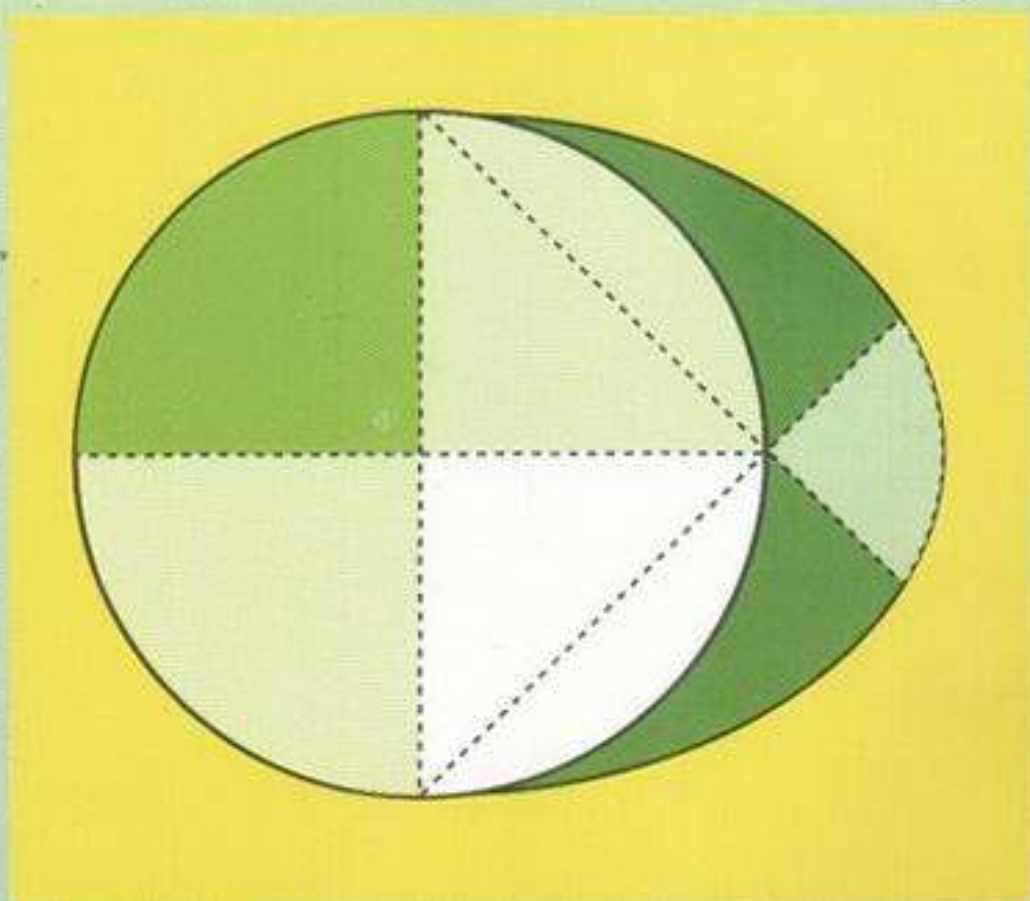


VŨ HỮU BÌNH

**NÂNG CAO
VÀ PHÁT TRIỂN
TOÁN**

6

TẬP HAI



AMBN
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

**NÂNG CAO
VÀ PHÁT TRIỂN
TOÁN 6**

(Tái bản lần thứ mười lăm)

TẬP HAI

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

SỐ HỌC: PHÂN SỐ

Phần I

TÓM TẮT LÝ THUYẾT VÀ BÀI TẬP ỨNG DỤNG

§13. TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA PHÂN SỐ. RÚT GỌN PHÂN SỐ

Số có dạng $\frac{a}{b}$ trong đó $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ gọi là phân số. Số nguyên n được đồng nhất với phân số $\frac{n}{1}$.

Tính chất cơ bản của phân số: $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot m}{b \cdot m} = \frac{a : n}{b : n}$ với $m \in \mathbb{Z}$; $m \neq 0$, $n \in \text{ƯC}(a, b)$.

Nếu $(|a|, |b|) = 1$ thì $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Nếu $\frac{m}{n}$ là dạng tối giản của phân số $\frac{a}{b}$ thì tồn tại số nguyên k sao cho $a = mk$, $b = nk$.

Ví dụ 98. Tìm số tự nhiên n để phân số $A = \frac{n+10}{2n-8}$ có giá trị là một số nguyên.

Giải. Để phân số A có giá trị là một số nguyên thì tử phải chia hết cho mẫu. Ta có:

$$n + 10 : 2n - 8$$

$$\Rightarrow n + 10 : n - 4$$

$$\Rightarrow n - 4 + 14 : n - 4$$

$$\Rightarrow 14 : n - 4.$$

Do đó $n - 4$ phải là ước của 14. Các ước của 14 là $\pm 1, \pm 2, \pm 7, \pm 14$.

Ta có nhận xét $n - 4 \geq -4$ (vì n là số tự nhiên) nên $n - 4$ chỉ nhận các giá trị: $\pm 1, \pm 2, 7, 14$. Ta có:

$n - 4$	1	-1	2	-2	7	14
n	5	3	6	2	11	18
A	$\frac{15}{2}$ loại	$\frac{13}{-2}$ loại	$\frac{16}{4} = 4$	$\frac{12}{-4} = -3$	$\frac{21}{14}$ loại	$\frac{28}{28} = 1$

Ta tìm được ba giá trị của n :

Với $n = 6$ thì $A = 4$, với $n = 2$ thì $A = -3$, với $n = 18$ thì $A = 1$.

Chú ý. Các giá trị của n bằng 5, 3, 11 làm cho giá trị tương ứng của A không là số nguyên. Sở dĩ ta phải tính giá trị của A mới kết luận được n bằng 6, 2, 18 vì trong lời giải trên ta chỉ có : " $n + 10 : 2n - 8 \Rightarrow n + 10 : n - 4$ " chứ không có điều ngược lại.

Ví dụ 99. Tìm số tự nhiên n để phân số $A = \frac{21n+3}{6n+4}$ rút gọn được.

Giải. Giả sử tử và mẫu của phân số cùng chia hết cho số nguyên tố $d \Rightarrow 7(6n+4) - 2(21n+3)$ chia hết cho $d \Rightarrow 22$ chia hết cho số nguyên tố $d \Rightarrow d \in \{2; 11\}$.

Như vậy nếu phân số A rút gọn được cho số nguyên tố d thì $d = 2$ hoặc $d = 11$.

Trường hợp phân số rút gọn cho 2 : Ta luôn luôn có $6n+4$ chia hết cho 2, còn $21n+3$ chia hết cho 2 nếu n lẻ.

Trường hợp phân số rút gọn cho 11: Ta có $21n+3$ chia hết cho 11 $\Rightarrow 22n - n + 3$ chia hết cho 11 $\Rightarrow n - 3$ chia hết cho 11. Đảo lại với $n = 11k + 3$ ($k \in \mathbb{N}$) thì $21n+3$ và $6n+4$ chia hết cho 11.

Vậy với n lẻ hoặc n chẵn mà $n = 11k + 3$ thì phân số A rút gọn được.

Chú ý rằng n chẵn khi và chỉ khi k lẻ ($k = 2m + 1$) nên kết quả trên có thể viết là $n = 2m + 1$ hoặc $n = 2(11m + 7)$ với $m \in \mathbb{N}$.

Ví dụ 100. Tìm các số tự nhiên a, b, c, d nhỏ nhất sao cho $\frac{a}{b} = \frac{3}{5}$,

$$\frac{b}{c} = \frac{12}{21}, \frac{c}{d} = \frac{6}{11}.$$

Giải. Rút gọn $\frac{12}{21} = \frac{4}{7}$. Các phân số $\frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \frac{6}{11}$ tối giản nên tồn tại các số tự nhiên k, n, m sao cho $a = 3k, b = 5k, b = 4n, c = 7n, c = 6m, d = 11m$.

Từ các đẳng thức $5k = 4n$ và $7n = 6m$ ta có $4n$ chia hết cho 5, $7n$ chia hết cho 6, mà $(4,5) = 1, (7,6) = 1$ nên n chia hết cho 5, n chia hết cho 6. Mặt khác $(5,6) = 1$, do đó n chia hết cho 30.

Để các số tự nhiên a, b, c, d nhỏ nhất và phải khác 0, ta chọn n nhỏ nhất bằng 30. Suy ra $k = 24, m = 35$.

Vậy $a = 72, b = 120, c = 210, d = 385$.

BÀI TẬP

396. Rút gọn các phân số sau :

a) $\frac{199 \dots 9}{99 \dots 95}$ (10 chữ số 9 ở tử, 10 chữ số 9 ở mẫu);

b) $\frac{121212}{424242}$;

c) $\frac{187187187}{221221221}$;

d) $\frac{3.7.13.37.39 - 10101}{505050 + 70707}$.

397. Chứng minh rằng các phân số sau có giá trị là số tự nhiên :

a) $\frac{10^{2002} + 2}{3}$;

b) $\frac{10^{2003} + 8}{9}$.

398. Chứng minh rằng các phân số sau bằng nhau :

a) $\frac{1717}{2929}$ và $\frac{171717}{292929}$.

b) $\frac{3210 - 34}{4170 - 41}$ và $\frac{6420 - 68}{8340 - 82}$.

c) $\frac{2106}{7320}, \frac{4212}{14640}$ và $\frac{6318}{21960}$.

399. Tìm các số nguyên x, y biết rằng :

a) $\frac{x}{3} = \frac{5}{y}$; b) $\frac{x}{y} = \frac{28}{35}$.

400. Tìm các số phân số $\frac{a}{b}$ có giá trị bằng :

a) $\frac{36}{45}$, biết BCNN $(a, b) = 300$;

b) $\frac{21}{35}$, biết ƯCLN $(a, b) = 30$;

c) $\frac{15}{35}$, biết ƯCLN $(a, b) \cdot \text{BCNN}(a, b) = 3549$.

401. Chứng minh rằng hai phân số sau tối giản với mọi số tự nhiên n :

a) $\frac{n+1}{2n+3}$; b) $\frac{2n+3}{4n+8}$; c) $\frac{3n+2}{5n+3}$.

402. Cho phân số $A = \frac{63}{3n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$).

a) Với giá trị nào của n thì A rút gọn được ?

b) Với giá trị nào của n thì A là số tự nhiên ?

403. Tìm các số tự nhiên n để các phân số sau là phân số tối giản :

a) $\frac{2n+3}{4n+1}$; b) $\frac{3n+2}{7n+1}$; c) $\frac{2n+7}{5n+2}$.

404. Tìm số tự nhiên n để phân số $\frac{n+3}{2n-2}$ có giá trị là số nguyên.

405. Tìm các số nguyên n sao cho các phân số sau có giá trị là số nguyên :

a) $\frac{12}{3n-1}$; b) $\frac{2n+3}{7}$.

406. Tìm số tự nhiên n để phân số $A = \frac{8n+193}{4n+3}$:

a) Có giá trị là số tự nhiên ;

b) Là phân số tối giản ;

c) Với giá trị nào của n trong khoảng từ 150 đến 170 thì phân số A rút gọn được ?

407. Tìm các phân số tối giản nhỏ hơn 1 có tử và mẫu đều dương, biết rằng tích của tử và mẫu của phân số bằng 120.

408. Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất để các phân số sau đều là phân số tối giản :

$$\frac{5}{n+8}, \frac{6}{n+9}, \frac{7}{n+10}, \dots, \frac{17}{n+20}.$$

409. Cho ba phân số $\frac{15}{42}, \frac{49}{56}, \frac{36}{51}$. Biến đổi ba phân số trên thành các phân số bằng chúng sao cho mẫu của phân số thứ nhất bằng tử của phân số thứ hai, mẫu của phân số thứ hai bằng tử của phân số thứ ba.

410. Tìm các phân số lớn hơn $\frac{1}{5}$ và khác số tự nhiên biết rằng nếu lấy mẫu nhân với một số, lấy tử cộng với số đó thì giá trị của phân số không đổi.

411. Cho phân số :

$$A = \frac{23+22+21+\dots+13}{11+10+9+\dots+1}.$$

Hãy nêu cách xoá một số hạng ở tử và một số hạng ở mẫu của A để được một phân số mới vẫn bằng phân số A.

412. Đố-vui : Bộ sử Hu-me

Người Anh có thói quen xếp bộ sử nước Anh của Hu-me gồm chín tập ở tủ sách đặc biệt gồm hai ngăn : ngăn trên xếp năm cuốn, ngăn dưới xếp bốn cuốn, ở gáy các cuốn sách đó ghi các số 1, 2, 3, ..., 9. Nếu chủ nhân xếp $\frac{13458}{6729}$ (phân số này có giá trị bằng 2) thì chứng tỏ chủ nhân đã đọc

hai tập (riêng trường hợp mới đọc một tập thì xếp $\frac{12345}{6789}$). Hãy nêu cách xếp chín cuốn sách đó để chứng tỏ chủ nhân của bộ sách đã đọc 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 tập.

~ Ví dụ 130.

Bài tập 444, 489, 519, 520.

§14. SO SÁNH PHÂN SỐ

Xem chuyên đề *Bất đẳng thức*.

~ Ví dụ 116 đến 118, 121, 132.

Bài tập 459 đến 465, 469, 488.

§15. CÁC PHÉP TÍNH VỀ PHÂN SỐ

Ví dụ 101. Rút gọn:

$$A = \frac{2 - \frac{2}{19} + \frac{2}{43} - \frac{2}{1943}}{3 - \frac{3}{19} + \frac{3}{43} - \frac{3}{1943}} : \frac{4 - \frac{4}{29} + \frac{4}{41} - \frac{4}{2941}}{5 - \frac{5}{29} + \frac{5}{41} - \frac{5}{2941}}.$$

Giải.

$$\begin{aligned} A &= \frac{2\left(1 - \frac{1}{19} + \frac{1}{43} - \frac{1}{1943}\right)}{3\left(1 - \frac{1}{19} + \frac{1}{43} - \frac{1}{1943}\right)} : \frac{4\left(1 - \frac{1}{29} + \frac{1}{41} - \frac{1}{2941}\right)}{5\left(1 - \frac{1}{29} + \frac{1}{41} - \frac{1}{2941}\right)} \\ &= \frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

Ví dụ 102.

a) Từ các kết quả sau, hãy rút ra nhận xét và chứng minh nhận xét ấy :

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3};$$

$$\frac{3}{1} - \frac{2}{1} = 1.$$

$$\frac{7}{16} \cdot \frac{7}{23} = \frac{7}{16} - \frac{7}{23};$$

$$\frac{23}{7} - \frac{16}{7} = 1.$$

b) Tính $A = \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{7} + \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{11} + \frac{4}{11} \cdot \frac{4}{15} + \dots + \frac{4}{95} \cdot \frac{4}{99}.$

Giải. a) *Nhận xét:* Nếu hai phân số có hiệu các nghịch đảo bằng 1 thì tích của hai phân số ấy bằng hiệu của chúng.

Chứng minh: Xét hai phân số $\frac{a}{b}$ và $\frac{c}{d}$ có $\frac{d}{c} - \frac{b}{a} = 1$ (1).

Cần chứng minh rằng $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b} - \frac{c}{d}.$

Ta có : $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$ (2).

Từ (1) suy ra $\frac{ad - bc}{ac} = 1 \Rightarrow ad - bc = ac$ (3).

Thay (3) vào (2) : $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}.$

b) Mỗi số hạng của tổng A là tích của hai phân số có hiệu các nghịch đảo bằng 1 (vì $\frac{7}{4} - \frac{3}{4} = 1, \frac{11}{4} - \frac{7}{4} = 1, \dots, \frac{99}{4} - \frac{95}{4} = 1$). Do đó theo nhận xét câu a) ta có :

$$A = \frac{4}{3} - \frac{4}{7} + \frac{4}{7} - \frac{4}{11} + \frac{4}{11} - \frac{4}{15} + \dots + \frac{4}{95} - \frac{4}{99} = \frac{4}{3} - \frac{4}{99} = \frac{128}{99}.$$

Ví dụ 103. Tìm các số nguyên x, y sao cho :

$$\frac{3}{x} + \frac{y}{3} = \frac{5}{6}.$$

Giải.

$$\frac{3}{x} = \frac{5}{6} - \frac{y}{3} = \frac{5}{6} - \frac{2y}{6} = \frac{5 - 2y}{6}.$$

Do đó $x(5 - 2y) = 18 = 2 \cdot 3^2.$

Do x và y là các số nguyên nên $5 - 2y$ là ước của 18, mặt khác $5 - 2y$ là số lẻ. Ước lẻ của 18 là $\pm 1, \pm 3, \pm 9$. Ta có :

$5 - 2y$	1	-1	3	-3	9	-9
$2y$	4	6	2	8	-4	14
y	2	3	1	4	-2	7
x	18	-18	6	-6	2	-2

Có sáu cặp số x, y ở bảng trên thoả mãn bài toán.

BÀI TẬP

413. Thực hiện các phép tính :

a) $\frac{2}{5} + \frac{-1}{6} - \frac{3}{4} - \frac{-2}{3};$

b) $\frac{7}{10} - \frac{-3}{4} + \frac{-5}{6} - \frac{1}{5} + \frac{-2}{3};$

c) $\frac{\left(\frac{1}{2} - 0,75\right) \cdot \left(0,2 - \frac{2}{5}\right)}{\frac{5}{9} - 1\frac{1}{12}};$

d) $\frac{\frac{2}{3} + \frac{2}{7} - \frac{1}{14}}{-1 - \frac{3}{7} + \frac{3}{28}}.$

414. Tính nhanh các biểu thức sau :

a) $\left(\frac{84}{13}\right)^2 + \left(\frac{35}{13}\right)^2;$

b) $\frac{12 - \frac{12}{7} - \frac{12}{289} - \frac{12}{85}}{4 - \frac{4}{7} - \frac{4}{289} - \frac{4}{85}} \cdot \frac{3 + \frac{3}{13} + \frac{3}{169} + \frac{3}{91}}{7 + \frac{7}{13} + \frac{7}{169} + \frac{7}{91}};$

c) $\frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 + 5 \cdot 10}{3 \cdot 4 + 6 \cdot 8 + 9 \cdot 12 + 12 \cdot 16 + 15 \cdot 20}.$

415. Tìm x , biết :

a) $\frac{3}{4}x + 1 = -2;$

b) $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} : x = -1;$

c) $|2x - 1| = 5.$

416. Tìm các giá trị nguyên của n để các phân số sau có giá trị là số nguyên :

$$a) A = \frac{3n+4}{n-1}; \quad b) B = \frac{6n-3}{3n+1}.$$

417. Thực hiện các phép tính :

$$a) A = \frac{1,6 : \left(1\frac{3}{5} \cdot 1,25\right)}{0,64 - \frac{1}{25}} + \frac{\left(1,08 - \frac{2}{25}\right) : \frac{4}{7}}{\left(5\frac{5}{9} - 2\frac{1}{4}\right) \cdot 2\frac{2}{17}} + 0,6 \cdot 0,5 : \frac{2}{5};$$

$$b) B = 8\frac{1}{5} \cdot \left(11\frac{94}{1591} - 6\frac{38}{1517}\right) : 8\frac{11}{43};$$

$$c) C = 10101 \cdot \left(\frac{5}{111111} + \frac{5}{222222} - \frac{4}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37}\right).$$

418. a) Tìm các số tự nhiên a, b sao cho :

$$\frac{a}{2} + \frac{b}{3} = \frac{a+b}{2+3}.$$

b) Tìm các số tự nhiên a, b, c sao cho :

$$\frac{52}{9} = 5 + \frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}}}.$$

c) Tìm các chữ số a, b, c khác nhau sao cho :

$$\overline{a, bc} : (a + b + c) = 0,25.$$

419. Tính tổng các phân số tối giản lớn hơn 15 nhưng nhỏ hơn 30 và có mẫu bằng 17.

420. Tìm các số tự nhiên x và y sao cho :

$$a) \frac{x}{3} - \frac{4}{y} = \frac{1}{5}; \quad b) \frac{4}{x} + \frac{y}{3} = \frac{5}{6}.$$

421. Tìm các số nguyên x và y sao cho :

$$a) \frac{5}{x} - \frac{y}{3} = \frac{1}{6}; \quad b) \frac{x}{6} - \frac{2}{y} = \frac{1}{30}.$$

422. Chứng minh rằng các phân số sau có thể viết được dưới dạng tổng các phân số có tử bằng 1, mẫu dương và khác nhau :

$$a) \frac{1}{6}; \quad b) \frac{15}{22}; \quad c) \frac{5}{11}.$$