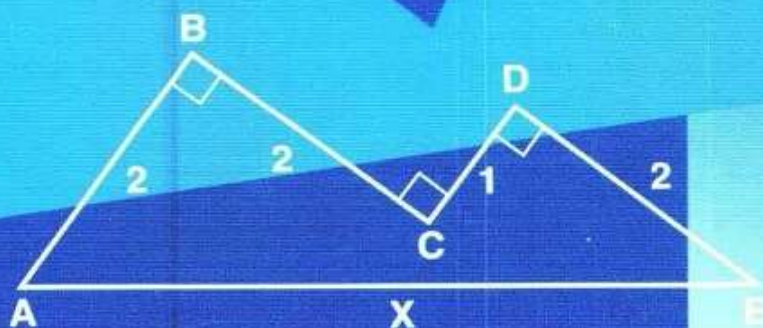


V Û H Û U B Ì N H

# NÂNG CAO VÀ PHÁT TRIỂN TOÁN

7

TẬP MỘT



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM



VŨ HỮU BÌNH

# **NÂNG CAO VÀ PHÁT TRIỂN**

# **TOÁN 7**

**TẬP MỘT**

*(Tái bản lần thứ mười)*

**NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM**

# PHẦN ĐẠI SỐ

## Chương I

### SỐ HỮU TỈ. SỐ THỰC

#### §1. CỘNG, TRỪ, NHÂN, CHIA CÁC SỐ HỮU TỈ

Các phân số bằng nhau biểu diễn cùng một số hữu tỉ. Số hữu tỉ là số có thể viết được dưới dạng phân số  $\frac{a}{b}$  với  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $b \neq 0$ . Tập hợp các số hữu tỉ được kí hiệu là  $\mathbb{Q}$ .

Ta xác định trên  $\mathbb{Q}$  một thứ tự như sau :

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad < bc \quad (a, b, c, d \in \mathbb{Z}; b, d > 0).$$

Ta xác định trên  $\mathbb{Q}$  hai phép toán :

– phép cộng :  $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$  ;

– phép nhân :  $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ .

Phép cộng số hữu tỉ có bốn tính chất : giao hoán, kết hợp, cộng với số 0, cộng với số đối. Phép nhân số hữu tỉ có bốn tính chất : giao hoán, kết hợp, nhân với số 1, nhân với số nghịch đảo.

Giữa phép nhân và phép cộng có quan hệ : phép nhân phân phối đối với phép cộng. Giữa thứ tự và phép toán có quan hệ :

$$x < y \Rightarrow x + z < y + z ;$$

$$x < y \Rightarrow xz < yz \quad \text{với } z > 0 ;$$

$$x < y \Rightarrow xz > yz \quad \text{với } z < 0.$$

Trừ đi một số hữu tỉ là cộng với số đối của số ấy. Chia cho một số hữu tỉ khác 0 là nhân với số nghịch đảo của số ấy. Mọi số hữu tỉ khác 0 đều có số nghịch đảo. Do đó phép chia một số hữu tỉ cho một số hữu tỉ khác 0 bao giờ cũng cho kết quả là một số hữu tỉ.



### Ví dụ 1

a) So sánh tổng và tích của mỗi cặp phân số sau :

$$\frac{7}{5} \text{ và } \frac{7}{2} ; \frac{8}{11} \text{ và } \frac{-8}{3}.$$

b) Cho phân số  $\frac{a}{b} \neq 1$ . Hãy tìm phân số  $\frac{c}{d}$  sao cho  $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$ .

**Giải :**

$$\text{a) } \frac{7}{5} + \frac{7}{2} = \frac{7}{5} \cdot \frac{7}{2} ; \frac{8}{11} + \frac{-8}{3} = \frac{8}{11} \cdot \frac{-8}{3}.$$

b) Với  $b \neq 0, d \neq 0, a \neq b$  thì

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{ad + bc}{bd} = \frac{ac}{bd} \Leftrightarrow ad + bc = ac \Leftrightarrow ad = ac - bc$$

$$\Leftrightarrow ad = c(a - b) \Leftrightarrow \frac{c}{d} = \frac{a}{a - b}.$$

$$\text{Chẳng hạn : Nếu } \frac{a}{b} = \frac{7}{5} \text{ thì } \frac{c}{d} = \frac{7}{7-5} = \frac{7}{2}.$$

$$\text{Nếu } \frac{a}{b} = \frac{8}{11} \text{ thì } \frac{c}{d} = \frac{8}{8-11} = \frac{8}{-3} = \frac{-8}{3}.$$

### Bài tập

1. So sánh các số hữu tỉ :

$$\text{a) } \frac{-18}{91} \text{ và } \frac{-23}{114} ;$$

$$\text{b) } \frac{-22}{35} \text{ và } \frac{-103}{177}.$$

2. Tìm hai phân số có tử bằng 9, biết rằng giá trị của mỗi phân số đó lớn hơn  $\frac{-11}{13}$  và nhỏ hơn  $\frac{-11}{15}$ .

3. Cho các số hữu tỉ  $\frac{a}{b}$  và  $\frac{c}{d}$  với mẫu dương, trong đó  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ . Chứng minh rằng :

$$\text{a) } ad < bc ;$$

$$\text{b) } \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

4. Kí hiệu  $[x]$  là số nguyên lớn nhất không vượt quá  $x$ , gọi là *phần nguyên của  $x$* , chẳng hạn  $[1,5] = 1$ ;  $[5] = 5$ ;  $[-2,5] = -3$ .

a) Hãy tính:  $\left[\frac{-1}{7}\right]$ ;  $[3,7]$ ;  $[-4]$ ;  $\left[\frac{-43}{10}\right]$ .

b) Cho  $x = 3,7$ . So sánh:

$$A = [x] + \left[x + \frac{1}{5}\right] + \left[x + \frac{2}{5}\right] + \left[x + \frac{3}{5}\right] + \left[x + \frac{4}{5}\right] \quad \text{và} \quad B = [5x].$$

c) Tính  $\left[\frac{100}{3}\right] + \left[\frac{100}{3^2}\right] + \left[\frac{100}{3^3}\right] + \left[\frac{100}{3^4}\right]$ .

d) Tính  $\left[\frac{50}{2}\right] + \left[\frac{50}{2^2}\right] + \left[\frac{50}{2^3}\right] + \left[\frac{50}{2^4}\right] + \left[\frac{50}{2^5}\right]$ .

e) Cho  $x \in \mathbb{Q}$ . So sánh  $[x]$  với  $x$ , so sánh  $[x]$  với  $y$  trong đó  $y \in \mathbb{Z}$ ,  $y < x$ .

5. Thực hiện các phép tính:

a)  $\frac{-2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{-1}{6} + \frac{-2}{5}$ ;

b)  $\frac{-2}{3} + \frac{-1}{5} + \frac{3}{4} - \frac{5}{6} - \frac{-7}{10}$ ;

c)  $\frac{1}{2} - \frac{-2}{5} + \frac{1}{3} + \frac{5}{7} - \frac{-1}{6} + \frac{-4}{35} + \frac{1}{41}$ ;

d)  $\frac{1}{100 \cdot 99} - \frac{1}{99 \cdot 98} - \frac{1}{98 \cdot 97} - \dots - \frac{1}{3 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 1}$ .

6. Cho các số hữu tỉ  $x$  bằng  $1,4089$ ;  $0,1398$ ;  $-0,4771$ ;  $-1,2592$ .

a) Viết các số đó dưới dạng tổng của một số nguyên  $a$  và một số thập phân  $b$  không âm nhỏ hơn 1<sup>(\*)</sup>.

b) Tính tổng các số hữu tỉ trên bằng hai cách: tính thông thường, tính tổng các số được viết dưới dạng ở câu a.

c) Hãy so sánh  $a$  và  $[x]$  trong từng trường hợp ở câu a.

(\*) Trong cách viết này,  $a$  là phần nguyên của  $x$ , còn  $b$  là phần lẻ của  $x$ . Kí hiệu phần lẻ của  $x$  là  $\{x\}$  thì  $x = [x] + \{x\}$ .

7. Tìm số nguyên  $n$  để phân số sau có giá trị là một số nguyên và tính giá trị đó :

a)  $A = \frac{3n + 9}{n - 4}$  ;

b)  $B = \frac{6n + 5}{2n - 1}$ .

8. Tìm các số nguyên  $x$  và  $y$ , biết rằng :

$$\frac{5}{x} + \frac{y}{4} = \frac{1}{8}.$$

9. Viết tất cả các số nguyên có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn 20 theo thứ tự tùy ý. Lấy mỗi số trừ đi số thứ tự của nó ta được một hiệu. Tổng của tất cả các hiệu đó bằng bao nhiêu ?

10. Thực hiện các phép tính :

a)  $\frac{\left(\frac{3}{10} - \frac{4}{15} - \frac{7}{20}\right) \cdot \frac{5}{19}}{\left(\frac{1}{14} + \frac{1}{7} - \frac{-3}{35}\right) \cdot \frac{-4}{3}}$  ;

b)  $\frac{(1 + 2 + 3 + \dots + 100) \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{9}\right) \cdot (6,3 \cdot 12 - 21 \cdot 3,6)}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{100}}$  ;

c)  $\frac{\frac{1}{9} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11}}{\frac{4}{9} - \frac{7}{4} - \frac{11}{4}} + \frac{\frac{3}{5} - \frac{3}{25} - \frac{3}{125} - \frac{3}{625}}{\frac{4}{5} - \frac{25}{4} - \frac{125}{4} - \frac{625}{4}}$ .

11. Tìm số hữu tỉ  $x$ , biết rằng :

a)  $\frac{2}{3}x + 4 = -12$  ;

b)  $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} : x = -3$  ;

c)  $|3x - 5| = 4$  ;

d)  $\frac{x+1}{10} + \frac{x+1}{11} + \frac{x+1}{12} = \frac{x+1}{13} + \frac{x+1}{14}$  ;

e\*)  $\frac{x+4}{2000} + \frac{x+3}{2001} = \frac{x+2}{2002} + \frac{x+1}{2003}$ .

12. Chứng minh rằng :  $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{99}{100!} < 1$ .

13. Chứng minh rằng :

$$\frac{1 \cdot 2 - 1}{2!} + \frac{2 \cdot 3 - 1}{3!} + \frac{3 \cdot 4 - 1}{4!} + \dots + \frac{99 \cdot 100 - 1}{100!} < 2.$$

14. a) Người ta viết bảy số hữu tỉ trên một vòng tròn. Tìm các số đó, biết rằng tích của hai số bất kì cạnh nhau bằng 16.

b) Cũng hỏi như trên đối với n số.

15. Có tồn tại hay không hai số dương a và b khác nhau, sao cho  $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{a-b}$  ?

16\*. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{49 \cdot 50} = \frac{1}{26} + \frac{1}{27} + \frac{1}{28} + \dots + \frac{1}{50}.$$

17\*. Cho  $A = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100}$ .

Chứng minh rằng :  $\frac{7}{12} < A < \frac{5}{6}$ .

18. Tìm hai số hữu tỉ a và b, sao cho :

$$a - b = 2(a + b) = a : b.$$

19\*. Tìm hai số hữu tỉ a và b, sao cho  $a + b = ab = a : b$ .

20\*. Tìm số hữu tỉ x, sao cho tổng của số đó với số nghịch đảo của nó là một số nguyên.

~ Ví dụ : 23, 24, 26 đến 29, 33, 58 đến 76.

Bài tập : 135, 139 đến 143, 148 đến 150, 156 đến 160, 212 đến 228, 230 đến 271, 273 đến 275, 277, 278.

## §2. GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI CỦA MỘT SỐ HỮU TỈ

Xem chuyên đề *Giá trị tuyệt đối của một số* ở phần *Chuyên đề*.

~ Ví dụ : 35 đến 43.

Bài tập : 152, 153, 162 đến 164.

### §3. LUYỆN THỪA CỦA MỘT SỐ HỮU TỈ

Lũy thừa bậc  $n$  của một số hữu tỉ  $x$ , kí hiệu  $x^n$ , là tích của  $n$  thừa số  $x$  ( $n$  là một số tự nhiên lớn hơn 1).

Quy ước :  $x^0 = 1$  với  $x \neq 0$  ;  $x^1 = x$ .

Ta có các quy tắc :

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n} ; \quad x^m : x^n = x^{m-n} \text{ (với } x \neq 0, m \geq n \text{)} ;$$

$$(x^m)^n = x^{mn} ; \quad (x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n ; \quad \left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n} \text{ (với } y \neq 0 \text{)}.$$

#### Ví dụ 2

a) Có thể khẳng định rằng  $x^2$  luôn luôn lớn hơn  $x$  hay không ?

b) Khi nào thì  $x^2 < x$  ?

**Giải :**

a) Không thể khẳng định như vậy, chẳng hạn với  $x = \frac{1}{2}$  thì  $\left(\frac{1}{2}\right)^2 < \frac{1}{2}$ .

$$b) x^2 < x \Leftrightarrow x^2 - x < 0 \Leftrightarrow x(x-1) < 0.$$

Xảy ra quan hệ trên nếu  $x$  và  $x-1$  trái dấu. Chú ý rằng  $x-1 < x$  nên phải có  $x-1 < 0, x > 0$  tức là  $0 < x < 1$ . Như vậy với  $0 < x < 1$  thì  $x^2 < x$ .

Cách giải khác, xem ví dụ 30.

#### Ví dụ 3

Tìm các số hữu tỉ  $a, b, c$ , biết rằng :  $ab = 2, bc = 3, ca = 54$ .

**Giải :** Nhân từng vế ba đẳng thức trên, ta được

$$(abc)^2 = 2 \cdot 3 \cdot 54 = 6 \cdot 6 \cdot 9 = (6 \cdot 3)^2 \text{ nên } abc = \pm 18.$$

Nếu  $abc = 18$  thì cùng với  $ab = 2$  suy ra  $c = 9$ , cùng với  $bc = 3$  suy ra  $a = 6$ , cùng với  $ca = 54$  suy ra  $b = \frac{1}{3}$ .

Nếu  $abc = -18$  thì lập luận tương tự như trên suy ra  $c = -9, a = -6, b = -\frac{1}{3}$ .



Có hai đáp số :  $a = 6, b = \frac{1}{3}, c = 9$

và  $a = -6, b = -\frac{1}{3}, c = -9$ .

#### Ví dụ 4

Rút gọn :  $A = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{49} + 5^{50}$ .

Giải :

$$5A = 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + \dots + 5^{50} + 5^{51}$$

$$A = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{49} + 5^{50}$$

Do đó  $5A - A = 5^{51} - 1$ .

$$\text{Vậy } A = \frac{5^{51} - 1}{4}.$$

Nhận xét : Trong biểu thức A, số hạng sau gấp 5 lần số hạng liền trước. Do đó ta tính biểu thức 5A rồi trừ đi A thì được hiệu  $5^{51} - 1$ , từ đó rút gọn được biểu thức A.

#### Ví dụ 5

Cho  $B = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{98} + \left(\frac{1}{2}\right)^{99}$ .

Chứng minh rằng  $B < 1$ .

Giải :

Ta viết :  $2B = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{97}} + \frac{1}{2^{98}}$

$$B = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}}.$$

nên  $2B - B = 1 - \frac{1}{2^{99}}$ .

Do đó  $B < 1$ .

### Bài tập

21. Chứng minh rằng :

a)  $7^6 + 7^5 - 7^4$  chia hết cho 55 ;

b)  $16^5 + 2^{15}$  chia hết cho 33 ;

c)  $81^7 - 27^9 - 9^{13}$  chia hết cho 405.

22. Điền vào chỗ trống (...) các từ "bằng nhau" hoặc "đối nhau" cho đúng :

a) Nếu hai số đối nhau thì bình phương của chúng...

b) Nếu hai số đối nhau thì lập phương của chúng...

c) Lũy thừa chẵn cùng bậc của hai số đối nhau thì ...

d) Lũy thừa lẻ cùng bậc của hai số đối nhau thì...

23. Các đẳng thức sau có đúng với mọi số hữu tỉ a và b hay không ?

a)  $-a^3 = (-a)^3$  ;

b)  $-a^5 = (-a)^5$  ;

c)  $-a^2 = (-a)^2$  ;

d)  $-a^4 = (-a)^4$  ;

e)  $(a-b)^2 = (b-a)^2$  ;

g)  $(a-b)^3 = -(b-a)^3$ .

24. Tính :

a)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{15} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{20}$  ;

b)  $\left(\frac{1}{9}\right)^{25} : \left(\frac{1}{3}\right)^{30}$  ;

c)  $\left(\frac{1}{16}\right)^3 : \left(\frac{1}{8}\right)^2$  ;

d)  $(x^3)^2 : (x^2)^3$  với  $x \neq 0$ .

25. Viết số 64 dưới dạng  $a^n$  với  $a \in \mathbb{Z}$ . Có bao nhiêu cách viết ?

26. Rút gọn biểu thức :

$$A = \frac{4^5 \cdot 9^4 - 2 \cdot 6^9}{2^{10} \cdot 3^8 + 6^8 \cdot 20}$$

27. Cho  $S_n = 1 - 2 + 3 - 4 + \dots + (-1)^{n-1} \cdot n$  với  $n = 1, 2, 3, \dots$

Tính  $S_{35} + S_{60}$ .

28. Cho  $A = 1 - 5 + 9 - 13 + 17 - 21 + 25 - \dots$  (n số hạng, giá trị tuyệt đối của số hạng sau lớn hơn giá trị tuyệt đối của số hạng trước 4 đơn vị, các dấu cộng và trừ xen kẽ).

a) Tính A theo n.

b) Hãy viết số hạng thứ n của biểu thức A theo n (chú ý dùng lũy thừa để biểu thị dấu của số hạng đó).

29. Với giá trị nào của các chữ thì các biểu thức sau có giá trị là số 0, số dương, số âm ?

a)  $P = \frac{a^2 b}{c}$  ;

b)  $Q = \frac{x^3}{yz}$ .