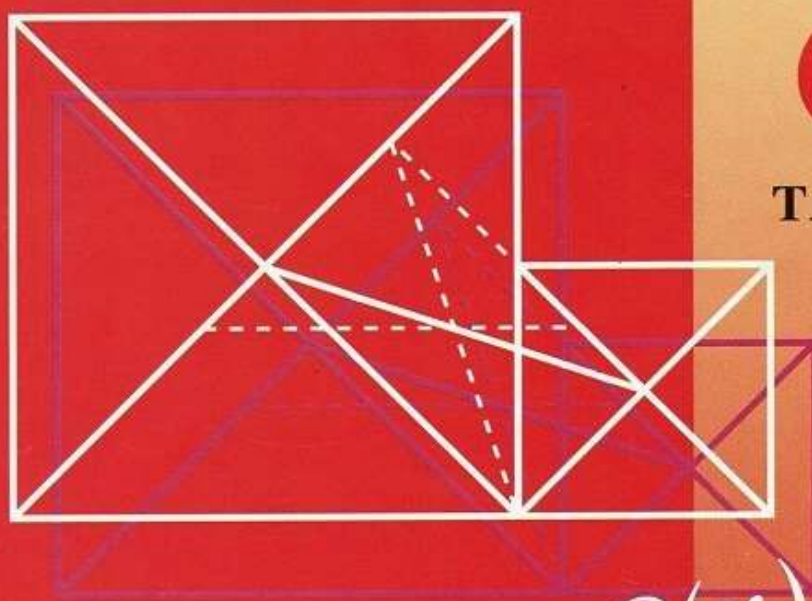


VŨ HỮU BÌNH

# NÂNG CAO VÀ PHÁT TRIỂN TOÁN

8

TẬP MỘT



$$f(x) = (x-a) \cdot Q(x) + r$$

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM



# PHẦN ĐẠI SỐ

## Chương I

### PHÉP NHÂN VÀ PHÉP CHIA ĐA THỨC

#### §1. NHÂN ĐA THỨC

**Ví dụ 1.** Tính giá trị của biểu thức

$$A = x^4 - 17x^3 + 17x^2 - 17x + 20 \text{ tại } x = 16.$$

**Giải :** *Cách 1.* Chú ý rằng  $x = 16$  nên  $x - 16 = 0$ , do đó ta biến đổi để biểu thức A chứa nhiều biểu thức dạng  $x - 16$ .

$$\begin{aligned} A &= x^4 - 16x^3 - x^3 + 16x^2 + x^2 - 16x - x + 16 + 4 \\ &= x^3(x - 16) - x^2(x - 16) + x(x - 16) - (x - 16) + 4 = 4. \end{aligned}$$

*Cách 2.* Trong biểu thức A, ta thay các số 17 bởi  $x + 1$ , còn 20 thay bởi  $x + 4$ .

$$\begin{aligned} A &= x^4 - x^3(x + 1) + x^2(x + 1) - x(x + 1) + x + 4 \\ &= x^4 - x^4 - x^3 + x^3 + x^2 - x^2 - x + x + 4 = 4. \end{aligned}$$

**Ví dụ 2.** Tìm ba số tự nhiên liên tiếp, biết rằng nếu cộng ba tích của hai trong ba số ấy, ta được 242.

**Giải :** Gọi  $x - 1, x, x + 1$  là ba số tự nhiên liên tiếp. Ta có :

$$x(x - 1) + x(x + 1) + (x - 1)(x + 1) = 242.$$

Sau khi rút gọn ta được  $3x^2 - 1 = 242$  nên  $x^2 = 81$ .

Do  $x$  là số tự nhiên nên  $x = 9$ . Ba số tự nhiên phải tìm là 8 ; 9 ; 10.

#### Bài tập

##### Nhân đơn thức với đa thức

1. Thực hiện phép tính :

a)  $3x^n(6x^{n-3} + 1) - 2x^n(9x^{n-3} - 1)$  ;      b)  $5^{n+1} - 4 \cdot 5^n$  ;

c)  $6^2 \cdot 6^4 - 4^3(3^6 - 1)$ .

2. Tìm x, biết :

a)  $4(18 - 5x) - 12(3x - 7) = 15(2x - 16) - 6(x + 14)$  ;

b)  $5(3x + 5) - 4(2x - 3) = 5x + 3(2x + 12) + 1$  ;

c)  $2(5x - 8) - 3(4x - 5) = 4(3x - 4) + 11$  ;

d)  $5x - 3\{4x - 2[4x - 3(5x - 2)]\} = 182$ .

3. Tính giá trị của các biểu thức :

a)  $A = x^3 - 30x^2 - 31x + 1$  tại  $x = 31$  ;

b)  $B = x^5 - 15x^4 + 16x^3 - 29x^2 + 13x$  tại  $x = 14$  ;

c)  $C = x^{14} - 10x^{13} + 10x^{12} - 10x^{11} + \dots + 10x^2 - 10x + 10$  tại  $x = 9$ .

4. Tính giá trị của biểu thức sau bằng cách thay số bởi chữ một cách hợp lí :

$$A = 2 \frac{1}{315} \cdot \frac{1}{651} - \frac{1}{105} \cdot 3 \frac{650}{651} - \frac{4}{315 \cdot 651} + \frac{4}{105}.$$

### Nhân đa thức với đa thức

5. Thực hiện phép tính :

a)  $(x - 1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$  ;

b)  $(x + 1)(x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$ .

6. Tìm x, biết :

a)  $(x + 2)(x + 3) - (x - 2)(x + 5) = 6$  ;

b)  $(3x + 2)(2x + 9) - (x + 2)(6x + 1) = (x + 1) - (x - 6)$  ;

c)  $3(2x - 1)(3x - 1) - (2x - 3)(9x - 1) = 0$ .

7. Cho  $a + b + c = 0$ . Chứng minh rằng  $M = N = P$  với :

$$M = a(a + b)(a + c) ; \quad N = b(b + c)(b + a) ; \quad P = c(c + a)(c + b).$$

8. Chứng minh các hằng đẳng thức :

a)  $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$  ;

b)  $(x + a)(x + b)(x + c) = x^3 + (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ca)x + abc$ .

9. Cho  $a + b + c = 2p$ . Chứng minh hằng đẳng thức :

$$2bc + b^2 + c^2 - a^2 = 4p(p - a).$$

10. Xét các ví dụ :  $53 \cdot 57 = 3021$ ,  $72 \cdot 78 = 5616$ .

Hãy xây dựng quy tắc nhân nhằm hai số có hai chữ số, trong đó các chữ số hàng chục bằng nhau, còn các chữ số hàng đơn vị có tổng bằng 10.

11. Cho biểu thức

$$M = (x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a) + x^2.$$

Tính M theo a, b, c, biết rằng  $x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$ .

12. Cho dãy số 1, 3, 6, 10, 15, ...,  $\frac{n(n+1)}{2}$ , ...

Chứng minh rằng tổng hai số hạng liên tiếp của dãy bao giờ cũng là số chính phương.

13. Số a gồm 31 chữ số 1, số b gồm 38 chữ số 1. Chứng minh rằng  $ab - 2$  chia hết cho 3.

14\*. Số  $3^{50} + 1$  có là tích của hai số tự nhiên liên tiếp không ?

15\*. a) Thực hiện phép tính :

$$A = (2^9 + 2^7 + 1)(2^{23} - 2^{21} + 2^{19} - 2^{17} + 2^{14} - 2^{10} + 2^9 - 2^7 + 1).$$

b) Số  $2^{32} + 1$  có là số nguyên tố không ?

~ Ví dụ : 42.

Bài tập : 225, 227, 228, 230 đến 233.

## §2. CÁC HẰNG ĐẲNG THỨC ĐÁNG NHỚ

Thực hiện phép nhân đa thức, ta được các hằng đẳng thức sau :

1.  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ .

2.  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ .

3.  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ .

4.  $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b).$$

5.  $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$$(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b).$$



$$6. (a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3.$$

$$7. (a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3.$$

Ta cũng có :

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

Tổng quát của các hằng đẳng thức 3 và 7, ta có hằng đẳng thức :

$$8. a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

với mọi số nguyên dương n.

Tổng quát của hằng đẳng thức 6, ta có hằng đẳng thức :

$$9. a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots - ab^{n-2} + b^{n-1})$$

với mọi số lẻ n.

Tổng quát của các hằng đẳng thức 1, 2, 4, 5, ta có công thức Niu-tơn (xem chuyên đề *Tính chia hết đối với số nguyên*).

**Ví dụ 3.** Chứng minh rằng số 3599 viết được dưới dạng tích của hai số tự nhiên khác 1.

$$\text{Giải : } 3599 = 3600 - 1 = 60^2 - 1 = (60 + 1)(60 - 1) = 61 \cdot 59.$$

**Ví dụ 4.** Chứng minh rằng biểu thức sau viết được dưới dạng tổng các bình phương của hai biểu thức :

$$x^2 + 2(x + 1)^2 + 3(x + 2)^2 + 4(x + 3)^2.$$

$$\text{Giải : } x^2 + 2(x + 1)^2 + 3(x + 2)^2 + 4(x + 3)^2 =$$

$$= x^2 + 2(x^2 + 2x + 1) + 3(x^2 + 4x + 4) + 4(x^2 + 6x + 9)$$

$$= x^2 + 2x^2 + 4x + 2 + 3x^2 + 12x + 12 + 4x^2 + 24x + 36$$

$$= 10x^2 + 40x + 50$$

$$= (x^2 + 10x + 25) + (9x^2 + 30x + 25)$$

$$= (x + 5)^2 + (3x + 5)^2.$$

**Ví dụ 5.** Cho  $x + y + z = 0$ ,

$$xy + yz + zx = 0.$$

Chứng minh rằng  $x = y = z$ .

**Giải :** Ta có  $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$ .

Suy ra  $0 = x^2 + y^2 + z^2 + 2.0$

hay  $0 = x^2 + y^2 + z^2$ .

Vậy  $x = y = z (= 0)$ .

### Ví dụ 6

a) Tính  $A = -1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - \dots - 99^2 + 100^2$ .

b) Tính  $A = -1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - \dots + (-1)^n \cdot n^2$ .

**Giải :** a)  $A = (2^2 - 1^2) + (4^2 - 3^2) + \dots + (100^2 - 99^2)$   
 $= (2 - 1)(1 + 2) + (4 - 3)(3 + 4) + \dots + (100 - 99)(99 + 100)$   
 $= 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 99 + 100$   
 $= \frac{100 \cdot 101}{2} = 5050$ .

b) Xét hai trường hợp :

Nếu  $n$  chẵn thì  $A = (2^2 - 1^2) + (4^2 - 3^2) + \dots + [n^2 - (n - 1)^2]$   
 $= 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + (n - 1) + n$   
 $= \frac{n(n + 1)}{2}$ .

Nếu  $n$  lẻ thì  $A = (2^2 - 1^2) + (4^2 - 3^2) + \dots + [(n - 1)^2 - (n - 2)^2] - n^2$   
 $= 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + (n - 1) - n^2$   
 $= \frac{n(n - 1)}{2} - n^2 = -\frac{n(n + 1)}{2}$ .

**Chú ý :** Hai kết quả trên có thể viết chung trong một công thức

$$(-1)^n \cdot \frac{n(n + 1)}{2}.$$

**Ví dụ 7.** Cho

$$x + y = a + b, \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2. \quad (2)$$

Chứng minh rằng  $x^3 + y^3 = a^3 + b^3$ .

**Giải :** Ta có :  $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2).$  (3)

Từ (1) suy ra :  $(x + y)^2 = (a + b)^2,$

tức là  $x^2 + 2xy + y^2 = a^2 + 2ab + b^2.$

Do  $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$  nên  $2xy = 2ab$ , suy ra  $xy = ab.$  (4)

Thay các kết quả (1), (2), (4) vào (3), ta được

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 + y^2 - xy) = (a + b)(a^2 + b^2 - ab) = a^3 + b^3.$$

**Ví dụ 8.** Cho  $a + b = m$ ,  $a - b = n$ . Tính  $ab$  và  $a^3 - b^3$  theo  $m$  và  $n$ .

**Giải :**

**Cách 1.** Từ  $a + b = m$ ,  $a - b = n$ , ta tính được  $b = \frac{m-n}{2}$ ,  $a = \frac{m+n}{2}$ .

Do đó  $ab = \frac{m+n}{2} \cdot \frac{m-n}{2} = \frac{m^2 - n^2}{4};$

$$a^3 - b^3 = \left(\frac{m+n}{2}\right)^3 - \left(\frac{m-n}{2}\right)^3 = \frac{(m+n)^3 - (m-n)^3}{8}.$$

Rút gọn biểu thức trên, ta được  $\frac{3m^2n + n^3}{4}.$

**Cách 2.** Ta có

$$4ab = (a + b)^2 - (a - b)^2 = m^2 - n^2 \text{ nên } ab = \frac{m^2 - n^2}{4}.$$

Ta có  $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) = (a - b)[(a + b)^2 - ab]$

$$= n \left( m^2 - \frac{m^2 - n^2}{4} \right) = \frac{n(3m^2 + n^2)}{4} = \frac{3m^2n + n^3}{4}.$$

## Bài tập

**16.** Tính giá trị của các biểu thức :

a)  $\frac{63^2 - 47^2}{215^2 - 105^2};$

b)  $\frac{437^2 - 363^2}{537^2 - 463^2}.$

17. So sánh  $A = 26^2 - 24^2$  và  $B = 27^2 - 25^2$ .

18. Tìm  $x$ , biết :

$$4(x+1)^2 + (2x-1)^2 - 8(x-1)(x+1) = 11.$$

19. Rút gọn các biểu thức :

a)  $2x(2x-1)^2 - 3x(x+3)(x-3) - 4x(x+1)^2$  ;

b)  $(a-b+c)^2 - (b-c)^2 + 2ab - 2ac$  ;

c)  $(3x+1)^2 - 2(3x+1)(3x+5) + (3x+5)^2$  ;

d)  $(3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)(3^{32}+1)$  ;

e)  $(a+b-c)^2 + (a-b+c)^2 - 2(b-c)^2$  ;

g)  $(a+b+c)^2 + (a-b-c)^2 + (b-c-a)^2 + (c-a-b)^2$  ;

h)  $(a+b+c+d)^2 + (a+b-c-d)^2 + (a+c-b-d)^2 + (a+d-b-c)^2$ .

20. Cho  $x+y=3$ . Tính giá trị của biểu thức

$$A = x^2 + 2xy + y^2 - 4x - 4y + 1.$$

21. Cho  $a^2 + b^2 + c^2 = m$ . Tính giá trị của biểu thức sau theo  $m$  :

$$A = (2a+2b-c)^2 + (2b+2c-a)^2 + (2c+2a-b)^2.$$

22. Hãy viết các số sau đây dưới dạng tích của hai số tự nhiên khác 1 :

a) 899 ;

b) 9991.

23. Chứng minh rằng hiệu sau đây là một số gồm toàn các chữ số như nhau :

$$7778^2 - 2223^2.$$

24. Chứng minh các hằng đẳng thức :

a)  $(a+b+c)^2 + a^2 + b^2 + c^2 = (a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2$  ;

b)  $x^4 + y^4 + (x+y)^4 = 2(x^2 + xy + y^2)^2$ .

25. Cho  $a^2 - b^2 = 4c^2$ . Chứng minh hằng đẳng thức

$$(5a-3b+8c)(5a-3b-8c) = (3a-5b)^2.$$

26. Chứng minh rằng nếu  $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2$  với  $x, y$  khác 0 thì

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y}.$$



27. Chứng minh rằng nếu  $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = (ax + by + cz)^2$  với  $x, y, z$  khác 0 thì  $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$ .

28. Cho  $(a + b)^2 = 2(a^2 + b^2)$ . Chứng minh rằng  $a = b$ .

29. Chứng minh rằng  $a = b = c$  nếu có một trong các điều kiện sau :

- a)  $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$  ;      b)  $(a + b + c)^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2)$  ;  
c)  $(a + b + c)^2 = 3(ab + bc + ca)$ .

30. Hãy viết các biểu thức sau dưới dạng tổng của ba bình phương :

- a)  $(a + b + c)^2 + a^2 + b^2 + c^2$  ;  
b)  $2(a - b)(c - b) + 2(b - a)(c - a) + 2(b - c)(a - c)$ .

31. Tính giá trị của biểu thức  $a^4 + b^4 + c^4$ , biết rằng  $a + b + c = 0$  và :

- a)  $a^2 + b^2 + c^2 = 2$  ;      b)  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ .

32. Cho  $a + b + c = 0$ . Chứng minh  $a^4 + b^4 + c^4$  bằng mỗi biểu thức :

- a)  $2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$  ;      b)  $2(ab + bc + ca)^2$  ;

c)  $\frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{2}$ .

33. Chứng minh rằng các biểu thức sau luôn luôn có giá trị dương với mọi giá trị của biến :

- a)  $9x^2 - 6x + 2$  ;      b)  $x^2 + x + 1$  ;      c)  $2x^2 + 2x + 1$ .

34. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức :

- a)  $A = x^2 - 3x + 5$  ;      b)  $B = (2x - 1)^2 + (x + 2)^2$ .

35. Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức :

- a)  $A = 4 - x^2 + 2x$  ;      b)  $B = 4x - x^2$ .

36. Chứng minh rằng :

- a) Nếu  $p$  và  $p^2 + 8$  là các số nguyên tố thì  $p^2 + 2$  cũng là số nguyên tố.  
b) Nếu  $p$  và  $8p^2 + 1$  là các số nguyên tố thì  $2p + 1$  cũng là số nguyên tố.

37. Chứng minh rằng các số sau là hợp số :

a) 999 991 ;

b) 1 000 027.

38. Thực hiện phép tính :

a)  $(x - 2)^3 - x(x + 1)(x - 1) + 6x(x - 3)$  ;

b)  $(x - 2)(x^2 - 2x + 4)(x + 2)(x^2 + 2x + 4)$ .

39. Tìm x, biết :

a)  $(x - 3)(x^2 + 3x + 9) + x(x + 2)(2 - x) = 1$  ;

b)  $(x + 1)^3 - (x - 1)^3 - 6(x - 1)^2 = -10$ .

40. Rút gọn các biểu thức :

a)  $(a + b + c)^3 - (b + c - a)^3 - (a + c - b)^3 - (a + b - c)^3$  ;

b)  $(a + b)^3 + (b + c)^3 + (c + a)^3 - 3(a + b)(b + c)(c + a)$ .

41. Chứng minh các hằng đẳng thức :

a)  $(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = 3(a + b)(b + c)(c + a)$ .

b)  $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$ .

42. Cho  $a + b + c = 0$ . Chứng minh rằng  $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ .

43. Cho  $x + y = a$  và  $xy = b$ . Tính giá trị của các biểu thức sau theo a và b :

a)  $x^2 + y^2$  ;

b)  $x^3 + y^3$  ;

c)  $x^4 + y^4$  ;

d)  $x^5 + y^5$  .

44. a) Cho  $x + y = 1$ . Tính giá trị của biểu thức  $x^3 + y^3 + 3xy$ .

b) Cho  $x - y = 1$ . Tính giá trị của biểu thức  $x^3 - y^3 - 3xy$ .

45. Cho  $a + b = 1$ . Tính giá trị của biểu thức

$$M = a^3 + b^3 + 3ab(a^2 + b^2) + 6a^2b^2(a + b).$$

46. a) Cho  $x + y = 2$  và  $x^2 + y^2 = 10$ . Tính giá trị của biểu thức  $x^3 + y^3$ .

b) Cho  $x + y = a$  và  $x^2 + y^2 = b$ . Tính  $x^3 + y^3$  theo a và b.

47. Chứng minh rằng :

a) Nếu số n là tổng của hai số chính phương thì  $2n$  cũng là tổng của hai số chính phương.