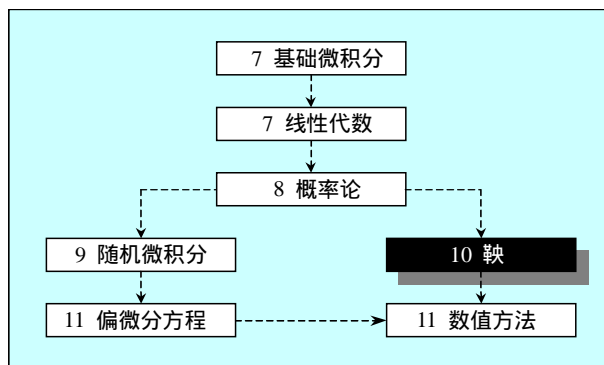


## 第十章 随机过程 II：鞅

**10.1 概述**

10.1.1 离散时间

10.1.2 连续时间

10.1.3 鞅的例子

10.1.4 鞅的子类

**10.2 停时和鞅型序列**

10.2.1 停时定义

10.2.2 最优停止定理

10.2.3 鞅型序列

**10.3 多布-迈耶分解**

10.3.1 多布分解定理

10.3.2 多布-迈耶定理

10.3.3 二次变差过程

**10.4 再论随机积分**

10.4.1 鞅变换和随机积分

10.4.2 简单过程随机积分

10.4.3 再论伊藤积分

**10.5 测度变换和鞅表示**

10.5.1 直观理解

10.5.2 拉登-尼科迪姆导数

10.5.3 哥萨诺夫定理

10.5.4 鞅表示定理

本章的学习目标为：

- 了解信息结构和信息一致性的数学表述方式和经济含义
- 明确鞅的定义(离散和连续)，以及连续时间情形下的一些技术性要求
- 熟悉二项过程和布朗运动等常见鞅和它们的轨道特征
- 了解鞅的几个重要子类：一致可积鞅和平方可积鞅
- 了解停时概念和最优停止定理
- 了解由停止一个鞅产生的局部鞅以及其它鞅型随机过程
- 了解多布-迈耶分解定理，以及二次变差和协变差过程的概念
- 了解各种被积函数和积分算子情况下，定义随机积分的方法
- 掌握随机伊藤积分的定义和主要性质
- 掌握拉登-尼科迪姆导数的各种形式和性质
- 掌握凯麦隆-马丁-哥萨诺夫定理，并熟练应用该定理进行测度变换
- 掌握鞅表示定理，并理解该定理在分析交易策略的可行性和构造完备市场模型中的作用

鞅这个术语早在 20 世纪 30 年代首先由 Ville(1939)引进，但是其基本概念来自于法国概率学家列维(Levy, 1934)。真正把鞅理论发扬光大的则是美国数学家多布(Doob)，他在 1953 年的名著《随机过程》一书中介绍了(包括上鞅分解问题在内的)他对于鞅理论的系统研究成果。它随即引起了概率学家们对一般随机过程理论研究的兴趣，并逐渐使得鞅成为现代概率和随机过程理论的基础。

鞅在微观金融分析中的应用是随着哈里森(Harrison J. M.)同克里普斯(Kreps D. M.)1979 年，以及哈里森和帕里斯卡(Pliska S. R.)1981 年两篇经典论文的发表开始的。他们证明了所谓的资产定价基本定理：当且仅当金融市场上不存在“免费午餐”(free lunch)，所有金融

资产的贴现价格都是一个鞅<sup>1</sup>。这就使得鞅成为了现代金融资产定价技术所必须的主流数学工具。相对于上一章随机微积分而言，由于较多地借助测度理论，鞅显得更加抽象，但令人惊奇的是，它的引入不仅使得微观金融理论分析(例如期权定价)变得更加简洁和优雅；并且由于可以借助现代数值计算技术，它还提供了更为强大的运算能力，而这对于实际工作又是至关重要的。因此今天，鞅方法及其辅助它的强大数值(模拟)技术成为了当今金融理论研究者和实践工作者必不可缺的基本装备<sup>2</sup>。

在本章中，我们首先在离散时间下，使用在概率基础一章中接触到的分割、条件数学期望等概念来严格地给出鞅的定义。在澄清一些技术性要求的基础上，随后给出连续时间鞅的概念，并提供一些金融分析中常见的鞅的例子来加深理解。

接下来我们考察停时(stopping time)概念，借助它把鞅的性质拓展到其它鞅型序列上去并获得最优停止定理。然后我们考察了多布-迈耶分解(Doob-Meyer decomposition)定理，

#### 10.4 再论随机积分

##### 10.4.1 鞅变换和随机积分

##### 10.4.2 简单过程随机积分

##### 10.4.3 再论伊藤积分

接下来讨论对于现代金融分析至关重要的——等鞅测度变换(equivalent martingale transformation)和凯麦隆-马丁-哥萨诺夫定理(Cameron-Martin-Girsanov theorem)。只有熟练掌握并且能够灵活运用这一方法，才能真正领略到现代金融理论的精髓。

### 10.1 概述

“鞅”一词来源于法文 martingale 的意译，原意是指马的笼套或者船的索具，同时也指一种逢输就加倍赌注，直到赢为止的恶性赌博方法(double strategy)。为了理解它的原意，不妨来玩一种纸牌游戏。

在 52 张牌中任意抽取一张，如果抽到一张红色的方块或者红心就赢一笔钱，否则就输掉这笔钱。采用以下的赌博方法：从一块钱开始，如果抽到的是黑色纸牌就加倍赌注，如果抽到的是红色纸牌就此收手。假定一个赌徒已经连续输了 4 次，他就失去了  $1+2+4+8=15$  块钱。在第 5 次赌的时候，他把赌注加倍到了 16。这次很幸运，出现的确实是红色纸牌。他赢得了 16 元抵去输掉的 15 元，他还净赚 1 元。这种赌博方法的优点在于：只要你有足够的资本来不断加倍赌注的话，你总是会赢的。事实是：如果不幸所有 26 张黑色纸牌全让你抽到了，为了赢一块钱，你需要 6700 万元来下最后一注。很可能在此之前，你已经破产了。这种赌博方式在理论和实际中含义都十分隽永，它被称为鞅<sup>3</sup>。

但是这种已经在现代赌场中被严格禁止的赌博方式本身还没有说明鞅在金融学理论研究中的确切含义。鞅究竟是什么呢？简单的说，鞅是“公平”赌博(fair game)的数学模型。那么什么又是公平的赌博呢？仍然假设一个人在参加赌博，他已经赌了  $n$  次，正准备参加第  $n+1$  次赌博。如果不做什么手脚，他的运气应当是同他以前的赌博经历无关的。用  $X_n$  表示他在赌完第  $n$  次后拥有的赌本数，如果对于任何  $n$  都有

$$E(X_n | X_{n-1}) = X_{n-1}$$

成立，即赌博的期望收获为 0，仅能维持原有财富水平不变，就可以认为这种赌博在统

<sup>1</sup> 根据这一原则金融市场上的任何资产的价格就可以被合理的决定。因而他们的工作得到积极的响应并开启了现代金融研究的新时代，鞅这种全新的分析工具被引入了。

<sup>2</sup> 数值(模拟)技术见 11.4 节。

<sup>3</sup> 还启发我们去考虑这样一些问题：最优停止时刻是什么，有限财富的赌徒必定输光等等，现代随机概率理论中的重要概念和定理。在实际中，现代赌场中明确禁止这种赌博方式，但是金融中却常常存在这样的情况，例如利森的豪赌。此外加倍策略将干扰资产定价基本定理。

计上是公平的<sup>4</sup>。

在金融分析中，投资者通常会根据过去发生的事件来指导未来的投资决策，我们可以把  $X$  设想为由于信息发布而产生波动的金融资产价格(过程)，而  $EX_n$  就是对这种价格运动的预测，而恰好鞅就是用条件数学期望来定义的，这种相似性就激发了使用鞅和与之相关的数学概念来描述金融资产价格运动过程特征的热情，因此鞅在 20 世纪 80 年代以后迅速成为主流金融经济学研究中标准的时髦。

### 10.1.1 离散时间

简单的说，一个随机变量的时间序列没有表现出任何的趋势性(trend)，就可以称之为鞅；而如果它一直趋向上升，则称之为下鞅(submartingale)；反之，如果该过程总是在减少，则称之为上鞅(supermartingale)。因此实际上鞅是一种用条件数学期望定义的随机运动形式，或者说是具有某种可以用条件数学期望来进行特征描述的随机过程。

我们循序渐进地分成 4 个步骤来正式定义鞅：

1) 首先，描述概率空间。存在一概率空间  $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}\}$ ，要求  $\mathcal{F}$ -代数  $\mathcal{F}$  是  $\mathcal{P}$ -完备的，即对于任何  $A \in \mathcal{F}$  且  $P(A) = 0$ ，对一切  $N \subset A$  都有  $N \in \mathcal{F}$  成立<sup>5</sup>。接下来，

2) 描述滤波(filtration)。设想我们在一些时点上观察一种股票的价格  $(S_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$  随着时间的波动情况<sup>6</sup>。令  $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$  代表在不同时点上投资者获得的有关股票价格的历史信息，随着时间的推移，越来越多的数据被追加到这个信息集合中，它会越来越丰富。当  $m < n < o$  时，这一族信息集合必然满足：

$$10.1.1 \quad \mathcal{F}_m \subseteq \mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_o \dots\dots$$

实际上  $\mathcal{F}_n$  就是  $n$  时刻的分割产生的  $\mathcal{F}$ -代数，这样的  $\mathcal{F}$ -增族记为：

$$\mathbf{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$$

我们称它为滤子(filter)或者滤波<sup>7</sup>。给定一个滤波就决定了在给定的概率空间中的历史演化 and 信息传播过程(见金融相关点 10-1)。四位一体的  $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, \mathbf{F}\}$  被称为滤过(filtered)的概率空间或者随机基(stochastic basis)。

#### 金融相关点 10-1：金融市场的信息结构和传播过程<sup>8</sup>

金融市场首先是一个交易的场所，它完成资源配置的任务；同时它还是信息发布的场所，有时也被称为经济运行的“指针”。设想在股票市场上发生的事情吧！当你盯着绿色的荧光屏时，时间在一分一秒的过去，新的信息不断的来到。各种资产的价格和投资者的心绪随之起伏波动。在微观金融分析中，我们需要一个能够反映这种金融市场上的信息结构(information structure)及其历史演化的过程(spread process)性质的数学模型。

考虑一个如下图所示的重合(recombining)的二项树模型。

<sup>4</sup> 期望收益等于参加费用的赌博也可以认为是统计上公平的。

<sup>5</sup> 我们会经常看到这一类技术性的要求，它是保证数学上严密性的需要，在经济分析则往往找不到合适的对应物。幸运的是，经济分析中大多数问题具有良好的性质。

<sup>6</sup> 我们用  $\mathbb{Z}_+$  表示正整数。

<sup>7</sup> 实际上  $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$  可以作更为广泛的解释，它也可以是无限维向量，如果仅仅解释为价格或者收益就和法马(Fama E.)定义的弱的市场效率的基础相吻合，这也是我们这里的定义。这样假定时，我们说滤波是由价格过程生成的(generated)。

<sup>8</sup> 这里的描述主要来自于 Dothan(1990)和 Rebonato(1998)。

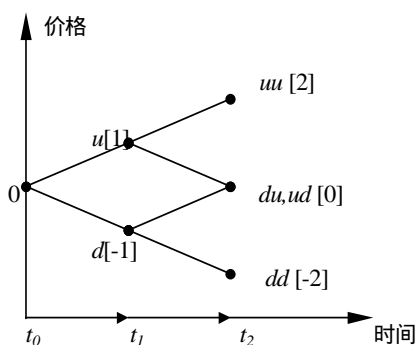


图 10-1 二项树模拟股票价格运动

$u$  代表股票价格经历了一次上升； $d$  则代表一次下降，两个时刻过后股票价格会出现 4 种情况，那么样本空间就是：

$$\Omega = \{\{uu\}, \{ud\}, \{du\}, \{dd\}\}$$

我们任意构造几种集合，例如：

$$\mathcal{F}_a = \{\{uu\}, \{ud\}, \{du\}, \{dd\}\}$$

$$\mathcal{F}_b = \{uu, ud, du, dd\}$$

$$\mathcal{F}_c = \{\{uu, ud\}, \{du\}, \{dd\}\}$$

$$\mathcal{F}_d = \{\{uu\}, \{uu, ud\}, \{du\}, \{dd\}\}$$

$$\mathcal{F}_e = \{\{uu\}, \{ud\}, \{du\}\}$$

根据我们在概率论一章中学习过的知识，我们知道  $\mathcal{F}_a$ ,  $\mathcal{F}_b$  和  $\mathcal{F}_c$  都是对样本空间  $\Omega$  的一种分割。这是因为按照分割的定义，它们各自包含的所有元素的并集构成了整个状态空间，而它们所包含的元素两两相交的结果是空集。 $\mathcal{F}_d$  和  $\mathcal{F}_e$  则不是分割，因为  $\mathcal{F}_d$  中前两个元素的交集不是空集，而是  $\{uu\}$ ；而  $\mathcal{F}_e$  的所有元素的并也没有构成整个状态空间，缺少了  $\{dd\}$ 。

$\mathcal{F}_b$  集合表示股票价格两次变动以后所有可能发生的情况，它仅仅说明了事物发展的未来潜在可能性，它相当于位于二项树上的 0 点。在 0 时刻信息结构是最平凡的，即： $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ 。而  $\mathcal{F}_a$  则刚好相反，它完全揭示出所有的世界状态，正是在最终的 2 时刻，究竟哪种状态会发生已经成为了事实。 $\mathcal{F}_c$  则代表了一种中间状态，好比在 1 时刻，我们知道如果状态  $\{uu, ud\}$  发生，即前进到  $d[1]$  点后， $\{dd\}$  或者  $\{ud\}$  之一必定会发生，到底是谁，仍然不能够确定；而  $u[1]$  点以后的发生的情况则不清楚或者不重要了。因此这些分割就适当地代表了一个动态系统中的 0、完全和部分的信息。我们知道  $\mathcal{F}_a$  比  $\mathcal{F}_c$  精细，而  $\mathcal{F}_b$  是最粗糙的分割，把它们串联起来就有：

$$\mathcal{F}_b < \mathcal{F}_c < \mathcal{F}_a$$

因此从粗到细排列这些分割，还代表了信息的传递过程。

正式一些，假定同一状态空间中存在  $N+1$  个分割，它们满足下列 3 个条件：

- 1) 第一个分割是最粗糙的，即： $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\} = \{\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}\}$ ；
- 2) 最后一个分割是最精细的，即： $\mathcal{F}_N = \{\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \dots, \{\omega_n\}\}$ ；
- 3) 对于任何  $s < t$ ， $\mathcal{F}_t$  分割比  $\mathcal{F}_s$  要精细。

这样定义的分割序列，就是一个“过目不忘”的学习过程。在最初的 0 时刻，未来世界视野一片模糊，唯一可知的是  $\Omega$  中的某种状态会发生。下一个时刻有一些新的信息来临，即有一个比较粗的分割，在任意时刻，我们对于(价格)信息知识的了解始终在增长。最后时刻一切都昭然若揭，我们完全了解了从 0 到  $N$  时刻哪一个状态发生了，它又是如何演化的。这在实际中是容易做到的，只要投资者有一个好记性或者容量足够大的硬盘就可以了。符合上述 3 个条件的一组分割就被称为信息结构，它的数学对应物就是滤波。

3) 如果对于任何  $n \geq 0$ ,  $S_n$  的值被包含在  $\mathcal{F}_n$  中, 就称  $S_n$  是  $\mathcal{F}_n$  可测的, 或者使用梅耶 (Meyer) 的术语, 称  $S_n$  为  $\mathcal{F}_n$  适应的 ( $\mathcal{F}_n$ -adapted)<sup>9</sup>。

#### 金融相关点 10-2：随机金融变量的可测性和一致性

微观金融分析中的各种随机过程, 例如价格、交易头寸都有一个是否可以被预测的问题。讨论仍然从上一框文中的信息结构开始。我们知道由于以集合本身为定义域的函数运算, 例如微积分运算, 不是很方便, 所以要进一步引入曾经学习过的随机变量函数, 即:

$$X: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$$

来描述信息结构。

考虑这样一种随机变量函数, 它赋予一个分割中的同一子集下的元素以相同的数值, 我们称这种随机变量对于该种特定的分割是可测的。仍然使用前面的二项树模型来具体说明这一点。有随机变量函数  $x'$ , 它定义股票的价格在 0 时刻为 0, 在 0 时刻以后则每经历一次上升就在原来的价格上加 1; 如果下降就减去 1, 图 10-1 中就标明这种情形。根据  $x'$  的定义有:

$$x'(\{uu\}) = 2; \quad x'(\{ud\}) = 0; \quad x'(\{du\}) = 0; \quad x'(\{dd\}) = -2$$

考虑下列分割:

$$\mathcal{F}_a = \{\{uu\}, \{ud\}, \{du\}, \{dd\}\}$$

$$\mathcal{F}_f = \{\{uu\}, \{ud, du\}, \{dd\}\}$$

$$\mathcal{F}_g = \{\{uu, dd\}, \{ud\}, \{du\}\}$$

函数  $x'$  把相同的数值指定给了分割  $\mathcal{F}_f$  中同一子集的不同元素, 例如  $x'(\{ud\})$  和  $x'(\{du\})$  都是 0, 因此它是  $\mathcal{F}_f$  可测的。但是它不是  $\mathcal{F}_g$  可测的, 因为它给该分割下同一子集  $\{uu, dd\}$  中不同元素赋予了不同的数值。它也是  $\mathcal{F}_a$  可测的, 这是平凡的。需要注意的是, 尽管  $x'$  并没有为  $\mathcal{F}_a$  中的每一个不同的元素 (子集) 指定不同的数值, 例如  $x'(\{ud\})$  和  $x'(\{du\})$  都是 0, 但这并没有影响它的  $\mathcal{F}_a$  可测性。因此一般而言, 任何随机变量对于最细致的分割总是可测的。注意到尽管分割  $\mathcal{F}_f$  比  $\mathcal{F}_a$  粗糙, 但它仍然是  $x'$  可测的。当函数  $x$  在它所基于的最粗糙的那个分割上是可测的, 就称该分割是由  $x$  生成的 (generating), 记为  $\mathcal{F}_x$ , 在上面的例子中有

$$\mathcal{F}_{x'} = \mathcal{F}_f$$

我们之所以对由随机变量函数生成的分割感兴趣, 是因为它包含了与该随机变量本身所包含的相同的信息内容。不妨假定存在一新的随机变量函数  $x''$ , 它为状态空间中的每一个元素都赋予同样的数值, 那么即使在最后时刻准确地获得了这时的随机变量的值, 我们仍然无法了解事件树的演化路径, 它所包含的信息内容不比最粗糙的分割  $\mathcal{F}_b$  更多。但是从  $x'$  的数值, 我们确实可以知道: 路径究竟是  $uu$  (如果 2 出现) 或者  $dd$  (-2 出现) 还是  $ud$ 、 $du$  (0 出现)。而这正是由  $x'$  生成的分割  $\mathcal{F}_f$  所包含的信息内容。

不妨再定义一个随机变量函数  $x'''$ , 它定义股票的价格在 0 时刻为 0, 在 0 时刻以后如果第  $i$  步出现股票价格上涨, 就在原股票价格上加上  $i$  ( $i=1, 2$ ); 下降则作类似定义。这样:

$$x'''(\{uu\}) = 1 + 2 = 3; \quad x'''(\{ud\}) = 1 - 2 = -1;$$

$$x'''(\{du\}) = -1 + 2 = 1; \quad x'''(\{dd\}) = -1 - 2 = -3$$

尽管  $x'''$  是一个“路径依赖” (path-dependent) 的函数, 但根据  $x'''$  的取值情况, 我们仍然可以确定股票价格的变化路径。显然这时有:

$$\mathcal{F}_{x'''} = \mathcal{F}_a$$

由于一个随机变量包含了同它生成的分割同样的信息内容, 因此可以使用一个新的表述结构。

<sup>9</sup> 对随机过程可测性的详细描述见框文 10-2, 并请回顾 3.3.2 节中的有关内容。

1) 假定存在一个随机变量序列  $x(0), x(1), \dots, x(N)$ ，如果每一个  $x(n)$  是  $\mathcal{F}_n$  可测的，也就是说它对于  $t$  时刻的分割中的子集的每一个元素赋予相同的数值，就称该随机变量序列或者随机过程是  $\mathcal{F}(n)$  适应的。一般说来，如果没有内幕交易的话，我们通常价格过程是  $\mathcal{F}(n)$  适应的。

2) 如果一个随机过程中每一个  $x(n)$  是  $\mathcal{F}(n-1)$  可测的，就称它为可料(predictable 或者 previsible)过程。期间交易过程，即在每一个时刻上的交易策略(trading strategy)的汇总：

$$\theta = \{\theta(0), \theta(1), \dots, \theta(N)\}$$

就是  $\mathcal{F}(n-1)$  可测的。这是容易理解的，因为投资者一般是根据上一时刻的(价格)信息来决定投资组合并一直保持到本期的。换句话说，投资策略  $\theta^i(n)$  是  $\mathcal{F}(n)$  可料的<sup>10</sup>。

4) 然后，是条件数学期望。使用不同时刻的信息集，我们可以推测  $S_n$  的未来运动形式，很自然的，这种预测通常采用条件数学期望的形式：

10.1.2

$$E^{\mathcal{P}}(S_N) = E^{\mathcal{P}}(S_N | \mathcal{F}_n), \quad n < N$$

这意味着在  $n$  时刻对  $N$  时刻的价格预期，是基于在该时刻已确知的特定信息集合  $\mathcal{F}_n$  的。注意，这里我们在期望算子上加的  $\mathcal{P}$  代表这种期望是基于特定概率测度(或者分布)的，在不混淆的情况下它也可以被省略。

**定义 10.1.1** 假定  $(S_n)_{n \in \mathbf{Z}_+}$  是滤波空间  $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, \mathbf{F}\}$  上的一个  $\mathcal{F}_n$ -适应过程，如果：

1) 无条件的数学期望是有限的，即：

$$E(S_n) < \infty, n \in \mathbf{Z}_+$$

2) 对下一时刻的预测就是现在观察到的数据，即：

10.1.3

$$E_n(S_{n+1} | \mathcal{F}_n) = S_n, n \in \mathbf{Z}_+$$

则称  $(S_n)_{n \in \mathbf{Z}_+}$  为  $(\mathbf{F}$  下的)离散时间鞅或者简称离散鞅<sup>11</sup>。

因此鞅实际上就是未来变化完全无法预测的随机过程。不妨假设  $(S_n)_{n \in \mathbf{Z}_+}$  是一个鞅，在一个单位时间间隔内， $S_n$  的预期变化为

$$E_n[(S_{n+1} - S_n) | \mathcal{F}_n] = E_n(S_{n+1} | \mathcal{F}_n) - E_n(S_n | \mathcal{F}_n)$$

由于  $S_n$  是鞅， $E_n(S_{n+1})$  等于  $S_n$ ，而根据定义  $S_n$  是  $\mathcal{F}_n$  可测的，所以  $E_n(S_n)$  在  $n$  时刻是已知的，也等于  $S_n$ ，所以：

10.1.4

$$E_n(\Delta S_n | \mathcal{F}_n) = 0$$

因此对  $S_n$  在下一时间内变化的最好预测就是 0。换句话说，该随机变量的未来运动方向和大小是不可预测的，这就是所谓鞅性(martingale property)。

上式中的  $\Delta S_n$  被称为鞅差(martingale difference)。显然，鞅差的部分和(partial summation)也是鞅，即：

$$E_n\left(\sum_{k=1}^n \Delta S_k | \mathcal{F}_k\right) = 0$$

需要强调的是：鞅是用条件期望来定义的，而条件期望的计算总是基于某种概率分布和

<sup>10</sup> 对于随机变量和随机过程可测性的一般性讨论见 10.1.2 节。

<sup>11</sup> 当  $\mathbf{F}$  固定时，我们常常会省略它；而且如果不特别提及  $\mathbf{F}$  时，一般隐含地指过程本身产生的滤波  $\mathbf{F}^S$ ，通常称之为自然滤波(natural filtration)。



特定信息集合的, 这两点对于决定一个随机过程是不是鞅起关键作用, 以后的分析会逐渐揭示这一点。

只要对定义 10.1.1 中的第二个条件做适当修改, 就可以获得相应的上鞅和下鞅的定义。

**定义 10.1.2** 如果：

2')  $E_n(S_{n+1} | \mathcal{F}_n) > S_n, n \in \mathbf{Z}_+$ , 则称随机过程  $(S_n)_{n \in \mathbf{Z}_+}$  为下鞅；

2'')  $E_n(S_{n+1} | \mathcal{F}_n) < S_n, n \in \mathbf{Z}_+$ , 则称随机过程  $(S_n)_{n \in \mathbf{Z}_+}$  为上鞅。

容易知道：

1) 如果  $(S_n)_{n \in \mathbf{Z}_+}$  是上鞅, 则  $(-S_n)_{n \in \mathbf{Z}_+}$  是下鞅。

2) 如果  $(S_n)_{n \in \mathbf{Z}_+}$ 、 $(X_n)_{n \in \mathbf{Z}_+}$  是(下)鞅, 则  $(S_n + X_n)$  也是(下)鞅。

3) 如果  $(S_n)_{n \in \mathbf{Z}_+}$  是鞅, 根据詹森不等式, 如  $f(\cdot)$  是一个凸函数, 则

$$X_n = f(S_n)$$

必定是一个下鞅。所以  $(S_n^\lambda)_{n \in \mathbf{Z}_+}, \lambda \geq 1$  就是一个下鞅。

### 10.1.2 连续时间

连续时间参数  $t$  的取值范围为实半轴  $[0, \infty)$  或者其中的某个区间  $[0, T]$ , 但我们对连续时间随机函数的路径有比较严格的(技术性)要求。

首先让我们来正则化(regularize)路径。

1) 正则性。如果一个函数

$$f : [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$$

在每一点的左右极限都存在, 就称它为正则函数(regular)。容易知道正则函数仅有有限个间断点。

2) 连续性。如果一个随机过程的全部样本路径是连续的, 我们就称之为连续随机过程。正式的有：如果对于任意随机过程  $X(t)$  和任意  $s \in [0, T]$ , 在概率收敛意义下有：

$$X(s) = \lim_{t \rightarrow s} X(t)$$

则称该随机过程为连续的。这又具体包括两种情况, 如果

$$X(\omega, t) = \lim_{s \downarrow t} X(\omega, s), \quad a.s. \forall t \in [0, T]$$

就称该随机过程有着右连续样本路径。左连续的概念是类似的。

3) 正则连续性。我们称一个随机过程  $(X_t)_{t \in [0, \infty)}$  为正则右连续的(regular right continuous),

当且仅当它是  $\mathcal{F}_t$ -可测的, 并且对于每一个  $\omega \in \Omega$  和  $t \in [0, \infty)$ ,

a) 它的样本路径是右连续的：

$$\lim_{u \rightarrow t} X(u, \omega) = X(t, \omega), \quad u > t$$

b) 存在左极限：

$$X(t-, \omega) = \lim_{s \rightarrow t} X(s, \omega), \quad s < t$$

正则左连续的定义是类似的，它们的图形表示如下：

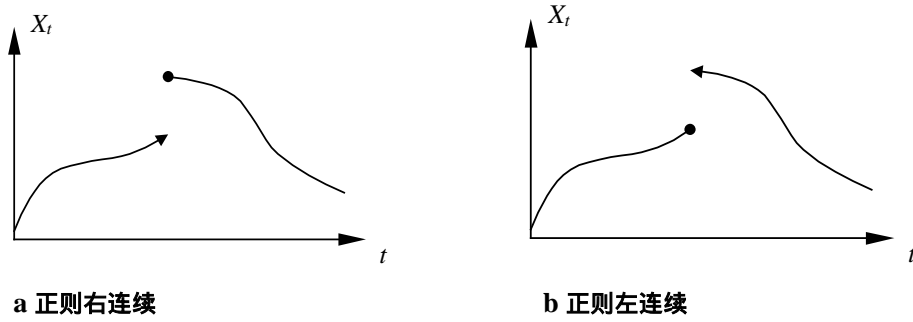


图 10-2 正则右、左连续函数

我们用 RCLL(right-continuous with left limits 或者 càdlàg<sup>12</sup>)表示拥有左极限同时又是右连续的随机过程。

接下来，我们考察两个随机过程是否相同或者说等价(equivalent)。考虑定义在同一概率空间上的两个随机过程  $(X_t)_{t \in [0, \infty)}$ 、 $(Y_t)_{t \in [0, \infty)}$ ，当它们被认为是  $t$  和  $\omega$  函数时，当且仅当

$$X_t(\omega) = Y_t(\omega), \quad \forall t \in [0, T]; \omega \in \Omega$$

成立时，我们才能说它们是相同的。但考虑到概率测度  $\mathcal{P}$ ，可以放松一些要求。我们可以提供至少 2 个判断两个随机过程是否“几乎总是相同”(almost the same)的标准：

1) 当且仅当对于每一个  $t \geq 0$ ，有

$$P\{X_t = Y_t\} = 1$$

成立时，称它们互相为对方的一个修正(modification)或者一个版本(version)<sup>13</sup>。

2) 而当且仅当有

$$P\{X_t = Y_t, \forall t \in [0, T]\} = 1$$

成立时，称为它们为是无区别的(indistinguishable)。如果两个过程是无法区别的，则它们一定是对方的一个修正，反之则不真<sup>14</sup>。但是如果它们具有右连续的样本路径，则反之也成立。

现在我们加强信息结构。存在一个滤过的概率空间  $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, \mathbf{F}\}$ ，要求它满足以下这些常规条件(usual conditions)：

- 1)  $\mathcal{F}$ -代数  $\mathcal{F}$  是  $\mathcal{P}$ -完备的，即对于任何  $A \in \mathcal{F}$  且  $P(A) = 0$ ，对一切  $N \subset A$  都有  $N \in \mathcal{F}$  成立；
- 2)  $\mathcal{F}_0$ -代数  $\mathcal{F}_0$  包含  $\mathcal{F}$  的所有  $\mathcal{P}$ -零集，即对于任何  $A \in \mathcal{F}$  且  $P(A) = 0$ ，都有  $A \in \mathcal{F}_0$  成立；
- 3) 滤波  $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, \infty)}$  是右连续的，即对于所有  $t > 0$ ，都有：

$$\mathcal{F}_t = \bigcap_{u > t} \mathcal{F}_u$$

成立，其中  $\bigcap_{u > t} \mathcal{F}_u$  表示对于  $u > t$  时的所有  $\mathcal{F}_u$  中最大的  $\mathcal{F}_t$ -域，这个条件说明滤波包含了

$\mathcal{F}_t$ -域的所有不可数集合。

接下来的任务是深入考察随机过程的联合可测性(joint measurability)。假定  $[0, T]$  是  $\mathbf{R}$  中的某个区间， $\mathcal{B}(0, T)$  是  $[0, T]$  中全体 Borel 集构成的  $\mathcal{F}$ -代数；用  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}([0, T])$  表示乘积  $\mathcal{F}$ -

<sup>12</sup> càdlàg 即 continu à droite, limites à gauche.

<sup>13</sup> 或者称两者随机等价(stochastically equivalence)，这时  $X$  和  $Y$  有相同的有穷维分布函数。

<sup>14</sup> 两者之间的细微差异见 Elliott&Kopp(1999)，p102。



代数<sup>15</sup>。给定任意随机过程  $(S_t)_{t \in [0, T]}$ ， $S: \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbf{R}$ ，如果：

- 1)  $(S_t)_{t \in [0, T]}$  在乘积  $\sigma$ -域  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}([0, T])$  上是可测的，就称它为可测的。
- 2)  $(S_t)_{t \in [0, T]}$  是  $\mathcal{F}_t$  可测的就称  $(S_t)_{t \in [0, T]}$  为  $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, \infty)}$  适应的。
- 3)  $(S_t)_{t \in [0, T]}$  对于任何  $t \in [0, T]$ ，是在乘积  $\sigma$ -域  $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}([0, t])$  上是可测的，就称之为循序可测的 (progressively measurable)<sup>16</sup>。

容易知道任何循序可测随机过程均是可测过程，并适应于  $\mathbf{F}$ 。一个可测、适应过程有一个循序可测的修正<sup>17</sup>。我们定义使得所有适应于  $\mathbf{F}$  的随机过程路径为循序可测的最小  $\sigma$ -域为循序  $\sigma$ -域  $\mathcal{PM}$  (progressive  $\sigma$ -field)。

实际上每个有着左(右)连续样本路径的适应过程都是循序可测的，由此我们还可以有以下子  $\sigma$ -域和相应的随机过程。

- 4) 可选  $\sigma$ -域  $\mathcal{Op}$  (optional  $\sigma$ -field)——使得所有适应于  $\mathbf{F}$  的右连续路径为可测的最小  $\sigma$ -域，如果一个过程是  $\mathcal{Op}$  可测的就被称为可选过程。
- 5) 可料  $\sigma$ -域  $\mathcal{Pr}$  (predictable  $\sigma$ -field)——是使得所有适应于  $\mathbf{F}$  的左连续路径为可测的最小  $\sigma$ -域，如果一个过程是  $\mathcal{Pr}$  可测的就被称为可料过程<sup>18</sup>。

因为：

$$\text{连续适应过程} \Rightarrow \text{RCLL 过程} \Rightarrow \text{循序可测过程} \Rightarrow \text{可测过程}$$

因此可料过程和可选过程必然是循序可测过程，所以上面的  $\sigma$ -域之间有以下嵌套关系<sup>19</sup>：

$$\mathcal{Pr} \subset \mathcal{Op} \subset \mathcal{PM} \subset \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, T]$$

**定义 10.1.3** 假定  $(S_t)_{t \in [0, \infty)}$  是滤波空间  $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, \mathbf{F}\}$  上的一个适应过程，如果：

- 1)  $E(S_t) < \infty, t \in [0, \infty)$ ；
- 2)  $E_t(S_T | \mathcal{F}_t) = S_t, \forall T > t$ 。

则称  $S_t$  为连续时间鞅或者简称鞅。

可以证明如果滤波满足常规条件，每一个上(下)鞅都存在一个  $\mathcal{F}_t$  适应的右连左极的修正<sup>20</sup>。因此当我们谈到连续时间鞅的时候，指的均是它们的 RCLL 版本<sup>21</sup>。

### 10.1.3 鞅的例子

离散鞅的例子是很普遍的，以下是微观金融分析中经常会见到的两个例子。

考虑我们在上一章中用来模拟股票价格路径的二项树模型。现在假定  $n$  时刻的股票价格为  $S_n$ ，而在  $n+1$  时刻，股票价格将以：

$$P = (1-d)/(u-d)$$

<sup>15</sup> 一个  $\Omega \times [0, T]$  可测的长方形是一个  $A \times B$  集合， $A \in \mathcal{F}$ ， $B \in \mathcal{B}([0, T])$ 。乘积  $\sigma$ -域  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}([0, T])$  是包含所有可测长方形和概率测度  $\mathcal{P} \times$  勒贝格测度  $\lambda$ -0 集的最小  $\sigma$ -域。

<sup>16</sup> 这个重要术语最早来自 Chung&Doob(1965)。

<sup>17</sup> 证明见 Meyer(1966)，p68。

<sup>18</sup> 这是一个技术术语，同计量金融中的直观概念差别很大，而且它定义得往往也不很精确，大致意味着一个过程具有独立的增量。

<sup>19</sup> 证明参见 Chung&Williams(1990)，p63。

<sup>20</sup> 参见 Karatzas&Shreve(1991)。

<sup>21</sup> 注意有些术语上有微小差异，参考 Hunt&Kennedy(2000)，p49。

的概率上涨到  $uS_n$ ；或者以  $1-P$  的概率下降到  $dS_n$ ，即：

$$10.1.5 \quad S_{n+1} = \begin{cases} uS_n & \text{概率为 } \frac{1-d}{u-d} \\ dS_n & \text{概率为 } \frac{u-1}{u-d} \end{cases}, \quad 0 < d < u$$

则下一时刻股票价格的数学期望为：

$$10.1.6 \quad E(S_{n+1} | S_n) = uS_n \frac{1-d}{u-d} + dS_n \frac{u-1}{u-d} = S_n \frac{u(1-d) + d(u-1)}{u-d} = S_n$$

因此遵循这种二项过程的股票价格运动就是一个鞅。

再考虑下面这个  $\mathcal{F}_n$ -适应的随机过程：

$$10.1.7 \quad S_{n+1} = S_n + \varepsilon_n, S_0 = 0$$

其中  $\varepsilon_n$  定义为：

$$10.1.8 \quad \varepsilon_n = \begin{cases} 1 & \text{概率为 } P \\ 0 & \text{概率为 } R, \quad P, R, Q \geq 0, P + R + Q = 1 \\ -1 & \text{概率为 } Q \end{cases}$$

可以证明  $[S_n - n(P-Q)]$  是一个鞅，这是因为：

$$\begin{aligned} 10.1.9 \quad E[S_{n+1} - (n+1)(P-Q) | \mathcal{F}_n] &= E[S_n + \varepsilon_n - (n+1)(P-Q) | \mathcal{F}_n] \\ &= S_n + E(\varepsilon_n) - (n+1)(P-Q) \\ &= S_n + (P-Q) - (n+1)(P-Q) \\ &= S_n - n(P-Q) \end{aligned}$$

容易证明  $S_n^2 - n(P-Q)$ 、 $[S_n^2 - n(P-Q)]^2 + n[(P-Q)^2 - (P+Q)]$  以及  $(Q/P)^{S_n}$ ，也都是  $\mathcal{F}_n$ -

适应的鞅，请读者自行完成。

连续时间中最让人感兴趣的鞅是我们已经很熟悉的维纳过程。在上一章中，我们知道标准维纳过程  $(W_t)_{t \in [0, \infty)}$  或者说布朗运动是一个具有以下特征的独立增量随机过程，：

$$1) W_0 = 0 ;$$

$$2) t \rightarrow W_t(\omega) \text{ 是连续的；}$$

3) 对于任何  $s \leq t$ ， $W_t - W_s$  是服从 0 均值，方差为  $t-s$  的标准正态分布的独立随机变量。

给定一个维纳过程  $W$ ，我们可以定义一个由  $W$  生成的滤波。令  $\mathcal{F}_t^0$  为  $\mathcal{F}$  中使得

$\{W(s), 0 \leq s \leq t\}$  是可测的最小子-域，而令  $\mathcal{F}_t^W$  是包括  $\mathcal{F}_t^0$  和所有 0 概率集的最小子-域，

则  $\{\mathcal{F}_t^W\}_{t \in [0, \infty)}$  就是由  $W$  生成的滤波。可以证明自然滤波：

$$\mathcal{F}_t^W = \sigma(W)$$

满足前面定义的常规条件<sup>22</sup>。也容易证明  $W$  是该滤波下的一个连续鞅：

$$E(W_{t+\Delta t} - W_t | \mathcal{F}_t) = E(W_{t+\Delta t} - W_t) = 0$$

以维纳过程为基础，可以引申出许多类似的随机过程。例如如果  $\mathcal{W}_t$  是一个  $\mathcal{F}_t$  适应的维纳过程，则  $\mathcal{W}_t^2 - t$  也是鞅，这一点可以简单证明如下：

$$\begin{aligned} E[X_{t+\Delta t} | \mathcal{F}_t] &= E(\mathcal{W}_{t+\Delta t}^2 | \mathcal{F}_t) - (t + \Delta t) \\ &= E[(\mathcal{W}_{t+\Delta t} - \mathcal{W}_t)^2 + 2\mathcal{W}_{t+\Delta t}\mathcal{W}_t - \mathcal{W}_t^2 | \mathcal{F}_t] - (t + \Delta t) \\ &= E[(\mathcal{W}_{t+\Delta t} - \mathcal{W}_t)^2 | \mathcal{F}_t] + 2E(\mathcal{W}_{t+\Delta t}\mathcal{W}_t | \mathcal{F}_t) - E(\mathcal{W}_t^2 | \mathcal{F}_t) - (t + \Delta t) \end{aligned}$$

逐次考察上式右侧各项：由于  $\mathcal{W}$  具有独立增量性质，因此  $\mathcal{W}_{t+\Delta t} - \mathcal{W}_t$  是独立于滤波  $\mathcal{F}_t$  的，另外注意到有

$$\Delta \mathcal{W}^2 = \Delta t$$

这一近似关系，就有：

$$E[(\mathcal{W}_{t+\Delta t} - \mathcal{W}_t)^2 | \mathcal{F}_t] = E[(\mathcal{W}_{t+\Delta t} - \mathcal{W}_t)^2] = \Delta t$$

而根据条件期望的性质(见第 8.3.3 节)，有：

$$E(\mathcal{W}_{t+\Delta t}\mathcal{W}_t | \mathcal{F}_t) = \mathcal{W}_t E(\mathcal{W}_{t+\Delta t} | \mathcal{F}_t) = \mathcal{W}_t^2$$

根据条件期望性质：

$$E(\mathcal{W}_t^2 | \mathcal{F}_t) = \mathcal{W}_t^2$$

综合上述结果就有：

$$E[X_{t+\Delta t} | \mathcal{F}_t] = \Delta t + 2\mathcal{W}_t^2 - \mathcal{W}_t^2 - t - \Delta t = \mathcal{W}_t^2 - t = X_t$$

这就证明了  $\mathcal{W}_t^2 - t$  是鞅。这个事实反过来说也是正确的，即如果  $\mathcal{W}_t^2 - t$  是一个连续时间鞅，而  $\mathcal{W}$  也是连续时间鞅，则  $\mathcal{W}$  必然是布朗运动<sup>23</sup>。

我们也可以证明随机过程  $e^{a\mathcal{W}_t - \frac{1}{2}a^2t}$  也是鞅，其中  $a$  是任意实数。这是因为

$$\begin{aligned} E[X_{t+\Delta t} | \mathcal{F}_t] &= E\left\{\exp[a\mathcal{W}_{t+\Delta t} - \frac{1}{2}a^2(t + \Delta t)] | \mathcal{F}_t\right\} \\ &= E\left\{X_t \exp[a(\mathcal{W}_{t+\Delta t} - \mathcal{W}_t) - \frac{1}{2}a^2\Delta t] | \mathcal{F}_t\right\} \end{aligned}$$

根据维纳过程的独立性假设和条件期望的性质，有：

$$\begin{aligned} E[X_{t+\Delta t} | \mathcal{F}_t] &= X_t E\left\{\exp[a(\mathcal{W}_{t+\Delta t} - \mathcal{W}_t) - \frac{1}{2}a^2\Delta t] | \mathcal{F}_t\right\} \\ &= X_t \exp(-\frac{1}{2}a^2\Delta t) E\left\{\exp[a(\mathcal{W}_{t+\Delta t} - \mathcal{W}_t)]\right\} \end{aligned}$$

$a(\mathcal{W}_{t+\Delta t} - \mathcal{W}_t)$  项服从 0 均值和  $a^2\Delta t$  方差的正态概率分布，根据在概率论一章中学习过的内容，我们知道  $\exp[a(\mathcal{W}_{t+\Delta t} - \mathcal{W}_t)]$  服从对数正态分布，它的期望是  $\exp(\frac{1}{2}a^2\Delta t)$ ，这样：

<sup>22</sup> 详细讨论详见黄(2001)，p18。

<sup>23</sup> 简单的证明可以参考 Elliot&Kopp(1999)，p125-26。

$$E[X_{t+\Delta t} | \mathcal{F}_t] = X_t \exp(-\frac{1}{2}a^2\Delta t) \exp(\frac{1}{2}a^2\Delta t) = X_t$$

这就证明了  $e^{aW_t - \frac{1}{2}a^2t}$  也是鞅，它被称为王尔德鞅(Wald's martingale)。

#### 金融相关点 10-3：金融资产价格运动和鞅

那么是不是金融资产价格运动就是鞅呢？我们知道一般说来，风险资产的价格变化，在给定信息集下，并非完全不可预测的。比方说，折扣发行的零息票债券(zero coupon bond)的价格  $B$  会随着到期日的临近，越来越接近其面值，即越来越大，即：

$$E_n(B_N) > B_n, \quad n < N$$

显然这是一个下鞅。类似的，股票通常会有一个正的预期收益，也就是说：

$$E(S_N - S_n | \mathcal{F}_n) \geq 0, \quad n < N$$

因而也不具有鞅性。以上讨论原则上也适合期货和期权一类的衍生产品。例如期权有时间价值，并且会随着到期日的临近不断地衰减，这是上鞅的一个特征。

很自然就会有这样一个问题：既然大多数金融产品的价格运动不是鞅，为什么我们对于鞅有这么浓厚的兴趣呢？实际上在 10.1.1 节中定义离散鞅时，我们就强调过：鞅的定义是基于特定概率分布和信息集合的，通过对信息集和概率测度的适当处理，就可以把上(下)鞅转化为鞅。

比方说我们能不能找到某一种概率分布  $Q$ ，它把资产的未来价格用无风险收益率贴现后的值，转变成为一个鞅，即：

$$E_n^Q(e^{-r(N-n)}S_N | \mathcal{F}_n) = S_n, \quad n < N$$

如果这种转换可以实现，势必大为简化金融产品定价工作。如何在数学中实现这种变换以及它在经济学上的合理解释是什么，将是以下分析的重要内容之一。

#### 10.1.4 鞅的子类

接下来我们介绍鞅的 3 个子类，它们是  $L^1$ -有界(bounded)鞅，一致可积(uniformly integrable)鞅和平方可积(square integrable)鞅。

在 8.4.4 节中，我们定义过  $L^p, p \geq 1$  线性概率空间，回忆一下，我们称由满足

$$E(|X|^p) < \infty$$

的随机变量  $X$  构成的集合全体为  $L^p$  (有界)空间。这里类似的，令  $X_t$  为任意随机过程，当它满足

$$\sup_{t \geq 0} E(|X_t|^p) < \infty$$

时，就称该随机过程为  $L^p$ -有界的(或者说属于  $L^p$ )。特别的，如果随机过程  $X_t$  是  $L^2$ -有界的，我们就称它为平方可积的。

眼下我们对  $L^1$ -有界鞅感兴趣，注意到如果  $M$  是一个鞅，则对于所有的  $t$ ，必然有

$$E(|M_t|) < \infty$$

进一步，根据条件数学期望的 Jensen 不等式，对于  $s < t$  有

$$E(|M_t|) = E[E(|M_t| | \mathcal{F}_s)] \geq E[E(M_t | \mathcal{F}_s)] = E(|M_s|)$$

因此  $\sup_{t \geq 0} E(|M_t|) = \lim_{t \rightarrow \infty} E(|M_t|)$  和说一个鞅是  $L^1$ -有界的，是一个当  $t \rightarrow \infty$  时关于鞅的断言。

鞅的  $L^1$ -有界性对于证明下面这个关于鞅的重要收敛定理 (martingale convergence theorem) 已经很充分了。

**定理 10.1.4** (Doob 鞅收敛定理) 令  $M$  是一个  $L^1$ -有界的 RCLL 鞅, 则

$$M_\infty(\omega) = \lim_{t \rightarrow \infty} M_t(\omega)$$

存在而且是有限的 a.s.

详细证明见 Revuz&Yor(1991)。

根据 Fatou 定理:

$$E(|M_\infty|) \leq \liminf E(|M_t|) < \infty$$

我们可能会轻率地得出以下结论:

1) 在  $L^1$  中  $M_t \rightarrow M_\infty$  意味着当  $t \rightarrow \infty$  时, 有  $E(|M_t - M_\infty|) \rightarrow 0$  成立。

2)  $M_t = E(M_\infty | \mathcal{F}_t)$ 。这种表示是很重要的, 因为它使得我们可以用一个随机变量  $M_\infty$  来辨认一个随机过程  $M$ 。

但实际上这两个断言在一般情况下均不成立, 除非我们把  $M_t$  限制在更为严格的类别——一致可积鞅上。一致可积性 (uniformly integrability) 的概念同条件数学期望紧密联系在一起, 因而也同鞅性紧密联系在一起。因此一致可积鞅通常是使得一些主要结论得以成立的最大和最自然的一类鞅。

**定义 10.1.5** 对于一族  $L^1$ -有界的随机变量  $C$ , 如果当  $\varepsilon \rightarrow \infty$  时对于任意  $X \in C$ ,

$$\int_{\{|X| \geq \varepsilon\}} |X| dP$$

一致收敛于 0。就称该族随机变量是一致可积的。

如果一个鞅  $M_t$  满足上述条件就它是一致可积鞅。一致可积性是比  $L^1$ -有界更强的一个要求。实际上如果是一个鞅是  $L^p, p > 1$ -有界的, 则它必定是一致可积的。

我们加上一致可积性要求的目的是控制鞅的尾部行为 (tail behavior), 它将保证上述的两个收敛结果成立。实际上如果  $M$  是一个一致可积鞅, 则<sup>24</sup>:

1) 在  $L^1$  中  $M_n \rightarrow M_\infty$ 。

2) 存在  $M_\infty \in L^1$  使得  $E(M_\infty | \mathcal{F}_n) = M_n$ 。

这时我们也称  $M$  被  $M_\infty$  封闭了 (closed)。

现在我们前往最终目标——平方可积鞅。如果一个鞅具有有限的二阶矩, 即

$$E(M_n^2) < \infty$$

我们就称之为平方可积鞅<sup>25</sup>。最后我们附送一个 Doob 最大不等式 (Doob's maximal inequality)<sup>26</sup>:

<sup>24</sup> 这被称为鞅收敛定理, 证明参考 Rogers&Williams(1994)。

<sup>25</sup> 引入平方可积的目的是为了实现随机积分。因为  $L^2$  是一赋范 (完备) 线性空间, 而在构造随机积分的时候, 我们要考察一系列鞅的极限, 我们要求这个极限也是一个鞅, 因此需要有一个完备的鞅空间。进一步的讨论见 10.4 节。

<sup>26</sup> 或者称 Doob's  $L^p$  不等式, 证明参考 Rogers&Williams(1994)。

$$E\left(\sup_{t \geq 0} |M_t| \right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sup_{t \geq 0} [E(M_t)^p], \quad p > 1$$

### 10.2 停时和鞅型序列

本节要引入停时(stopping time)概念<sup>27</sup>，这个概念在随机过程理论研究中的重要性体现在它提供了“驯服时间这一连续统”(tame the continuum of time)的有效工具(Chung, 1982)，实际上停时的引入使得我们把鞅的性质可以拓展到其它鞅型序列上去<sup>28</sup>。

#### 10.2.1 停时定义

那么什么是停时呢？记住  $t$  是时间， $\mathcal{F}_t$  代表积累到  $t$  时刻的信息。停时可以理解为某一随机事件第一次发生的时刻。不妨假想我们对某些特定现象的发生感兴趣：例如某个“黑色星期五”的出现，我们对这些特定现象第一次出现的时刻  $\mathcal{T}(\omega)$  给予特别的注视。很明显事件  $\{\omega, \mathcal{T}(\omega) \leq t\}$  的发生，当且仅当这一现象出现在  $t$  时刻上或者  $t$  时刻之前。它应当是积累到那个时刻的信息集的一部分。

例如一个赌徒决定在他赌赢 100 次后就收手，那么他停止赌博的时刻就是一个随机变量  $\mathcal{T} = n$ ，而就是说当他赌到  $n$  次时，他才赢足 100 次， $\mathcal{F}_n$  是他赌到第  $n$  次的所能掌握的全部信息。故  $\mathcal{T}$  是否等于  $n$  是依赖他赌到第  $n$  次才能知道的。从这个角度体会，它似乎有点“你到那就知道了”那种无奈的意味。

正式的，停时是一个定义在滤波空间  $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, \mathbf{F}\}$  上的随机变量

$$\mathcal{T} : \Omega \rightarrow [0, \infty) \cup \{\infty\}$$

对于任何  $t \in \mathbf{R}_+$ ，它满足<sup>29</sup>：

10.2.1

$$\{\mathcal{T} \leq t\} = \{\omega, \mathcal{T}(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

显然任意非负的常值随机变量  $\mathcal{T} = t$  是一个停时，而且  $\mathcal{T} + s, (s \geq 0)$  也是停时。容易知道：

- 1) 如果  $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$  是停时，则  $\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2$ ， $\mathcal{T}_1 \wedge \mathcal{T}_2$ ， $\mathcal{T}_1 \vee \mathcal{T}_2$  也都是停时<sup>30</sup>；
- 2) 如果  $(\mathcal{T}_n)_{n \geq 1}$  是一个停时序列，则  $\bigvee_n \mathcal{T}_n = \sup_n \mathcal{T}_n$ 、 $\bigwedge_n \mathcal{T}_n = \inf_n \mathcal{T}_n$ 、 $\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathcal{T}_n$ 、

$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{T}_n$  也都是停时。

我们同时定义

$$\mathcal{F}_{\mathcal{T}} = \{A \in \mathcal{F}, \forall t \leq \infty, A \cap \{\mathcal{T} \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}$$

注意此时集合  $\mathcal{F}_{\mathcal{T}}$  被称为停时前的  $\sigma$ -代数。如果  $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$  是停时，而且  $\mathcal{T}_1 \leq \mathcal{T}_2$ ，则有：

- 1)  $\mathcal{F}_{\mathcal{T}_1} \leq \mathcal{F}_{\mathcal{T}_2}$ 。
- 2) 如果  $A \in \mathcal{F}_{\mathcal{T}_1}$ ，则  $A \cap \{\mathcal{T}_1 \leq \mathcal{T}_2\} \in \mathcal{F}_{\mathcal{T}_2}$ 。

<sup>27</sup> 有时也称马(尔科夫)时(Markov time)。

<sup>28</sup> 停时可能是整个随机过程分析中最具有技术特征的部分之一，在直观意义上停时提供了一个试图最大化赌博收益的赌博策略，因为鞅代表公平赌博，这样一种策略不会涉及到预见性。

<sup>29</sup> 如果该严格不等式成立，则称之为可选时(optional time)。如果滤波是右连续的，则可选时和停时是相同的。

<sup>30</sup> 其中  $a \wedge b$  代表两者中较小的那个； $a \vee b$  代表两者中较大的那个。以下主要性质的证明可以参考 Karatzas & Shreve (1991)。

## 10.2.2 最优停止定理

我们可以把停时看成是对普通时间变量  $t$  的随机化，那么停时在随机序列中的出现会对随机序列的运动特征产生什么样的影响呢？不妨更直接的说出我们的想法：现在既有停时概念又有鞅的概念，把它们放在一起会怎么样呢？直观上理解：一个鞅在停止时刻基于现在时刻的均值就应当是它的当前值。

假设  $W_t$  代表一个赌徒在  $t$  时刻的财富，他连续的参加“公平”的赌博，现在的问题是：他能不能通过精心的选择停止赌博的次数来最大化他的个人财富呢？答案是否定的。这就是著名的多布有界停时定理(Doob's bounded stopping time theorem)<sup>31</sup>。

**定理 10.2.1** 如果  $(M_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$  是在随机基  $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, \mathbf{F}\}$  上的一个  $\mathcal{F}_n$ -适应的离散鞅； $\mathcal{T} < \infty$  是一个有界停时，则有

10.2.2

$$E[(M_{\mathcal{T}}) | \mathcal{F}_0] = M_0$$

以及

$$E(M_{\mathcal{T}}) = E(M_0)$$

**证明：**考虑这样一个随机序列  $\theta_n$ ：

$$\theta_n = 1_{(\mathcal{T} \geq n)}, n \geq 1$$

它是可料的，因此如果  $(M_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$  是鞅，则鞅变换  $(\theta \cdot M)_n$  也是鞅，但是

10.2.3

$$(\theta \cdot M)_n = \sum_{k=1}^n 1_{(\mathcal{T} \geq k)} (M_k - M_{k-1}) = M_{\mathcal{T} \wedge n} - M_0$$

如果  $\mathcal{T} \leq n$ ，则

10.2.4

$$(\theta \cdot M)_n = M_{\mathcal{T} \wedge n} - M_0 = M_{\mathcal{T}} - M_0$$

因此就有：

10.2.5

$$E[(\theta \cdot M)_n | \mathcal{F}_0] = E[M_{\mathcal{T}} - M_0 | \mathcal{F}_0] = E[M_{\mathcal{T}} | \mathcal{F}_0] - M_0 = 0$$

这是可选取样定理的最简版本。它还有其它的形式，例如假定  $\tau_1 \leq \tau_2$  为两个有界停时：

1) 如果  $(M_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$  为一个上鞅，则  $E[M_{\tau_2} | \mathcal{F}_{\tau_1}] \leq M_{\tau_1}$ 。

2) 如果  $(M_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$  是鞅，则  $E[M_{\tau_2} | \mathcal{F}_{\tau_1}] = M_{\tau_1}$ 。

正如我们看到的，对鞅过程的停止相当于某种形式的鞅变换。

## 10.2.3 鞅型序列

**定义 10.2.2** 在随机基  $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, \mathbf{F}\}$  上存在一个  $\mathcal{F}_n$  适应的随机过程  $(M_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ ，如果存在一系列的停时  $(\mathcal{T}_m)_{m \in \mathbb{Z}_+ \cup \infty}$  ( $\mathcal{T}_m \leq \mathcal{T}_{m+1}$ )，而且  $\lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{T}_m \rightarrow \infty$ ，使得  $M_{n \wedge \mathcal{T}_m}$  成为一个鞅，就称为  $(M_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$  局部鞅(local martingale)。

这一过程被成为局部化(localization)，具有以上性质的停时序列  $(\mathcal{T}_m)_{m \in \mathbb{Z}_+ \cup \infty}$  被称为(局部

<sup>31</sup> 该定理有时也称可选取样定理(optional sampling theorem)。