Regression Analysis

Hyan

版本：2.1
更新：2021 年 9 月 7 日

目录

1 随机向量

1.1 均值向量与协方差阵

定义 1.1 设 $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T$ 为 $n\times 1$ 维向量。称

$$E(X)=(Ex_1,\ldots,Ex_n)^T$$

为 X 的均值向量.

定义 1.2 设 $Y=(y_1,y_2,\ldots,y_m)^T$ ，称

$$Cov(X,Y)=E[(X-EX)(Y-EY)^T]$$

为随机向量 X,Y 的协方差矩阵。

定理 1.1 $E(AX+b)=AE(X)+b$.

证明. 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $b=(b_1,\ldots,b_m)^T$, 令

$$Y=AX+b=(Y_1,Y_2,\ldots,Y_m)^T$$

于是有

$$Y_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}X_j+b_i,\ i=1,2,\ldots,m$$

求期望得

$$E(Y_i)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}E(X_j)+E(b_i),\ i=1,2,\ldots,m$$

从而定理 1.1得证.

定理 1.2

$$Cov(AX,BY)=ACov(X,Y)B^T \tag{1}$$

$$Cov(AX)=ACov(X)A^T \tag{2}$$

$$Cov(AX+c)=ACov(X)A^T \tag{3}$$

证明. 只证明式 1.

$$\begin{aligned}Cov(AX,BY)&=E[(AX-E(AX))(BY-E(BY))^T]\\&=E[(AX-AE(X))(BY-BE(Y))^T]\\&=E[A(X-E(X))(Y-E(Y))^TB^T]\\&=ACov(X,Y)B^T\end{aligned} \tag{4}$$

定理 1.3 X 的协方差矩阵为半正定对称矩阵.

证明. $\forall a \neq 0$，有

$$\begin{aligned} a^T Cov(X) a &= a^T E[(X-EX)(X-EX)^T] a \\ &= E[a^T (X-EX)(X-EX)^T a] \\ &= E[(a^T(X-EX))(a^T(X-EX))^T] \\ &= E[(a^T(X-EX))^2] \geq 0. \end{aligned} \tag{5}$$

1.2 随机向量的二次型

定义 1.3 设 A 为 n 阶对称阵。称

$$X^T A X = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j \tag{6}$$

为 X 的二次型.

定理 1.4 设 $EX = \mu, Cov(X) = \Sigma$. 则

$$E(X^T A X) = tr(A\Sigma) + \mu^T A \mu. \tag{7}$$

证明.

$$\begin{aligned} E(X^T A X) &= E[(X-\mu+\mu)^T A (X-\mu+\mu)] \\ &= E[(X-\mu)^T A (X-\mu)] + E[\mu^T A (X-\mu)] + E[(X-\mu)^T A \mu] + E[\mu^T A \mu] \end{aligned} \tag{8}$$

对于中间两项，计算可得

$$\begin{aligned} E[\mu^T A (X-\mu)] &= \mu^T A E(X-\mu) \\ &= \mu^T A [EX-\mu] \\ &= \mu^T A [\mu-\mu] \\ &= 0 \end{aligned} \tag{9}$$

对最后一项，有 $E[\mu^T A \mu] = \mu^T A \mu$;
对第一项，注意到 $(X-\mu)^T A (X-\mu)$ 为一个二次型，其维数为 1，因而有

$$\begin{aligned} E[(X-\mu)^T A (X-\mu)] &= E[tr((X-\mu)^T A (X-\mu))] \\ &= E[tr(A(X-\mu)(X-\mu)^T)] \\ &= tr[AE((X-\mu)(X-\mu)^T)] \\ &= tr(A\Sigma) \end{aligned} \tag{10}$$

式 10中，迹和期望可交换的原因是迹为求和运算，可以和期望交换顺序.

例 1.1 设 $x_1, \ldots, x_n$ 独立同分布. 记 $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$. 定义样本方差为

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \tag{11}$$

其均值满足 $E(s^2) = \sigma^2$.

证明用到了上面的定理 1.4. 通过将样本方差改写为矩阵乘积的形式，将式 11化为二次型的形式，利用定理 1.4求解. 证明的详细过程从略.