VŨ HỮU BÌNH

NÂNG CAO VÀ PHÁT TRIỂN TOÁN 9

TẬP MỘT

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

VŨ HỮU BÌNH

NÂNG CAO VÀ PHÁT TRIỂN

TOÁN 9

TẬP MỘT

(Tái bản lần thứ bảy)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

PHẦN ĐẠI SỐ

Chương I

CĂN BẬC HAI. CĂN BẬC BA

§1. ÔN TẬP KIẾN THỨC ĐẠI SỐ 8

Trong mục này, chúng ta ôn lại các kiến thức về bất đẳng thức và bất phương trình, chúng được sử dụng nhiều để tìm điều kiện xác định của căn thức bậc hai.

1. Bất phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối

Với a là hằng số dương, ta có :

$$|f(x)| < a \Leftrightarrow -a < f(x) < a \;;$$

$$|f(x)| > a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) < -a \\ f(x) > a \end{array}\right..$$

2. Bất phương trình tích

Để giải bất phương trình tích, ta thường sử dụng định lí về dấu của nhị thức bậc nhất : *Nhị thức* $ax + b$ $(a \neq 0)$ *cùng dấu với* a *với mọi giá trị của* x *lớn hơn nghiệm của nhị thức, trái dấu với* a *với mọi giá trị của* x *nhỏ hơn nghiệm của nhị thức.*

Ví dụ 1. Giải các bất phương trình :

a) $x^2 - 4x - 5 < 0$; b) $x^2 - 2x - 1 > 0$; c) $2x^2 - 6x + 5 > 0$.

Giải

a) *Cách 1.* $x^2 - 4x - 5 < 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 5x - 5 < 0$

$$\Leftrightarrow x(x + 1) - 5(x + 1) < 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 5) < 0.$$

Lập bảng xét dấu :

x		-1		5	
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$x-5$	$-$		$-$	0	$+$
$(x+1)(x-5)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Nghiệm của bất phương trình là $-1 < x < 5$.

Cách 2. $x^2 - 4x - 5 < 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 < 9 \Leftrightarrow (x-2)^2 < 9 \Leftrightarrow |x-2| < 3$

$$\Leftrightarrow -3 < x - 2 < 3 \Leftrightarrow -1 < x < 5.$$

b) $x^2 - 2x - 1 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 > 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 > 2 \Leftrightarrow |x-1| > \sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 < -\sqrt{2} \\ x - 1 > \sqrt{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 1 - \sqrt{2} \\ x > 1 + \sqrt{2} \end{array}\right..$$

c) $2x^2 - 6x + 5 > 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 10 > 0 \Leftrightarrow (2x-3)^2 + 1 > 0.$

Vì bất phương trình cuối nghiệm đúng với mọi x nên bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi x.

Bài tập

1. Giải các bất phương trình :

a) $x^2 - 4x - 21 > 0$; b) $x^2 - 4x + 1 < 0$;

c) $3x^2 - x + 1 > 0$; d) $2x^2 - 5x + 4 < 0$.

~ **Ví dụ :** 34 đến 36, 38, 43, 44, 50, 65.

Bài tập : 91, 109, 110, 114, 122, 142, 145, 146, 149, 150, 152, 160, 161, 189 đến 193, 195, 197.

§2. CĂN BẬC HAI VÀ SỐ VÔ TỈ

Cho số a không âm. Ta định nghĩa căn bậc hai số học của a, kí hiệu $\sqrt{a}$, là số không âm x mà $x^2 = a$.

Ta biết dạng biểu diễn thập phân của số hữu tỉ là hữu hạn hoặc vô hạn tuần hoàn, dạng biểu diễn thập phân của số vô tỉ là vô hạn không tuần hoàn.

Số hữu tỉ nào cũng viết được dưới dạng

$$a = \frac{m}{n} \text{ với } m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}^*.$$

Tổng, hiệu, tích, thương của hai số hữu tỉ (số chia khác 0) là một số hữu tỉ.

Để chứng minh số a là một số vô tỉ, ta thường dùng phương pháp phản chứng : giả sử a là số hữu tỉ thì dẫn đến mâu thuẫn.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng tổng của một số hữu tỉ với một số vô tỉ là một số vô tỉ.

Giải : Chứng minh bằng phản chứng. Giả sử tổng của số hữu tỉ a với số vô tỉ b là số hữu tỉ c. Ta có $b = c - a$.

Hiệu của hai số hữu tỉ c và a là một số hữu tỉ nên b là số hữu tỉ, trái với giả thiết.

Vậy c phải là số vô tỉ.

Ví dụ 3. Xét xem các số a và b có thể là số vô tỉ hay không, nếu :

a) $a + b$ và $a - b$ là các số hữu tỉ ;

b) $a - b$ và ab là các số hữu tỉ.

Giải

a) a và b không thể là số vô tỉ. Thật vậy,

$$\frac{(a+b)+(a-b)}{2} \text{ là số hữu tỉ, nên a là số hữu tỉ ;}$$

$$\frac{(a+b)-(a-b)}{2} \text{ là số hữu tỉ, nên b là số hữu tỉ.}$$

b) a và b có thể là số vô tỉ. Chẳng hạn

$$a = b = \sqrt{2}. \text{ Khi đó } a - b = 0, ab = 2.$$

Ví dụ 4. Chứng minh rằng nếu số tự nhiên a không là số chính phương thì $\sqrt{a}$ là số vô tỉ.

Giải : Giả sử $\sqrt{a}$ là số hữu tỉ thì nó viết được dưới dạng :

$$\sqrt{a} = \frac{m}{n} \text{ với } m, n \in N, n \neq 0, (m, n) = 1.$$

Do a không là số chính phương nên $\frac{m}{n}$ không là số tự nhiên, do đó $n > 1$.

Ta có $m^2 = an^2$. Vì a là số tự nhiên nên $m^2 \vdots n^2$. Gọi p là một ước nguyên tố nào đó của n, thế thì $m^2 \vdots p$, do đó $m \vdots p$. Như vậy p là ước nguyên tố của m và n, trái với $(m, n) = 1$.

Vậy $\sqrt{a}$ phải là số vô tỉ.

Bài tập

2. Chứng minh rằng các số sau là số vô tỉ :

a) $\sqrt{1+\sqrt{2}}$;

b) $m + \frac{\sqrt{3}}{n}$ với m, n là các số hữu tỉ, $n \neq 0$.

3. Xét xem các số a và b có thể là số vô tỉ hay không nếu :

a) ab và $\frac{a}{b}$ là các số hữu tỉ ;

b) a + b và $\frac{a}{b}$ là các số hữu tỉ $(a + b \neq 0)$;

c) a + b, a^2 và b^2 là các số hữu tỉ $(a + b \neq 0)$.

4. So sánh hai số :

a) $2\sqrt{3}$ và $3\sqrt{2}$;

b) $6\sqrt{5}$ và $5\sqrt{6}$;

c) $\sqrt{24} + \sqrt{45}$ và 12 ;

d) $\sqrt{37} - \sqrt{15}$ và 2.

5. a) Cho một ví dụ để chứng tỏ rằng khẳng định $\sqrt{a} \leq a$ với mọi số a không âm là sai.

b) Cho $a \geq 0$. Với giá trị nào của a thì $\sqrt{a} > a$?

6*. a) Hãy chỉ ra một số thực x mà $x - \frac{1}{x}$ là số nguyên $(x \neq \pm 1)$.

b) Chứng minh rằng nếu $x - \frac{1}{x}$ là số nguyên và $x \neq \pm 1$ thì x và $x + \frac{1}{x}$ là số vô tỉ. Khi đó $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{2n}$ và $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{2n+1}$ là số hữu tỉ hay số vô tỉ ?

~ **Ví dụ :** 64.

Bài tập : 126 đến 128, 140, 141.

§3. CĂN THỨC BẬC HAI VÀ HẰNG ĐẲNG THỨC $\sqrt{A^2} = |A|$

Cho A là một biểu thức đại số. Điều kiện xác định của $\sqrt{A}$ là $A \geq 0$.

Khi lấy căn bậc hai của một biểu thức không âm, ta sử dụng hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$.

Ví dụ 5. Cho biểu thức

$$A = \sqrt{x - \sqrt{x^2 - 4x + 4}}.$$

a) Tìm điều kiện xác định của biểu thức A.

b) Rút gọn biểu thức A.

Giải

a) Biến đổi biểu thức được

$$A = \sqrt{x - \sqrt{(x-2)^2}} = \sqrt{x - |x-2|}.$$

Điều kiện xác định của A là

$$x \geq |x-2| \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 \geq x^2 - 4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1.$$

b) Nếu $x \geq 2$ thì $A = \sqrt{x - (x-2)} = \sqrt{2}$.

Nếu $1 \leq x < 2$ thì $A = \sqrt{x - (x-2)} = \sqrt{2x-2}$.

Ví dụ 6. Tìm điều kiện xác định của các biểu thức :

a) $A = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 2x - 1}}$; b) $B = \dfrac{1}{\sqrt{x - \sqrt{2x+1}}}$.

Giải

a) Điều kiện xác định của A là $x^2 - 2x - 1 > 0$.

Giải bất phương trình này (xem Ví dụ 1b), ta được $\left[\begin{array}{l} x < 1 - \sqrt{2} \\ x > 1 + \sqrt{2} \end{array}\right.$.

b) Điều kiện xác định của B là

$$\begin{cases} 2x + 1 \geq 0 & (1) \\ x > \sqrt{2x+1} & (2) \end{cases}$$

Giải (1) ta được $x \geq -\dfrac{1}{2}$.

Giải (2) ta có

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 > 2x + 1 \end{cases} \qquad (3)$$

Giải (3) ta được $\left[\begin{array}{l} x < 1 - \sqrt{2} \\ x > 1 + \sqrt{2} \end{array}\right.$ (xem Ví dụ 1b).

Kết hợp với $x \geq -\dfrac{1}{2}$ và $x > 0$, ta được $x > 1 + \sqrt{2}$ là điều kiện xác định của B.

Chú ý : Sẽ sai lầm nếu cho rằng $(2) \Leftrightarrow x^2 > 2x + 1$, khi đó sẽ đi đến đáp số sai là

$$\left[\begin{array}{l} -\dfrac{1}{2} \leq x < 1 - \sqrt{2} \\ x > 1 + \sqrt{2} \end{array}\right..$$

Ví dụ 7. Tìm các giá trị của x sao cho

$$\sqrt{x+1} < x + 3. \qquad (1)$$

Giải

Điều kiện xác định của $\sqrt{x+1}$ là $x \geq -1$. (2)

Với điều kiện (2) thì $x + 3 > 0$ nên (1) tương đương với

$$\left(\sqrt{x+1}\right)^2 < (x+3)^2$$

$$\Leftrightarrow x + 1 < x^2 + 6x + 9 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 8 > 0. \qquad (3)$$

Bất phương trình (3) đúng với mọi x, vì

$$x^2 + 5x + 8 = x^2 + 5x + \frac{25}{4} + \frac{7}{4} = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0.$$

Vậy các giá trị phải tìm của x là $x \geq -1$.

Bài tập

7. Tìm điều kiện xác định của các biểu thức :

a) $3 - \sqrt{1 - 16x^2}$;

b) $\dfrac{1}{1 - \sqrt{x^2 - 3}}$;

c) $\sqrt{8x - x^2 - 15}$;

d) $\dfrac{2}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$;

e) $A = \dfrac{1}{\sqrt{x - \sqrt{2x - 1}}}$;

g) $B = \dfrac{\sqrt{16 - x^2}}{\sqrt{2x + 1}} + \sqrt{x^2 - 8x + 14}$.

8. Cho biểu thức $A = \sqrt{x^2 - 6x + 9} - \sqrt{x^2 + 6x + 9}$.

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm các giá trị của x để $A = 1$.

9. Tìm các giá trị của x sao cho :

a) $\sqrt{x^2 - 3} \leq x^2 - 3$;

b) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} > x - 6$.

10. Cho $a + b + c = 0$ và a, b, c khác 0. Chứng minh hằng đẳng thức :

$$\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = \left|\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right|.$$

~ **Bài tập :** 123, 129.

§4. LIÊN HỆ GIỮA PHÉP NHÂN, PHÉP CHIA VÀ PHÉP KHAI PHƯƠNG

Công thức $\sqrt{ab} = \sqrt{a}.\sqrt{b}$ (a, b là những số không âm) cho ta quy tắc khai phương một tích và nhân các căn thức bậc hai.

Công thức $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $(a \geq 0,\ b > 0)$ cho ta quy tắc khai phương một thương và chia hai căn thức bậc hai.

Ví dụ 8. Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{x + \sqrt{2x-1}} - \sqrt{x - \sqrt{2x-1}}$.

Giải : Điều kiện xác định của A là $\begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ x \geq \sqrt{2x-1} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \dfrac{1}{2}$.

Cách 1

$$A\sqrt{2} = \sqrt{2x + 2\sqrt{2x-1}} - \sqrt{2x - 2\sqrt{2x-1}}$$

$$= \sqrt{2x - 1 + 1 + 2\sqrt{2x-1}} - \sqrt{2x - 1 + 1 - 2\sqrt{2x-1}}$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{2x-1} + 1\right)^2} - \sqrt{\left(\sqrt{2x-1} - 1\right)^2}$$

$$= \sqrt{2x-1} + 1 - \left|\sqrt{2x-1} - 1\right|.$$

Nếu $x \geq 1$ thì $A\sqrt{2} = \sqrt{2x-1} + 1 - \left(\sqrt{2x-1} - 1\right) = 2$.

Do đó $A = \sqrt{2}$.

Nếu $\dfrac{1}{2} \leq x < 1$ thì $A\sqrt{2} = \sqrt{2x-1} + 1 - \left(1 - \sqrt{2x-1}\right) = 2\sqrt{2x-1}$.

Do đó $$A = \frac{2\sqrt{2x-1}}{\sqrt{2}} = \sqrt{4x-2}.$$

Cách 2. Đặt $\sqrt{2x-1} = y \geq 0$, ta có $2x - 1 = y^2$.

$$A = \frac{\sqrt{2x + 2\sqrt{2x-1}}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2x - 2\sqrt{2x-1}}}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{y^2 + 1 + 2y}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{y^2 + 1 - 2y}}{\sqrt{2}} = \frac{y+1}{\sqrt{2}} - \frac{|y-1|}{\sqrt{2}}.$$