第一题

设A_1 :从第一个盒子里取出2个红球，A_2 :从第一个盒子离取出一个红球一个白球，A_3 :从第一个盒子里取出两个白球，B从第二个盒子中取出白球，则

$$P(A_1)=\frac{5}{18},P(A_2)=\frac{10}{18},P(A_3)=\frac{3}{18},$$

由全概率公式

$$\begin{aligned}P(B)&=P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)+P(B|A_3)P(A_3)\\&=\frac{5}{11}\frac{5}{18}+\frac{6}{11}\frac{10}{18}+\frac{7}{11}\frac{3}{18}\\&=\frac{106}{198}\end{aligned}$$

第二题

设A :此人是男性，B :此人是色盲患者，则

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(AB)}{P(B|A)P(A)+P(B|A^c)P(A^c)}=\frac{\frac{1}{2}\frac{5}{100}}{\frac{1}{2}\frac{5}{100}+\frac{1}{2}\frac{0.25}{100}}=\frac{20}{21}.$$

第三题

(1)因为

$$P(A)=P(A|B)P(B)+P(A|B^c)P(B^c),$$

且$P(B)+P(B^c)=1$，所以

$$P(B)[P(A|B)-P(A)]=P(B^c)[P(A)-P(A|B^c)],$$

当$P(B)\neq 0$时上式两端为正，故$P(A|B^c)>P(A)$。

(2)这里

$$\begin{aligned}P(C|A)&=P(C|B)P(B|A)+P(C|B^c)P(B^c|A),\\P(C)&=P(C|B)P(B)+P(C|B^c)P(B^c),\\P(C|A)-P(C)&=P(C|B)[P(B|A)-P(B)]-P(C|B^c)[P(B^c)-P(B^c|A)]\\&=P(C|B)[P(B|A)-P(B)]-P(C|B^c)[P(B|A)-P(B)]\\&=[P(B|A)-P(B)][P(C|B)-P(C|B^c)],\end{aligned}$$

因为$P(C|B)>P(C)>P(C|B^c)$，$P(B|A)>P(B)$，所以

$$P(C|A)-P(C)>0.$$

第四题

设甲的分数$-$乙的分数差为X，当$X=2$或$X=-2$时游戏结束。设p_i为$X=i$时甲获胜的概率，则

$$\begin{gathered}p_2=1,p_{-2}=0,\\p_1=a+bp_0,\\p_0=ap_1+bp_{-1},\\p_{-1}=ap_0,\end{gathered}$$

代入有

$$p_0 = a^2 + 2abp_0,$$

所以

$$p_0 = \frac{a^2}{1-2ab}.$$