МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Р. К. Бельхеева

РЯДЫ ФУРЬЕ
В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Учебное пособие

Новосибирск
2011

УДК 517.52
ББК В161
Б44

Б44 Бельхеева Р. К. Ряды Фурье в примерах и задачах: Учебное пособие / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2011. 76 с.

ISBN 978-5-94356-983-8

В учебном пособии излагаются основные сведения о рядах Фурье, приведены примеры на каждую изучаемую тему. Детально разобран пример применения метода Фурье к решению задачи о поперечных колебаниях струны. Приведен иллюстративный материал. Имеются задачи для самостоятельного решения.

Предназначено для студентов и преподавателей физического факультета НГУ.

Печатается по решению методической комиссии физического факультета НГУ.

Рецензент д-р физ.-мат. наук. В. А. Александров

Пособие подготовлено в рамках реализации Программы развития НИУ-НГУ на 2009–2018 гг.

ISBN 978-5-94356-983-8

1. Разложение 2π-периодической функции в ряд Фурье

Определение. *Рядом Фурье* функции $f(x)$ называется функциональный ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right), \tag{1}$$

где коэффициенты a_n, b_n вычисляются по формулам:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{3}$$

Формулы (2)–(3) называют *формулами Эйлера—Фурье.*

Тот факт, что функции $f(x)$ соответствует ряд Фурье (1) записывают в виде формулы

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right) \tag{4}$$

и говорят, что правая часть формулы (4) является формальным рядом Фурье функции $f(x)$.

Другими словами, формула (4) означает только то, что коэффициенты a_n, b_n найдены по формулам (2), (3).

Определение. 2π-периодическая функция $f(x)$ называется *кусочно-гладкой*, если в промежутке $[-\pi, \pi]$ найдется конечное число точек $-\pi = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = \pi$ таких, что в каждом открытом промежутке (x_j, x_{j+1}) функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема, а в каждой точке x_j существуют конечные пределы слева и справа:

$$f(x_j - 0) = \lim_{h\to+0} f(x_j - h), \quad f(x_j + 0) = \lim_{h\to+0} f(x_j + h), \quad (5)$$

$$\lim_{h\to+0} \frac{f(x_j - h) - f(x_j - 0)}{-h}, \quad \lim_{h\to+0} \frac{f(x_j + h) - f(x_j + 0)}{h}. \quad (6)$$

Отметим, что последние два предела превратятся в односторонние производные после замены предельных значений $f(x_j - 0)$ и $f(x_j + 0)$ значениями $f(x_j)$.

Теорема о представимости кусочно-гладкой функции в точке своим рядом Фурье (теорема о поточечной сходимости). *Ряд Фурье кусочно-гладкой 2π-периодической функции $f(x)$ сходится в каждой точке $x \in \mathbb{R}$, а его сумма равна числу $f(x)$, если x — точка непрерывности функции $f(x)$, и равна числу $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$, если x — точка разрыва функции $f(x)$.*

ПРИМЕР 1. Нарисуем график, найдем ряд Фурье функции, заданной на промежутке $[-\pi, \pi]$ формулой, $f(x) = |x|$, предполагая, что она имеет период 2π, и вычислим суммы числовых рядов $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Решение. Построим график функции $f(x)$. Получим кусочно-линейную непрерывную кривую с изломами в точках $x = \pi k$, k — целое число (рис. 1).

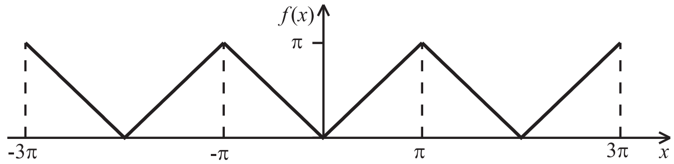

Рис. 1. График функции $f(x)$

Вычислим коэффициенты Фурье

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\frac{x^2}{2}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \pi,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{x\sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\frac{\cos nx - \cos 0}{n^2} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^n - 1}{n^2} = \begin{cases} -\dfrac{4}{\pi n^2}, & \text{при } n \text{ нечетном,} \\ 0, & \text{при } n \text{ четном,} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = 0,$$

потому что функция $f(x)$ — четная. Запишем формальный ряд Фурье для функции $f(x)$:

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}.$$

Выясним является ли функция $f(x)$ кусочно-гладкой. Так как она непрерывна, вычислим только пределы (6) в конечных точках промежутка $x = \pm\pi$ и в точке излома $x = 0$:

$$\lim_{h\to+0} \frac{f(\pi - h) - f(\pi - 0)}{-h} = \lim_{h\to+0} \frac{\pi - h - \pi}{-h} = 1,$$

$$\lim_{h\to+0} \frac{f(-\pi + h) - f(-\pi + 0)}{h} = \lim_{h\to+0} \frac{-\pi + h - (-\pi)}{h} = 1,$$

$$\lim_{h\to+0} \frac{f(0 + h) - f(0 + 0)}{h} = \lim_{h\to+0} \frac{0 + h - 0}{h} = 1,$$

и

$$\lim_{h\to+0} \frac{f(-0 - h) - f(-0 - 0)}{-h} = \lim_{h\to+0} \frac{-0 - h - (-0)}{-h} = 1.$$

Пределы существуют и конечны, следовательно, функция кусочно-гладкая. По теореме о поточечной сходимости ее ряд Фурье сходится к числу $f(x)$ в каждой точке, т. е.

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos{(2k+1)} + x}{(2k+1)^2} =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{1}{9} \cos 3x + \frac{1}{25} \cos 5x + \ldots \right). \qquad (7)$$

На рис. 2, 3 показан характер приближения частичных сумм ряда Фурье $S_n(x)$, где

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

к функции $f(x)$ в промежутке $[-\pi, \pi]$.

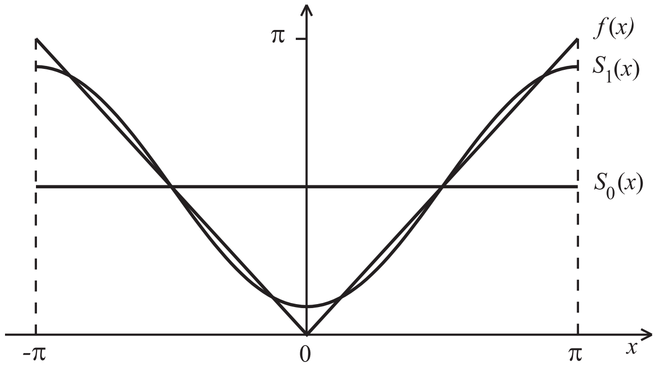

Рис. 2. График функции $f(x)$ с наложенными на него графиками частичных сумм $S_0(x) = \dfrac{a_0}{2}$ и $S_1(x) = \dfrac{a_0}{2} + a_1 \cos x$

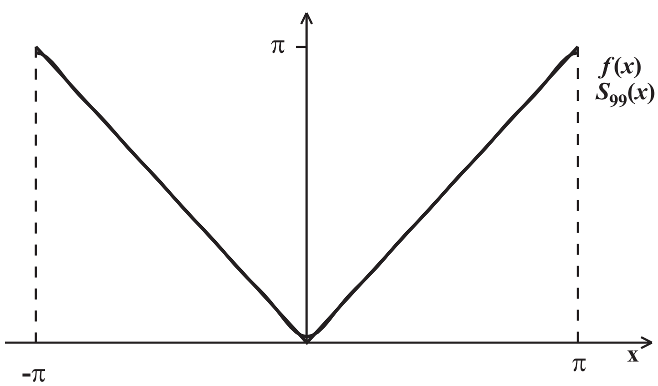

Рис. 3. График функции $f(x)$ с наложенным на него графиком частичной суммы $S_{99}(x) = \dfrac{a_0}{2} + a_1 \cos x + \cdots + a_{99} \cos 99x$

Подставив в (7) $x = 0$ получим:

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2},$$

откуда мы находим сумму числового ряда:

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{8}.$$

Зная сумму этого ряда, легко найти следующую сумму

$$S = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots .$$

Имеем:

$$S = \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \ldots\right) = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}S,$$

следовательно

$$S = \frac{\pi^2}{6}, \quad \text{то есть} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

Сумму этого знаменитого ряда впервые нашел Леонард Эйлер. Она часто встречается в математическом анализе и его приложениях.

ПРИМЕР 2. Нарисуем график, найдем ряд Фурье функции заданной формулой $f(x) = x$ для $-\pi \le x < \pi$, предполагая, что она имеет период 2π, и вычислим суммы числовых рядов $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$, $\quad 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) +$

$$+\left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) + \ldots + \left(-\frac{1}{3k-1} + \frac{1}{3k+1}\right) + \ldots .$$

Решение. График функции $f(x)$ приведен на рис. 4.

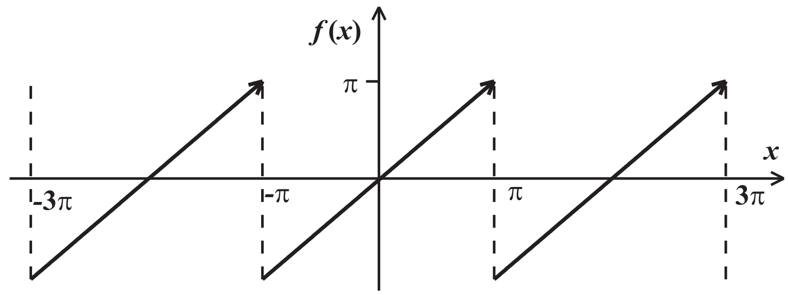

Рис. 4. График функции $f(x)$

Функция $f(x)$ непрерывно-дифференцируема на промежутке $(-\pi,\pi)$. В точках $x=\pm\pi$, она имеет конечные пределы (5): $f(-\pi)=-\pi$, $f(\pi)=\pi$. Кроме того существуют конечные пределы (6):

$$\lim_{h\to+0}\frac{f(-\pi+h)-f(-\pi+0)}{h}=1 \quad \text{и}$$

$$\lim_{h\to+0}\frac{f(\pi-h)-f(\pi+0)}{-h}=1.$$

Значит, $f(x)$ — кусочно-гладкая функция.

Так как функция $f(x)$ нечетна, то $a_n=0$. Коэффициенты b_n находим интегрированием по частям:

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin\pi nx dx=-\frac{1}{\pi n}\left[x\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx\right]=$$

$$=-\frac{1}{\pi n}\left[(-1)^n\pi+(-1)^n\pi\right]=\frac{2(-1)^{n+1}}{n}.$$

Составим формальный ряд Фурье функции

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin nx.$$

Согласно теореме о поточечной сходимости кусочно-гладкой 2π-периодической функции ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к сумме:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx =$$

$$= \begin{cases} f(x) = x, & \text{если } -\pi < x < \pi, \\ \dfrac{f(\pi-0)+f(\pi+0)}{2} = 0, & \text{если } \quad x = \pi, \\ \dfrac{f(-\pi-0)+f(-\pi+0)}{2} = 0, & \text{если } \quad x = -\pi. \end{cases} \qquad (8)$$

На рис. 5–8 показан характер приближения частичных сумм $S_n(x)$ ряда Фурье к функции $f(x)$.

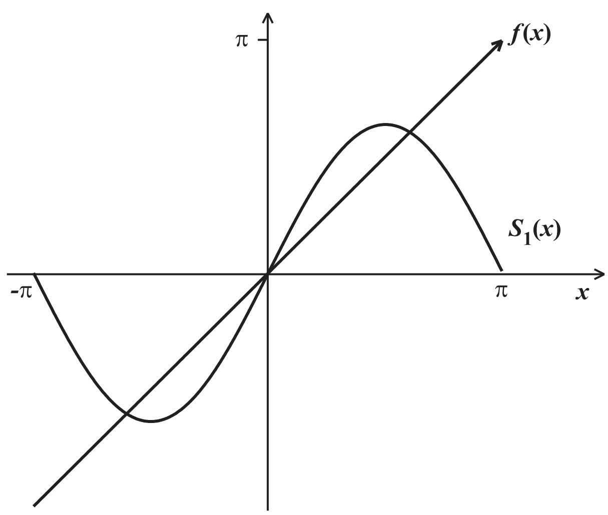

Рис. 5. График функции $f(x)$ с наложенным на него графиком частичной суммы $S_1(x) = \dfrac{a_0}{2} + a_1 \cos x$

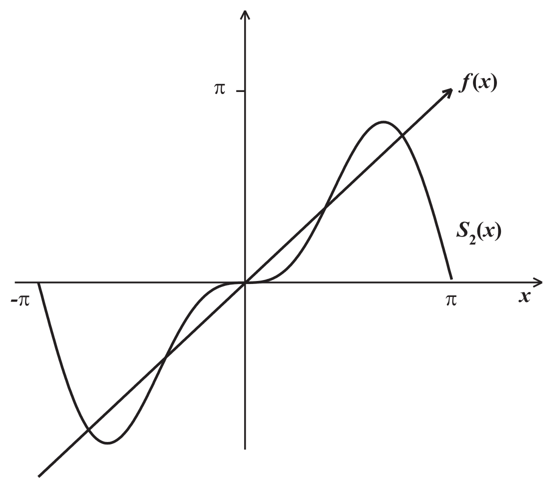

Рис. 6. График функции $f(x)$ с наложенным на него графиком частичной суммы $S_2(x)$

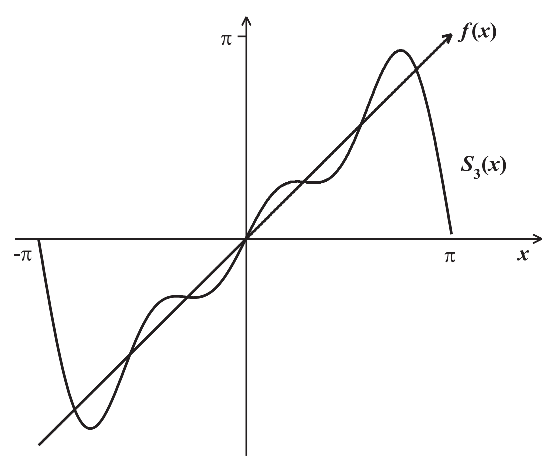

Рис. 7. График функции $f(x)$ с наложенным на него графиком частичной суммы $S_3(x)$

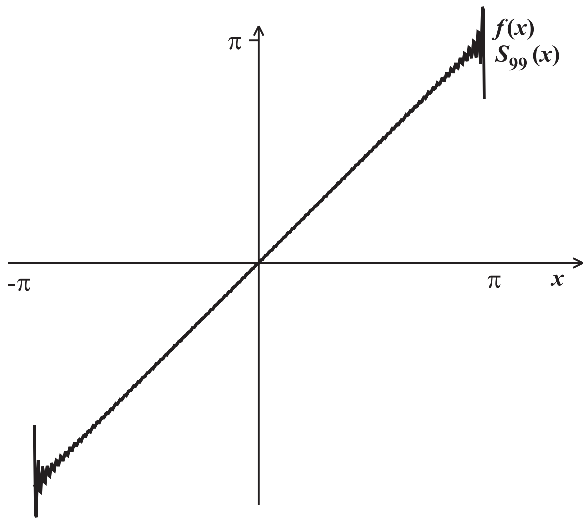

Рис. 8. График функции $f(x)$ с наложенным на него графиком частичной суммы $S_{99}(x)$

Используем полученный ряд Фурье для нахождения сумм двух числовых рядов. Положим в (8) $x = \pi/2$. Тогда

$$2\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\right) = \frac{\pi}{2}, \quad \text{или}$$

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Мы легко нашли сумму известного ряда Лейбница.

Положив в (8) $x = \pi/3$, найдем

$$2\left(1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{3} \cdot 0 - \frac{1}{4} \cdot \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{-\sqrt{3}}{2} + \ldots\right) = \frac{\pi}{3},$$

или

$$1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) + \ldots + \left(-\frac{1}{3k-1} + \frac{1}{3k+1}\right) + \ldots = \frac{\sqrt{3}\,\pi}{9}.$$

ПРИМЕР 3. Нарисуем график, найдем ряд Фурье функции $f(x) = |\sin x|$, предполагая, что она имеет период 2π, и вычислим сумму числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{4n^2-1}$.

Решение. График функции $f(x)$ приведен на рис. 9. Очевидно, $f(x) = |\sin x|$ непрерывная четная функция с периодом π. Но 2π тоже является периодом функции $f(x)$.

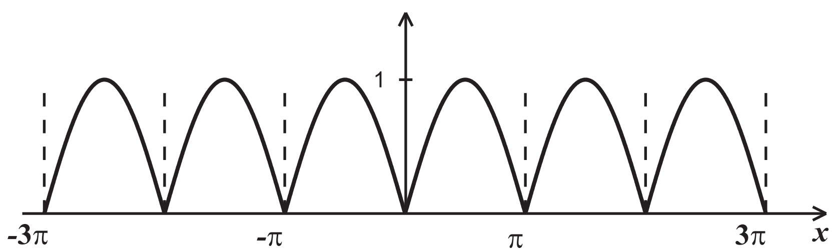

Рис. 9. График функции $f(x)$

Вычислим коэффициенты Фурье. Все $b_n = 0$ потому, что функция четная. Пользуясь тригонометрическими формулами вычислим a_n при $n \neq 1$:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |\sin x| \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} \sin x \cos nx \, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} (\sin(1+n)x - \sin(1-n)x) \, dx =$$

$$= -\frac{1}{\pi} \left(\frac{\cos(1+n)x}{1+n} + \frac{\cos(1-n)x}{1-n} \right) \Bigg|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1+(-1)^n}{1-n^2} \right) =$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{4}{\pi} \dfrac{1}{n^2-1}, & \text{если } n = 2k, \\ 0, & \text{если } n = 2k+1. \end{cases}$$

Это вычисление не позволяет нам найти коэффициент a_1, потому что при $n = 1$ знаменатель обращается в ноль. Поэтому вычислим коэффициент a_1 непосредственно:

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| \cos x \, dx = 0.$$

Так как $f(x)$ непрерывно дифференцируема на $(-\pi, 0)$ и $(0, \pi)$ и в точках $k\pi$, (k — целое число), существуют конечные пределы (5) и (6), то ряд Фурье функции сходится к ней в каждой точке:

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1} =$$

$$= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{1}{3} \cos 2x + \frac{1}{15} \cos 4x + \frac{1}{35} \cos 6x + \ldots \right). \qquad (9)$$

На рис. 10–13 показан характер приближения функции $f(x)$ частичными суммами ряда Фурье.

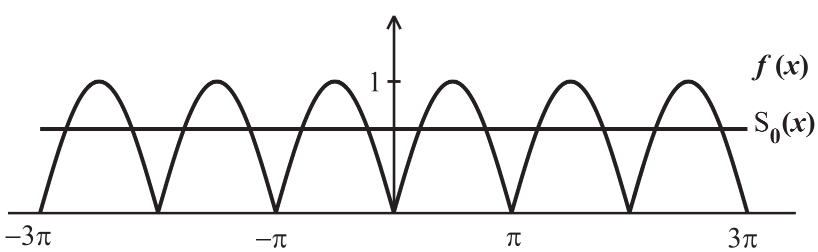

Рис. 10. График функции $f(x)$ с наложенным на него графиком частичной суммы $S_0(x)$

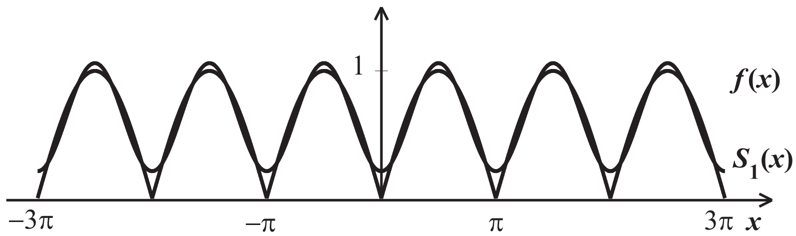

Рис. 11. График функции $f(x)$ с наложенным на него графиком частичной суммы $S_1(x)$

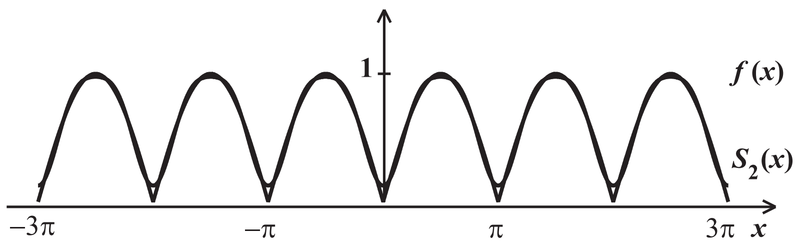

Рис. 12. График функции $f(x)$ с наложенным на него графиком частичной суммы $S_2(x)$

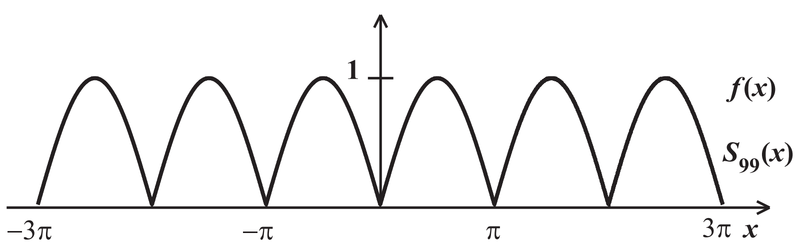

Рис. 13. График функции $f(x)$ с наложенным на него графиком частичной суммы $S_{99}(x)$

Вычислим сумму числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$. Для этого положим в (9) $x=0$. Тогда $\cos nx = 1$ для всех $n = 1, 2, \ldots$ и

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1} = 0.$$

Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \ldots = \frac{1}{2}.$$

ПРИМЕР 4. Докажем, что если кусочно-гладкая непрерывная функция $f(x)$ удовлетворяет условию $f(x-\pi) = f(x)$ для всех x (т. е. является π-периодической), то $a_{2n-1} = b_{2n-1} = 0$ для всех $n \geq 1$, и наоборот, если $a_{2n-1} = b_{2n-1} = 0$ для всех $n \geq 1$, то $f(x)$ — π-периодическая.

Решение. Пусть функция $f(x)$ является π-периодической. Вычислим ее коэффициенты Фурье a_{2n-1} и b_{2n-1}:

$$a_{2n-1} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(2n-1)x\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\Big(\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos(2n-1)x\,dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\cos(2n-1)x\,dx\Big).$$

В первом интеграле сделаем замену переменной $x = t - \pi$:

$$\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos(2n-1)x\,dx = \int_{0}^{\pi} f(t-\pi)\cos(2n-1)(t+\pi)\,dt.$$

Пользуясь тем, что $\cos(2n-1)(t+\pi) = -\cos(2n-1)t$ и $f(t-\pi) = f(t)$, получим:

$$a_{2n-1} = \frac{1}{\pi}\Big(-\int\limits_0^\pi f(x)\cos(2n-1)x\,dx + \int\limits_0^\pi f(x)\cos(2n-1)x\,dx\Big) = 0.$$

Аналогично доказывается, что $b_{2n-1} = 0$.

Наоборот, пусть $a_{2n-1} = b_{2n-1} = 0$. Так как функция $f(x)$ непрерывна, то по теореме о представимости функции в точке своим рядом Фурье имеем

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n}\cos 2nx + b_{2n}\sin 2nx)\,.$$

Тогда

$$f(x-\pi) = \sum_{n=1}^{\infty}\big(a_{2n}\cos 2n(x-\pi) + b_{2n}\sin 2n(x-\pi)\big) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\big(a_{2n}\cos 2nx + b_{2n}\sin 2nx\big) = f(x),$$

что и означает, что $f(x)$ является π-периодической функцией.

ПРИМЕР 5. Докажем, что если кусочно-гладкая функция $f(x)$ удовлетворяет условию $f(x-\pi) = -f(x)$ для всех x, то $a_0 = 0$ и $a_{2n} = b_{2n} = 0$ для всех $n \geq 1$, и наоборот, если $a_0 = a_{2n} = b_{2n} = 0$, то $f(x-\pi) = -f(x)$ для всех x.

Решение. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условию $f(x-\pi) = -f(x)$. Вычислим ее коэффициенты Фурье:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\Big(\int\limits_{-\pi}^{0} f(x)\cos\,nx\,dx + \int\limits_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx\Big).$$

В первом интеграле сделаем замену переменной $x = t - \pi$. Тогда

$$\int\limits_{-\pi}^{0} f(x)\cos nx dx = \int\limits_{0}^{\pi} f(t-\pi)\cos n(t-\pi)\,dt.$$

Пользуясь тем, что $\cos n(t-\pi) = (-1)^n \cos nt$ и $f(t-\pi) = -f(t)$, получим:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} \big((-1)^{n+1}+1\big)\,f(t)\cos nt\,dt =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ четное,} \\ \dfrac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt, & \text{если } n \text{ нечетное.} \end{cases}$$

Аналогично доказывается, что $b_{2n} = 0$.

Наоборот, пусть $a_0 = a_{2n} = b_{2n} = 0$, для всех $n \geq 1$. Так как функция $f(x)$ непрерывна, то по теореме о представимости функция в точке своим рядом Фурье справедливо равенство

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1}\,\cos{(2n-1)x} + b_{2n-1}\,\sin{(2n-1)x})\,.$$

Тогда

$$f(x-\pi)=\sum_{n=1}^{\infty}[a_{2n-1}\cos(2n-1)(x-\pi)+$$

$$+b_{2n-1}\sin(2n-1)(x-\pi)]=$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}[a_{2n-1}\cos(2n-1)x+b_{2n-1}\sin(2n-1)x]=-f(x).$$

ПРИМЕР 6. Изучим как следует продолжить интегрируемую на промежутке $[0,\pi/2]$ функцию $f(x)$ на промежуток $[-\pi,\pi]$, чтобы ее ряд Фурье имел вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}\cos(2n-1)x. \tag{10}$$

Решение. Пусть график функции имеет вид, приведенный на рис. 14. Поскольку в ряде (10) $a_0=a_{2n}=b_{2n}=0$ для всех n, то из примера 5 следует, что функция $f(x)$ должна удовлетворять равенству $f(x-\pi)=-f(x)$ для всех x. Это наблюдение дает способ продолжения функции $f(x)$ на промежуток $[-\pi,-\pi/2]: f(x)=-f(x+\pi)$, рис. 15. Из того, что ряд (10) содержит только косинусы, заключаем, что продолженная функция $f(x)$ должна быть четной (т. е. ее график должен быть симметричен относительно оси Oy), рис. 16.

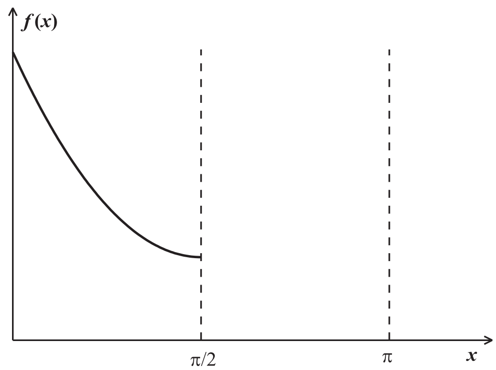

Рис. 14. График функции $f(x)$

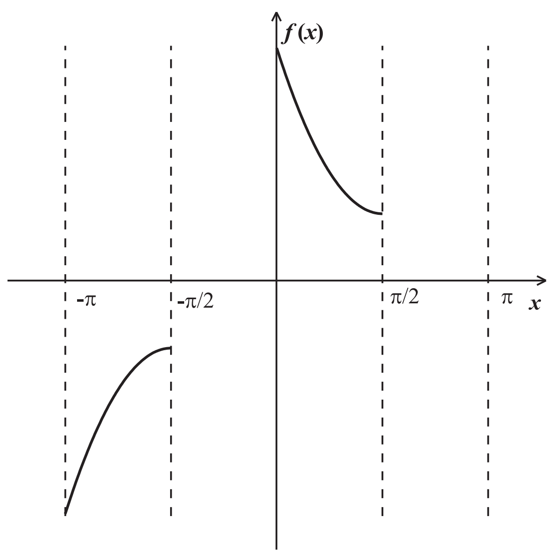

Рис. 15. График продолжения функции $f(x)$
на промежуток $[-\pi, -\pi/2]$

Итак, искомая функция имеет вид, приведенный на рис. 16.

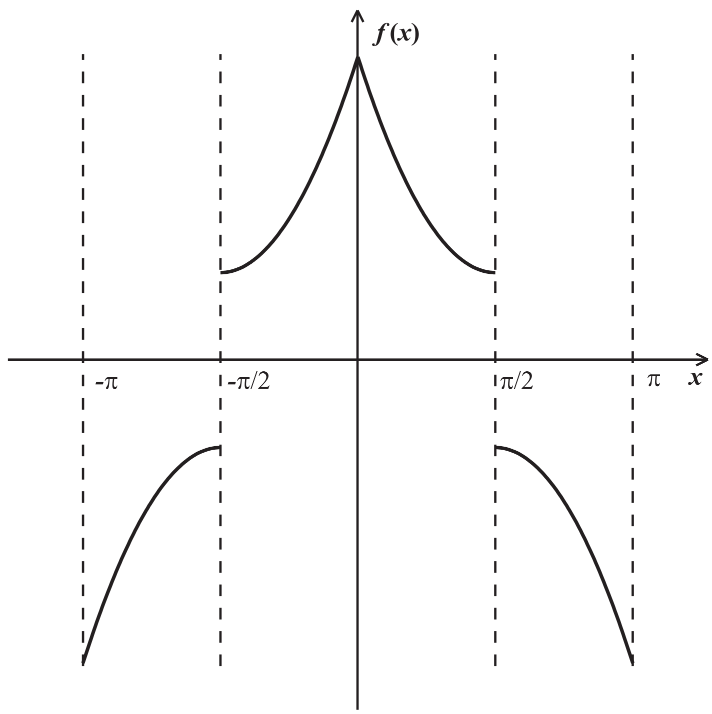

Рис. 16. График продолжения функции $f(x)$ на промежуток $[-\pi, \pi]$

Подводя итог, заключаем что функцию следует продолжить следующим образом: $f(-x) = f(x)$, $f(\pi - x) = -f(x)$, то есть на промежутке $[\pi/2, \pi]$, график функции $f(x)$ центрально симметричен относительно точки $(\pi/2, 0)$, а на промежутке $[-\pi, \pi]$ ее график симметричен относительно оси Oy.

ОБОБЩЕНИЕ ПРИМЕРОВ 3–6

Пусть $l > 0$. Рассмотрим два условия:

а) $f(l-x) = f(x)$;

б) $f(l+x) = -f(x), \quad x \in [0, l/2]$.

С геометрической точки зрения условие (а) означает, что график функции $f(x)$ симметричен относительно вертикальной прямой $x = l/2$, а условие (б) — что график $f(x)$ центрально симметричен относительно точки $(l/2; 0)$ на оси абсцисс.

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если функция $f(x)$ четная и выполнено условие (а), то $b_1 = b_2 = b_3 = \ldots = 0$, $a_1 = a_3 = a_5 = \ldots = 0$;

2) если функция $f(x)$ четная и выполнено условие (б), то $b_1 = b_2 = b_3 = \ldots = 0$, $a_0 = a_2 = a_4 = \ldots = 0$;

3) если функция $f(x)$ нечетная и выполнено условие (а), то $a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = 0$, $b_2 = b_4 = b_6 = \ldots = 0$;

4) если функция $f(x)$ нечетная и выполнено условие (б), то $a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = 0$, $b_1 = b_3 = b_5 = \ldots = 0$.

ЗАДАЧИ

В задачах 1–7 нарисуйте графики и найдите ряды Фурье для функций, предполагая, что они имеют период 2π:

1. $$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\pi < x < 0, \\ 1, & \text{если } 0 < x < \pi. \end{cases}$$

2. $$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } -\pi < x < -\pi/2, \\ 0, & \text{если } -\pi/2 < x < \pi/2, \\ 1, & \text{если } \pi/2 < x < \pi. \end{cases}$$

3. $f(x) = x^2 \quad (-\pi < x < \pi)$.

4. $f(x) = x^3 \quad (-\pi < x < \pi)$.

5. $$f(x) = \begin{cases} \pi/2 + x, & \text{если } -\pi < x < 0, \\ \pi/2 - x, & \text{если } 0 < x < \pi. \end{cases}$$

6. $$f(x)=\begin{cases} 1, & \text{если } -\pi/2<x<\pi/2,\\ -1, & \text{если } \pi/2<x<3\pi/2.\end{cases}$$

7. $$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{если } -\pi<x<0,\\ \sin x, & \text{если } 0<x<\pi.\end{cases}$$

8. Как следует продолжить интегрируемую на промежутке $[0,\pi/2]$ функцию $f(x)$ на промежуток $[-\pi,\pi]$, чтобы ее ряд Фурье имел вид: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_{2n-1}\,\sin{(2n-1)x}$?

Ответы

1. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$. **2.** $\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$.
3. $\dfrac{1}{3}\pi^2+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$. **4.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{12}{n^3}-\dfrac{2\pi^2}{n}\right)\sin nx$.
5. $\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$. **6.** $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}\cos(2n+1)x$.
7. $\dfrac{1}{\pi}+\dfrac{1}{2}\sin x-\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2nx}{4n^2-1}$. **8.** Функцию следует продолжить следующим образом: $f(-x)=-f(x)$, $f(\pi-x)=f(x)$, то есть на промежутке $[0,\pi]$, график функции $f(x)$ будет симметричен относительно вертикальной прямой $x=\pi/2$, на промежутке $[-\pi,\pi]$ ее график центрально симметричен относительно точки $(0,0)$.

2. Разложение функции, заданной в промежутке $[0, \pi]$, только по синусам или только по косинусам

Пусть функция f задана в промежутке $[0, \pi]$. Желая разложить ее в этом промежутке в ряд Фурье, мы сначала продолжим f в промежуток $[-\pi, \pi]$ произвольным образом, а затем воспользуемся формулами Эйлера—Фурье. Произвол в продолжении функции приводит к тому, что для одной и той же функции $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ мы можем получать различные ряды Фурье. Но можно использовать этот произвол так, чтобы получить разложение только по синусам или только по косинусам: в первом случае достаточно продолжить f нечетным образом, а во-втором — четным.

Алгоритм решения

1. Продолжить функцию нечетным (четным) образом на $(-\pi, 0)$, а затем периодически с периодом 2π продолжить функцию на всю ось.
2. Вычислить коэффициенты Фурье.
3. Составить ряд Фурье функции $f(x)$.
4. Проверить условия сходимости ряда.
5. Указать функцию, к которой будет сходиться этот ряд.

ПРИМЕР 7. Разложим функцию $f(x) = \cos x$, $0 < x < \pi$, в ряд Фурье только по синусам.

Решение. Продолжим функцию нечетным образом на $(-\pi, 0)$ (т. е. так, чтобы равенство $f(-x) = -f(x)$ выполнялось для всех $x \in (-\pi, \pi)$), а затем периодически с периодом 2π на всю ось. Получим функцию $f^*(x)$, график которой приведен на рис. 17.

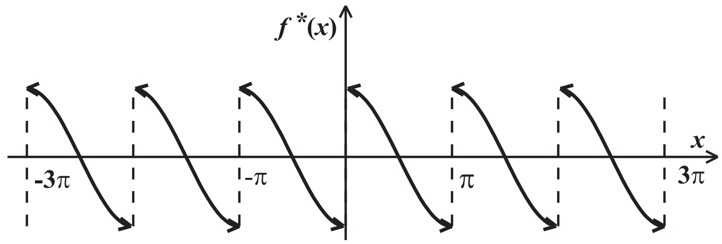

Рис. 17. График продолженной функции

Очевидно, что функция $f^*(x)$ кусочно-гладкая. Вычислим коэффициенты Фурье: $a_n = 0$ для всех n потому, что функция $f^*(x)$ — нечетна. Если $n \neq 1$, то

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi f(x)\,\sin\,\pi n x\,dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \cos x\,\sin\,nx\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \left[\sin\left(n+1\right)x + \sin\left(n-1\right)x\right]\,dx =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos\left(n+1\right)x}{n+1} + \frac{\cos\left(n-1\right)x}{n-1}\right]\Bigg|_0^\pi =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left[\frac{(-1)^{n+1}-1}{n+1} + \frac{(-1)^{n-1}-1}{n-1}\right] =$$

$$= \frac{1-(-1)^{n+1}}{\pi}\frac{(n-1)+(n+1)}{(n+1)(n-1)} = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 2\,k+1, \\ \dfrac{2}{\pi}\dfrac{2n}{n^2-1}, & \text{если } n = 2k. \end{cases}$$

При $n = 1$ в предыдущих вычислениях знаменатель обращается в ноль, поэтому коэффициент b_1 вычислим непосредственно:

$$b_1 = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \cos x \, \sin x \, dx = 0.$$

Составим ряд Фурье функции $f^*(x)$:

$$f^*(x) \sim \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{4k^2 - 1} \, \sin \, 2kx.$$

Поскольку функция $f^*(x)$ кусочно-гладкая, то по теореме о поточечной сходимости ряд Фурье функции $f^*(x)$ сходится к сумме:

$$S(x) = \begin{cases} -\cos x, & \text{если } \; -\pi < x < 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \; x = \pm\pi, \\ \cos x, & \text{если } \quad 0 < x < \pi. \end{cases}$$

В результате функция $f(x) = \cos x$, заданная на промежутке $(0, \pi)$, выражена через синусы:

$$\cos x = \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{4k^2 - 1} \, \sin \, 2kx, \quad x \in (0, \pi).$$

Рис. 18–20 демонстрируют постепенное приближение частичных сумм $S_1(x), S_2(x), S_3(x)$ к разрывной функции $f^*(x)$.

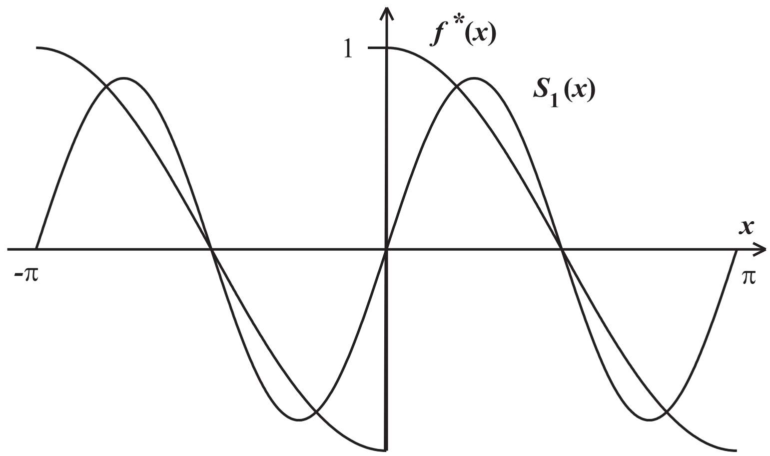

Рис. 18. График функции $f^*(x)$ с наложенным на него графиком частичной суммы $S_1(x)$

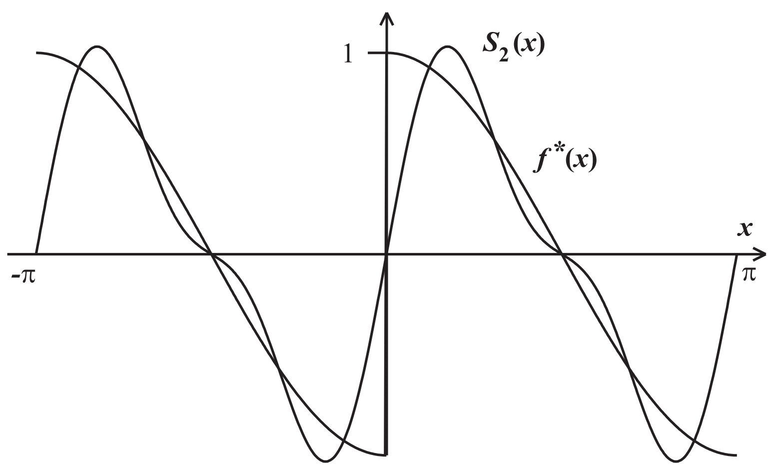

Рис. 19. График функции $f(^*x)$ с наложенным на него графиком частичной суммы $S_2(x)$

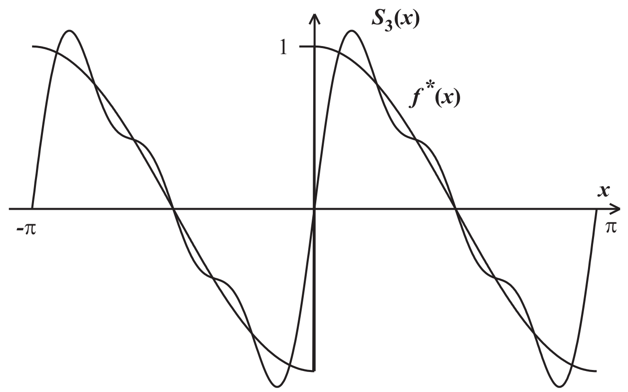

Рис. 20. График функции $f^*(x)$ с наложенным на него графиком частичной суммы $S_3(x)$

На рис. 21 приведены графики функции $f^*(x)$ и ее частичной суммы $S_{99}(x)$.

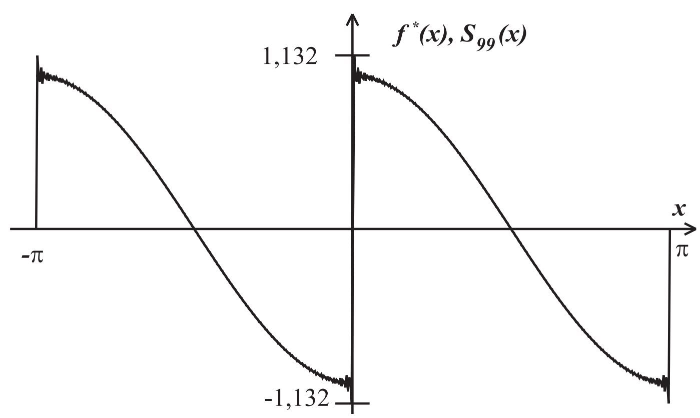

Рис. 21. График функции $f^*(x)$ с наложенным на него графиком частичной суммы $S_{99}(x)$

ПРИМЕР 8. Разложим функцию $f(x) = e^{ax}$, $a > 0$, $x \in [0, \pi]$, в ряд Фурье только по косинусам.

Решение. Продолжим функцию четным образом на $(-\pi, 0)$ (т. е. так, чтобы равенство $f(-x) = f(x)$ выполнялось для всех $x \in (-\pi, \pi)$), а затем периодически с периодом 2π на всю числовую ось. Получим функцию $f^*(x)$, график которой представлен на рис. 22. Функция $f^*(x)$ в точках

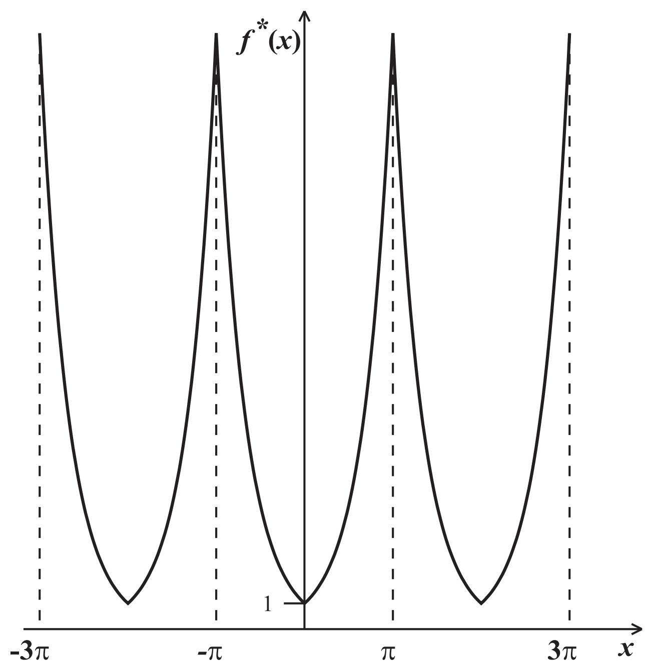

Рис. 22. График продолженной функции $f^*(x)$

$x = k\pi$, k — целое число, имеет изломы.

Вычислим коэффициенты Фурье: $b_n = 0$, так как $f^*(x)$ — четная. Интегрируя по частям получаем

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} e^{ax}dx = \frac{2}{\pi\, a}\left(e^{a\pi} - 1\right),$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\ \cos\ \pi n x\, dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} e^{ax}\ \cos\ nx\, dx =$$

$$= \frac{2}{\pi a}\int\limits_0^{\pi} \cos nx\, d(e^{ax}) = \frac{2}{\pi a} e^{ax}\cos nx\Big|_0^{\pi} + \frac{2n}{\pi a}\int\limits_0^{\pi} e^{ax}\sin nx\, dx =$$

$$= \frac{2}{\pi a}\left(e^{a\pi}\cos n\pi - 1\right) + \frac{2n}{\pi a^2}\int\limits_0^{\pi} \sin nx\, de^{ax} =$$

$$= \frac{2}{\pi\, a}\left(e^{a\pi}\ \cos\ n\,\pi - 1\right) + \frac{2n}{\pi\, a^2} e^{ax}\ \sin\ nx\Big|_0^{\pi} -$$

$$-\frac{2n^2}{\pi\, a^2}\int\limits_0^{\pi} e^{ax}\ \cos\ nx\, dx = \frac{2}{\pi\, a}\left(e^{a\pi}\ \cos\ n\,\pi - 1\right) - \frac{n^2}{a^2} a_n.$$

Следовательно,

$$a_n = \frac{2a}{\pi}\frac{e^{a\pi}\ \cos\ n\,\pi - 1}{a^2 + n^2}.$$

Поскольку $f^*(x)$ непрерывна, то согласно теореме о поточечной сходимости ее ряд Фурье сходится к $f^*(x)$. Значит, для всех $x \in [0, \pi]$ имеем

$$f(x) = \frac{1}{\pi\, a}\left(e^{a\pi} - 1\right) + \frac{2a}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{a\pi}\,(-1)^k - 1}{a^2 + k^2}\cos kx \quad (0 \le x \le \pi).$$

Рис. 23–28 демонстрируют постепенное приближение частичных сумм ряда Фурье к заданной разрывной функции.

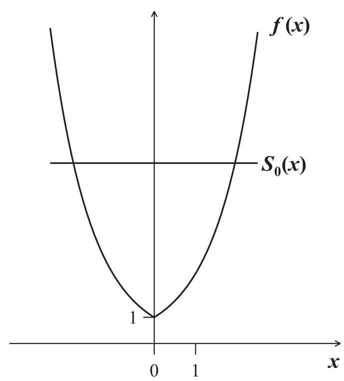

Рис. 23. Графики функций $f^*(x)$ и $S_0(x)$

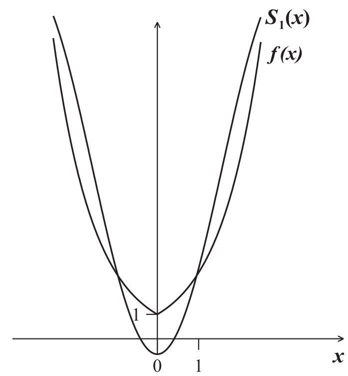

Рис. 24. Графики функций $f^*(x)$ и $S_1(x)$

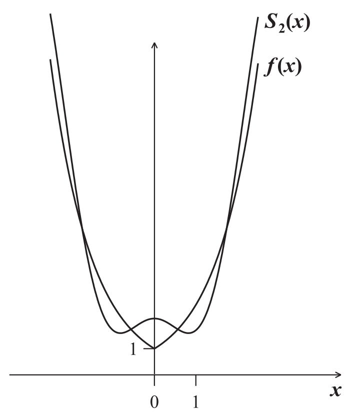

Рис. 25. Графики функций $f^*(x)$ и $S_2(x)$

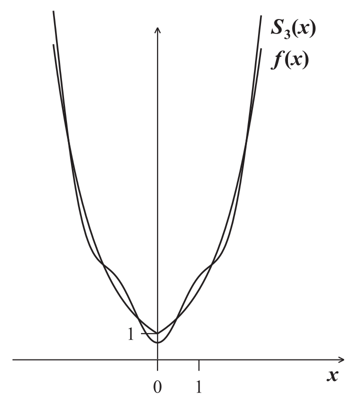

Рис. 26. Графики функций $f^*(x)$ и $S_3(x)$

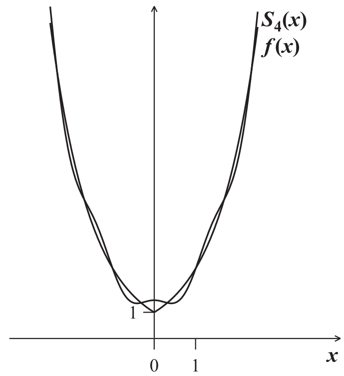

Рис. 27. Графики функций $f^*(x)$ и $S_4(x)$

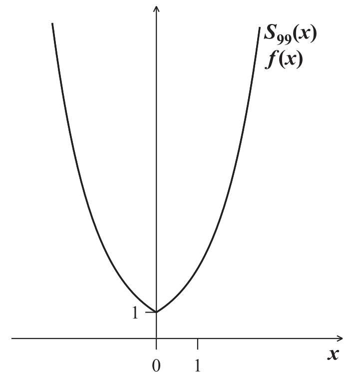

Рис. 28. Графики функций $f^*(x)$ и $S_{99}(x)$

ЗАДАЧИ

9. Разложите функцию $f(x) = \cos x$, $0 \leq x \leq \pi$, в ряд Фурье только по косинусам.

10. Разложите функцию $f(x) = e^{ax}$, $a > 0$, $0 \leq x \leq \pi$, в ряд Фурье только по синусам.

11. Разложите функцию $f(x) = x^2$, $0 \leq x \leq \pi$, в ряд Фурье только по синусам.

12. Разложите функцию $f(x) = \sin ax$, $0 \leq x \leq \pi$, в ряд Фурье по только косинусам.

13. Разложите функцию $f(x) = x \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$, в ряд Фурье только по синусам.

Ответы

9. $\cos x = \cos x$. **10.** $e^{ax} = \dfrac{2}{\pi} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left[1 - (-1)^k e^{a\pi}\right] \dfrac{k}{a^2 + k^2} \sin kx.$

11. $x^2 \dfrac{2}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left[\dfrac{\pi^2}{n} + \dfrac{2}{n^3}\left((-1)^n - 1\right)\right] \sin nx.$

12. Если a — не является целым числом, то
$\sin ax = \dfrac{1-\cos a\pi}{\pi}\Big\{1 + +2a\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2nx}{a^2-(2n)^2}\Big\}+$
$+2a\dfrac{1+\cos a\pi}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2n-1)x}{a^2-(2n-1)^2}$; если $a = 2m$ — четное число, то $\sin 2mx = \dfrac{8m}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2n-1)x}{(2m)^2-(2n-1)^2}$;
если $a = 2m-1$ — положительное нечетное число, то
$\sin(2m-1)x = \dfrac{2}{\pi}\Big\{1 + 2(2m-1)\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2nx}{(2m-1)^2-(2n)^2}\Big\}$.

13. $\dfrac{\pi}{2}\sin x - \dfrac{16}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(4n^2-1)^2}\sin 2nx$.

3. Ряд Фурье функции с произвольным периодом

Предположим, что функция $f(x)$ задана в промежутке $[-l, l]$, $l > 0$. Сделав подстановку $x = \dfrac{ly}{\pi}$, $-\pi \le y \le \pi$, получим функцию $g(y) = f(ly/\pi)$, определенную в промежутке $[-\pi, \pi]$. Этой функции $g(y)$ соответствует (формальный) ряд Фурье

$$f\left(\frac{ly}{\pi}\right) = g(y) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos ny + b_n \sin ny),$$

коэффициенты которого находятся по формулам Эйлера—Фурье:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)\cos ny\,dy = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{ly}{\pi}\right)\cos ny\,dy,\ \ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} g(y) \sin ny \, dy = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{ly}{\pi}\right) \sin ny \, dy, \; n = 1, 2, \ldots .$$

Возвращаясь к старой переменной, т. е. полагая в выписанных формулах $y = \pi x / l$, мы получим для функции $f(x)$ тригонометрический ряд несколько измененного вида:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l} \right), \qquad (11)$$

где

$$a_n = \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} \, dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (12)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} \, dx, \quad n = 1, 2, \ldots . \qquad (13)$$

Говорят, что формулы (11)–(13) задают разложение в ряд Фурье функции с произвольным периодом.

ПРИМЕР 9. Найдем ряд Фурье функции, заданной в промежутке $(-l, l)$ выражением

$$f(x) = \begin{cases} A, & \text{если } -l < x \le 0, \\ B, & \text{если } \quad 0 < x < l, \end{cases}$$

считая, что она периодична с периодом $2l$.

Решение. Продолжим функцию периодически, с периодом $2l$, на всю ось. Получим функцию $f^*(x)$, кусочно-постоянную в промежутках $(-l + 2kl, l + 2kl)$, и претерпевающую разрывы первого рода в точках $x = lk$, k — целое число. Ее коэффициенты Фурье вычисляются по формулам (12) и (13):

$$a_0 = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\,dx = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{0} A\,dx + \frac{1}{l}\int\limits_{0}^{l} B\,dx = A + B,$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\,\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx =$$

$$= \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{0} A\,\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx + \frac{1}{l}\int\limits_{0}^{l} B\,\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx =$$

$$= \frac{A+B}{\pi\,n}\sin\pi n = 0, \quad \text{если } n \neq 0,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\,\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx =$$

$$= \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{0} A\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx + \frac{1}{l}\int\limits_{0}^{l} B\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx =$$

$$= \frac{B-A}{\pi n}(1-\cos\pi n).$$

Составим ряд Фурье функции $f^*(x)$:

$$f(x) \sim \frac{A+B}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{B-A}{n}\,(1-\cos\pi n)\sin\frac{\pi n x}{l}\right).$$

Так как $\cos\pi n = (-1)^n$, то

$$\text{при } n = 2k \text{ получаем } b_n = b_{2k} = 0,$$

$$\text{при } n = 2k-1 — b_n = b_{2k-1} = \frac{2(B-A)}{\pi(2k-1)}.$$

Отсюда $f(x) \sim \dfrac{A+B}{2} +$

$$+\frac{2(B-A)}{\pi}\Bigl(\sin\frac{\pi x}{l} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{l} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{l} + \ldots\Bigr).$$

Согласно теореме о поточечной сходимости ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к сумме

$$S(x) = \begin{cases} A, & \text{если } -l < x \le 0, \\ \dfrac{A+B}{2}, & \text{если } x = 0,\ x = \pm l, \\ B, & \text{если } 0 < x < l. \end{cases}$$

Придавая параметрам l, A, B конкретные значения получим разложения в ряд Фурье различных функций.

Пусть $l = \pi$, $A = 0$, $B = 3\pi$. На рис. 29 приведены графики первых пяти членов ряда, функции $f^*(x)$ и частичной суммы

$$S_7(x) = \frac{a_0}{2} + b_1 \sin x + \ldots + b_7 \sin 7x.$$

Величина $\dfrac{a_0}{2}$ является средним значением функции на промежутке. Обратим внимание на то, что с возрастанием частоты гармоники ее амплитуда уменьшается. Для наглядности графики трех высших гармоник сдвинуты по вертикали.

На рис. 30 приведен график функции $f(x)$ и частичной суммы

$$S_{99}(x) = \frac{a_0}{2} + b_1 \sin x + \ldots + b_{99} \sin 99x.$$

Для наглядности на рис. 31 приведен тот же график в другом масштабе. Последние два графика иллюстрируют явление Гиббса.

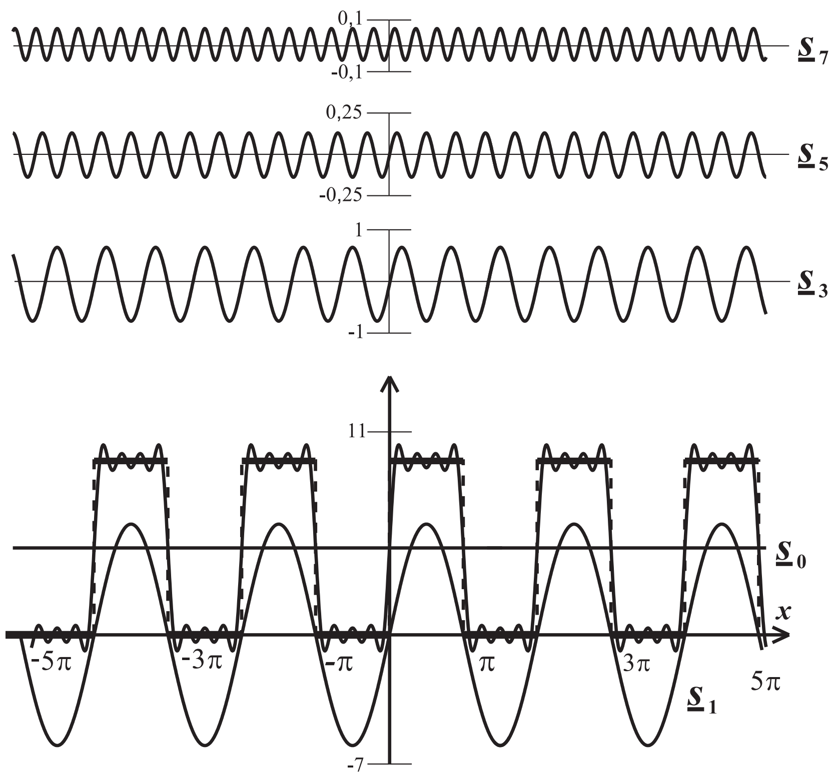

Рис. 29. График функции $f^*(x)$ с наложенными на него графиками гармоник $\underline{S}_0(x) = \dfrac{a_0}{2}$ и $\underline{S}_1(x) = b_1 \sin x$. Для наглядности графики трех высших гармоник
$$\underline{S}_3(x) = b_3 \sin \frac{3\pi x}{l},\ \underline{S}_5(x) = b_5 \sin \frac{5\pi x}{l}$$
и $\underline{S}_7(x) = b_7 \sin \dfrac{7\pi x}{l}$ сдвинуты по вертикали вверх

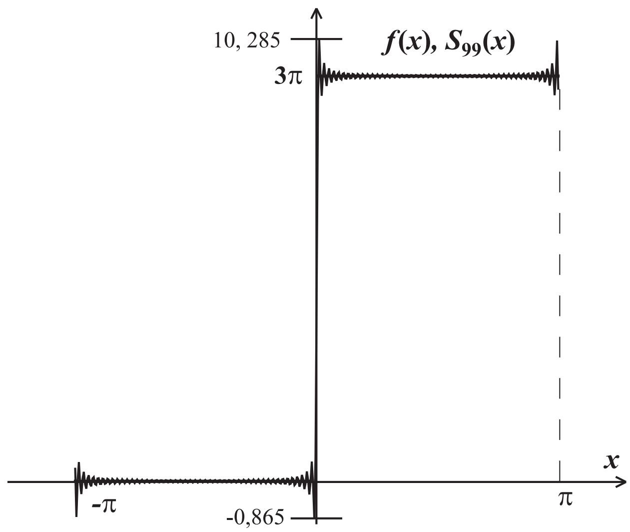

Рис. 30. График функции $f(x)$ с наложенным на него графиком частичной суммы $S_{99}(x)$

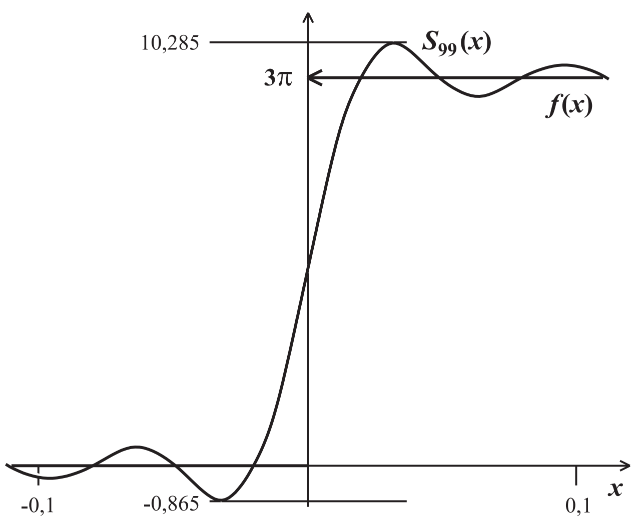

Рис. 31. Фрагмент рис. 30 в другом масштабе

ЗАДАЧИ

В задачах 14–21 разложить в ряды Фурье указанные функции в заданных промежутках.

14. $f(x) = |x| - \dfrac{1}{2}, \quad (-1, 1).$ 15. $f(x) = \mathrm{ch} 2x,\ (-2, 2].$

16. $f(x) = |x|\,(1 - |x|)\,,\ (-1, 1].$ 17. $f(x) = \cos\dfrac{\pi}{2}x,\ [-1, 1].$

18. $f(x) = \sin\dfrac{\pi}{2}x, \quad (-1, 1).$

19. $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } -1 < x < 1, \\ 0, & \text{если } 1 < x < 3; \end{cases} \qquad 2l = 4.$

20. $f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } 0 \le x \le 1, \\ 1, & \text{если } 1 < x < 2, \\ 3 - x, & \text{если } 2 \le x < 3; \end{cases} \qquad 2l = 3.$

21. $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\pi \le \omega x \le 0, \\ \sin\omega x, & \text{если } 0 \le \omega x \le \pi; \end{cases} \qquad 2l = 2\pi/\omega.$

Разложить в ряды Фурье: а) только по косинусам; б) только по синусам указанные функции в заданных промежутках $(0, l)$

22. $f(x) = \begin{cases} ax, & \text{если } \ 0 < x < l/2, \\ a(l - x), & \text{если } \ l/2 < x < l. \end{cases}$

23. $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \ 0 < x \le 1, \\ 2 - x, & \text{если } 1 \le x \le 2. \end{cases}$

Ответы

14. $f(x) = -\dfrac{4}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2}\,.$

15. $f(x) = \dfrac{\mathrm{sh}4}{4} + 8\,\mathrm{sh}4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{16 + \pi^2 n^2}\cos\dfrac{n\pi x}{2}.$

16. $f(x) = \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2n\pi x}{n^2}.$

17. $f(x) = \dfrac{2}{\pi} + \dfrac{8}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n}{1 - 4n^2}\cos n\pi x.$

18. $f(x) = \dfrac{8}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n}{1-4n^2}\sin n\pi x.$

19. $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}\cos\dfrac{2n+1}{2}\pi x.$

20. $\dfrac{2}{3} - \dfrac{6}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\sin^2\dfrac{\pi n}{3}\cos\dfrac{2\pi n x}{3}.$

21. $\dfrac{1}{\pi} + \dfrac{1}{2}\sin\omega x - \dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2n\omega x}{4n^2-1}.$

22. а) $f(x) = al\left(\dfrac{l}{4} - \dfrac{2}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}\cos\dfrac{(4n-2)\pi x}{l}\right),$

б) $f(x) = \dfrac{4al}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\sin\dfrac{(2n-1)\pi x}{l}\,.$

23. а) $f(x) = \dfrac{3}{4}+$

$+\dfrac{4}{\pi^2}\Big(\cos\dfrac{\pi}{2}x - \dfrac{2}{2^2}\cos\dfrac{2\pi}{2}x + \dfrac{1}{3^2}\cos\dfrac{3\pi}{2}x + \dfrac{1}{5^2}\cos\dfrac{5\pi}{2}x - \ldots\Big),$

б) $f(x) = \dfrac{4}{\pi^2}\Big(\sin\dfrac{\pi}{2}x - \dfrac{1}{3^2}\sin\dfrac{3\pi}{2}x + \ldots\Big)+$

$+\dfrac{2}{\pi}\Big(\sin\dfrac{\pi}{2}x + \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{2\pi}{2}x + \ldots\Big).$

4. Комплексная форма ряда Фурье

Разложение $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx}$, где $c_n = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$, $n = \pm1, \pm2, \ldots$, называется *комплексной формой ряда Фурье.*

Функция разлагается в комплексный ряд Фурье при выполнении тех же условий, при которых она разлагается в вещественный ряд Фурье.

ПРИМЕР 10. Найдем ряд Фурье в комплексной форме функции, заданной формулой $f(x) = e^{ax}$, в промежутке $[-\pi, \pi)$, где a — вещественное число.

Решение. Вычислим коэффициенты:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{(a-in)x} dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi(a-in)} \left((-1)^n e^{a\pi} - (-1)^n e^{-a\pi} \right) = \frac{(-1)^n}{\pi(a-in)} \operatorname{sh} a\pi.$$

Комплексный ряд Фурье функции f имеет вид

$$f(x) \sim \frac{\operatorname{sh} a\pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a-in} e^{inx}.$$

Убедимся, что функция $f(x)$ является кусочно-гладкой: в промежутке $(-\pi, \pi)$ она непрерывно-дифференцируема, и в точках $x = \pm\pi$ существуют конечные пределы (5), (6)

$$\lim_{h\to+0} e^{a(-\pi+h)} = e^{-a\pi}, \quad \lim_{h\to+0} e^{a(\pi-h)} = e^{a\pi},$$

$$\lim_{h\to+0} \frac{e^{a(-\pi+h)} - e^{a(-\pi+0)}}{h} = ae^{-a\pi}, \lim_{h\to+0} \frac{e^{a(\pi-h)} - e^{a(\pi-0)}}{-h} = ae^{a\pi}.$$

Следовательно, функция $f(x)$ представима рядом Фурье

$$\frac{\operatorname{sh} a\pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a-in} e^{inx},$$

который сходится к сумме:

$$S(x) = \begin{cases} e^{ax}, & \text{если } -\pi < x < \pi, \\ \operatorname{ch} a, & \text{если } x = \pm\pi. \end{cases}$$

ПРИМЕР 11. Найдем ряд Фурье в комплексной и вещественной форме функции, заданной формулой

$$f(x) = \frac{1-a^2}{1-2a\cos x + a^2}, \quad \text{где} \quad |a| < 1, \;\; a \in \mathbb{R}.$$

Решение. Функция $f(x)$ является четной, поэтому для всех n $b_n = 0$, а

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{2\,(1-a^2)}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \frac{\cos nx dx}{1-2a\cos x + a^2}.$$

Не будем вычислять такой сложный интеграл, а применим следующий прием:

1. используя формулы Эйлера

$$\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} = \frac{z-z^{-1}}{2i}, \;\; \cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \frac{z+z^{-1}}{2},$$

где $z = e^{ix}$, преобразуем $f(x)$ к рациональной функции комплексной переменной z;

2. полученную рациональную функцию разложим на простейшие дроби;

3. разложим простейшую дробь по формуле геометрической прогрессии;

4. упростим полученную формулу.

Итак, по формулам Эйлера получаем

$$f(x) = \frac{1-a^2}{1-a(z+z^{-1})+a^2} =$$

$$= \frac{(a^2-1)z}{(z-a)(z-a^{-1})} = \frac{a}{z-a} + \frac{1}{1-az}. \qquad (14)$$

Напомним, что сумма бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем q ($|q| < 1$) вычисляется по формуле:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Эта формула верна как для вещественных, так и для комплексных чисел. Поскольку $|az| = |a| < 1$ и $|a/z| = |a| < 1$, то

$$\frac{1}{1-az} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n\, z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n\, e^{inx},$$

$$\frac{a}{z-a} = \frac{a}{z}\,\frac{1}{1-a/z} = \frac{a}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a^n}{z^n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a^{n+1}}{z^{n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^{n+1}e^{-i(n+1)x}.$$

После замены переменной $-(n+1) = k$, $-\infty < k < -1$, получим:

$$\frac{a}{z-a} = \sum_{k=-\infty}^{-1} a^{-k}e^{ikx}.$$

Следовательно,

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}, \text{ где } c_n = \begin{cases} a^n, & \text{если } n \geq 0, \\ a^{-n}, & \text{если } n < 0, \end{cases}$$

то есть $c_n = a^{|n|}$.

Поскольку функция $f(x)$ непрерывна, то в силу теоремы о поточечной сходимости имеет место равенство:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^{|n|}e^{inx}.$$

Тем самым мы разложили функцию $f(x)$ в ряд Фурье в комплексной форме.

Теперь найдем ряд Фурье в вещественной форме. Для этого сгруппируем слагаемые с номерами n и $-n$ для $n \neq 0$:

$$a^n e^{inx} + a^n e^{-inx} = 2a^n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} = 2a^n \cos nx.$$

Поскольку $c_0 = 1$, то

$$f(x) = \frac{1 - a^2}{1 - 2a\cos x + a^2} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos nx.$$

Это ряд Фурье в вещественной форме функции $f(x)$.

Таким образом, не вычислив ни одного интеграла, мы нашли ряд Фурье функции. При этом мы вычислили трудный интеграл, зависящий от параметра

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos\, nx\, dx}{1 - 2a\cos x + a^2} = \frac{2\,\pi\, a^n}{1 - a^2}, \quad |a| < 1. \tag{15}$$

ПРИМЕР 12. Найдем ряд Фурье в комплексной и вещественной форме функции, заданной формулой
$f(x) = \dfrac{a\sin x}{1 - 2a\cos x + a^2}$, $|a| < 1$, $a \in \mathbb{R}$.

Решение. Функция $f(x)$ является нечетной, поэтому для всех n $a_n = 0$ и

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{2a}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x \sin nx dx}{1 - 2a\cos x + a^2}.$$

Чтобы записать ряд Фурье нужно вычислить сложные интегралы или воспользоваться приемом, описанным выше. Поступим вторым способом:

$$f(x) = \frac{a(z-z^{-1})}{2i\,(1-a(z-z^{-1})+a^2)} = \frac{i}{2} + \frac{i}{2}\frac{(a+a^{-1})z-2}{(z-a)(z-a^{-1})} =$$
$$= \frac{i}{2} + \frac{i}{2}\left(\frac{a}{z-a} + \frac{a^{-1}}{z-a^{-1}}\right).$$

Каждую из простых дробей разложим по формуле геометрической прогрессии:

$$\frac{a}{z-a} = \frac{a}{z}\frac{1}{1-\dfrac{a}{z}} = \frac{a}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a^n}{z^n},$$
$$\frac{a^{-1}}{z-a^{-1}} = -\frac{1}{1-az} = -\sum_{n=0}^{+\infty}a^n z^n.$$

Это возможно, так как $|az| = |a/z| = |a| < 1$. Значит

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\,e^{inx}, \text{ где } c_n = \begin{cases} ia^{-n}/2, & \text{если } n<0,\\ 0, & \text{если } n=0,\\ -ia^n/2, & \text{если } n>0, \end{cases}$$

или, более коротко, $c_n = \dfrac{1}{2i}a^{|n|}\operatorname{sgn} n$. Тем самым, ряд Фурье в комплексной форме найден.

Сгруппировав слагаемые с номерами n и $-n$ получим ряд Фурье функции в вещественной форме:

$$f(x) = \frac{a\sin x}{1-2a\cos x+a^2} \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} =$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2i}a^n e^{inx} - \frac{1}{2i}a^n e^{-inx}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} a^n \sin nx.$$

Вновь нам удалось вычислить следующий сложный интеграл:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin x\,\sin nx\,dx}{1-2a\cos x+a^2} = \pi\,a^{n-1}. \tag{16}$$

ЗАДАЧИ

24. Используя (15), вычислите интеграл $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos nx\,dx}{1-2a\cos x+a^2}$ для вещественных a, $|a|>1$. 25. Используя (16), вычислите интеграл $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x\,\sin nx\,dx}{1-2a\cos x+a^2}$ для вещественных a, $|a|>1$.

В задачах 26–28 найдите ряды Фурье в комплексной форме для функций.

26. $f(x)=\operatorname{sgn} x, \quad \pi<x<\pi.$

27. $f(x)=\ln(1-2a\cos x+a^2), \quad |a|<1.$

28. $f(x)=\dfrac{1-a\cos x}{1-2a\cos x+a^2}, \quad |a|<1.$

29. Докажите, что функция f, определенная в промежутке $[-\pi,\pi]$, вещественнозначна, если и только если коэффициенты c_n ее комплексного ряда Фурье связаны соотношениями $\overline{c_n}=c_{-n}$, $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$.

30. Докажите, что функция f, определенная в промежутке $[-\pi,\pi]$, является четной (т. е. удовлетворяет соотношению $f(-x)=f(x)$), если и только если коэффициенты c_n ее комплексного ряда Фурье связаны соотношениями $c_n=c_{-n}$, $n=\pm1,\pm2,\ldots$.

31. Докажите, что функция f, определенная в промежутке $[-\pi,\pi]$, является нечетной (т. е. удовлетворяет соотношению $f(-x)=-f(x)$), если и только если коэффициенты c_n ее комплексного ряда Фурье связаны соотношениями $c_n=-c_{-n}$, $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$.

Ответы

24. $\dfrac{1}{a^n}\dfrac{2\pi}{a^2-1}$. **25.** $\dfrac{\pi}{a^{n+1}}$. **26.** $-\dfrac{i}{\pi}\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\dfrac{e^{2inx}}{n}$, где подразумевается, что слагаемое, соответствующее $n=0$, пропущено. **27.** $-2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^n}{n}\cos nx$. **28.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a^n\cos nx$.

5. Равенство Ляпунова

Теорема (равенство Ляпунова). *Пусть функция* $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ *такова, что* $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx < +\infty$, *и пусть* a_n, b_n *— ее коэффициенты Фурье. Тогда справедливо равенство,*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx,$$

называемое равенством Ляпунова.

ПРИМЕР 13. Напишем равенство Ляпунова для функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } |x| < a, \\ 0, & \text{если } a < |x| < \pi \end{cases}$$

и найдем с его помощью суммы числовых рядов

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 na}{n^2} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

Решение. Очевидно,

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-a}^{a} dx = \frac{2a}{\pi}.$$

Так как $f(x)$ — четная функция, то для всех n имеем $b_n = 0$,

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{a} dx = \frac{2a}{\pi},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{a}\cos nx\,dx = \frac{2\sin na}{\pi n}.$$

Поэтому равенство Ляпунова для функции $f(x)$ принимает вид:

$$\frac{2\,a^2}{\pi^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\,\sin^2 na}{\pi^2\,n^2} = \frac{2a}{\pi}\,.$$

Из последнего равенства для $0 \le a \le \pi$ находим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 na}{n^2} = \frac{a(\pi - a)}{2}\,.$$

Полагая $a = \dfrac{\pi}{2}$, получаем $\sin^2 na = 1$ при $n = 2k-1$ и $\sin^2 na = 0$ при $n = 2k$. Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \ldots = \frac{\pi^2}{8}.$$

ПРИМЕР 14. Напишем равенство Ляпунова для функции $f(x) = |x|\cos x,\ x \in [-\pi,\pi]$, и найдем с его помощью сумму числового ряда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4n^2+1)^2}{(4n^2-1)^4}$.

Решение. Прямые вычисления дают

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x^2\cos^2 x\,dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x^2\,\frac{1+\cos 2x}{2}\,dx =$$

$$= \frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\sin 2x dx = \frac{\pi^2}{3} + \frac{1}{4\pi}x\cos x\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos 2x dx =$$

$$= \frac{\pi^2}{3} + \frac{1}{2}.$$

Поскольку $f(x)$ — четная функция, то для всех n имеем $b_n = 0$,

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x\cos x\cos nx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x\left(\cos(n+1)x + \cos(n-1)x\right)dx =$$

$$= -\frac{1}{\pi(n+1)}\int\limits_0^{\pi}\sin(n+1)xdx - \frac{1}{\pi(n-1)}\int\limits_0^{\pi}\sin(n-1)xdx =$$

$$= \frac{1}{\pi(n+1)^2}\cos(n+1)x\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{\pi(n-1)^2}\cos(n-1)x\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi(n+1)^2}\left((-1)^{(n+1)}-1\right) + \frac{1}{\pi(n-1)^2}\left((-1)^{(n+1)}-1\right) =$$

$$= \frac{(-1)^{(n+1)}-1}{\pi}\left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n-1)^2}\right) =$$

$$= 2\frac{(-1)^{(n+1)}-1}{\pi}\frac{n^2+1}{(n^2-1)^2} = \begin{cases} -\dfrac{4}{\pi}\dfrac{4k^2+1}{(4k^2-1)^2}, & \text{если } n = 2k, \\ 0, & \text{если } n = 2k+1. \end{cases}$$

Коэффициент a_1 необходимо вычислить отдельно, поскольку в общей формуле при $n = 1$ знаменатель дроби обращается в ноль.

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\cos x\,dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x\cos^2 x\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x(1+\cos 2x)dx = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\sin 2x\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, равенство Ляпунова для функции $f(x)$ имеет вид:

$$\frac{8}{\pi^2}+\frac{\pi^2}{4}+\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4n^2+1)^2}{(4n^2-1)^4}=\frac{\pi^2}{3}+\frac{1}{2},$$

откуда находим сумму числового ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4n^2+1)^2}{(4n^2-1)^4}=\frac{\pi^4}{192}+\frac{\pi^2}{32}-\frac{1}{2}\,.$$

ЗАДАЧИ

32. Напишите равенство Ляпунова для функции

$$f(x)=\begin{cases} x^2-\pi x, & \text{если}\ \ 0\le x<\pi,\\ -x^2-\pi x, & \text{если}\ \ -\pi<x\le 0.\end{cases}$$

33. Напишите равенства Ляпунова для функций $f(x)=\cos ax$ и $g(x)=\sin ax$, $x\in[-\pi,\pi]$.

34. Используя результат предыдущей задачи и предполагая, что a не является целым числом, выведите следующие классические разложения функций $\pi\operatorname{ctg} a\pi$ и $(\pi/\sin a\pi)^2$ по рациональным функциям:

$$\pi\operatorname{ctg} a\pi=\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2a}{a^2-n^2},$$

$$\left(\frac{\pi}{\sin a\pi}\right)^2=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(a-n)^2}.$$

35. Выведите комплексную форму обобщенного равенства Ляпунова.

36. Покажите, что комплексная форма равенства Ляпунова справедлива не только для вещественнозначных функций, но и для комплекснозначных функций.

32. $\dfrac{64}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^6}=\dfrac{\pi^4}{15}$.

33. $1+\dfrac{\sin 2\alpha\pi}{2\alpha\pi}=2\dfrac{\sin^2\alpha\pi}{\alpha^2\pi^2}+4\dfrac{\sin^2\alpha\pi}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\alpha^2}{(\alpha^2-n^2)^2}$;

$1-\dfrac{\sin 2\alpha\pi}{2\alpha\pi}=4\dfrac{\sin^2\alpha\pi}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{(\alpha^2-n^2)^2}$.

35. $\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)\,dx=\sum\limits_{-\infty}^{\infty}c_n\overline{d}_n$, где c_n — коэффициент Фурье функции $f(x)$, а d_n — коэффициент Фурье функции $g(x)$.

6. Дифференцирование рядов Фурье

Пусть $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — непрерывно дифференцируемая 2π-периодическая функция. Ее ряд Фурье имеет вид:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right).$$

Производная $f'(x)$ этой функции будет непрерывной и 2π-периодической функцией, для которой можно записать формальный ряд Фурье:

$$f'(x)\sim\frac{a_0'}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n'\cos nx+b_n'\sin nx\right),$$

где $a_0',\ a_n',\ b_n',\ n=1,2,\ldots$ — коэффициенты Фурье функции $f'(x)$.

Теорема (о почленном дифференцировании рядов Фурье). *При сделанных выше предположениях справедливы равенства* $a'_0 = 0,\ a'_n = nb_n,\ b'_n = -na_n,\ n \geq 1.$

ПРИМЕР 15. Пусть кусочно-гладкая функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $[0,\pi]$. Докажем, что при выполнении условия $\int\limits_0^\pi f(x)dx = 0$ имеет место неравенство

$$\int\limits_0^\pi [f(x)]^2\,dx \leq \int\limits_0^\pi [f'(x)]^2\,dx,$$

называемое *неравенством Стеклова,* и убедимся, что равенство в нем осуществляется лишь для функций вида $f(x) = A\cos x$.

Иными словами, неравенство Стеклова дает условия, при выполнении которых из малости производной (в среднеквадратичном) следует малость функции (в среднеквадратичном).

Решение. Продолжим функцию $f(x)$ на промежуток $[-\pi,0]$ четным образом. Обозначим продолженную функцию тем же символом $f(x)$. Тогда продолженная функция будет непрерывной и кусочно-гладкой на отрезке $[-\pi,\pi]$.

Так как функция $f(x)$ непрерывна, то $f^2(x)$ непрерывна на отрезке и $\int\limits_{-\pi}^\pi [f(x)]^2\,dx < +\infty$, следовательно, можно применить теорему Ляпунова, согласно которой имеет место равенство

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^\pi [f(x)]^2\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right).$$

Так как продолженная функция четная, то $b_n = 0$, $a_0 = 0$ по условию. Следовательно, равенство Ляпунова принимает вид

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2. \tag{17}$$

Убедимся, что для $f'(x)$ выполняется заключение теоремы о почленном дифференцировании ряда Фурье, то есть что $a_0' = 0,\ a_n' = nb_n,\ b_n' = -na_n,\ n \geq 1.$

Пусть производная $f'(x)$ претерпевает изломы в точках $x_1, x_2, \ldots, x_N$ в промежутке $[-\pi, \pi]$. Обозначим $x_0 = -\pi$, $x_{N+1} = \pi$. Разобьем промежуток интегрирования $[-\pi, \pi]$ на $N+1$ промежуток $(x_0, x_1), \ldots, (x_N, x_{N+1})$, на каждом из которых $f(x)$ непрерывно дифференцируема. Тогда, используя свойство аддитивности интеграла, а затем интегрируя по частям, получим:

$$b_n' = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\sum_{j=0}^{N}\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} f'(x)\sin nx dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{j=0}^{N}\left[f(x)\sin nx\Big|_{x_j}^{x_{j+1}} - n\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)\cos nx dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{j=0}^{N} f(x)\sin nx\Big|_{x_j}^{x_{j+1}} - \frac{n}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[(f(x_1)\sin nx_1 - f(x_0)\sin nx_0) + \right.$$

$$+ (f(x_2)\sin nx_2 - f(x_1)\sin nx_1) + \ldots +$$

$$+ (f(x_{N+1}) \sin nx_{N+1} - f(x_N) \sin nx_N)] - na_n =$$

$$= \frac{1}{\pi} [f(x_{N+1}) \sin nx_{N+1} - f(x_0) \sin nx_0] - na_n =$$

$$= \frac{1}{\pi} [f(\pi) \sin n\pi - f(-\pi) \sin(-n\pi)] - na_n = -na_n.$$

$$a_0' = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f'(x)dx = \frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^{N} \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} f'(x)dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^{N} f(x) \Big|_{x_j}^{x_{j+1}} = \frac{1}{\pi} (f(\pi) - f(-\pi)) = 0.$$

Последнее равенство имеет место в силу того, что функция $f(x)$ была продолжена четным образом, а значит $f(\pi) = f(-\pi)$.

Аналогично получим $a_n' = nb_n$.

Мы показали, что теорема о почленном дифференцировании рядов Фурье для непрерывной кусочно-гладкой 2π-периодической функции, производная которой в промежутке $[-\pi, \pi]$ претерпевает разрывы первого рода, верна.

Значит

$$f'(x) \sim \frac{a_0'}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n' \cos nx + b_n' \sin nx) = \sum_{n=1}^{\infty} (-na_n) \sin nx,$$

так как $a_0' = 0,\ a_n' = nb_n = 0,\ b_n' = -na_n,\ n = 1, 2, \ldots$.

Поскольку $\int\limits_0^{\pi} [f'(x)]^2 \, dx < +\infty$, то по равенству Ляпунова

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} [f'(x)]^2 \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2. \tag{18}$$

Так как каждый член ряда в (18) больше или равен соответствующего члена ряда в (17), то

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2\, dx \leq \int\limits_{-\pi}^{\pi} [f'(x)]^2\ dx.$$

Вспоминая, что $f(x)$ является четным продолжением исходной функции, имеем

$$\int\limits_{0}^{\pi} [f(x)]^2\, dx \leq \int\limits_{0}^{\pi} [f'(x)]^2\ dx.$$

Что и доказывает равенство Стеклова.

Теперь исследуем для каких функций в неравенстве Стеклова имеет место равенство. Если хоть для одного $n \geq 2$, коэффициент a_n отличен от нуля, то $a_n^2 < na_n^2$. Следовательно, равенство $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2$ возможно только если $a_n = 0$ для $n \geq 2$. При этом $a_1 = A$ может быть произвольным. Значит в неравенстве Стеклова равенство достигается только на функциях вида $f(x) = A\cos x$.

Отметим, что условие

$$\pi a_0 = \int_0^\pi f(x)dx = 0 \tag{19}$$

существенно для выполнения неравенства Стеклова, ведь если условие (19) нарушено, то неравенство примет вид:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2,$$

а это не может быть верно при произвольном a_0.

ЗАДАЧИ

37. Пусть кусочно-гладкая функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $[0,\pi]$. Докажите, что при выполнении условия $f(0)=f(\pi)=0$ имеет место неравенство

$$\int\limits_0^\pi [f(x)]^2\,dx \le \int\limits_0^\pi [f'(x)]^2\,dx,$$

также называемое неравенством Стеклова, и убедитесь, что равенство в нем имеет место лишь для функций вида $f(x) = B\sin x$.

38. Пусть функция f непрерывна в промежутке $[-\pi,\pi]$ и имеет в нем (за исключением разве лишь конечного числа точек) производную $f'(x)$, интегрируемую с квадратом. Докажите, что если при этом выполнены условия

$$f(-\pi)=f(\pi) \quad \text{и} \quad \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0,$$

то имеет место неравенство

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2\,dx \le \int\limits_{-\pi}^{\pi} [f'(x)]^2\,dx,$$

называемое неравенством Виртингера, причем равенство в нем имеет место лишь для функций вида
$f(x) = A\cos x + B\sin x$.

7. Применение рядов Фурье для решения дифференциальных уравнений в частных производных

При изучении реального объекта (явления природы, производственного процесса, системы управления и т. д.) существенными оказываются два фактора: уровень накопленных знаний об исследуемом объекте и степень развития математического аппарата. На современном этапе научных исследований выработалась следующая цепочка: явление — физическая модель — математическая модель.

Физическая постановка (модель) задачи состоит в следующем: выявляются условия развития процесса и главные факторы на него влияющие. Математическая постановка (модель) заключается в описании выбранных в физической постановке факторов и условий в виде системы уравнений (алгебраических, дифференциальных, интегральных и др.). Задача называется корректно поставленной, если в определенном функциональном пространстве решение задачи существует, единственно и непрерывно зависит от начальных и граничных условий.

Математическая модель не бывает тождественна рассматриваемому объекту, а является его приближенным описанием.

7.1. Вывод уравнения свободных малых поперечных колебаний струны

Будем следовать учебнику [3].

Пусть концы струны закреплены, а сама струна туго натянута. Если вывести струну из положения равновесия (например, оттянуть или ударить по ней), то струна начнет колебаться. Будем предполагать, что все точки струны движутся перпендикулярно ее положению равновесия (поперечные колебания), причем в каждый момент времени струна лежит в одной и той же плоскости.

Возьмем в этой плоскости систему прямоугольных координат xOu. Тогда, если в начальный момент времени $t = 0$ струна располагалась вдоль оси Ox, то u будет означать отклонение струны от положения равновесия, то есть, положению точки струны с абсциссой x в произвольный момент времени t соответствует значение функции $u(x, t)$. При каждом фиксированном значении t график функции $u(x, t)$ представляет форму колеблющейся струны в момент времени t (рис. 32). При постоянном значении x функция $u(x, t)$ дает закон движения точки с абсциссой x вдоль прямой, параллельной оси Ou, производная $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ — скорость этого движения, а вторая производная $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ — ускорение.

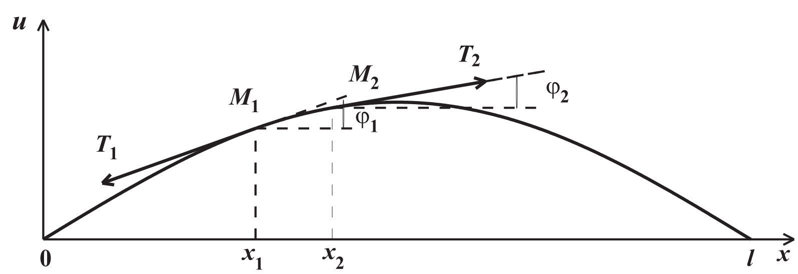

Рис. 32. Силы, приложенные к бесконечно малому участку струны

Составим уравнение, которому должна удовлетворять функция $u(x, t)$. Для этого сделаем еще несколько упрощающих предположений. Будем считать струну *абсолютно гиб-*

кой, то есть будем считать, что струна не сопротивляется изгибу; это означает, что напряжения, возникающие в струне, всегда направлены по касательным к ее мгновенному профилю. Струна предполагается *упругой* и подчиняющейся закону Гука; это означает, что изменение величины силы натяжения пропорционально изменению длины струны. Примем, что струна *однородна;* это означает, что ее линейная плотность ρ постоянна.

Внешними силами мы пренебрегаем. Это и означает, что мы рассматриваем свободные колебания.

Мы будем изучать только малые колебания струны. Если обозначить через $\varphi(x,t)$ угол между осью абсцисс и касательной к струне в точке с абсциссой x в момент времени t, то условие малости колебаний заключается в том, что величиной $\varphi^2(x,t)$ можно пренебрегать по сравнению с $\varphi(x,t)$, т. е. $\varphi^2 \approx 0$.

Так как угол φ мал, то $\cos\varphi \approx 1$, $\varphi \approx \sin\varphi \approx \operatorname{tg}\varphi \approx \dfrac{\partial u}{\partial x}$, следовательно, величиной $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2$ также можно пренебрегать.

Отсюда сразу следует, что в процессе колебания можем пренебречь изменением длины любого участка струны. Действительно, длина кусочка струны M_1M_2, проектирующаяся в промежуток $[x_1, x_2]$ оси абсцисс, где $x_2 = x_1 + \Delta x$, равна

$$\Delta l = \int\limits_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)^2} dx \approx \Delta x.$$

Покажем, что при наших предположениях величина *силы натяжения* T будет постоянной вдоль всей струны. Возьмем для этого какой либо участок струны M_1M_2 (рис. 32) в момент времени t и заменим действие отброшенных участков силами натяжений T_1 и T_2. Так как по условию все точки струны движутся параллельно оси Ou и внешние силы отсутствуют, то сумма проекций сил натяжения на ось Ox должна равняться нулю:

$$-T_1 \cos\varphi(x_1, t) + T_2 \cos\varphi(x_2, t) = 0.$$

Отсюда в силу малости углов $\varphi_1 = \varphi(x_1, t)$ и $\varphi_2 = \varphi(x_2, t)$ заключаем, что $T_1 = T_2$. Обозначим общее значение $T_1 = T_2$ через T.

Теперь вычислим сумму проекций F_u этих же сил на ось Ou :

$$F_u = T \sin\varphi(x_2, t) - T \sin\varphi(x_1, t). \qquad (20)$$

Так как для малых углов $\sin\varphi(x,t) \approx \operatorname{tg}\varphi(x,t)$, а $\operatorname{tg}\varphi(x,t) \approx \partial u(x,t)/\partial x$, то уравнение (20) можно переписать так

$$F_u \approx T\left(\operatorname{tg}\varphi(x_2, t) - \operatorname{tg}\varphi(x_1, t)\right) \approx$$
$$\approx T\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_2, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_1, t)\right) \cdot \frac{\Delta x}{\Delta x} \approx T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_1, t)\Delta x.$$

Так как точка x_1 выбрана произвольно, то $F_u \approx T\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)\Delta x.$

После того как найдены все силы, действующие на участок M_1M_2, применим к нему второй закон Ньютона, согласно которому произведение массы на ускорение равно сумме всех действующих сил. Масса кусочка струны M_1M_2 равна $m = \rho\Delta l \approx \rho\Delta x$, а ускорение равно $\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$. Уравнение Ньютона принимает вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t)\Delta x = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)\Delta x,$$

где $\alpha^2 = \dfrac{T}{\rho}$ — постоянное положительное число.

Сокращая на Δx, получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t). \tag{21}$$

В результате мы получили линейное однородное дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка с постоянными коэффициентами. Его называют уравнением колебаний струны или одномерным волновым уравнением.

Уравнение (21) по сути является переформулировкой закона Ньютона и описывает движение струны. Но в физической постановке задачи присутствовали требования о том, что концы струны закреплены и положение струны в какой-то момент времени известно. Уравнениями эти условия будем записывать так:

а) будем считать, что концы струны закреплены в точках $x = 0$ и $x = l$, т. е. будем считать, что для всех $t \geq 0$ выполнены соотношения

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0; \tag{22}$$

б) будем считать, что в момент времени $t = 0$ положение струны совпадает с графиком функции $f(x)$, т. е. будем считать, что для всех $x \in [0,l]$ выполнено равенство

$$u(x,0) = f(x); \tag{23}$$

в) будем считать, что в момент времени $t = 0$ точке струны с абсциссой x придана скорость $g(x)$, т. е. будем считать, что

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x). \tag{24}$$

Соотношения (22) называются граничными условиями, а соотношения (23) и (24) называются начальными условиями. Математическая модель свободных малых поперечных колебаний струны заключается в том, что надо решить уравнение (21) с граничными условиями (22) и начальными условиями (23) и (24).

7.2. Решение уравнения свободных малых поперечных колебаний струны методом Фурье

Решения уравнения (21) в области

$$0 \leq x \leq l, \quad 0 < t < \infty,$$

удовлетворяющие граничным условиям (22) и начальным условиям (23) и (24), будем искать *методом Фурье* (называемым также методом разделения переменных).

Метод Фурье состоит в том, что частные решения ищутся в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от x, а другая — только от t. То есть мы ищем решения уравнения (21), которые имеют специальный вид:

$$u(x,t) = X(x)T(t), \tag{25}$$

где X — дважды непрерывно дифференцируемая функция от x на $[0, l]$, а T — дважды непрерывно дифференцируемая функция от t, $t > 0$.

Подставляя (25) в (21), получим:

$$X\,T'' = \alpha^2 X''\,T\,, \tag{26}$$

или

$$\frac{T''(t)}{\alpha^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}\,. \tag{27}$$

Говорят, что произошло разделение переменных. Так как x и t не зависят друг от друга, то левая часть в (27) не зависит от x, а правая — от t и общая величина этих отношений должна быть постоянной, которую обозначим через λ:

$$\frac{T''(t)}{\alpha^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda\,.$$

Отсюда получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0, \tag{28}$$

$$T''(t) - \alpha^2 \lambda T(t) = 0\,. \tag{29}$$

При этом граничные условия (22) примут вид

$$X(0)T(t) = 0 \quad \text{и} \quad X(l)T(t) = 0.$$

Поскольку они должны выполняться для всех t, $t > 0$, то

$$X(0) = X(l) = 0. \tag{30}$$

Найдем решения уравнения (28), удовлетворяющего граничным условиям (30). Рассмотрим три случая.

Случай 1: $\lambda > 0$. Обозначим $\lambda = \beta^2$. Уравнение (28) принимает вид

$$X''(x) - \beta^2 X(x) = 0.$$

Его характеристическое уравнение $k^2 - \beta^2 = 0$ имеет корни $k = \pm\beta$. Следовательно, общее решение уравнения (28) имеет вид $X(x) = C\,e^{-\beta x} + De^{\beta x}$. Мы должны подобрать постоянные C и D так, чтобы соблюдались граничные условия (30), т. е.

$$X(0) = C + D = 0,$$

$$X(l) = C\,e^{-\beta l} + De^{\beta l} = 0.$$

Поскольку $\beta \neq 0$, то эта система уравнений имеет единственное решение $C = D = 0$. Следовательно, $X(x) \equiv 0$ и

$u(x, t) \equiv 0$. Тем самым, в случае 1 мы получили тривиальное решение, которое далее рассматривать не будем.

Случай 2: $\lambda = 0$. Тогда уравнение (28) принимает вид $X''(x) = 0$ и его решение, очевидно, задается формулой: $X(x) = C\,x + D$. Подставляя это решение в граничные условия (30), получим $X(0) = D = 0$ и $X(l) = Cl = 0$, значит, $C = D = 0$. Следовательно, $X(x) \equiv 0$ и $u(x, t) \equiv 0$, и мы опять получили тривиальное решение.

Случай 3: $\lambda < 0$. Обозначим $\lambda = -\beta^2$. Уравнение (28) принимает вид: $X''(x) + \beta^2 X(x) = 0$. Его характеристическое уравнение имеет вид $k^2 + \beta^2 = 0$, а $k = \pm\beta i$ являются его корнями. Следовательно, общее решение уравнения (28) в этом случае имеет вид $X(x) = C \sin\beta x + D \cos\beta x$. В силу граничных условий (30) имеем

$$X(0) = D = 0,$$

$$X(l) = C \sin\beta l = 0.$$

Поскольку мы ищем нетривиальные решения (т. е. такие, когда C и D не равны нулю одновременно), то из последнего равенства находим

$$\sin\beta l = 0,$$

т. е.

$$\beta l = n\pi, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots,$$

n не равно нулю, так как сейчас мы рассматриваем случай 3, в котором $\beta \neq 0$.

Итак, если $\beta = \dfrac{n\pi}{l}$, т. е. $\lambda = -\left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^2$, то существуют решения

$$X_n(x) = C_n \sin\frac{\pi n x}{l}, \tag{31}$$

C_n — произвольные постоянные, уравнения (28), не равные тождественно нулю.

В дальнейшем будем придавать n только положительные значения $n = 1, 2, \ldots$, поскольку при отрицательных n будут получаться решения того же вида.

Величины $\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)$ называются *собственными числами,* а функции $X_n(x) = C_n \sin\frac{\pi n x}{l}$ — *собственными функциями* дифференциального уравнения (28) с краевыми условиями (30).

Теперь решим уравнение (29). Для него характеристическое уравнение имеет вид

$$k^2 - \alpha^2\lambda = 0. \tag{32}$$

Поскольку выше мы выяснили, что нетривиальные решения $X(x)$ уравнения (28) имеются только для отрицательных λ, равных $\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{l^2}$, то именно такие λ мы и будем рассматривать далее. Корнями уравнения (32) являются

$$k = \pm i\alpha\sqrt{-\lambda},$$

а решения уравнения (29) имеют вид:

$$T_n(t) = A_n \sin\frac{\pi n\alpha t}{l} + B_n \cos\frac{\pi n\alpha t}{l}, \tag{33}$$

где A_n и B_n — произвольные постоянные. Подставляя формулы (31) и (33) в (25), найдем частные решения уравнения (21), удовлетворяющие краевым условиям (22):

$$u_n(x,t) = \left(B_n \cos\frac{\pi n\alpha t}{l} + A_n \sin\frac{\pi n\alpha t}{l}\right) C_n \sin\frac{\pi n x}{l}.$$

Внося множитель C_n в скобку и вводя обозначения $C_n A_n = b_n$ и $B_n C_n = a_n$, запишем $u_n(X,T)$ в виде

$$u_n(x,t) = \left(a_n \cos\frac{\pi n\alpha t}{l} + b_n \sin\frac{\pi n\alpha t}{l}\right) \sin\frac{\pi n x}{l}. \tag{34}$$

Колебания струны, соответствующие решениям $u_n(x,t)$, называются *собственными колебаниями* струны.

Так как уравнение (21) и граничные условия (22) линейны и однородны, то линейная комбинация решений (34)

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n \alpha t}{l} + b_n \sin \frac{\pi n \alpha t}{l} \right) \sin \frac{\pi n x}{l} \qquad (35)$$

будет решением уравнения (21), удовлетворяющим граничным условиям (22) при специальном выборе коэффициентов a_n и b_n, обеспечивающем равномерную сходимость ряда.

Теперь подберем коэффициенты a_n и b_n решения (35) так, чтобы оно удовлетворяло не только граничным, но и начальным условиям (23) и (24), где $f(x)$, $g(x)$ — заданные функции (причем $f(0) = f(l) = g(0) = g(l) = 0$).

Считаем, что функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условиям разложения в ряд Фурье. Подставляя в (35) значение $t = 0$, получим

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{\pi n x}{l} = f(x).$$

Дифференцируя ряд (35) по t и подставляя $t = 0$, получим

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n \alpha}{l} b_n \sin \frac{\pi n x}{l} = g(x),$$

а это есть разложение функций $f(x)$ и $g(x)$ в ряды Фурье. Следовательно,

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l}\, dx, \quad b_n = \frac{2}{\pi n \alpha} \int_0^l g(x) \sin \frac{\pi n x}{l}\, dx. \qquad (36)$$

Подставляя выражения для коэффициентов a_n и b_n в ряд (35), мы получим решение уравнения (21), удовлетворяющее граничным условиям (22) и начальным условиям (23) и (24).

Тем самым мы решили задачу о свободных малых поперечных колебаниях струны.

Выясним физический смысл собственных функций $u_n(x,t)$ задачи о свободных колебаниях струны, определенных формулой (34). Перепишем ее в виде

$$u_n(x,t) = \alpha_n \cos \frac{\pi n \alpha}{l}(t+\delta_n) \sin \frac{\pi n x}{l}, \tag{37}$$

где

$$\alpha_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}\,, \quad \frac{\pi n \alpha}{l}\delta_n = -\operatorname{arctg} \frac{b_n}{a_n}\,.$$

Из формулы (37) видно, что все точки струны совершают гармонические колебания с одной и той же частотой $\omega_n = \dfrac{\pi n \alpha}{l}$ и фазой $\dfrac{\pi n \alpha}{l}\delta_n$. Амплитуда колебания зависит от абсциссы x точки струны и равна $\alpha_n \sin \dfrac{\pi n x}{l}$. При таком колебании все точки струны одновременно достигают своего максимального отклонения в ту или иную сторону и одновременно проходят положение равновесия. Такие колебания называются *стоячими волнами*. Стоячая волна будет иметь $n+1$ неподвижную точку, задаваемую корнями уравнения $\sin \dfrac{\pi n x}{l} = 0$ в промежутке $[0, l]$. Неподвижные точки называются *узлами* стоячей волны. Посередине между узлами располагаются точки, в которых отклонения достигают максимума; такие точки называются *пучностями*. Каждая струна может иметь собственные колебания строго определенных частот $\omega_n = \dfrac{\pi n \alpha}{l}$, $n = 1, 2, \ldots$. Эти частоты называются *собственными частотами струны*. Самый низкий тон, который может издавать струна, определяется самой низкой собственной частотой $\omega_1 = \dfrac{\pi}{l}\sqrt{\dfrac{T}{\rho}}$ и называется *основным тоном* струны. Остальные тона, соответствующие частотам ω_n, $n = 2, 3, \ldots$, называются *обертонами* или *гармониками.*

Для наглядности изобразим типичные профили струны, издающей основной тон (рис. 33), первый обертон (рис. 34) и второй обертон (рис. 35).

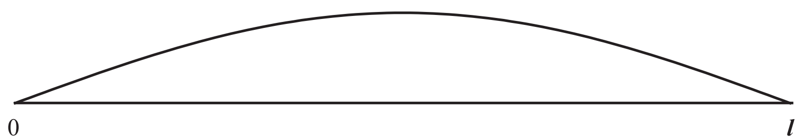

Рис. 33. Профиль струны, издающей основной тон

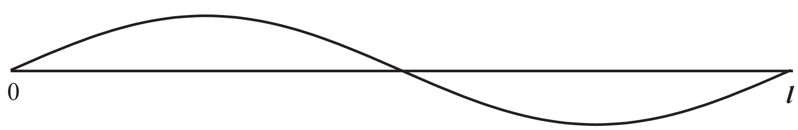

Рис. 34. Профиль струны, издающей первый обертон

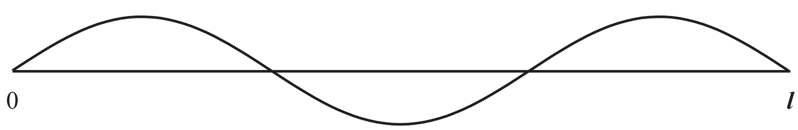

Рис. 35. Профиль струны, издающей второй обертон

Если струна совершает свободные колебания, определяемые начальными условиями, то функция $u(x, t)$ представляется, как это видно из формулы (35), в виде суммы отдельных гармоник. Таким образом произвольное колебание струны представляет собой суперпозицию стоячих волн. При этом характер звучания струны (тон, сила звука, тембр) будет зависеть от соотношения между амплитудами отдельных гармоник.

7.3. Сила, высота и тембр звука

Колеблющаяся струна возбуждает колебания воздуха, воспринимаемые ухом человека как звук, издаваемый струной. Сила звука характеризуется энергией или амплитудой колебаний: чем больше энергия, тем больше сила звука. Высота звука определяется его частотой или периодом колебаний: чем больше частота, тем выше звук. *Тембр* звука определяется наличием обертонов, распределением энергии по гармоникам, т. е. способом возбуждения колебаний. Амплитуды обертонов, вообще говоря, меньше амплитуды основного тона, а фазы обертонов могут быть произвольными. Наше ухо не чувствительно к фазе колебаний.

Сравните, например, две кривые на рис. 36, заимствованном из [2]. Это запись звука с одним и тем же основным тоном, извлеченного из кларнета (*а*) и рояля (*б*). Оба звука не представляют собой простых синусоидальных колебаний. Основная частота звука в обоих случаях одинакова — это и создает одинаковость тона. Но рисунки кривых разные потому, что на основной тон наложены разные обертона. В каком-то смысле эти рисунки показывают, что такое тембр.

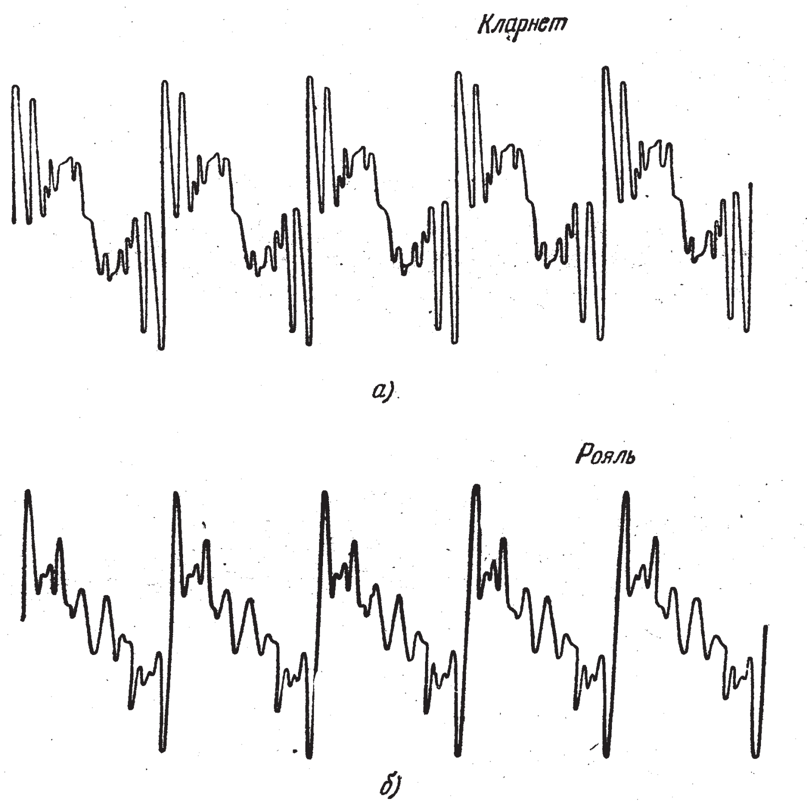

Рис. 36. Запись звука с одним и тем же основным тоном:
а — кларнет; *б* — рояль

Способность уха отличать ноту «до» рояля от той же ноты кларнета также основывается на разложении звука на гармонические составляющие, т. е. на основной тон и обертоны.

7.4. Примеры решения задачи о колебании струны с различными граничными и начальными условиями

Теперь конкретизируем задачу о колебании струны, конкретизировав функции $f(x)$ и $g(x)$ определенные значения.

ПРИМЕР 16. Найдем функцию $u(x,t)$, описывающую процесс колебания струны с закрепленными концами и начальными условиями

$$u(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0. \tag{38}$$

Решение. Функция $f(x)$ задает начальное положение струны, условие $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$ говорит о том, что струна отпущена без толчка. Эта модель описывает движение гитарной струны.

В соответствии с изложенным ранее, функция $u(x,t)$ задается формулой (35), в которой нам нужно найти коэффициенты a_n и b_n так, чтобы выполнялись начальные условия (38). Из условия $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$ и формул (36) следует, что $b_n = 0$,

$$a_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx. \tag{39}$$

Поэтому

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n \alpha t}{l}\,\sin\frac{\pi n x}{l}.$$

Используя формулу тригонометрии

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right)$$

запишем решение в виде

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{\pi n}{l}(x+\alpha t) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{\pi n}{l}(x-\alpha t).$$

В силу (39) заключаем, что первая сумма представляет собой разложение в тригонометрический ряд функции $f(x+\alpha t)$, а вторая функции $f(x-\alpha t)$.

Значит

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+\alpha t) + f(x-\alpha t)\right].$$

Эту формулу называют *формулой Даламбера*. Она позволяет представить решение в виде полусуммы «*волны, бегущей влево*» $f(x+\alpha t)$ и «*волны, бегущей вправо*» $f(x-\alpha t)$.

ПРИМЕР 17. Найдем функцию $u(x,t)$, описывающую процесс колебания струны, закрепленной на концах $x=0$, $x=\pi$ и возбуждаемой оттягиванием ее в точке $x=\dfrac{\pi}{2}$ на величину h (рис. 37). Начальная скорость равна нулю.

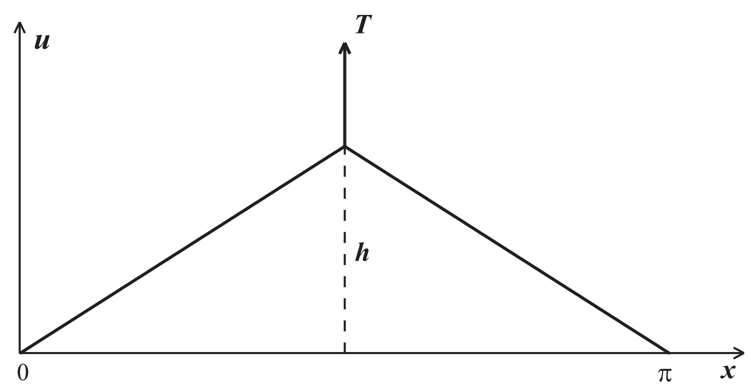

Рис. 37. Начальное положение струны из примера 17

Решение. Функция $f(x)$ описывающая начальное положение струны задается формулой

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2h}{\pi}x, & \text{если } 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}, \\ \\ \dfrac{2h}{\pi}(\pi - x), & \text{если } \dfrac{\pi}{2} < x \leq \pi. \end{cases}$$

Второе начальное условие имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0.$$

Положения точек струны $u(x, t)$ задаются уравнением (35). Подберем коэффициенты a_n и b_n так, чтобы выполнялись начальные условия

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi f(x)\sin nx = \frac{2}{\pi}\frac{2h}{\pi}\Big(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin nx + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi - x)\sin nx\Big) =$$

$$= \frac{8h\sin\dfrac{n\pi}{2}}{n^2\pi^2},$$

$$b_n = \frac{2}{\pi n\alpha}\int\limits_0^\pi \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0)\sin nx = 0.$$

Итак, положения точек струны в момент времени t задаются соотношением:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8h\sin\dfrac{n\pi}{2}}{n^2\pi^2}\cos n\alpha t\, \sin nx.$$

ЗАДАЧА

39. Найти функцию $u(x,t)$, определяющую процесс колебания струны, закрепленной на концах $x = 0$, $x = l$, и возбуждаемой ударом молоточка ширины 2δ в точке струны с постоянной скоростью v_0. Эта задача описывает колебания струны рояля.

Ответ

39. $u(x,t) = \dfrac{4v_0 l}{\pi^2 \alpha} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} \sin\dfrac{\pi n c}{l} \sin\dfrac{\pi n \delta}{l} \sin\dfrac{\pi n x}{l} \sin\omega_n t,$

где $\omega_n = \dfrac{\pi n \alpha}{l}$, $\alpha = \sqrt{\dfrac{T}{\rho}}$.

Список литературы

1. *Александров В. А.* Ряды Фурье: Метод. пособие. Новосибирск: НГУ, 1996.
2. *Ландау Л. Д., Китайгородский А. И.* Физика для всех.— М.: Наука, 1974.
3. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Изд-во МГУ, 1999.

Содержание