수학1

담당 교수 : **가 연 석**

2020년 계절학기

Main text book : 미분적분학(저자 : 강동오외 15인) 신성

Contents

Chapter 1

함수의 극한과 연속

1.1 함수의 극한

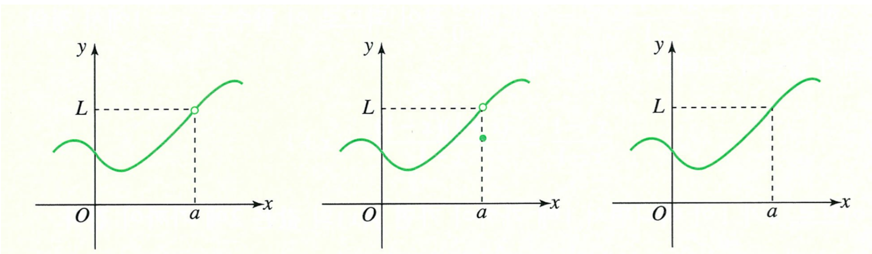
극한의 직관적 정의

Definition 1.1.

x가 a에 접근할 때 $f(x)$의 값이 L에 접근하면

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

로 나타내고 L,을 $x = a$에서 f의 ____________ 이라고 한다.



Example 1.2.

$\lim_{x \to 2}(x^2 - x + 1)$을 구하여라.

Solution.

Example 1.3.

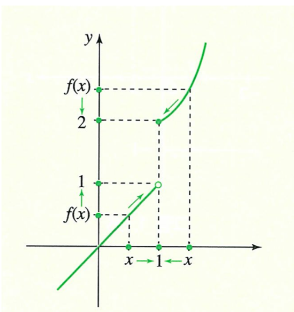
$\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x-3}$을 구하여라.

Solution.

좌극한과 우극한

함수 f를 다음과 같이 정의 하자.

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)^2+2, & \text{if } x\geq 1,\\ x, & \text{if } x<1.\end{cases}$$



$\cdot \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} x=$ ____________

$\cdot \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x-1)^2+2=$ ____________

Definition 1.4. (극한값이 존재하기 위한 조건)

$\lim_{x \to a^-} f(x) = L_1$일때, L_1을 $x \to a^-$의 함수 $f(x)$의 ____________ 이라고 한다.

$\lim_{x \to a^+} f(x) = L_2$일때, L_2을 $x \to a^+$의 함수 $f(x)$의 ____________ 이라고 한다.

Theorem 1.5.

$\lim_{x \to a} f(x) = L$일 필요충분조건은

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L = \lim_{x \to a^+} f(x)\text{이다.}$$

Example 1.6.

$$\lim_{x \to 2^+} [x] =$$
$$\lim_{x \to 2^-} [x] =$$

을 각각 구하여라. $\lim_{x \to 2} [x]$가 존재 하는가??
(단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수를 의미)

Solution.

Example 1.7.

$\lim_{x \to 0} \dfrac{x}{|x|}$를 구하여라. 극한값이 존재하는가??

Solution.

1.2 극한의 성질

함수의 극한을 계산하는데 필요한 성질을 알아보자.

Theorem 1.8.

$$(1)\ \lim_{x\to a} c = c, \qquad (2)\ \lim_{x\to a} x = a$$

Theorem 1.9. (극한의 성질)

$\lim_{x\to a} f(x)$와 $\lim_{x\to a} g(x)$가 존재 할 때, 다음이 성립한다.

$$
\begin{aligned}
&(1)\ \lim_{x\to a}\{f(x) \pm g(x)\} = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) \\
&(2)\ \lim_{x\to a}\{cf(x)\} = c\lim_{x\to a} f(x) \\
&(3)\ \lim_{x\to a}\{f(x)g(x)\} = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x) \\
&(4)\ \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} \quad \text{단, } \lim_{x\to a} g(x) \neq 0 \\
&(5)\ \lim_{x\to a}\{f(x)\}^n = \{\lim_{x\to a} f(x)\}^n \\
&(6)\ \lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}
\end{aligned}
$$

Example 1.10.

$\lim_{x\to 1} f(x) = -1$이고 $\lim_{x\to 1} g(x) = 2$일 때, 다음 극한을 정리를 이용하여 구하여라.

$$(1)\ \lim_{x\to 1}\{f(x) + 3g(x)\} = \underline{\qquad\qquad}$$

$$(2)\ \lim_{x\to 1}\{f(x)g(x)\} = \underline{\qquad\qquad}$$

$$(3)\ \lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \underline{\qquad\qquad}$$

Solution.

Example 1.11.

$\lim_{x \to 4}(3x^2 - 5x + 2)$를 구하여라.

Solution.

Example 1.12.

$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt[3]{x^2 - 1}}{x}$를 구하여라.

Solution.

Theorem 1.13. (다항함수의 극한)

함수 f가 다항함수이면,

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Proof.

Theorem 1.14. (유리함수의 극한)

함수 $f(x)$와 $g(x)$가 다항함수이면,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)}, \quad \text{단, } g(a) \neq 0$$

Proof.

Example 1.15.

$\displaystyle\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$

Solution.

Example 1.16.

$\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^2 - 4}{h}$를 구하여라.

Solution.

Theorem 1.17. (Sandwich 정리)

점a 근방의 모든 x에 대하여 $(x \neq a)$

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

이고, $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$이면,

$$\lim_{x \to a} g(x) = \underline{\hspace{3cm}}\text{이다.}$$

Example 1.18.

$\lim_{x \to 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$ 임을 증명하여라.

Solution.

Example 1.19.

$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$ 임을 증명하여라.

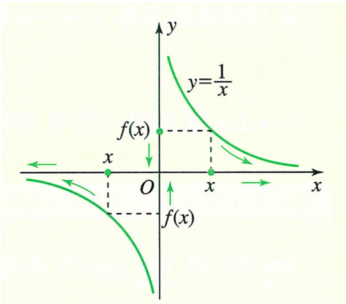
Solution.

(2.5 삼각함수의 도함수에서 더 엄밀하게 증명)

1.3 무한대와 극한

Example 1.20.

(1) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ (2) $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$



$x \to \pm\infty$일때의 극한

Definition 1.21.

$x \to \infty$일 때, $f(x) \to L$이면

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = L$$

로 나타내고 L,을 $x \to \pm\infty$에서 f의 ____________ 이라고 한다.

Theorem 1.22. **($x \to \infty$극한의 성질)**

$\lim_{x\to\infty} f(x)$와 $\lim_{x\to\infty} g(x)$가 존재 할 때, 다음이 성립한다.

$$
\begin{aligned}
&(1)\ \lim_{x\to\infty}\{f(x) \pm g(x)\} = \lim_{x\to\infty} f(x) \pm \lim_{x\to\infty} g(x) \\
&(2)\ \lim_{x\to\infty}\{cf(x)\} = c \lim_{x\to\infty} f(x) \\
&(3)\ \lim_{x\to\infty}\{f(x)g(x)\} = \lim_{x\to\infty} f(x) \lim_{x\to\infty} g(x) \\
&(4)\ \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to\infty} f(x)}{\lim_{x\to\infty} g(x)},\ \underline{\hspace{6cm}}
\end{aligned}
$$

Theorem 1.23.

n이 자연수일 때, n차 다항식

$$p_n = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

에 대하여 다음이 성립한다.

$$\lim_{x\to\infty} p_n(x) = \begin{cases} \infty, & \text{if } a_n > 0, \\ -\infty, & \text{if } a_n < 0. \end{cases}$$

Proof.

Example 1.24.

다음 극한을 구하여라.

(1) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x^2 - 4x}{2x^3 + 1} =$

(2) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{-2x^2 + x - 5}{5x^2 - 6x + 1} =$

Solution.

Example 1.25.

다음 극한을 구하여라.

$$\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+1} - x) =$$

무한대인 극한

Definition 1.26.

a에 충분히 가까운(a를 제외한), 모든 x에 대하여 함수 f가 충분히 큰 경우를 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{x\to\pm a} f(x) = \pm\infty$$

Example 1.27.

$\displaystyle\lim_{x\to 1^{\pm}} \frac{1}{(x-1)^2}$을 구하여라.

Solution.

점근선

함수 $y = f(x)$의 그래프 위의 한점 P가 원점으로부터 점점 멀어지면서 그래프 위를 움직일 때 점 P가 어떤 직선에 점점 가까워지는 경우가 있다. 이 때,

이 직선을 함수 f의 ___________ 이라고 한다.

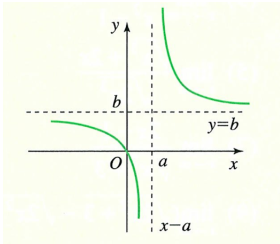
Definition 1.28.

함수 $y = f(x)$에서

(1) $\displaystyle\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ 또는 $\displaystyle\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$일 때, 직선 $x = a$를 함수 f의 ___________ 라 한다.

(2) $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$ 또는 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$일 때, 직선 $y = b$를 함수 f의

___________ 라 한다.



Example 1.29.

함수 $f(x) = \dfrac{3x}{x-1}$의 그래프의 점근선을 구하여라.

Solution.