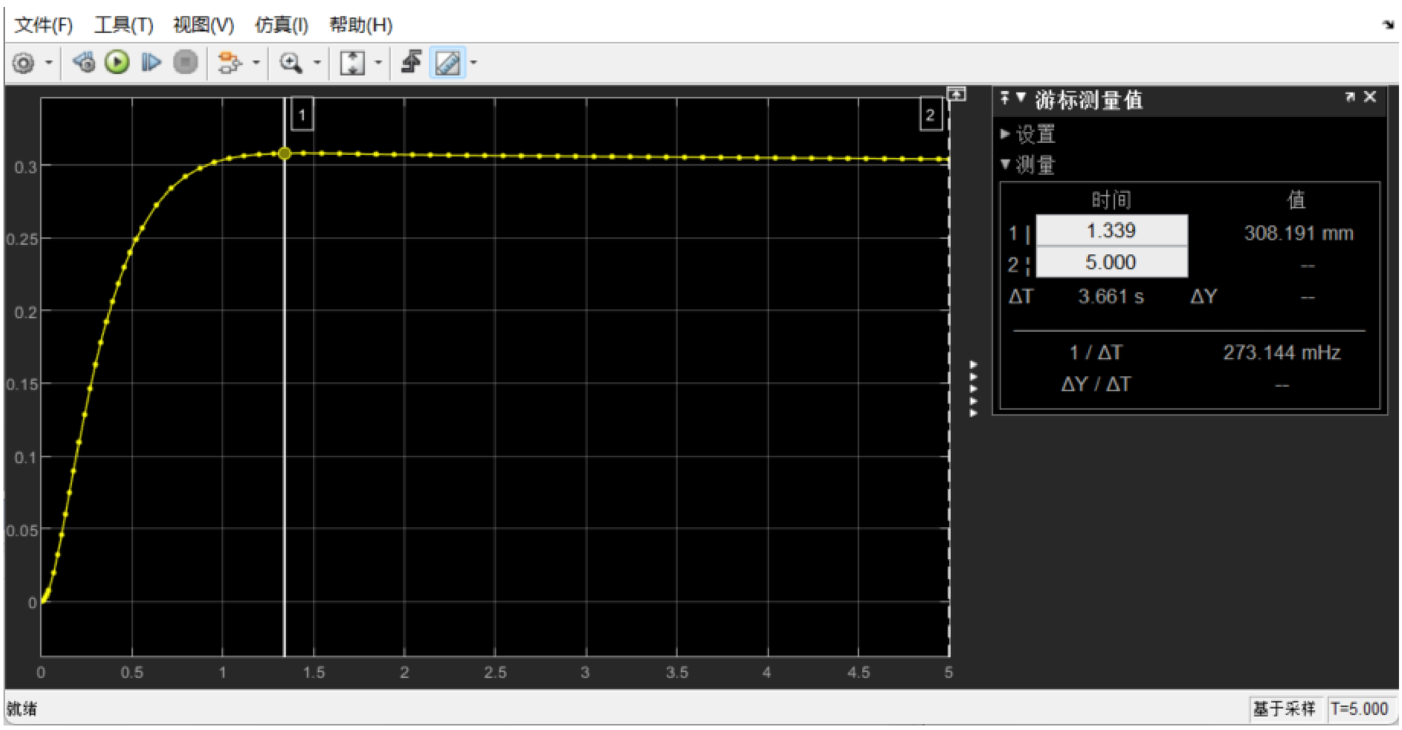
由于输出为力 F，在传入转动副中需要叉乘半径，并且根据关系（1.5）

通过偏执修改目标速度：

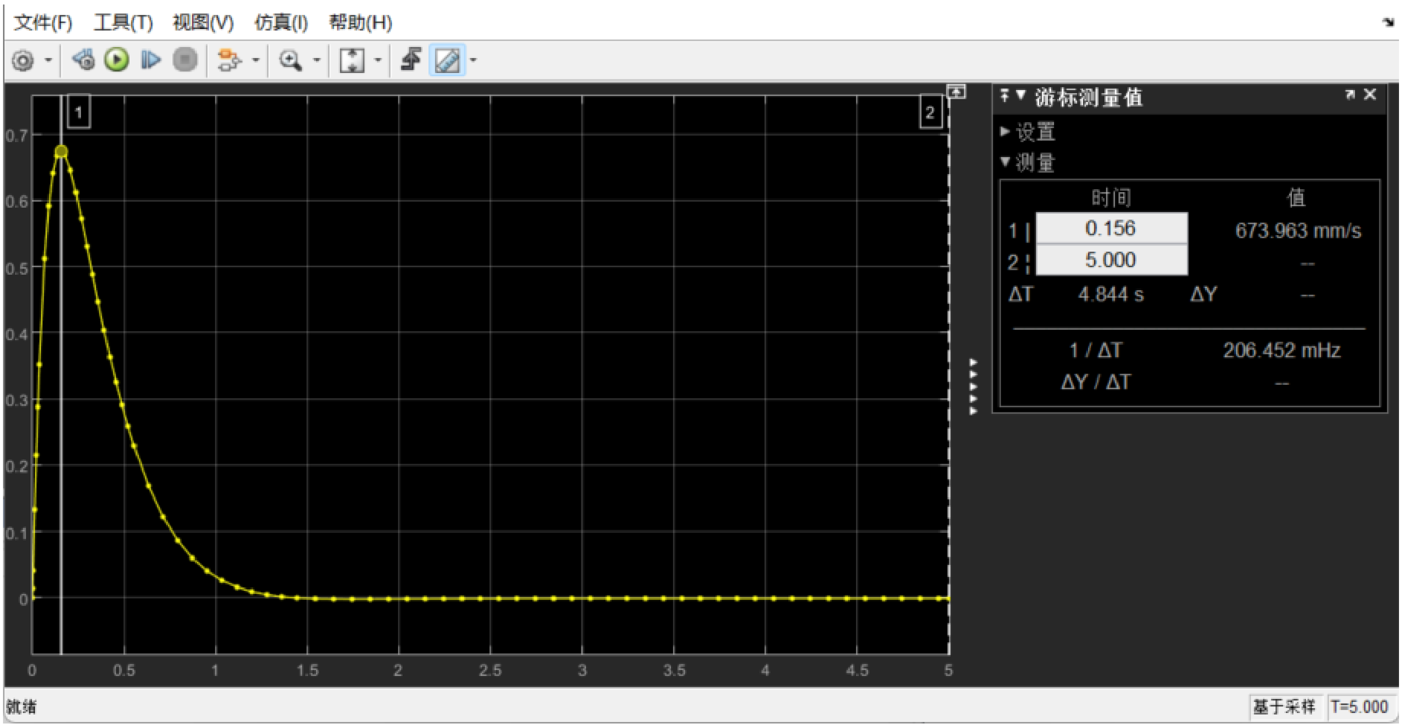


仿真结果分析：

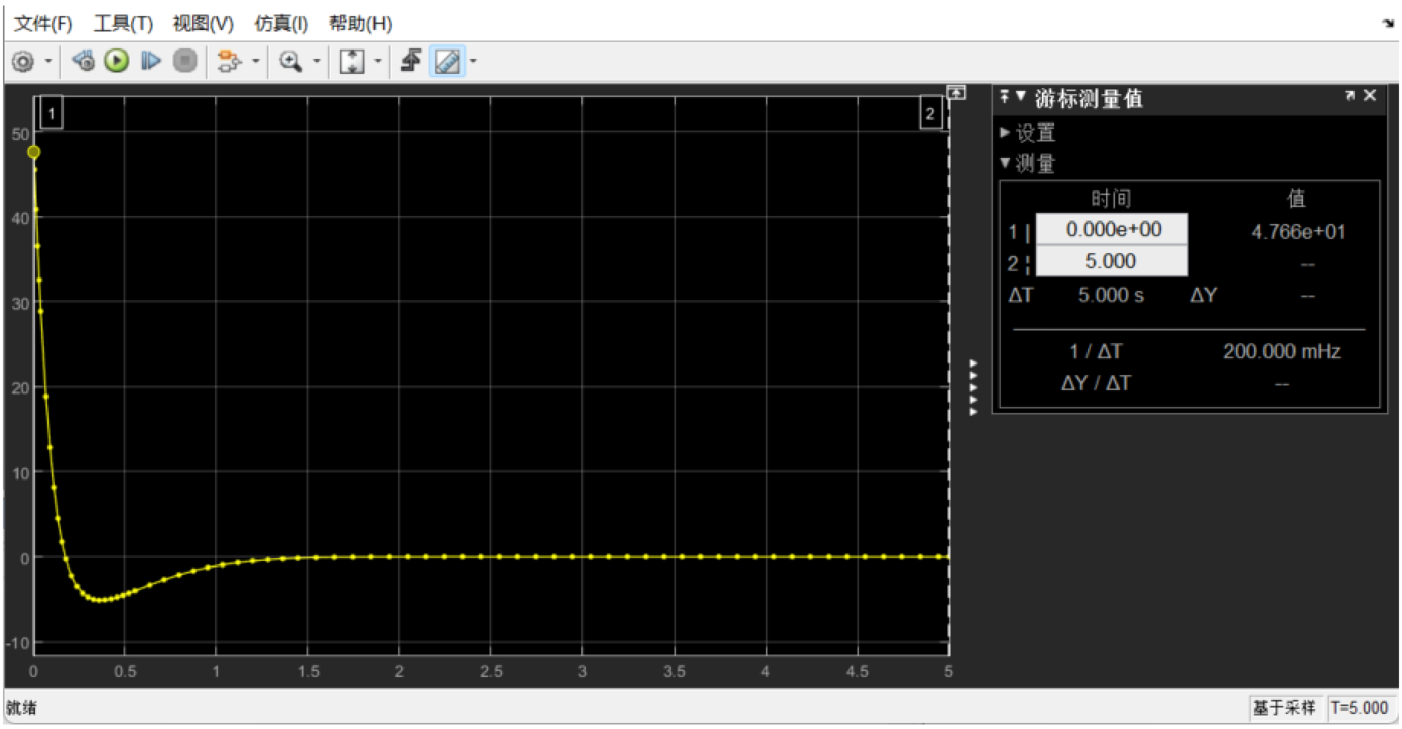
车体最大位移约为 308mm，耗时约为 1.339 秒



车体最大速度为 0.673m/s，推测电机最大转速为 8.91rpm



峰值输出为 47.66N，换算扭矩为 4.766N*m

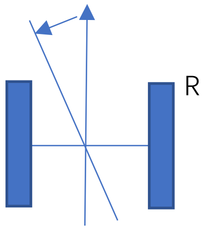


对于上述结果可以进行对电机进行选型，或者分析性能，分析可行性。

四、三维拓展

三维与二维主要区别是在 Y 轴上多了一个自由度 Yaw，以及 Roll，这里暂且不分析 Roll 轴情况，假定始终 Roll 为 0，只分析 Yaw；

设定逆时针为正方向



Tr：右轮驱动扭矩
Tl：左轮驱动扭矩
Ω：偏转角
ω：偏转角角速度
o：偏转角角加速度
Jz：z 方向转动惯量
Nr Nl：左右轮与杆水平作用力

根据前文式（a）

$$Tr*r-Nr*r^2=\left(I+m*r^2\right)*ar \quad (3.1)$$

$$Tl*r-Nl*r^2=\left(I+m*r^2\right)*al \quad (3.2)$$

Z 方向扭矩平衡方程：

$$(Nr-Nl)*\frac{l}{2}=Jz*o \quad (3.3)$$

转动速度和轮子加速度关系：

$$o=\frac{ar-al}{l} \quad (3.4)$$

联立上述四条式子：

$$o=\frac{Tr-Tl}{r*\left(2*\frac{Jz}{l}+l*\frac{m*r^2+I}{r^2}\right)} \quad (c)$$

对于

$$\left(M*d^2+Jy\right)*\gamma=M*g*d*\theta-M*d*a-F*r$$
$$\mathbf{F*r^2-M*r^2*d*\gamma=\left(I+m*r^2+M*r^2\right)*a}$$

X 方向驱动力为左右线性叠加，并且质量发生改变，因此修改后为：

$$\left(M*d^2+Jy\right)*\gamma=M*g*d*\theta-M*d*a-F*r$$
$$\mathbf{F*r^2-M*r^2*d*\gamma=\left(2*I+2*m*r^2+M*r^2\right)*a}$$

取输入

$$F=(Tr+Tl)*r$$
$$T=Tr-Tl$$

可以推算出左右轮扭矩分别为

$$\mathbf{Tr}=\frac{1}{2}*\left(\frac{F}{r}+T\right)$$

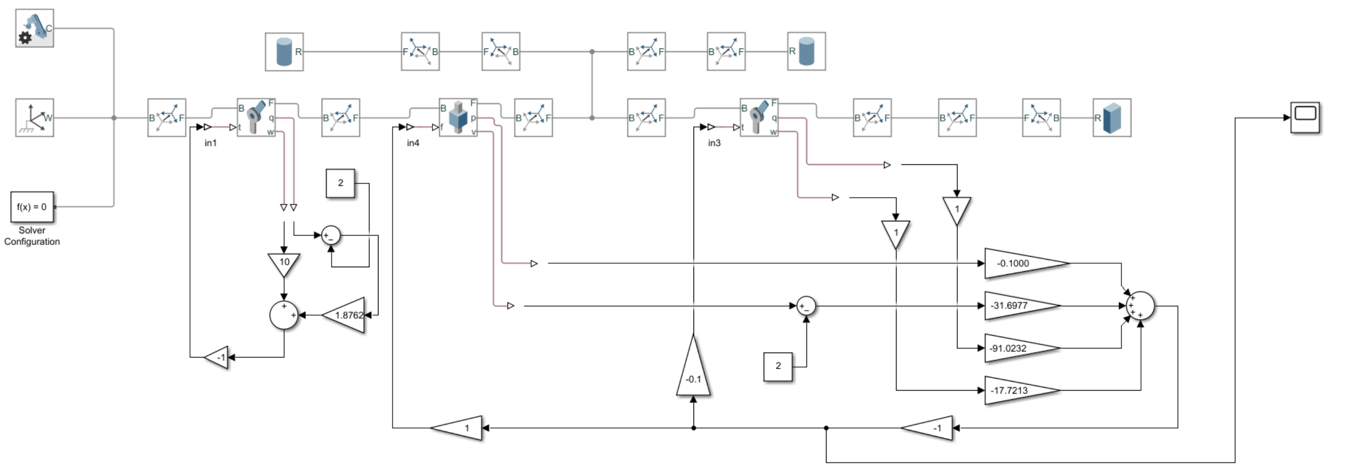
$$\mathbf{Tl}=\frac{1}{2}*\left(\frac{F}{r}+T\right)$$

按照前文所述对（a）（b）（c）进行建立状态空间方程，使用 lqr 工具得到 K

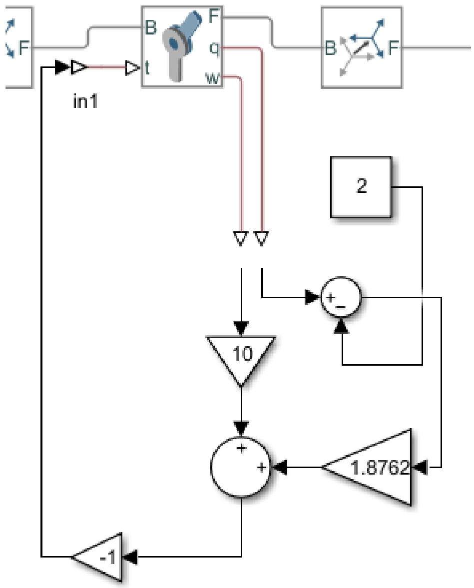
```
K =

   -0.1000  -31.6977  -91.0232  -17.7213   -0.0000   -0.0000
   -0.0000   -0.0000   -0.0000   -0.0000   10.0000    1.8762
```

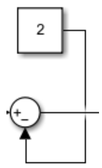
总拓扑：

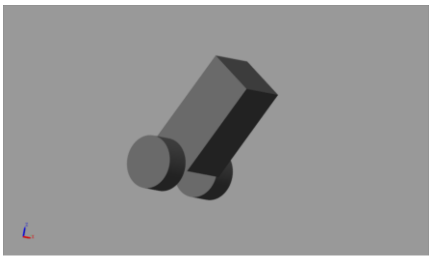


与二维建模区别在于 z 轴上添加了一个转动副代替转向：



控制块





精彩瞬间

在仿真界面里可以安全快速的模拟调试，Matlab 的模型较为简单，后续可以使用 urdf 文件或者 stl 文件在 ros、coppeliasim、webots 等里导入更复杂的模型，获得更好的仿真效果和控制体验。

五、总结（2023.1.4）

模型建立

设定模型为右手坐标系，z 轴朝上，x 为水平正前方，旋转方向皆为右手系
x 为水平运动位移，$\boldsymbol{\theta}$为倾角大小，$\boldsymbol{\beta}$为转向角度
d 为转轴到重心的距离，l 为轮距，r 为轮子半径
J 为车体转动惯量，I 为轮子转动惯量
单位为国际单位
动力学方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{Mdr^2}{2I+Mr^2+2mr^2}\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{r}{2I+Mr^2+2mr^2}(T_R+T_L)$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{Md}{Md^2+J_y}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{Mdg}{Md^2+J_y}\theta - \frac{1}{Md^2+J_y}(T_R+T_L)$$

$$\frac{d^2\beta}{dt^2} = \frac{1}{r\left(\frac{2J_z}{l}+\frac{l(mr^2+I)}{r^2}\right)}(T_R-T_L)$$

整理方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mathrm{M^2d^2}r^2\mathrm{g}}{2\mathrm{I}J_y + 2\mathrm{IMd^2} + \mathrm{M}r^2J_y + 2J_y\mathrm{m}r^2 + 2\mathrm{Mmd^2}r^2}\theta + \frac{\mathrm{r}\left(\mathrm{Md^2} + \mathrm{Mrd} + J_y\right)}{2\mathrm{I}J_y + 2\mathrm{IMd^2} + \mathrm{M}r^2J_y + 2J_y\mathrm{m}r^2 + 2\mathrm{Mmd^2}r^2}(T_R+T_L)$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{\mathrm{dgM^2}r^2 + 2\mathrm{dgmM}r^2 + 2\mathrm{dgIM}}{2\mathrm{I}J_y + 2\mathrm{IMd^2} + J_y\mathrm{M}r^2 + 2J_y\mathrm{m}r^2 + 2\mathrm{Md^2m}r^2}\theta - \frac{2I + Mr^2 + 2mr^2 + Mdr}{2\mathrm{I}J_y + 2\mathrm{IMd^2} + J_y\mathrm{M}r^2 + 2J_y\mathrm{m}r^2 + 2\mathrm{Md^2m}r^2}(T_R+T_L)$$

$$\frac{d^2\beta}{dt^2} = \frac{1}{r\left(\frac{2J_z}{l}+\frac{l(mr^2+I)}{r^2}\right)}(T_R-T_L)$$

记

$$\mathrm{A1} = -\frac{\mathrm{M^2d^2}r^2\mathrm{g}}{2\mathrm{I}J_y + 2\mathrm{IMd^2} + \mathrm{M}r^2J_y + 2J_y\mathrm{m}r^2 + 2\mathrm{Mmd^2}r^2}$$

$$\mathrm{B1} = \frac{\mathrm{r}\left(\mathrm{Md^2} + \mathrm{Mrd} + J_y\right)}{2\mathrm{I}J_y + 2\mathrm{IMd^2} + \mathrm{M}r^2J_y + 2J_y\mathrm{m}r^2 + 2\mathrm{Mmd^2}r^2}$$

$$\mathrm{A2} = \frac{\mathrm{dgM^2}r^2 + 2\mathrm{dgmM}r^2 + 2\mathrm{dgIM}}{2\mathrm{I}J_y + 2\mathrm{IMd^2} + J_y\mathrm{M}r^2 + 2J_y\mathrm{m}r^2 + 2\mathrm{Md^2m}r^2}$$

$$\mathrm{B2} = -\frac{2I + Mr^2 + 2mr^2 + Mdr}{2\mathrm{I}J_y + 2\mathrm{IMd^2} + J_y\mathrm{M}r^2 + 2J_y\mathrm{m}r^2 + 2\mathrm{Md^2m}r^2}$$

$$B3 = \frac{1}{r\left(\frac{2J_z}{l}+\frac{l(mr^2+I)}{r^2}\right)}$$

化简为

$$\frac{d^2x}{dt^2} = A1\,\theta + B1(T_R+T_L)$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = A2\theta + B2(T_R+T_L)$$

$$\frac{d^2\beta}{dt^2} = B3(T_R-T_L)$$

木子羽 陈子龙 程庭轩
1324146673@qq.com

状态空间方程

$$\frac{dz}{dt} = Az + Bu$$

$$y = Cz + Du$$

其中

$$D = 0$$

$$z = \begin{bmatrix} x & \frac{dx}{dt} & \theta & \frac{d\theta}{dt} & \beta & \frac{d\beta}{dt} \end{bmatrix}^T$$

$$\frac{dz}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} & \frac{d^2x}{dt^2} & \frac{d\theta}{dt} & \frac{d^2\theta}{dt^2} & \frac{d\beta}{dt} & \frac{d^2\beta}{dt^2} \end{bmatrix}^T$$

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B1 & B1 \\ 0 & 0 \\ B2 & B2 \\ 0 & 0 \\ B3 & -B3 \end{bmatrix}$$

重量块的作用

猜测：重量块在平衡车加速度减速的时候进行重心的调整，使之在较小的倾角下也能获得较好的加速度。当平衡车向前加速时，车体前倾，如果重量块前移，将重心调前，相当于车体前倾的效果，从而得到较好的加速表现。

仿真环境：让仿真平衡车在水平平衡状态开始向前运动

记录倾角峰值：

重心后移

	时间	值
1	0.367	0.652 rad

重心中心

	时间	值
1	0.343	0.642 rad

重心前移

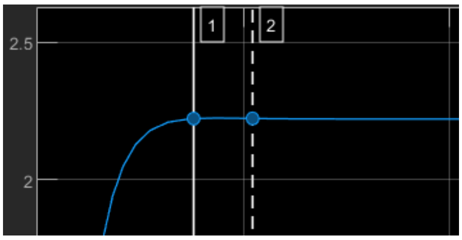
	时间	值
1	0.318	0.653 rad

两倍重心前移

	时间	值
1	0.305	0.68 rad

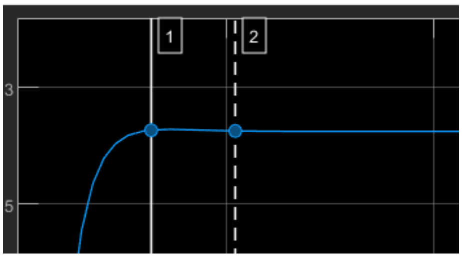
记录速度曲线：

重心中心



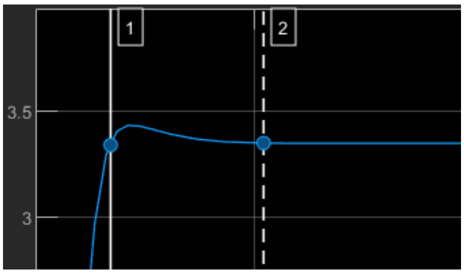
	时间	值
1	1.515	2.222 m/s

重心一倍前移



	时间	值
1	1.278	2.818 m/s

重心两倍前移

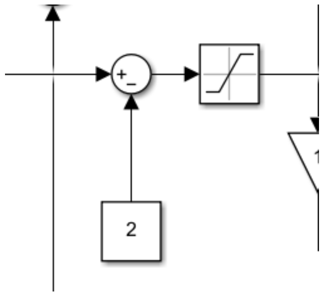


	时间	值
1	0.679	3.339 m/s

仿真可以看到，前移重心并没有减少倾角大小，反而会增大。但是会缩短峰值时间，也就是是说倾角会更快的收敛，并且在速度上，上升时间减少，也就是有更快的加速度。因此以上猜测并没有完全正确。

由于在加速过程中，车体会有前倾的动作，但这样的姿势带来不好的控制和实际应用效果，因此可以通过一

些处理得到抑制



平衡车的控制是通过调整速度的偏置 v_set，然后收敛 v-v_set=v_err 来进行达到目标速度。可以对 v_err 进行限幅，实现对倾角的抑制。以下为峰值倾角的前后对比：

	时间	值
1	0.343	0.642 rad
2	16.637	-0.128 rad

	时间	值
1	1.335	0.19 rad
2	16.637	-0.128 rad

可以看到，峰值的角度减少到三分之一，峰值时间是四倍，稳态误差不变

综上可以得到一个控制方案为，通过重力块来提高响应速度，通过限幅调整姿态

六、动量块建模

模型建立

设定模型为右手坐标系，z 轴朝上，x 为水平正前方，旋转方向皆为右手系，
x 为水平运动位移，$\boldsymbol{\theta}$为倾角大小，γ为转向角度，x_d为动量块在滑轨上的位移，
l_1为转轴到重心的距离，l_2为轮距，m 为转轴质量，
J_1为车体绕 y 轴转动惯量，J_2为轮子转动惯量，J_3为车体绕 z 轴转动惯量，
R 为轮子半径，M 为单个轮子质量，
F_x为杆沿 x 轴方向的分力，F_z为杆沿 z 轴方向的分力，f 为轮子受到的摩擦力，
T_L为左侧电机输出的力矩，T_R为右侧电机输出的力矩，
L 为轮子转轴到动量块重心的距离，s 为轮子转轴到滑轨的垂直距离，
T 为单个动量块对转轴的力矩，m_d为动量块质量，单位均为国际单位。

动力学方程：

对转轴竖直平面上：

$$F_x = m\frac{d^2}{dt^2}\left(x + l_1\sin\theta\right) = m\frac{d^2x}{dt^2} + ml_1\cos\theta\frac{d^2\theta}{dt^2} - ml_1\sin\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

$$F_z = m\frac{d^2}{dt^2}l_1\cos\theta - mg = -mg - ml_1\sin\theta\frac{d^2\theta}{dt^2} - ml_1\cos\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

$$J_1\frac{d^2\theta}{dt^2} = F_x l_1\cos\theta - F_z l_1\sin\theta - T_L - T_R$$

对单个轮子：

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = f - F_N$$

$$T_L + T_R - fR = \frac{J_2 d^2x}{Rdt^2}$$

对转轴水平平面上：

$$\left(T_R - T_T\right)R - \frac{2J_3R^2d^2\gamma}{l_2dt^2} = \left(J_2 + MR^2\right)l_2\frac{d^2\gamma}{dt^2}$$

线性化后整理可得

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{ml_1}{J_1 + ml_1^2}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{mgl_1}{J_1 + ml_1^2}\theta - \frac{1}{J_1 + ml_1^2}\left(T_L + T_R\right)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{ml_1R^2}{J_2 + MR^2 + mR^2}\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{R}{J_2 + MR^2 + mR^2}\left(T_L + T_R\right)$$

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2} = \frac{1}{R\left(\frac{2J_3}{l_2} + l_2\frac{MR^2 + J_2}{R^2}\right)}\left(T_L - T_R\right)$$

假设引入动量块后对转轴在水平与竖直方向的受力影响可忽略，则对于转轴的力矩平衡调整为：

$$J_1\frac{d^2\theta}{dt^2} = F_xl_1\cos\theta - F_zl_1\sin\theta - T_L - T_R + T$$

其中：

$$T = m_dgL\left[\sin\left(\arctan\frac{x_d}{s}\right) + \cos\left(\arctan\frac{x_d}{s}\right)\theta\right]$$

$$L = \sqrt{x_d{}^2 + s^2}$$

对结果线性化，其中将 L 近似为 480mm，整理得

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{ml_1}{J_1 + ml_1^2}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{mgl_1 + m_dgL}{J_1 + ml_1^2}\theta - \frac{1}{J_1 + ml_1^2}\left(T_L + T_R\right) + \frac{m_dgL}{sJ_1 + sml_1^2}x_d$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{ml_1R^2}{J_2 + MR^2 + mR^2}\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{R}{J_2 + MR^2 + mR^2}\left(T_L + T_R\right)$$

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2} = \frac{1}{R\left(\frac{2J_3}{l_2} + l_2\frac{MR^2 + J_2}{R^2}\right)}\left(T_L - T_R\right)$$

$$\frac{d^2x_d}{dt^2} = -\frac{m^2l_1^2}{m_d\left(ml_1^2 + J_1\right)}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{m^2gl_1^2 + m_dgl_1L}{m_d\left(ml_1^2 + J_1\right)}\theta - \frac{ml_1}{m_d\left(ml_1^2 + J_1\right)}\left(T_L + T_R\right) + \frac{gl_1L}{sml_1^2 + sJ_1}x_d$$

使用 MATLAB 的 LQR 工具包获取 K 矩阵

附录 A MATLAB 代码

```
%%
%三维建模 real
clc;clear;

syms F ddth ddx th TR TL T0 ddbe dbe be T;

g = 9.7833;
M = 6.754+0.88;
d = 0.05244;
l = 0.48;
Jy = 1206539.81/1000/10000;
Jz = 0.35;
Jx = 0.46;
m = 1.423-0.44;
r = 0.1;
I = 30022.65/1000/10000;

f1 = (TR+TL)*r-M*r^2*d*ddth == (2*I+2*m*r^2+M*r^2)*ddx;
f2 = (M*d^2+Jy)*ddth == M*g*d*th-M*d*ddx-(TR+TL);
f3 = ddbe == (TR-TL)/(r*(2*Jz/l+l*(m*r^2+I)/r^2));

[s_ddx,s_ddth,s_ddbe] = solve(f1,f2,f3,ddx,ddth,ddbe)

A1 = diff(s_ddx,th);
B1 = diff(s_ddx,TR);
A2 = diff(s_ddth,th);
B2 = diff(s_ddth,TR);
B3 = diff(s_ddbe,TR);

A1 = double(A1);
B1 = double(B1);
A2 = double(A2);
B2 = double(B2);
B3 = double(B3);

A = [0 1 0 0 0 0;
     0 0 A1 0 0 0;
     0 0 0 1 0 0;
     0 0 A2 0 0 0;
     0 0 0 0 0 1;
     0 0 0 0 0 0];
B = [0   0;
     B1  B1;
     0   0;
     B2  B2;
     0   0;
     B3 -B3];
```

```
eig(A)
C0 = [B A*B A^2*B A^3*B];
rank(C0)

Q = [100, 0, 0, 0, 0, 0;
     0, 900000, 0, 0, 0, 0;
     0, 0, 5000000, 0, 0, 0;
     0, 0, 0,  100000, 0, 0;
     0, 0, 0,  0,   500000, 0;
     0, 0, 0,  0,   0, 50000];
R = [100 0;
     0 100];

K = lqr(A,B,Q,R)
Acl = A-B*K;
```