Actuarial Aspects of Life Insurance

Hyan

版本：1.1
更新：2021 年 9 月 8 日

目录

1 生存分布与生命表

1.1 引言

表 1: 寿险的若干记号

符号	含义
(x)	年龄为 x 的个体
X	新生儿的寿命
$T(x) = X - x$	(x) 的剩余寿命
$K(x) = [T(x)]$	剩余寿命的整年数

表 2: 常见的分布

符号	含义
$F_X(x) = P(X \leq x)$	新生儿于 x 岁前死亡的概率
$s(x) = P(X > x) = 1 - F_X(x)$	新生儿在 x 岁仍然活着的概率
${}_tp_x = P(T(x) > t)$	(x) 在 t 年后仍然生存的概率
${}_tq_x = P(T(x) \leq t) = 1 - {}_tp_x$	(x) 在 t 年内死亡的概率

${}_tp_x$ 与 $s(x)$ 的关系 根据 ${}_tp_x$ 的定义，有

$$\begin{aligned} {}_tp_x = P(T(x) > t) = P(X - x > t|X > x) \\ = \frac{P(X > x + t, X > x)}{P(X > x)} \\ = \frac{s(x+t)}{s(x)} \end{aligned} \tag{1}$$

特别地，当 $t = 1$ 时，可以省略不写，即

$$p_x = {}_1p_x = P(T(x) > 1) \tag{2}$$

$$q_x = {}_1q_x = P(T(x) < 1) \tag{3}$$

用 $t|$ 来表示延期 t （年）。对于 (x) 将在 t 年后的 u 年死亡的概率，用 ${}_{t|u}q_x$ 表示，即

$$\begin{aligned} {}_{t|u}q_x &= P(t < T(x) < t + u) \\ &= P(T(x) < t + u) - P(T(x) < t) \\ &= {}_{t+u}q_x - {}_tq_x \\ &= {}_tp_x - {}_{t+u}p_x \\ &= \frac{s(x+t)}{s(x)} - \frac{s(x+t+u)}{s(x)} \end{aligned} \tag{4}$$

$K(x)$ 的分布 将 $T(x)$ 的整数部分用 $K(x)$ 表示。我们有：

$$\begin{aligned} P(K(x)=k) &= P(k \le T(x) < k+1) \ = \ {}_kp_x q_{x+k} \\ &= P(T(x) < k+1) - P(T(x) < k) \\ &= {}_{k+1}q_x - {}_kq_x \\ &= {}_{k|}q_x \end{aligned} \tag{5}$$

1.2 死亡力

(x) 在 y 岁前死亡的概率 考虑一般的 (x)，其在 $y(>x)$ 岁前死亡的概率为

$$\begin{aligned} P(x < X < y|X > x) &= \frac{F_X(y) - F_X(x)}{s_X(x)} \\ &= \frac{s(x) - s(y)}{s(x)} \end{aligned} \tag{6}$$

令 $y-x$ 为无穷小量，即令 $y-x=\Delta x$. 由式 6，有

$$\begin{aligned} P(x < X < x+\Delta x|X > x) &= \frac{P(x < X < x+\Delta x)}{P(X > x)} \\ &= \frac{F_X(x+\Delta x) - F_X(x)}{1 - F_X(x)} \\ &= \frac{f_X(x)\Delta x}{1 - F_X(x)} \end{aligned} \tag{7}$$

定义 1.1 称

$$\mu(x) = \frac{f_X(x)}{1 - F_X(x)} \tag{8}$$

为新生儿在 $(x, x+\Delta x)$ 区间内的死亡力（死力）. 即

$$P(x < X < x+\Delta x|X > x) = \mu(x)\Delta x \tag{9}$$

记 $F_{T(x)}(x)$ 与 $f_{T(x)}(x)$ 分别为 $T(x)$ 的分布函数和密度函数，我们有

$$\begin{aligned} P(t < T(x) < t+\Delta t|T(x) > t) &= \frac{P(t < T(x) < t+\Delta t)}{P(T(x) < t)} = \frac{f_{T(x)}(t)\Delta t}{1 - F_{T(x)}(t)} \\ &= \frac{P(x+t < X < x+t+\Delta t)}{P(X < x+t)} \\ &= \mu_{x+t}\Delta t \end{aligned} \tag{10}$$

另外，由 μ_x 的表达式可得

$$\begin{aligned} \mu_x &= \frac{-[1 - F_X(x)]'}{1 - F_X(x)} \\ &= \frac{-s'(x)}{s(x)} \\ &= \frac{-\mathrm{d}\ln s(x)}{\mathrm{d}x} \end{aligned} \tag{11}$$

类似地，有

$$\mu_{x+t} = \frac{-\mathrm{d}\ln s(x+t)}{\mathrm{d}t} \tag{12}$$

${}_tp_x$ 与 μ_x 的关系 由式 10，有

$$\begin{aligned}\mu_{x+t} &= \frac{f_{T(x)}(t)}{1-F_{T(x)}(t)} \\ &= \frac{f_{T(x)}(t)}{{}_tp_x}\end{aligned} \tag{13}$$

即

$$f_{T(x)}(t) = {}_tp_x\mu_{x+t} \tag{14}$$

从而有

$$\begin{aligned}\mu_{x+t} &= \frac{f_{T(x)}(t)}{{}_tp_x} \\ &= \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P(T(x)>t)}{{}_tp_x} \\ &= \frac{-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}{}_tp_x}{{}_tp_x}\end{aligned} \tag{15}$$

将上式关于 t 积分，得

$$\int_0^t \mu_{x+s}\mathrm{d}s = -\int_0^t \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}{}_sp_x}{{}_sp_x}\mathrm{d}s \tag{16}$$

解得

$${}_tp_x = \exp\left(-\int_0^t \mu_{x+s}\mathrm{d}s\right) \tag{17}$$

总结 对于 (x) 在 t 年后仍活着的概率 ${}_tp_x$ ，其满足

$$\begin{aligned}{}_tp_x &= P(T(x)>t) \\ &= \frac{s(x+t)}{s(t)} \\ &= \exp\left(-\int_0^t \mu_{x+s}\mathrm{d}s\right) \\ &= 1-F_{T(x)}(t)\end{aligned} \tag{18}$$

1.3 离散生存分布

平均剩余寿命 用 $\mathring{e}_x$ 表示 (x) 的平均剩余寿命。

引理 1.1 *若 X 为非负随机变量，则*

$$E(x) = \int_0^\infty (1-F(x))\mathrm{d}x \tag{19}$$

证明. 由分部积分公式，式 19右端等于

$$\lim_{x\to\infty} x[1-F(x)] + \int_0^\infty x\mathrm{d}F(x) \tag{20}$$

上式中第二项即为 $E(x)$. 当 $E(x)<\infty$ 时，只需证第一项为 0 . 由于

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} x[1-F(x)] &= \lim_{x\to\infty} x\int_x^\infty \mathrm{d}F(y) \\ &\le \lim_{x\to\infty}\int_x^\infty y\mathrm{d}F(y) = 0\end{aligned} \tag{21}$$

当 $E(x)=\infty$ 时，由 $\lim_{x\to\infty} x[1-F(x)] \ge 0$，式 19两边相等.

由引理 1.1，有

$$
\begin{aligned}
\mathring{e}_x &= \int_0^{+\infty} t f_{T(x)}(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} (1 - F_{T(x)}(t))\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\infty} {}_t p_x \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\infty} \exp\left(-\int_0^t \mu_{x+s}\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t
\end{aligned}
\tag{22}
$$