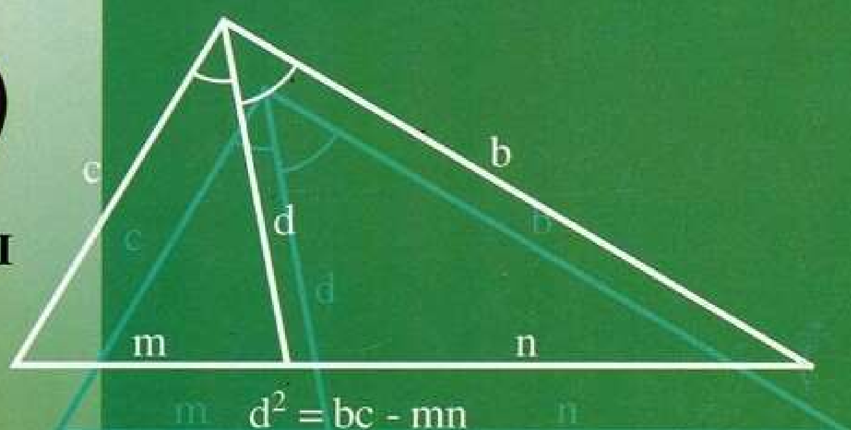
VŨ HỮU BÌNH

# NÂNG CAO VÀ PHÁT TRIỂN TOÁN 8

**TẬP HAI**




$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$$

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

# PHẦN ĐẠI SỐ

## Chương III

## PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

### §7. KHÁI NIỆM VỀ PHƯƠNG TRÌNH. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

**1.** Ta gọi hệ thức dạng $A(x) = B(x)$ là phương trình với ẩn x. Giải phương trình $A(x) = B(x)$ là tìm mọi giá trị của x để các giá trị tương ứng của hai biểu thức $A(x)$ và $B(x)$ bằng nhau.

Tập hợp các giá trị đó gọi là tập nghiệm của phương trình đã cho, và thường được kí hiệu là S.

**2.** Hai phương trình được gọi là tương đương nếu chúng có cùng một tập nghiệm.

**3.** Khi giải một phương trình, ta có thể :

– Chuyển một hạng tử từ vế này sang vế kia và đổi dấu hạng tử đó.

– Nhân (hoặc chia) cả hai vế với cùng một số khác 0.

Khi đó phương trình mới tương đương với phương trình đã cho.

**4.** Phương trình bậc nhất một ẩn là phương trình có dạng $ax + b = 0$ trong đó x là ẩn, a và b là các số đã cho, $a \neq 0$.

Khi giải phương trình có hệ số chữ trong mục này, ta cũng xét các phương trình có dạng $ax + b = 0$ trong đó $a = 0$.

**Ví dụ 60.** Giải phương trình sau, với a là hằng (ta còn gọi a là tham số) :

$$a(ax + 1) = x(a + 2) + 2.$$

***Giải :*** Biến đổi phương trình đã cho thành :

$$a^2x - ax - 2x = 2 - a$$

$$\Leftrightarrow x(a^2 - a - 2) = 2 - a$$

$$\Leftrightarrow (a + 1)(a - 2)x = 2 - a. \qquad (1)$$

Kí hiệu S là tập nghiệm của phương trình đã cho, ta có :

Nếu $a \neq -1$, $a \neq 2$ thì $S = \left\{-\dfrac{1}{a+1}\right\}$.

Nếu $a = -1$ thì (1) có dạng $0x = 3$, vô nghiệm, $S = \varnothing$.

Nếu $a = 2$ thì (1) có dạng $0x = 0$, phương trình nghiệm đúng với mọi x, $S = \mathbf{R}$.

**Ví dụ 61.** Giải phương trình với a là tham số :

$$\frac{x-a}{3} = \frac{x+3}{a} - 2. \qquad (1)$$

*Giải :* Điều kiện xác định của phương trình : $a \neq 0$.

Biến đổi phương trình :

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow a(x-a) = 3(x+3) - 6a\\ &\Leftrightarrow ax - a^2 = 3x + 9 - 6a\\ &\Leftrightarrow ax - 3x = a^2 - 6a + 9\\ &\Leftrightarrow (a-3)x = (a-3)^2. \qquad (2)\end{aligned}$$

Nếu $a \neq 3$, phương trình có nghiệm $x = a - 3$.

Nếu $a = 3$ thì (2) có dạng :

$0x = 0$, mọi x đều là nghiệm.

*Kết luận :*

Nếu $a \neq 0$ ; $a \neq 3$ thì (1) có một nghiệm : $x = a - 3$.

Nếu $a = 3$ thì (1) nghiệm đúng với mọi x.

Nếu $a = 0$ thì (1) vô nghiệm.

**Ví dụ 62.** Chứng minh rằng tồn tại các hằng số a, b, c để phương trình sau có vô số nghiệm :

$$\frac{x-ab}{a+b} + \frac{x-ac}{a+c} + \frac{x-bc}{b+c} = a + b + c \qquad (1)$$

*Giải :* Điều kiện xác định của phương trình :

$$a + b \neq 0 \,;\, a + c \neq 0 \,;\, b + c \neq 0.$$

$$(1) \Leftrightarrow \left(\frac{x-ab}{a+b}-c\right)+\left(\frac{x-ac}{a+c}-b\right)+\left(\frac{x-bc}{b+c}-a\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-ab-ac-bc}{a+b}+\frac{x-ac-ab-bc}{a+c}+\frac{x-bc-ab-ac}{b+c}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-ab-bc-ca)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right)=0.$$

(1) có vô số nghiệm $\Leftrightarrow \dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{a+c}+\dfrac{1}{b+c}=0.$ (2)

Chẳng hạn ta chọn a = 1 ; b = 1. Để (2) xảy ra ta chọn c sao cho :

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{1+c}+\frac{1}{1+c}=0 \Leftrightarrow \frac{2}{1+c}=\frac{-1}{2} \Leftrightarrow c=-5.$$

Như vậy (1) có vô số nghiệm, chẳng hạn khi a = 1 ; b = 1 ; c = –5.

**Ví dụ 63.** Giải phương trình

$$\frac{x-a}{a+b}+\frac{x-b}{a-b}=\frac{2ab}{b^2-a^2} \text{ (a và b là hằng).}$$

***Giải :*** Điều kiện xác định của phương trình : $a \neq \pm b$.

Biến đổi phương trình :

$$(x-a)(a-b)+(x-b)(a+b)=-2ab$$

$$\Leftrightarrow ax-bx-a^2+ab+ax+bx-ab-b^2=-2ab$$

$$\Leftrightarrow 2ax=a^2+b^2-2ab$$

$$\Leftrightarrow 2ax=(a-b)^2. \quad (1)$$

Nếu $a \neq 0$ thì $x=\dfrac{(a-b)^2}{2a}$.

Nếu a = 0 thì (1) có dạng $0x = b^2$. Do $a \neq b$ nên $b \neq 0$, phương trình vô nghiệm.

*Kết luận :*

Nếu $a \neq 0$, $a \neq \pm b$ thì $S=\left\{\dfrac{(a-b)^2}{2a}\right\}$

Còn lại, $S=\varnothing$.

## Bài tập

**276.** Giải các phương trình :

a) $(x+2)^3-(x-2)^3=12x(x-1)-8$ ;

b) $(x+5)(x+2)-3(4x-3)=(5-x)^2$ ;

c) $(3x-1)^2-5(2x+1)^2+(6x-3)(2x+1)=(x-1)^2$.

**277.** Giải các phương trình :

a) $\dfrac{x-5}{100}+\dfrac{x-4}{101}+\dfrac{x-3}{102}=\dfrac{x-100}{5}+\dfrac{x-101}{4}+\dfrac{x-102}{3}$ ;

b) $\dfrac{29-x}{21}+\dfrac{27-x}{23}+\dfrac{25-x}{25}+\dfrac{23-x}{27}+\dfrac{21-x}{29}=-5$.

**278.** Giải phương trình với các tham số a, b :

a) $a(ax+b)=b^2(x-1)$ ;

b) $a^2x-ab=b^2(x-1)$.

**279.** Giải phương trình với tham số a :

a) $\dfrac{x-a}{a+1}+\dfrac{x-1}{a-1}=\dfrac{2a}{1-a^2}$ ;

b) $\dfrac{x+a-1}{a+2}+\dfrac{x-a}{a-2}+\dfrac{x-a}{4-a^2}=0$ ;

c) $3x+\dfrac{x}{a}-\dfrac{3a}{a+1}=\dfrac{4ax}{(a+1)^2}+\dfrac{(2a+1)x}{a(a+1)^2}-\dfrac{3a^2}{(a+1)^3}$.

**280*.** Giải phương trình với các tham số a, b, c :

a) $\dfrac{x-a}{b+c}+\dfrac{x-b}{c+a}+\dfrac{x-c}{a+b}=3$ ;

b) $\dfrac{x-a}{b+c}+\dfrac{x-b}{c+a}+\dfrac{x-c}{a+b}=\dfrac{3x}{a+b+c}$ ;

c) $\dfrac{a+b-x}{c}+\dfrac{a+c-x}{b}+\dfrac{b+c-x}{a}=1-\dfrac{4x}{a+b+c}$ ;

d) $\dfrac{2a+b+c-3x}{a}+\dfrac{a+2b+c-3x}{b}+\dfrac{a+b+2c-3x}{c}=6-\dfrac{9x}{a+b+c}$.

# §8. PHƯƠNG TRÌNH TÍCH

Phương trình tích (một ẩn) là phương trình có dạng :

$$A(x)B(x)... = 0 \quad (1)$$

trong đó A(x), B(x), ... , là các đa thức.

Để giải (1), ta chỉ cần giải từng phương trình A(x) = 0, B(x) = 0, ... rồi lấy tất cả các nghiệm của chúng.

Các phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử có vai trò quan trọng trong việc đưa một phương trình về dạng phương trình tích. Cách đặt ẩn phụ cũng thường được sử dụng để trình bày lời giải được gọn gàng.

**Ví dụ 64.** Giải phương trình :

$$(x + 3)^3 - (x + 1)^3 = 56.$$

***Giải :*** *Cách 1*

$$(x + 3)^3 - (x + 1)^3 = 56$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 9x^2 + 27x + 27 - x^3 - 3x^2 - 3x - 1 = 56$$

$$\Leftrightarrow 6x^2 + 24x + 26 = 56$$

$$\Leftrightarrow 6(x^2 + 4x - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow 6(x^2 - x + 5x - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x - 1) + 5(x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x + 5) = 0.$$

*Kết luận* : S = {1 ; –5}.

*Cách 2.* Chú ý rằng x + 2 là trung bình cộng của x + 3 và x + 1, ta đặt x + 2 = y, phương trình trở thành :

$$(y + 1)^3 - (y - 1)^3 = 56$$

$$\Leftrightarrow y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - y^3 + 3y^2 - 3y + 1 = 56$$

$$\Leftrightarrow 6y^2 + 2 = 56 \Leftrightarrow y^2 = 9 \Leftrightarrow y = \pm 3.$$

Với y = 3 thì x = 1. Với y = –3 thì x = –5.

*Kết luận* : S = {1 ; –5}.

**Ví dụ 65.** Giải phương trình :

$$x^3 + (x-1)^3 = (2x-1)^3. \tag{1}$$

***Giải :*** Ta thấy $x + (x - 1) = 2x - 1$. Đặt $x - 1 = y$ thì (1) có dạng :

$$x^3 + y^3 = (x+y)^3$$

$$\Leftrightarrow x^3 + y^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y)$$

$$\Leftrightarrow xy(x+y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ x + y = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x - 1 = 0 \\ 2x - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

*Kết luận :* $S = \{0 ; \frac{1}{2}; 1\}$.

**Ví dụ 66.** Giải phương trình :

$$(x+1)^2(x+2) + (x-1)^2(x-2) = 12.$$

***Giải :*** Rút gọn vế trái của phương trình, ta được :

$$2x^3 + 10x = 12 \Leftrightarrow x^3 + 5x - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^3 - 1) + 5(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + 6) = 0.$$

Dễ dàng chứng minh được $x^2 + x + 6 \neq 0$. Do đó $S = \{1\}$.

**Ví dụ 67.** Giải phương trình :

$$(x^2 - 1)(x^2 + 4x + 3) = 192.$$

***Giải :*** Biến đổi phương trình thành :

$$(x^2 - 1)(x+1)(x+3) = 192 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)^2(x+3) = 192.$$

Đặt $x + 1 = y$, phương trình trở thành :

$$(y-2)y^2(y+2) = 192 \Leftrightarrow y^2(y^2 - 4) = 192.$$

Đặt $y^2 - 2 = z$ thì $z + 2 \geq 0$, phương trình trở thành :

$$(z+2)(z-2) = 192 \Leftrightarrow z^2 = 196 \Leftrightarrow z = \pm 14.$$

Loại $z = -14$ vì trái với điều kiện $z + 2 \geq 0$.

Với $z = 14$ thì $y^2 = 16$, do đó $y = \pm 4$.

Với $y = 4$ thì $x + 1 = 4$ nên $x = 3$. Với $y = -4$ thì $x + 1 = -4$ nên $x = -5$.

*Kết luận* : $S = \{3 ; -5\}$.

**Ví dụ 68.** Giải phương trình :

$$(x-6)^4 + (x-8)^4 = 16.$$

***Giải*** : Đặt $x - 7 = y$, phương trình trở thành :

$$(y+1)^4 + (y-1)^4 = 16.$$

Rút gọn ta được :

$$2y^4 + 12y^2 + 2 = 16 \Leftrightarrow y^4 + 6y^2 + 1 = 8$$

$$\Leftrightarrow y^4 + 6y^2 - 7 = 0.$$

Đặt $y^2 = z \geq 0$, ta có $z^2 + 6z - 7 = 0$.

Phương trình này cho $z_1 = 1$, $z_2 = -7$ (loại).

Với $z = 1$, ta có $y^2 = 1$ nên $y = \pm 1$.

Từ đó $x_1 = 8$ ; $x_2 = 6$.

*Chú ý* : Khi giải phương trình bậc bốn dạng $(x+a)^4 + (x+b)^4 = c$, ta thường đặt ẩn phụ $y = x + \dfrac{a+b}{2}$.

**Ví dụ 69.** Giải các phương trình :

a) $x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1 = 0$ ; (1)

b) $x^5 - x^4 + 3x^3 + 3x^2 - x + 1 = 0$. (2)

***Giải :***

a) Ta thấy $x = 0$ không là nghiệm của phương trình (1). Chia hai vế của (1) cho $x^2 \neq 0$, ta được :

$$x^2 + 3x + 4 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4 = 0.$$

Đặt $x + \frac{1}{x} = y$ thì $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$, ta được $y^2 + 3y + 2 = 0$.

Do đó $y_1 = -1$ ; $y_2 = -2$.

Với $y = -1$, ta có $x + \frac{1}{x} = -1$ nên $x^2 + x + 1 = 0$, vô nghiệm.

Với $y = -2$, ta có $x + \frac{1}{x} = -2$ nên $(x + 1)^2 = 0$, do đó $x = -1$.

*Kết luận* : $S = \{-1\}$.

*Chú ý* : Cũng có thể giải phương trình (1) bằng cách biến đổi vế trái thành

$$(x + 1)^2(x^2 + x + 1).$$

b) Ta thấy $x = -1$ là một nghiệm của phương trình (2) vì tổng các hệ số của hạng tử bậc chẵn bằng tổng các hệ số của hạng tử bậc lẻ. Biến đổi phương trình (2) thành :

$$(x + 1)(x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 2x + 1) = 0.$$

Giải phương trình

$$x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 2x + 1 = 0 \qquad (3)$$

Ta thấy $x = 0$ không là nghiệm của (3). Chia hai vế của (3) cho $x^2 \neq 0$, ta được :

$$x^2 - 2x + 5 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) + 5 = 0.$$

Đặt $x + \frac{1}{x} = y$ thì $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$, ta được $y^2 - 2y + 3 = 0$, vô nghiệm.

*Kết luận* : $S = \{-1\}$.

*Chú ý* : Ta gọi các phương trình (1) và (2) là *phương trình đối xứng* : các hệ số của đa thức ở vế trái có tính đối xứng qua hạng tử đứng giữa.

Phương trình (1) là phương trình đối xứng bậc chẵn, phương trình (2) là phương trình đối xứng bậc lẻ.

Phương trình đối xứng bậc lẻ bao giờ cũng nhận $x = -1$ làm một nghiệm, do đó bằng cách chia hai vế cho $x + 1$, ta thu được phương trình đối xứng bậc chẵn 2n.

Phương trình đối xứng bậc chẵn 2n đối với x đưa được về phương trình bậc n đối với y bằng cách đặt ẩn phụ $y = x + \frac{1}{x}$.

Ta có nhận xét sau để kiểm tra lại nghiệm của phương trình đối xứng : Nếu a là nghiệm của phương trình thì $\frac{1}{a}$ cũng là nghiệm của phương trình.

**Ví dụ 70.** Chứng minh rằng các phương trình sau vô nghiệm :

a) $x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1 = 0$ ; (1)

b) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0.$ (2)

***Giải :***

a) Biến đổi phương trình (1) thành :

$$(x^2 + 1)^2 - x(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 1)(x^2 + 1 - x) = 0.$$

Cả hai nhân tử ở vế trái đều dương.

*Kết luận :* $S = \varnothing$.

b) *Cách 1*. Nhân hai vế của (2) với $x - 1$, ta được :

$$(x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^5 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^5 = 1. \quad (3)$$

Phương trình (3) có nghiệm $x = 1$(*), nhưng giá trị này không thoả mãn phương trình (2)(**).

*Kết luận :* $S = \varnothing$.

---

(*) Giải thích điều này : nếu $x > 1$ thì $x^5 > 1$, nếu $x < 1$ thì $x^5 < 1$ (xem tính chất của bất đẳng thức thuộc chuyên đề *Chứng minh bất đẳng thức*).

(**) Nhân hai vế của (2) với $x - 1$ không phải là một phép biến đổi tương đương. Phương trình (3) là hệ quả của phương trình (2) : mọi nghiệm của (2) đều là nghiệm của (3) nhưng không khẳng định được mọi nghiệm của (3) đều là nghiệm của (2). Do đó phải thử lại các nghiệm của (3).