基于排队论的机场出租车决策与优化模型

摘要

本文研究了机场出租车司机的策略选择问题和乘车区优化问题。出租车司机可以在进入蓄车池之前看到即将降落的航班信息和在蓄车池内等待的车辆数，根据自己的判断，选择是否要进入蓄车池等候载客。本文建立了基于排队论的策略选择模型，很大程度上帮助了司机做出能够赚取最大效益的决策。

针对问题一，送客到机场的出租车司机有两种选择：第一，进入蓄车池等候，载客后返回市区，但是需要付出时间成本；第二，送客后不再载客，空驶回城区再载客，但是需要付出空驶成本。我们站在出租车司机的角度考虑，将出租车作为服务对象，乘客作为服务台，建立了单队列单服务台排队模型。同时，我们证明了出租车的到达服从泊松分布，通过排队论模型解出了司机在蓄车池的等待时间$W = 60 \cdot (1+L)/N_a \cdot N_p \cdot \alpha$。最后建立出租车收益模型，计算策略 A 的收益$Q_A$和策略 B 的收益$Q_B$，通过比较收益大小，帮助出租车司机决策。

针对问题二，我们以上海浦东机场为例，搜集了相关数据，并进一步优化了第一问的模型。考虑到只有一部分乘客选择出租车回到市区，并且是否选择搭乘出租车，与时间、天气、公共交通开行状况等因素相关，所以我们引入了人数权重系数α表示乘坐出租车的旅客比例。通过不同时间机场周围出租车密度热力图看出，夜间或天气不好时大量出租车出现在机场附近，说明权重系数α可以较为准确的反映现实情况。计算出的收益Q与时间t和出租车排队长度L存在关系$Q = f(t,L)$，所以我们做出$Q_A - t - L$和$Q_B - t - L$的三维曲面图，取其交线上方的部分，绘制出二维司机决策图，帮助司机做出能够赚取最大效益的决策。

针对问题三，为了提高总的乘车效率，我们从“管人”和“管车”两方面进行考虑，创新性地提出了“中央环岛候车区——陆侧停车模型”，将中央环岛两侧分别设置 4 个上车点，见图 3.2。该模型充分利用了同向双车道的条件和单队多服务的效率优势，既具备单队列多服务台的效益优越性，又在一定程度上缓解了拥堵的问题。

针对问题四，我们研究的重点是如何找到短途与长途的临界点。我们以出租车司机接待一次长途业务的收益为标准，在这个时间内，接待短途业务的司机将第一个乘客送达后返回机场接待第二名乘客，当两出租车司机的收益几乎相同时，则认为短途和长途的出租车实现了收益平衡。我们以浦东机场为例，通过模型求解，解得长短途的临界点为 $24\,km$，即乘客的行程在 $24\,km$ 之内为短途订单，可以让出租车司机不用排队，直接进入载客区。

关键字：　排队论　中央环岛候车区——陆侧停车模型　决策问题　最佳收益

一、问题重述

随着人们经济水平的提高，越来越多的人选择乘坐飞机出行。乘客下飞机后为了到达最终的目的地通常有几个选择：乘坐公共交通、乘坐私家车、乘坐出租车。本文主要对送客到机场的出租车相关问题进行研究。

送客到机场的出租车司机有两种选择：第一，进入蓄车池等候，载客后返回市区。第二，送客后不再载客，空驶回城区再载客。选择方案一，司机需要在候车池等候，需要付出一定的时间成本，并且司机无法根据目的地以及人数的多少选择是否搭载乘客。选择方案二，司机需要承担出租车空驶回市区的相关成本，并且失去潜在的载客效益。

问题一：综合考虑影响出租车司机决策的相关因素，结合机场乘客数量变化和司机收益，建立出租车司机选择决策模型，并且给出司机的选择策略。

问题二：以国内某一机场为例，搜集机场和出租车相关数据，给出出租车司机的选择方案，并且分析模型对相关因素的依赖性和合理性。

问题三：为了解决“车等人”和“人等车”的问题，机场现设有两条并行的车道，为管理部门提供设置“上车点”和安排出租车及乘客的方案，使得乘车效率最高。

问题四：出租车司机可以根据送客路程的远近选择是否多次往返载客，并且机场管理方面可以给往返载客的出租车给予一定的“优先权”，来帮助出租车司机来平衡收益。给出一个合理的优先安排方案。

二、问题分析

2.1 问题一

针对问题一，司机可以选择在机场付出时间成本等待载客后返回市区，也可以选择付出空驶成本，到达市区后再载客盈利。问题的重点在于在不同时间段内，如何计算这两种决策的成本，以及决策之间的对比。

我们假设在机场和市区之间的路程固定且全部为机场高速（乘客无法上下车），根据出租车计价标准，可以求出从机场到市区的乘车价格，即为两种决策盈利或亏损的部分效益。本文以时间为度量标准，在同一段时间内，对比在机场等待的时间成本和在市区载客盈利的关系。在机场蓄车池内等待的时间成本，可以由在相同时间里市区的载客营收来量化。

此题很重要的一个变量就是蓄车池内的等待时间，等待时间受到即将降落的航班数、当前蓄车池内的出租车数、出租车的到达速度等因素影响。可以建立 $M/M/1/\infty/\infty/FCFS$ 排队模型，出租车的到达服从泊松分布，乘客的上车时间

服从负指数分布，只有一个乘车点，出租车排队长度无限，出租车数量无限，采取先来先服务的方式，计算蓄车池内的等待时间。

求出等待时间后，可以算出在相同等待时间内司机在市区的收益，通过对比两种决策的收益大小，司机可以做出判断，是否要在机场等待载客后再返回。

2.2 问题二

针对问题二，我们以上海浦东机场为例，搜集有关出租车和机场的资料，在计算时，需要考虑到并不是所有的乘客下飞机后都选择坐出租车出行，而乘客的选择又与时间、天气等因素有关，所以需要加入一个比例参数，来表明在所有旅客中选择乘坐出租车的旅客比例，我们在参考文献[1]中得到了这一统计数据，并且该数据受到时间和天气的影响。

蓄车池出租车等待数量L是司机现场观察到的值，将数据代入模型后，发现司机的收益Q与L和时间t有关，即$Q=f(L,t)$。想要使收益Q最高，可以转化为多变量的规划模型，将Q，L，t做出三维曲面图，即是t时刻在出租车蓄车池等待车数为L时的收益曲面。将Q_A和Q_B画在同一个坐标系下，则交线为决策 A、B 收益相等的情况，将交线上方的曲面投影到底面，就可以得出在t时刻在出租车蓄车池等待车数为L时，司机应该选择哪一种决策来使自己的收益最高。

2.3 问题三

针对问题三，我们在原有的基础模型上进行改进，得出单队列多服务台模型，设需要设置的上车点的个数为S,单独分析设置的上车点个数与上车点空闲的概率和出租车平均排队长度的关系，通过计算，发现在车道数为 1 时，设置 4 个上车点是最佳的。由于题目给出了双车道的条件，为了充分利用资源，我们设计了中央环岛候车区——陆侧停车模型，既具备单队列多服务台的效益优越性，又充分利用了资源，在一定程度缓解了拥堵的问题。

2.4 问题四

针对问题四，由于出租车的收益与所载乘客的行程有关，而现实中，出租车司机都不愿接短途乘客，所以我们需要给接短途乘客的司机返回机场接客给予一定的优先权，可不用排队直接到上车点接待乘客。我们研究的重点是如何找到短途与长途的临界点。

我们以出租车司机接待一次长途业务的时间为标准，在这个时间内，接待短途业务的司机在送完乘客后返回机场优先接下一个乘客，若在相同的时间内，两出租车司机的收益相同，则认为该短途的里程数为临界点。

三、符号说明

符号	说明
α	所有到达的旅客中，乘坐出租车的人数比例
N_a	到港航班数量
N_p	平均每架航班的载客数
β	平均每分钟市区出租车的收益
μ	乘客单位时间内的到达数量
λ	出租车单位时间内的到达数量
L	蓄车池内等待的出租车数量（司机可见）
W	蓄车池内等待时间

四、模型假设

1. 假设机场到市区的路程固定不变。
2. 机场到市区的路程全部为高速路，没有乘客上下车。
3. 假设一辆车只乘坐一位乘客。
4. 假设道路无拥堵情况。
5. 司机在蓄车池内的燃油损耗忽略不计。

五、模型的建立与求解

5.1 问题一

5.1.1 蓄车池出租车排队模型

为了通过研究出租车在蓄车池里的等待时间、等待队长的分布来计算损失与收益，我们首先建立了出租车与乘客的单服务台排队模型来计算出租车在蓄车池需要等待的时间，再根据出租车在蓄车池里等待的时间与从机场到市区道路上所花费的时间之和作为一个时间段，在该时间段内对两种决策计算收益，从而给出对某一出租车司机的具体决策。

我们站在出租车司机的角度考虑，把出租车当成服务对象，把出租车到达蓄车池作为输入过程，由于司机需要做决策，那么可以把蓄车池的车源当作无限的，

出租车的到达是相互独立的，到达时间是随机的；排队规则是“等待制”，服务次序是“先来先服务（FCFS）”，排队容量无限；服务机构即需要乘坐出租车的乘客。

对于出租车到达蓄车池的情况，可以看作服从泊松分布，原因如下：

（1）无后效性：在不相交的时间区内出租车到达数是相互独立的；

（2）平稳性：对于充分小的Δt，在时间间隔$[t,t+\Delta t)$时间内有一辆车到达的概率只与时间长度Δt有关，而与起始时刻t无关，且$P_1(t,t+\Delta t)=\lambda\Delta t+o(\Delta t)$，其中$P_1(t,t+\Delta t)$表示在时间段$(t,t+\Delta t)$内有一辆车到达的概率，$\lambda>0$成为概率强度，即单位时间内有一辆车到达的概率；

（3）普通性：对于充分小的Δt，在时间间隔$[t,t+\Delta t]$内有两辆或两辆以上的出租车到达的概率极小，即$\sum_{n=2}^{\infty}P_n(t,t+\Delta t)=o(\Delta t)$。

当排队系统的状态为n时：如果初始时间$t=0$，则可记$P_n(0,t)=P_n(t)$，在$[t,t+\Delta t]$内，由于

$$\sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty}P_n(t,t+\Delta t)=P_0(t,t+\Delta t)+P_1(t,t+\Delta t)+\sum_{n=2}^{\infty}P_n(t,t+\Delta t)=1 \tag{1}$$

所以，在$[t,t+\Delta t)$内没有出租车到达的概率为：

$$\begin{aligned}P_0(t,t+\Delta t)&=1-P_1(t,t+\Delta t)-\sum_{n=2}^{\infty}P_n(t,t+\Delta t)\\&=1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)\end{aligned} \tag{2}$$

将$[t,t+\Delta t)$分为$[0,t)$和$[t,t+\Delta t)$，则在时间段$[0,t+\Delta t)$内到达n个出租车的概率应该为：

$$\begin{aligned}P_n(t+\Delta t)&=P\{N(t+\Delta t)-N(0)=n\}\\&=\sum_{\mathrm{k}=0}^{n}P\{N(t+\Delta t)-N(t)=k\}\cdot P\{N(t)-N(0)=n-k\}\\&=\sum_{k=0}^{n}P_{n-k}(t)\cdot P_k(t,t+\Delta t)\\&=P_n(t)(1-\lambda\Delta t)+P_{n-1}(t)\lambda\Delta t+o(\Delta t)\end{aligned} \tag{3}$$

当$\Delta t\to 0$时：

$$\begin{cases}\dfrac{dP_0(t)}{dt}=-\lambda P_n(t)+\lambda P_{n-1}(t)\\ P_n(0)=0 \quad (n\ge 1)\end{cases} \tag{4}$$

特别的，如果没有到达的出租车，即 n=0 时：

$$\begin{cases}\dfrac{dP_0(t)}{dt}=-\lambda P_n(t)\\ P_n(0)=1\end{cases} \tag{5}$$

根据（5）式解得

$$\begin{cases}P_0(t)=e^{-\lambda t}\\ P_1(t)=\lambda te^{-\lambda t}\\ P_2(t)=\dfrac{(\lambda t)^2}{2!}e^{-\lambda t}\end{cases} \tag{6}$$

即

$$P_n(t)=\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t} \quad (n=1,2,3,......,t>0) \tag{7}$$

表示在 t 时间段内到达 n 辆出租车的概率服从**泊松分布**。

用随机变量T表示两辆出租车相继到达的时间间隔，设该排队系统中对一辆出租车的服务时间v服从负指数分布，分布函数为$F_v(t)=1-e^{-\mu t},t\ge 0$，分布密度为$f_v(t)=\mu e^{-\mu t},t\ge 0$，其中，$\mu$表示平均服务率（单位时间内载客离开出租车辆数），期望值为$E(v)=\dfrac{1}{\mu}$，表示平均一辆车的载客时间。所以，T服从负指数分布，$E(T)=\dfrac{1}{\lambda}$，$D(T)=\dfrac{1}{\lambda^2}$。

我们建立的$M/M/1/\infty/\infty/FCFS$排队模型[2]，规定在$t+\Delta t$时刻排队系统中有n辆出租车(即状态为n)的概率为$P_n(t+\Delta t)$。考虑出租车数量$n=0$时的状态。状态 0 的输入仅来自状态 1，处于状态 1 时出租车排队系统的稳定状态概率为P_1，而从状态 1 进入状态 0 的平均转换率为μ_1，即μ为出租车单位时间内的离开速率，这个与乘客到达的速度有关。因此，从有一辆出租车到没有出租车的输入率为$\mu_1 P_1$，类似的，状态 0 的总输出率为$\lambda_0 P_0$。根据输入率等于输出率的原则，列出如下各个状态的平衡方程：

表 1.1 排队系统各状态平衡方程

状态	输入率=输出率
0	$\mu_1 P_1 = \lambda_0 P_0$
1	$\lambda_0 P_0 + \mu_2 P_2 = (\mu_1 + \lambda_1) P_1$
...	...
$n-1$	$\lambda_{n-2} P_{n-2} + \mu_n P_n = (\mu_{n-1} + \lambda_{n-1}) P_{n-1}$
n	$\lambda_{n-1} P_{n-1} + \mu_{n+1} P_{n+1} = (\mu_n + \lambda_n) P_n$
...	...

求解上表平衡方程，得：

$$\begin{aligned} &P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0 \\ &P_2 = \frac{\lambda_1}{\mu_2} P_1 + \frac{1}{\mu_2}(\mu_1 P_1 - \lambda_0 P_0) = \frac{\lambda_1}{\mu_2} P_1 = \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} P_0 \\ &...... \\ &P_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 ...... \lambda_{n-2} \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \mu_3 ...... \mu_{n-1} \mu_n} P_0 \\ &...... \end{aligned} \tag{8}$$

令 $C_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 ...... \lambda_{n-2} \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \mu_3 ...... \mu_{n-1} \mu_n} \quad (n = 1,2,......)$,$C_0 = 1$，则上式可写为

$$P_n = C_n P_0 \quad (n = 1,2,......) \tag{9}$$

出租车排队系统中，出租车平均到达率为常数，即对所有 n 都有 $\lambda_n = \lambda$ 。出租车平均出发率为常数 $\mu_n = \mu$ 。

令 $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ 为服务强度，当 $\rho < 1$ 时为“车等人”的情况，那么 $C_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \rho^n$，

且 $P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n} = \frac{1}{\frac{1}{1-\rho}} = 1 - \rho$ ，则出租车排队系统状态为 n 的概率为：

$$P_n = (1-\rho)\rho^n \tag{10}$$

那么司机可以在进入蓄车池前观察到的蓄车池内等待的车数可以表示为：

$$
\begin{aligned}
L &= \sum_{n=0}^{\infty} nP_n \\
&= (1-\rho)\rho \cdot \frac{1}{(1-\rho)^2} \\
&= \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}
\end{aligned} \tag{11}
$$

则单位时间内出租车到达的数量为$\lambda = \dfrac{\mu L}{1+L}$

司机需要在蓄车池内等待的时间为：

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\mu-\lambda} \tag{12}$$

单位时间内旅客平均到达速率μ可以表示为：

$$\mu = \frac{N_a \cdot N_p \cdot \alpha}{60} \tag{13}$$

其中，N_a为司机观察到的在一小时内将要到达的航班数量，N_p为每架航班的平均载客数，α为到达旅客中乘坐出租车的人数所占的比例，由于受到在不同时间公共交通的开行状态的影响，再考虑到航班到港后乘客下飞机、取行李等一系列动作所消耗的时间，α的取值会根据到港航班时间动态变化。根据公式（12）（13），得到出租车司机的等待时间为

$$W = \frac{1+L}{N_a \cdot N_p \cdot \alpha} \cdot 60 \tag{14}$$

5.1.2 出租车收益模型

出租车司机的决策影响了其收益。现有两种决策，决策 A：出租车司机送客后在蓄车池内等待，载客后返回市区。决策 B：出租车司机送客后直接空驶返回市区，然后在市区内载客盈利。现根据两个决策在相同时间段内的成本和收益，建立出租车收益模型。

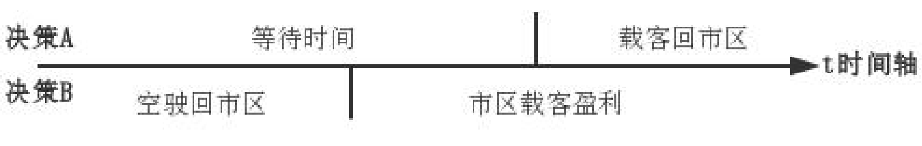

图 1.1 收益模型示意图

决策 A

出租车司机送客后在蓄车池等待，载客后返回市区，虽然在返回市区的路程上可以获得收益，但是在蓄车池内等待的时间成本也要计算在内。在此模型中，我们用在相同时间内在市区载客可以获取的收益来量化等待的时间成本。

决策 A 的利润分为效益和成本两部分，效益部分为从机场到市区载客的收益，另一部分为蓄车池等待的时间成本和从机场到市区载客的燃油成本。

$$\text{燃油成本}=s\cdot k\cdot a$$

其中s为机场到市区的距离，k为每公里出租车油耗，a为当时市场油价。

$$\text{时间成本}=W\cdot\beta$$

其中W为排队模型计算出的排队时间，β为在当前时段内，市区内出租车平均每分钟的收益。

效益部分可以表示为Q_1，所以，决策 A 的收益就可以表示成：

$$Q_A=Q_1\text{-}s\cdot k\cdot a\text{-}W\cdot\beta \tag{15}$$

决策 B

出租车司机送客后直接空驶返回市区，然后再开始载客盈利，司机需要承担空驶回城区的成本，但是节省的时间可以在市区内载客盈利。所以当司机选择决策 B 的时候，他获得的利润也分为效益和成本两部分，效益为节省下来的时间在市区载客的盈利，成本就是从机场空驶回城区的空驶成本。

$$\text{空驶成本}=s\cdot k\cdot a$$

$$\text{载客盈利}=W\cdot\beta$$

则选择决策 B 时，司机的总利润为

$$Q_B=W\cdot\beta\text{-}s\cdot k\cdot a \tag{16}$$

5.1.3 司机决策方案

决策 A 的利润为Q_A，决策 B 的利润为Q_B，司机可以在进入蓄车池之前观察到 L 的值，然后通过Q_A和Q_B来决策选择哪个方案。当$Q_A>Q_B$时，司机选择决策 A，即送客后进入蓄车池内等待，载客后再返回市区；当$Q_A<Q_B$时，司机选择决策 B，即送客后直接空驶返回市区，在市区载客获益。

5.2 问题二

5.2.1 上海市出租车收益模型

在问题一的模型基础上，我们以上海浦东机场为例，通过搜集相关数据，以

一个小时为时间间隔，计算两种决策的收益，为出租车司机提供决策建议。

表 2.1 上海市出租车的计费标准

公里数	日间（5：00~23：00）	夜间（23：00~5：00）
0~3km	14 元	18 元
3~15km	2.5 元/公里	3.1 元/公里
15km 以上	3.6 元/公里	4.7 元/公里

乘客对出行交通方式的选择受到在不同时间公共交通的开行状态的影响，再考虑到航班到港后乘客下飞机、取行李等一系列动作所消耗的时间，α 的取值根据到港航班时间会动态变化。根据所查资料[1]得下表：

表 2.2 α 取值表

6：00 之前到港	6~21 点到港	21：00 之后到港
67%	22%	67%

每小时乘客到达率的计算

我们从“飞常准大数据研究院”收集到 2018 年 11 月上海浦东机场平均每小时进出港航班的数量 N_a 和平均每架飞机载客人数 N_p[3]以及乘客对出租车交通的选择率来计算浦东机场每小时乘客的到达率 μ，计算结果如下：

表 2.3 μ 计算结果表

时间	平均每小时进港航班量 N_a	人数 N_p	需要乘坐出租车人数	μ
0	20	2933	1965	32.75
1	5	733	491	8.19
2	1	147	98	1.64
3	4	587	393	6.55
4	9	1320	884	14.74
5	9	1320	884	14.74
6	11	1613	1081	18.01
7	8	1173	258	4.30
8	20	2933	645	10.75
9	33	4839	1065	17.74
10	42	6159	1355	22.58
11	26	3813	839	13.98
12	28	4106	903	15.06
13	26	3813	839	13.98
14	44	6453	1420	23.66
15	44	6453	1420	23.66

16	38	5573	1226	20.43
17	35	5133	1129	18.82
18	42	6159	1355	22.58
19	44	6453	1420	23.66
20	33	4839	1065	17.74
21	22	3226	2162	36.03
22	35	5133	3439	57.32
23	30	4400	2948	49.13

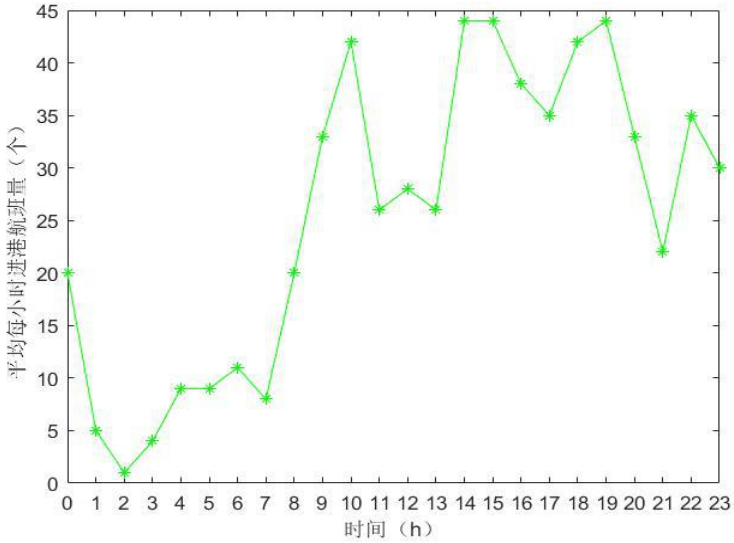

图 2.1　进港航班数量折线图

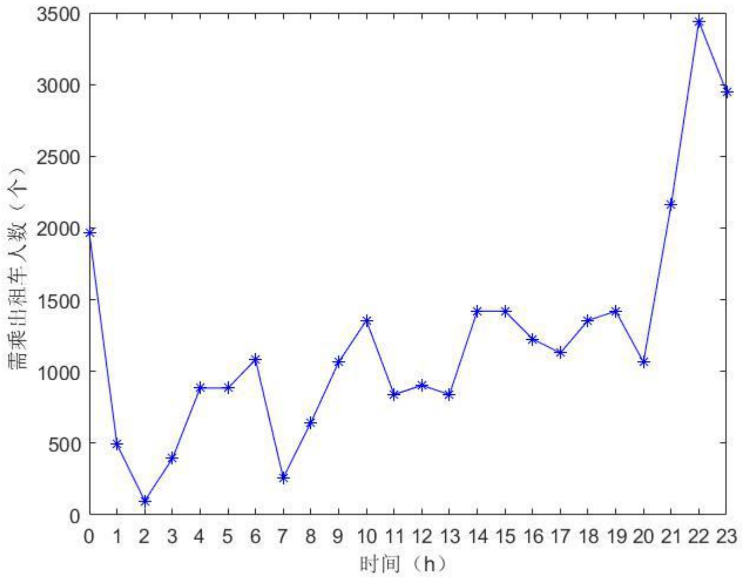

图 2.2　乘坐出租车人数折线图

燃油成本

我们搜集到浦东机场到市区距离为 50 公里，上海出租车常见车型为大众途

安[4]，平均百公里油耗为7.3 L [5]，油价约为6.6元/L [6]，燃油成本= $s \cdot k \cdot a = 24.09$元，该值也为决策 B 的空驶成本。

效益计算

1.对于**决策 A**，效益部分Q_1为固定值，结果如下：

时间	Q_1（元）
白天（5：00-23：00）	170
夜间（23：00-5：00）	219.7

决策 A 的整体收益为

$$\begin{aligned} Q_A &= Q_1 - s \cdot k \cdot a - W \cdot \beta \\ &= \mathrm{Q}_1 - 24.09 - \frac{1+L}{N_a \cdot N_p \cdot \alpha} \cdot 60 \cdot \beta \end{aligned} \tag{17}$$

2.对于**决策 B**，效益部分Q_B应按时间段来计算：

$$Q_B = W\beta - s \cdot k \cdot a = \frac{1+L}{N_a \cdot N_p \cdot \alpha} \cdot 60 \cdot \beta - 24.09 \tag{18}$$

对于变量N_a，N_p，β其值都与时间相关，N_a，N_p的值如表 2.3 所示，β的值如表 2.4 所示：

表 2.4　出租车的收益情况

时间段	载客密度[7]	时间段平均工资[8]	每分钟平均工资β
0-2	0.471	39.41938015	0.328494835
2-4	0.564	47.20282464	0.393356872
4-6	0.443	37.07597751	0.308966479
6-8	0.579	48.45821891	0.403818491
8-10	0.723	60.51000392	0.504250033
10-12	0.734	61.43062639	0.511921887
12-14	0.73	61.09585458	0.509132122
14-16	0.725	60.67738983	0.505644915
16-18	0.665	55.65581274	0.463798439
18-20	0.721	60.34261802	0.50285515
20-22	0.664	55.57211979	0.463100998
22-24	0.628	52.55917353	0.437993113

5.2.2 决策模型

由于两个决策的影响因素都与时间和司机观察到蓄车池内已有的车数有关，所以我们建立 X(时间)-Y(蓄车池内车数)-Z(收益)的关系，并画出三维图像，如下图所示：

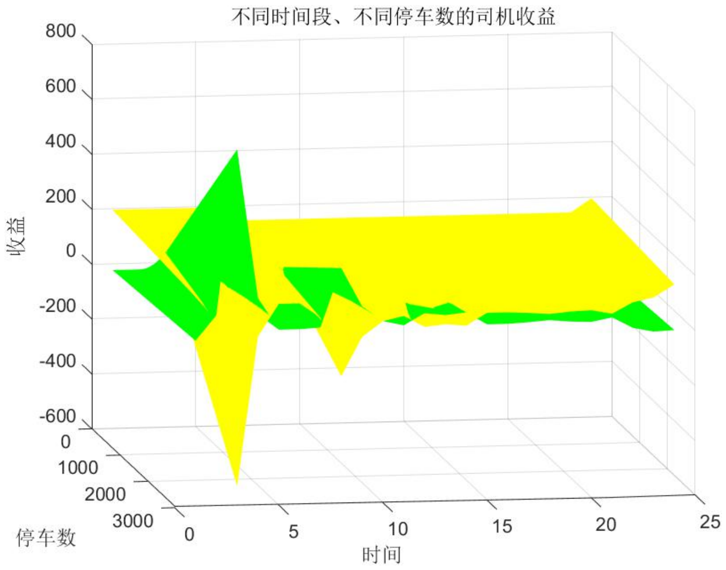

图 2.3　决策 A、B 的收益曲面图

图中反映了两种决策的收益，黄色反映了 A 决策的收益，绿色反映了 B 决策的收益。可以看出多数情况下出租车司机在机场等待载客比直接空车驶回收益更大，且在下雨天气乘客单位时间到达率会更大，出租车司机等待载客收益会更高，这也解释了当前出租车司机更愿意在机场等待载客的原因。

两个曲面的交线为两种决策收益相等的情况，取交线上半部分的曲面，并将其投影在 xOy 平面上，如下图所示：

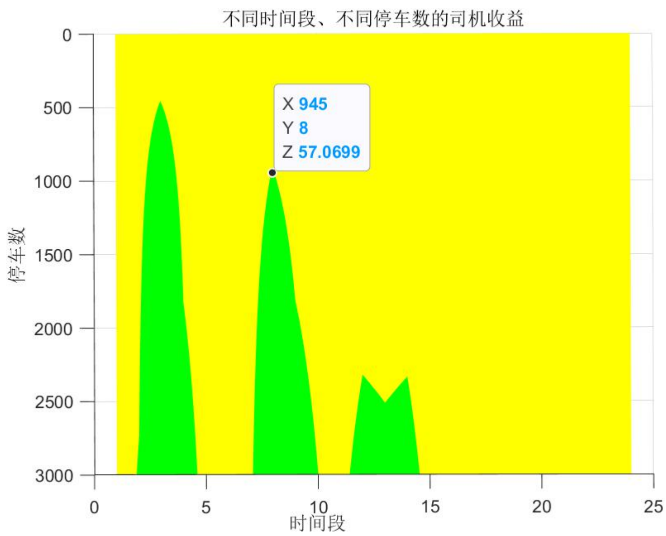

图 2.4　司机决策选择图

黄色区域表示决策 A 的收益大于决策 B 的收益，绿色部分表示决策 B 大于决策 A 的收益，可根据该结果建议出租车司机作出相应的决策，例如在上午 8 点（t=8），若出租车司机观察到蓄车池里出租车的数量 L 为 945 辆以下，应做决策 A，若观察到蓄车池内出租车的数量在 945 辆以上，应做决策 B。

5.2.3 模型评价与检验

该模型的影响因素有进港航班的数量，蓄车池内的出租车排队数量。进港航班数量直接影响了需要乘坐出租车的人数，而根据调查显示，旅客是否愿意乘坐出租车受公共交通开行状态、天气、私家车使用量、时间等影响。在模型中，我们添加了α权重系数，反应乘坐出租车人数的比例，该系数随着时间，公共交通开行状态和天气的改变而变化。例如，在下雨天的夜晚，拖着行李的旅客更愿意乘坐出租车返回市区，这样的情况普遍存在，所以α权重系数就应当比晴朗的白天高。

为了检验模型的合理性，我们使用上海强生出租车公司公布的 2018 年 4 月 1 日的出租车 GPS 数据，分别做出不同时段出租车在机场附近的热力图，如下：

图 2.5　12:00 时机场周围出租车分布热力图

图 2.6　23:00 时机场周围出租车分布热力图

从以上两图可以看出，在 23:00 左右，上海浦东机场附近的出租车密度相较于 12:00 左右的出租车密度有了大幅度提升，说明了在夜间公共交通停运的情况下，大多数下飞机的人更倾向于选择出租车去往市区，这与模型计算出的结果相一致，说明模型的设计较为合理。

5.3 问题三

在保证安全的前提下，我们需要解决车排队载客和乘客排队等车的问题，使乘车效率升高，则需要新增上车点。我们基于前面的模型建立了多个服务站并联的情况，其中 λ 为出租车平均每分钟到达的速率，μ 为乘客平均每分钟到达的速率，若设置 S 个上车点，那么 $\rho=\dfrac{\lambda}{\mu S}$，此时服务效率为：

$$\mu_n=\begin{cases} n\mu(n=1,2,\ldots,S) \\ S\mu(n=S+1,S+2,\ldots) \end{cases} \tag{19}$$

因此

$$C_n=\begin{cases} \dfrac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\ldots\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\ldots\mu_1}=\dfrac{(\lambda/\mu)^n}{n!} \qquad (n=1,2,\ldots\ldots,S) \\ \dfrac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\ldots\lambda_0}{(\mu_n\ldots\mu_{s+1})(\mu_s\ldots\mu_1)}=\dfrac{\lambda^n}{(S\mu)^{n-s}(S!\mu^s)}=\dfrac{(\lambda/\mu)^n}{S!S^{n-s}} \qquad (n>S) \end{cases} \tag{20}$$

由此可得：

$$P_0=\frac{1}{\sum_{n=0}^{S-1}\frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}+\frac{(\lambda/\mu)^S}{S!}\sum_{n=S}^{\infty}(\frac{\lambda}{S\mu})^{n-S}}$$
$$=\frac{1}{\sum_{n=0}^{S-1}\frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}+\frac{(\lambda/\mu)^S}{S!}\cdot\frac{1}{1-(\lambda/S\mu)}} \quad (21)$$

$$P_n=\begin{cases}\frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}P_0 & (n=1,2,......,S)\\ \frac{(\lambda/\mu)^n}{S!S^{n-s}}P_0 & (n>S)\end{cases} \quad (22)$$

由于 $\rho=\frac{\lambda}{\mu S}$，并且 $n-S=j$，所以有平均队列长度：

$$L_q=\sum_{n=S}^{\infty}(n-S)P_n=\sum_{j=0}^{\infty}jP_{S+j}$$
$$=\sum_{j=0}^{\infty}j\frac{(\lambda/\mu)^S}{S!}\rho^jP_0 \quad (23)$$
$$=\frac{P_0(\lambda/\mu)^S\rho}{S!(1-\rho)^2}$$

当 $\lambda/\mu<1$ 时表示乘客到达率大于出租车到达率，会出现人等车的情况，该情况下，上车点个数对乘车效益的影响不大，我们重点研究 $\lambda/\mu>1$ 的情况。在计算出的 λ 和 μ 值的表中，选取最大的一个值，在 7:00-8:00，$\lambda=31.579$，μ=13.100，根据公式（21）计算 P_0，即所有乘车点都为空闲状态，结果如下：

表 3.1 不同停车口数时乘车点空闲状态的概率

S	P_0
1	-1.410000
2	-0.092971
3	0.055017
4	0.082081
5	0.088025
6	0.089407
7	0.089726
8	0.089797

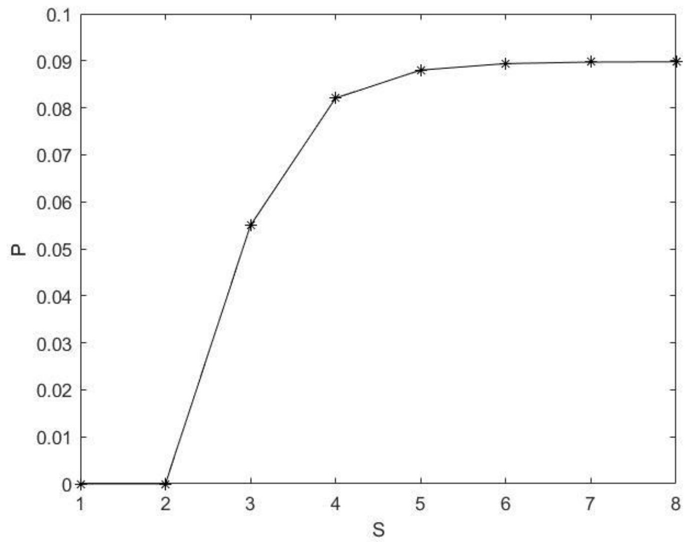

图 3.1 不同停车口数时乘车点空闲状态的概率图

表中当 $S=1$ 和 2 时，P_0 为负，表示在该时刻的情况下如果只有一个或两个上车点，不可能出现上车点空闲。

当 S=4 时，$P_0=0.082$，$L_q=\dfrac{0.082\times 2.41^4\times 0.6025}{4!\times(1-0.6025)^2}=0.438$，

平均出租车等待数量 $L=L_q+2.41=2.848$（辆），

同理，当 $S=5$ 时，$L=2.649$（辆）。

虽然平均队长在减小，但是变化量非常微弱，同时考虑到机场候车厅面积限制和设置上车点的成本，故设置 4 个上车点更佳。

以上是对于单队列多服务台的情况，题目中给出两条并行车道的条件，于是我们创新性地建立了环岛形候车区，如图 3.2 所示。虽然单队列多服务台系统与多个单服务台相比较更具优越性，但我们将两条并行车道分开，相当于单队多服务台的延伸，那么一共需要设置 8 个上车点，这样不仅保证了效率，而且在一定程度程度上减轻了车道拥堵的问题。

环岛型候车区模拟图

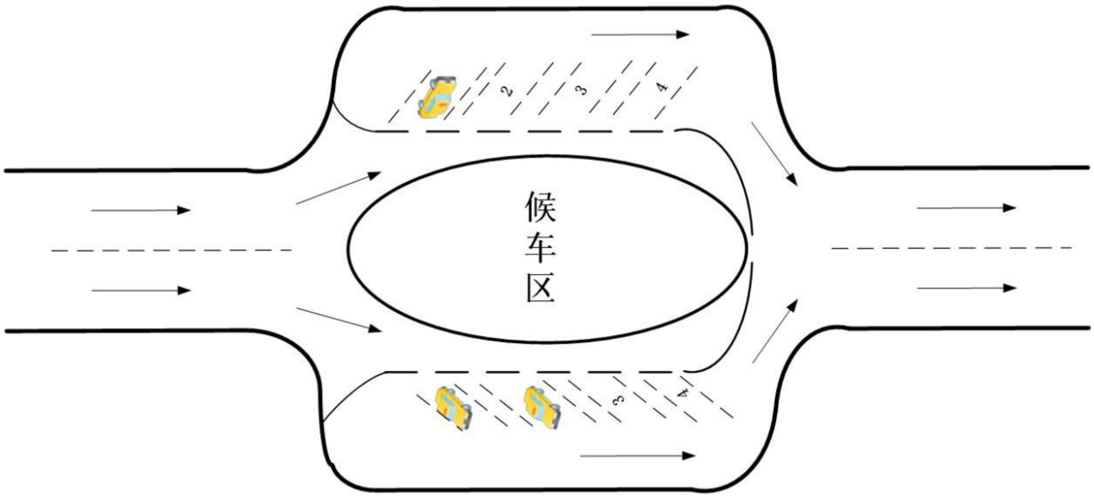

图 3.2 环岛型候车区模拟图

5.4 问题四

我们需要给接短途乘客的司机返回机场接客给予一定的优先权，可不用排队直接到上车点接待乘客。我们研究的重点是如何找到短途与长途的临界点。我们以出租车司机接待一次长途业务的收益为标准，在这个时间内，接待短途业务的司机将第一个乘客送达后返回机场接待第二名乘客，当两出租车司机的收益几乎相同时，则认为短途和长途的出租车实现了收益平衡。

仍然以浦东机场为例，设短途的最大里程为x，假设长途的里程数为50km，按白天算，该情况下长途载客的收益为：

$$14+2.5\times12+(50-15)\times3.6=170\text{ 元}$$

时间为：$t=50\min$

短途载客收益：

$$14+2.5\times12+(x-15)\times3.6=3.6x-10$$

时间：　$t=\dfrac{x}{60}\times60=x$ 分钟，燃油成本：$7.3\times6.6\times\dfrac{x}{100}=\dfrac{x}{0.4818}$　元。

那么　$3.6x-10-\dfrac{x}{0.4818}+3.6x\cdot(50-2x)-10=170$

即：$-3.6x^2+181.6x-20=170$

解出$x\approx1$（舍去）和$x\approx24$。

所以当出租车所接乘客的行程为 24 公里以内时，可在送客结束后返回机场，

直接进入上车点接送乘客，使得各出租车司机的收益尽量均衡。

六、模型的评价与推广

6.1 模型的优点

1. 利用排队论的思想，可通过乘客和出租车的到达服从的分布与服务关系，在复杂的情况下研究系统的状态，计算方便；

2. 模型的建立是在对数据的分析与充分挖掘的基础上进行的，根据数据的内在关系，建立系统的内部关系，具有合理性；

3. 生活中需要排队等待的情况都能用排队论分析，具有应用广泛性；

4. 在排队论的基础上增加了α权重系数，可以反映其他因素对模型结果的影响；

5. 创新性的提出了中央环岛候车区——陆侧停车模型，该模型充分利用了同向双车道的条件，利用单队多服务的效率优势，既具备单队列多服务台的效益优越性，又在一定程度上缓解了拥堵的问题。

6.2 模型的缺点

1. 我们考虑到在实际情况中，每个乘客的目的地是不同的，所以机场到城区的路程也不尽相同。由于比赛时间的限制，我们在文中假设路程不变，接下来的想法是运用概率分布分析路程远近，细化模型中对路程的描述部分；

2. 在提出的中央环岛候车区——陆侧停车模型中，中心候车区需要机场配套建设地下通道等设施帮助乘客从航站楼到候车平台，虽然需要一定的成本，但是可以大幅提高出租车的接客效率。

6.3 模型的推广

1. 排队模型适用于被服务者进入系统后不能立即得到服务的场景，如机场与飞机、火车站与火车、飞机与乘客、医院与病人、网络与用户等；

2. 可运用排队模型可为系统的最优设计和系统的最优运营等最优化问题提供支持。

七、参考文献

[1] 颜超，上海市枢纽机场陆侧公共交通管理研究——以浦东国际机场为例，华东师范大学硕士专业学位论文，2015-9

[2] 南宁再加速，2018 年全国各机场平均每架飞机载客人数排名 http://hd3g.gxnews.com.cn/viewthread-16514548.html，2019-9-14

[3] 张杰 郭丽杰 周硕 林彤，运筹学模型及其应用，北京：清华大学出版社，

2012
[4] 澎湃新闻记者 李萌，上海出租车升级换代启动，两大公司将逐渐全部换成途安车型，https://m.thepaper.cn/newsDetail_forward_1303604，2019-9-14
[5] 易车网，大众途安将新增 1.6L 车型 售价或低于 13 万，
http://auto.163.com/15/0618/13/ASD7K51I00084IKF.html，2019-9-14
[6] 车主指南，上海 92 号汽油最新价格，上海 92 号汽油油价查询
https://www.icauto.com.cn/oil/price_310000_2.html，2019-9-14
[7] 邓中伟 季民河，上海市出租汽车出行时空分布 上海市出租汽车出行时空分布规律研究，城市交通，第 10 卷 第 1 期：69-74，2012
[8] 赶集网，上海出租车司机工资分布图，
http://sh.ganji.com/gz_zpczcsiji/?qq-pf-to=pcqq.group，2019-9-14
[9] 新闻晨报记者 苏巍巍 毛懿，浦东机场新建停车场可同时容纳 3000 辆出租车，http://news.carnoc.com/list/131/131988.html，2019-9-14

八、附录

程序 1：绘制决策 A、B 收益曲面图的 matlab 程序

```
clc
clear
load("matlab.mat") %支撑文件内 matlab.mat
x=1:24;
L=1:3000;%表示蓄车池最大容量为 3000[9]
j=1;
Qx=((1+L)./per).*60.*taxi_profit-24.09;
[X,Y]=meshgrid(L,x);
surf(X,Y,Qx,'FaceColor','g','EdgeColor','none');
title("不同时间段、不同停车数的司机收益");
x1=xlabel("停车数");
y1=ylabel("时间段");
z1=zlabel("收益");
hold on;
Qy=Q1-24.09-((1+L)./per).*60.*taxi_profit;
[X,Y]=meshgrid(L,x);
surf(X,Y,Qy,'FaceColor','y','EdgeColor','none');
hold on;
xlable=("停车数");
ylable=("时间");
zlable=("收益");
```

程序 2：绘制时间-需乘出租车人数关系图的 matlab 代码

```
x=0:1:23;%x 轴上的数据，第一个值代表数据开始，第二个值代表间隔，第三个值代表终止
a=[1965,491,98,393,884,884,1081,258,645,1065,1355,839,903,839,
```

```
1420,1420,1226,1129,1355,1420,1065,2162,3439,2948]; %a 数据 y 值
plot(x,a,'-*b'); %线性，颜色，标记
axis([0,23,0,3500])   %确定 x 轴与 y 轴框图大小
set(gca,'XTick',[0:1:23]) %x 轴范围 0-23，间隔 1
xlabel('时间（h）')   %x 轴坐标描述
ylabel('需乘出租车人数（个）') %y 轴坐标描述
```

程序 3：绘制时间-平均每小时进港航班量关系图的 matlab 代码

```
x=0:1:23;%x 轴上的数据，第一个值代表数据开始，第二个值代表间隔，第三个值代表终止
a=[20,5,1,4,9,9,11,8,20,33,42,26,28,26,44,44,38,35,42,44,33,22,35,30]; %a 数据 y 值
plot(x,a,'-*g'); %线性，颜色，标记
axis([0,23,0,45])   %确定 x 轴与 y 轴框图大小
set(gca,'XTick',[0:1:23]) %x 轴范围 0-23，间隔 1
xlabel('时间（h）')   %x 轴坐标描述
ylabel('平均每小时进港航班量（个）') %y 轴坐标描述
```

程序 4：问题三 c 代码

```c
#include <stdio.h>
#include<math.h>

//求阶乘
int getFactorial(int n) {
	int i;
	int sum = 1;
	for(i = 1; i <= n; i++)
		sum = sum * i;
	return sum;
}

int main() {
	//控制外层循环
	int s;
	//存储输出结果
	double storage[8] = {0};
	for(s = 1; s <= 8; s++) {
		//控制内层循环
		int n;
		double total = 0;
		for(n = 0; n <= s - 1; n++) {
			double sum = 0;
			sum = pow(2.41, n) / getFactorial(n);
			total += sum;
		}
```

```
        storage[s - 1] = 1.0 / (total + (pow(2.41, s) / getFactorial(s)) * (1.0 / (1 -
(2.41 / s))));
    }

    //输出结果
    for(s = 1; s <= 8; s++) {
        printf("%f\n", storage[s - 1]);
    }
    return 0;
}
```

程序 5：绘制 S-P 关系图的 matlab 代码

```
x=1:1:8;%x 轴上的数据，第一个值代表数据开始，第二个值代表间隔，第三个值代表终止
 a=[0
0
0.055017
0.082081
0.088025
0.089407
0.089726
0.089797]; %a 数据 y 值
 plot(x,a,'-*k'); %线性，颜色，标记
axis([1,8,0,0.1])   %确定 x 轴与 y 轴框图大小
set(gca,'XTick',[1:1:8]) %x 轴范 1-8，间隔 1
xlabel('S')   %x 轴坐标描述
ylabel('P') %y 轴坐标描述
```