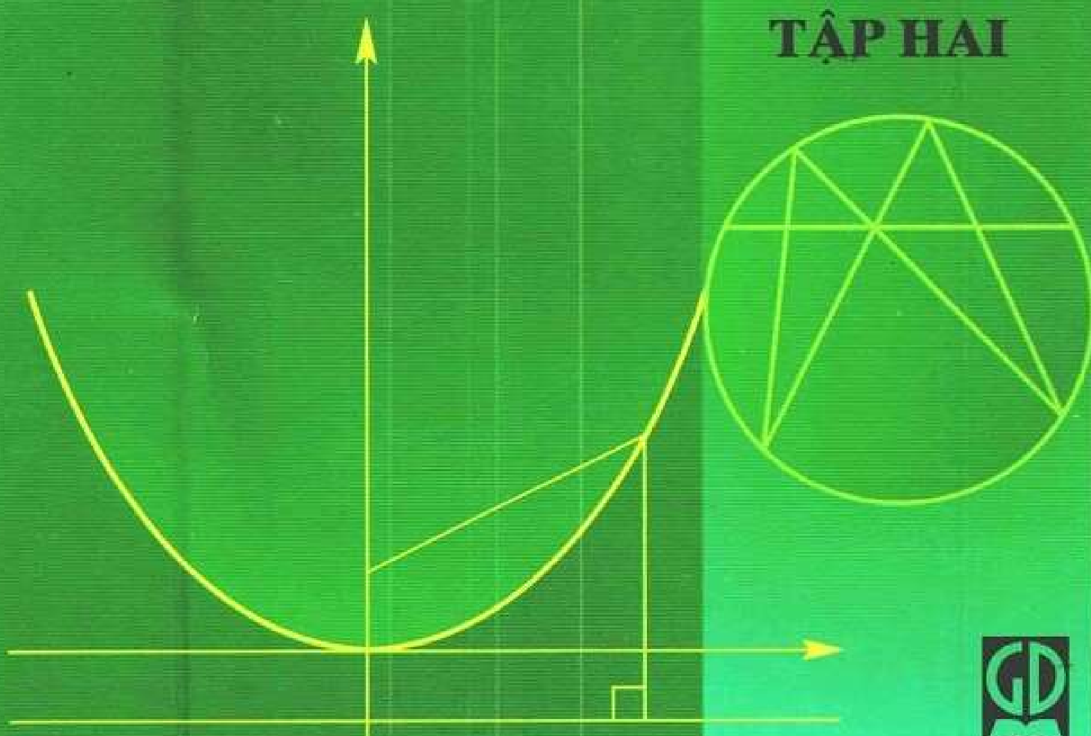
VŨ HỮU BÌNH

NÂNG CAO VÀ PHÁT TRIỂN TOÁN 9

TẬP HAI



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

VŨ HỮU BÌNH

NÂNG CAO VÀ PHÁT TRIỂN

TOÁN 9

TẬP HAI

(Tái bản lần thứ bảy)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

PHẦN ĐẠI SỐ

Chương III
HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

§12. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Phương trình bậc nhất hai ẩn là phương trình có dạng $ax + by = c$, trong đó a, b, c là các số đã biết ($a \neq 0$ hoặc $b \neq 0$), x và y là các ẩn.

Phương trình bậc nhất hai ẩn $ax + by = c$ luôn có vô số nghiệm. Tập nghiệm của nó được biểu diễn bởi một đường thẳng :

– Khi $a \neq 0$ và $b \neq 0$ ta có $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$, đường thẳng cắt cả hai trục toạ độ, đó là đồ thị của hàm số bậc nhất.

– Khi $a = 0$ và $b \neq 0$, ta có $y = \frac{c}{b}$, đường thẳng vuông góc với trục tung, đó là đồ thị của hàm hằng.

– Khi $b = 0$ và $a \neq 0$, ta có $x = \frac{c}{a}$, đường thẳng vuông góc với trục hoành.

Ví dụ 66. Cho đường thẳng :

$$(m - 2)x + (m - 1)y = 1 \text{ (m là tham số).} \qquad (1)$$

a) Chứng minh rằng đường thẳng (1) luôn đi qua một điểm cố định với mọi giá trị của m.

b) Tìm giá trị của m để khoảng cách từ gốc toạ độ O đến đường thẳng (1) là lớn nhất.

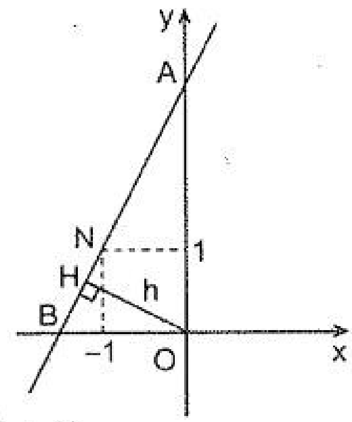
Giải : a) Điều kiện cần và đủ để đường thẳng $(m - 2)x + (m - 1)y = 1$ đi qua điểm cố định $N(x_o, y_o)$ với mọi m là :

$(m-2)x_o + (m-1)y_o = 1$ với mọi m

$\Leftrightarrow mx_o - 2x_o + my_o - y_o - 1 = 0$ với mọi m

$\Leftrightarrow (x_o + y_o)m - (2x_o + y_o + 1) = 0$ với mọi m

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_o + y_o = 0 \\ 2x_o + y_o + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_o = -1 \\ y_o = 1 \end{cases}$$



Hình 1

Vậy các đường thẳng (1) luôn đi qua điểm cố định N(–1 ; 1).

b) Gọi h là khoảng cách từ O đến đường thẳng (1)

Nếu m = 2 thì y = 1, ta có h = 1. (2)

Nếu m = 1 thì x = –1, ta có h = 1. (3)

Xét $m \neq 1$, $m \neq 2$ (h.1) Gọi A là giao điểm của đường thẳng (1) với trục tung. Với x = 0 thì $y = \dfrac{1}{m-1}$, do đó $OA = \dfrac{1}{|m-1|}$.

Gọi B là giao điểm của đường thẳng (1) với trục hoành. Với y = 0 thì $x = \dfrac{1}{m-2}$ do đó $OB = \dfrac{1}{|m-2|}$.

Ta có $\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} = (m-1)^2 + (m-2)^2 = 2m^2 - 6m + 5$

$$= 2\left(m - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}.$$ Suy ra $h^2 \leq 2$. (4)

Từ (2), (3), (4) suy ra max $h = \sqrt{2}$ khi và chỉ khi $m = \dfrac{3}{2}$.

Ví dụ 67. Tìm các điểm thuộc đường thẳng 3x –5y = 8 có toạ độ là các số nguyên và nằm trên dải song song tạo bởi hai đường thẳng y = 10 và y = 20 (phần tô màu xám trên hình 2).

Giải : Cần tìm các số nguyên x, y thoả mãn cả hai điều kiện

$$\begin{cases} 3x - 5y = 8 & (1) \\ 10 \leq y \leq 20 & (2) \end{cases}$$

Trước hết ta giải phương trình (1) với nghiệm nguyên.

Cách 1. Rút x từ (1) ta được

$$x = \frac{5y+8}{3} = 2y + 3 - \frac{y+1}{3}.$$

(1) có nghiệm nguyên $\Leftrightarrow \frac{y+1}{3} = k$ (k nguyên)

$$\Leftrightarrow y = 3k - 1,\ x = 2(3k-1) + 3 - k = 5k + 1.$$

Nghiệm nguyên của (1) là $(5k + 1 ; 3k - 1)$ với k nguyên.

Thay biểu thức của x vào (2) được

$$10 \le 3k - 1 \le 20 \Leftrightarrow 11 \le 3k \le 21 \Leftrightarrow k \in \{4 ; 5 ; 6 ; 7\}.$$

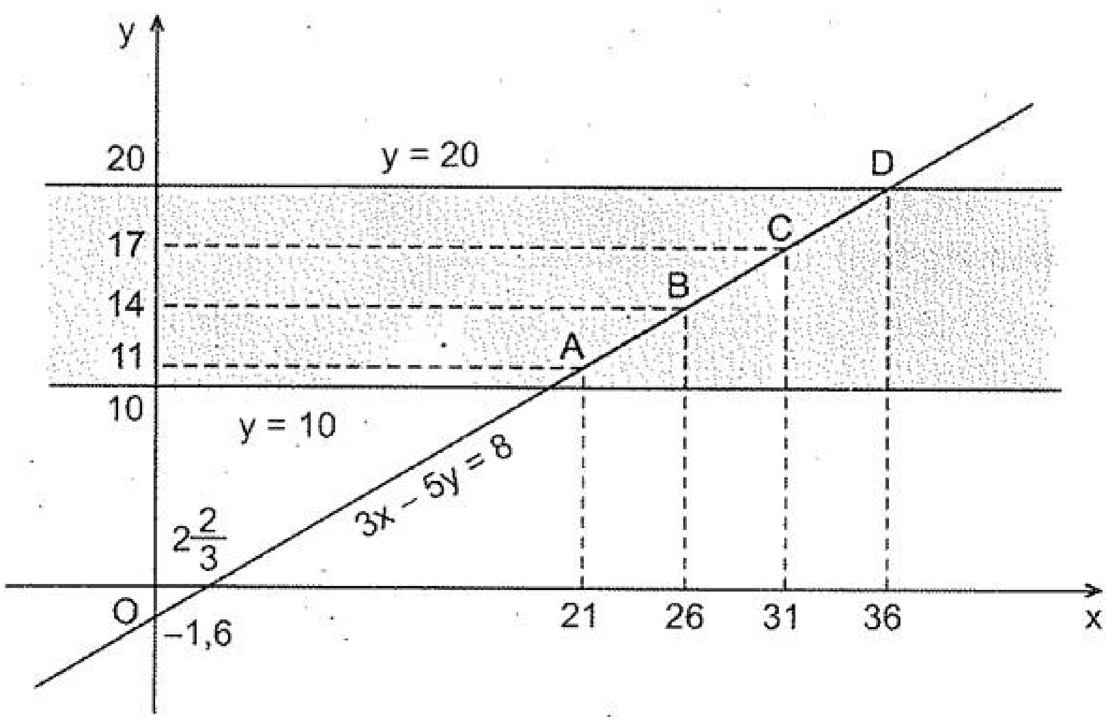
k	4	5	6	7
$x = 5k + 1$	21	26	31	36
$y = 3k - 1$	11	14	17	20

Có bốn điểm thoả mãn đề bài là A(21 ; 11), B(26 ; 14), C(31 ; 17), D(36 ; 20) trên hình 2.

Cách 2. $5y + 8 = 3x$ chia hết cho $3 \Rightarrow (6y + 9) - (y + 1) \vdots 3 \Rightarrow y + 1 \vdots 3$

$$\Rightarrow y = 3k - 1 \text{ với k nguyên.}$$

Do đó $x = 5k + 1$. Sau đó giải tiếp như cách 1.



Hình 2

Bài tập

198. Xét các đường thẳng d có phương trình :

$$(2m + 3)x + (m + 5)y + (4m - 1) = 0 \text{ (m là tham số).}$$

a) Vẽ đường thẳng d ứng với $m = -1$.

b) Tìm điểm cố định mà mọi đường thẳng d đều đi qua.

199. Tìm các giá trị của b và c để các đường thẳng

$4x + by + c = 0$ và $cx - 3y + 9 = 0$ trùng nhau.

200. Vẽ đồ thị biểu diễn tập nghiệm của phương trình $x^2 - 2xy + y^2 = 1$.

201. Đường thẳng $ax + by = 6$ (với $a > 0$, $b > 0$) tạo với các trục toạ độ một tam giác có diện tích bằng 9. Tìm tích ab.

202. Cho đường thẳng

$$(m + 2)x - my = -1 \text{ (m là tham số).} \qquad (1)$$

a) Tìm điểm cố định mà đường thẳng (1) luôn đi qua.

b) Tìm giá trị của m để khoảng cách từ gốc toạ độ O đến đường thẳng (1) là lớn nhất.

203*. Trong hệ trục toạ độ Oxy, lấy các điểm A và B sao cho A(1 ; 1), B(9 ; 1). Viết phương trình của đường thẳng d vuông góc với AB và chia tam giác OAB thành hai phần có diện tích bằng nhau.

204. Tìm các điểm nằm trên đường thẳng $8x + 9y = -79$, có hoành độ và tung độ là các số nguyên và nằm bên trong góc vuông phần tư III.

205. Cho hai điểm A và B có toạ độ A(3 ; 17), B(33 ; 193).

a) Viết phương trình của đường thẳng AB.

b) Có bao nhiêu điểm thuộc đoạn thẳng AB và có hoành độ và tung độ là các số nguyên ?

206. a) Vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}$.

b)* Có bao nhiêu điểm nằm trên cạnh hoặc nằm trong tam giác tạo bởi ba đường thẳng $x = 6$, $y = 0$, $y = \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}$ và có hoành độ và tung độ là các số nguyên ?

§13. HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn là hệ phương trình có dạng

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

trong đó $ax + by = c$ và $a'x + b'y = c'$ là những phương trình bậc nhất hai ẩn.

Ví dụ 68. Cho hệ phương trình với tham số a :

$$\begin{cases} (a+1)x - y = a + 1 & (1) \\ x + (a-1)y = 2 & (2) \end{cases}$$

a) Giải hệ phương trình với $a = 2$.

b) Giải và biện luận hệ phương trình.

c) Tìm các giá trị nguyên của a để hệ phương trình có nghiệm nguyên.

d) Tìm các giá trị nguyên của a để nghiệm của hệ phương trình thoả mãn điều kiện $x + y$ nhỏ nhất.

Giải : a) $x = \dfrac{5}{4}$, $y = \dfrac{3}{4}$. Bạn đọc tự giải.

b) Rút y từ (1) : $y = (a+1)x - (a+1)$. Thay vào (2) được

$$x + (a^2 - 1)x - (a^2 - 1) = 2 \Leftrightarrow a^2x = a^2 + 1. \qquad (3)$$

Nếu $a \neq 0$ thì $x = \dfrac{a^2+1}{a^2}$. Khi đó $y = \dfrac{a+1}{a^2}$.

Hệ có một nghiệm duy nhất $\left(\dfrac{a^2+1}{a^2} ; \dfrac{a+1}{a^2}\right)$.

Nếu $a = 0$ thì (3) là $0x = 1$, vô nghiệm. Hệ đã cho vô nghiệm.

c) *Điều kiện cần.* Ta phải có $a^2 + 1 \vdots a^2 \Rightarrow 1 \vdots a^2 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$.

Điều kiện đủ. Với $a = 1$ thì $x = 2$, $y = 2$.

Với $a = -1$ thì $x = 2$, $y = 0$.

Vậy các trị nguyên của a phải tìm là 1 và -1.

d) Ta có $x + y = \dfrac{a^2 + a + 2}{a^2} = 1 + \dfrac{1}{a} + \dfrac{2}{a^2}$ (với $a \neq 0$).

Đặt $\frac{1}{a} = z$, ta có

$$x + y = 1 + z + 2z^2 = 2\left(z^2 + \frac{z}{2} + \frac{1}{16}\right) + \frac{7}{8} = 2\left(z + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} \geq \frac{7}{8}.$$

Vậy min $(x + y) = \frac{7}{8}$ khi và chỉ khi $z = -\frac{1}{4}$, tức là $a = -4$.

Ví dụ 69. Tìm các số nguyên a, b,c thoả mãn cả hai phương trình

$$2a + 3b = 6 \text{ và } 3a + 4c = 1.$$

Giải : Để khử a, ta biến đổi các phương trình đã cho thành $6a + 9b = 18$ và $6a + 8c = 2$. Suy ra $9b - 8c = 16$. Do đó $c = \frac{9b - 16}{8} = b - 2 + \frac{b}{8}$.

b và c là các số nguyên khi và chỉ khi $\frac{b}{8}$ là số nguyên.

Đặt $b = 8k$ ($k \in \mathbf{Z}$) thì $c = 8k - 2 + k = 9k - 2$.

Thay vào $3a + 4c = 1$ được $3a = 1 - 4(9k - 2) = -36k + 9$, do đó $a = -12k + 3$.

Các số nguyên a, b, c phải tìm có dạng : $a = -12k + 3$, $b = 8k$, $c = 9k - 2$ với $k \in \mathbf{Z}$.

Ví dụ 70*. Cho các đường thẳng :

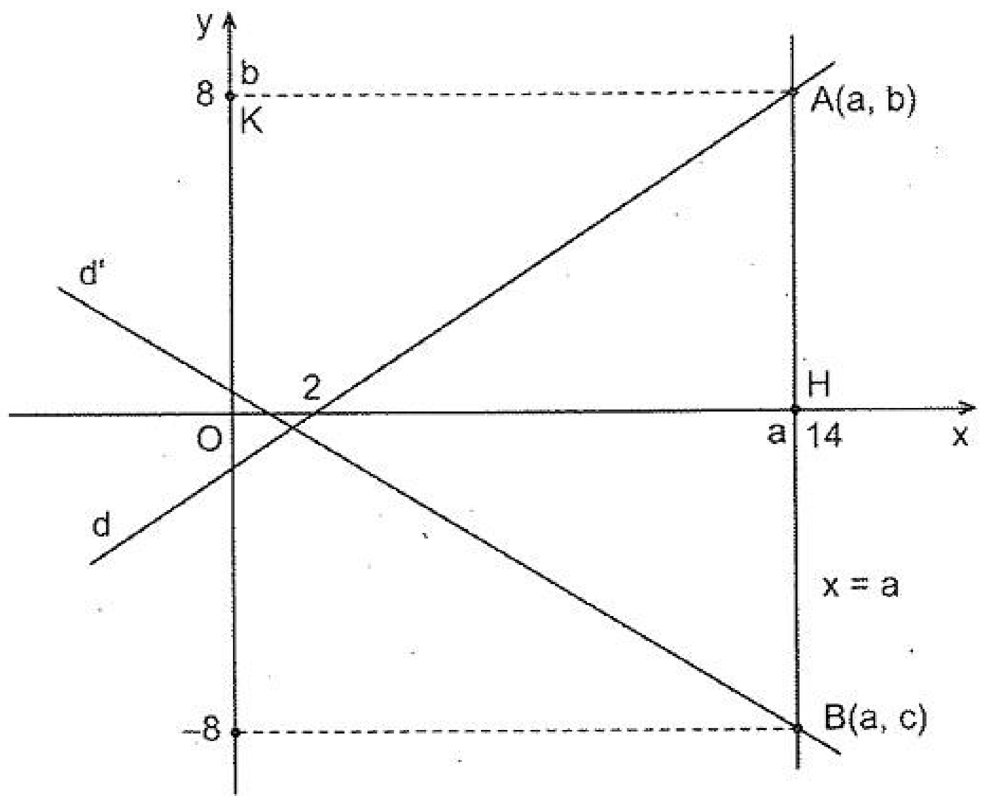
$$2x - 3y = 4, \quad (d)$$

$$3x + 5y = 2. \quad (d')$$

Tìm trên trục Ox điểm có hoành độ là số nguyên dương nhỏ nhất, sao cho nếu qua điểm đó ta dựng đường vuông góc với Ox thì đường vuông góc ấy cắt các đường thẳng d và d' tại các điểm có toạ độ là các số nguyên.

Giải : (h.3) Gọi toạ độ của điểm phải tìm là (a ; 0) với a là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho đường thẳng x = a cắt các đường thẳng d và d' theo thứ tự tại A(a ; b) và B(a ; c), trong đó b, c là các số nguyên.

Như vậy cần tìm số nguyên dương a nhỏ nhất sao cho có các số nguyên b va c thoả mãn $\begin{cases} 2a - 3b = 4 \\ 3a + 5c = 2 \end{cases}$



Hình 3

Khử a ta được $\begin{cases} 6a - 9b = 12 \\ 6a + 10c = 4 \end{cases} \Rightarrow 9b + 10c = -8 \Rightarrow b = -1 - c + \dfrac{1-c}{9}$.

b và c thuộc **Z** $\Leftrightarrow \dfrac{1-c}{9} = k$ (k nguyên) hay $c = -9k + 1$. Từ đó tính được $b = 10k - 2$ và $a = 15k - 1$.

Để a là số tự nhiên nhỏ nhất thoả mãn $a = 15k - 1$, ta chọn $k = 1$. Khi đó $a = 14$, $b = 8$, $c = -8$.

Điểm phải tìm trên Ox là H(14 ; 0), đường thẳng $x = 14$ cắt d và d' theo thứ tự tại A(14 ; 8) và B(14 ; –8).

Ví dụ 71. Giải hệ phương trình với các ẩn x, y, z và các tham số a, b, c khác nhau đôi một :

$$\begin{cases} a^2x + ay + z = 5 & (1) \\ b^2x + by + z = 5 & (2) \\ c^2x + cy + z = 5 & (3) \end{cases}$$

Giải : Lấy (1) trừ (2) : $(a^2 - b^2)x + (a - b)y = 0$.

Chia hai vế cho $a - b \neq 0$ được $(a + b)x + y = 0$ (4)

Lấy (2) trừ (3) : $(b^2 - c^2)x + (b - c)y = 0$.

Chia hai vế cho $b - c \neq 0$ được $(b + c)x + y = 0$. (5)

Lấy (4) trừ (5) : $(a - c)x = 0$.

Do $a \neq c$ nên $x = 0$. Từ đó $y = 0$, $z = 5$.

Nghiệm của hệ là $(0 ; 0 ; 5)$.

Bài tập

207. Giải các hệ phương trình :

a) $\begin{cases}(x + 3)(y - 5) = xy \\ (x - 2)(y + 5) = xy\end{cases}$

b) $\begin{cases}\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{3}{4} \\ \dfrac{1}{6x} + \dfrac{1}{5y} = \dfrac{2}{15}\end{cases}$

208. Giải các hệ phương trình :

a) $\begin{cases}\dfrac{x}{y} - \dfrac{x}{y + 12} = 1 \\ \dfrac{x}{y - 12} - \dfrac{x}{y} = 2\end{cases}$

b) $\begin{cases}4(x + y) = 5(x - y) \\ \dfrac{40}{x + y} + \dfrac{40}{x - y} = 9\end{cases}$

209. Giải các hệ phương trình :

a) $\begin{cases}|x - 2| + 2|y - 1| = 9 \\ x + |y - 1| = -1\end{cases}$

b) $\begin{cases}x + y + |x| = 25 \\ x - y + |y| = 30\end{cases}$

210. Tìm các giá trị của a để hai hệ phương trình sau tương đương :

$$\begin{cases}2x + 3y = 8 \\ 3x - y = 1\end{cases} \text{ và } \begin{cases}ax - 3y = -2 \\ x + y = 3\end{cases}$$

211. Tìm các giá trị của m để nghiệm của hệ phương trình sau là các số dương :

$$\begin{cases}x - y = 2 \\ mx + y = 3\end{cases}$$

212. Chứng minh rằng tam giác tạo bởi ba đường thẳng $y = 3x - 2$, $y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{4}{3}$, $y = -2x + 8$ là tam giác vuông cân.