Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
"САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО"

кафедра математического анализа

В. Г. Гордиенко, Ю. В. Матвеева, М. А. Осипцев, Е. В. Разумовская,
В. Г. Тимофеев, А. М. Шеина

Интегралы, зависящие от параметров

Учебное пособие

Саратов 2014

Содержание

Пособие посвящено одному из важных и трудных разделов математики— теории интегралов, зависящих от параметров.

Рассмотрены собственные и несобственные интегралы. Даны основные методы их вычисления, признаки сходимости. Решены задачи, связанные с их дифференцированием и интегрированием.

Пособие снабжено большим количеством подробно решенных задач. Особое внимание уделено параметрическим интегралам типа Эйлера, Фруллани и им подобным. Предложены задачи и для самостоятельного решения. Они снабжены методическими рекомендациями к решению и ответами.

Для студентов механико-математического, физического факультетов университета, факультета нелинейных процессов, студентов естественно-научных специальностей, а также представительств университета в регионе.

Рекомендует к печати:

кафедра математического анализа Саратовского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор С.И.Дудов.

1 Собственные интегралы

Определение 1.1. Интегралы вида

$$I(x) = \int\limits_a^b f(x,y)dy, \qquad x = (x_1, \dots, x_n) \tag{1.1}$$

называются интегралами, зависящими от параметров $x_1, \dots, x_n$.

Сформулируем теоремы непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости для этих интегралов.

Теорема 1.1. Пусть функция $f(x,y)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, непрерывна на множестве $a \le y \le b$, $x \in A$, где A—замкнутое ограниченное множество. Тогда интеграл (1.1) является непрерывной на множестве A функцией.

Теорема 1.2. Пусть $I(x) = \int\limits_a^b f(x,y)dy$, причем функция $f(x,y)$ и частная производная $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ непрерывны при $y \in [a,b]$, $x \in [c,d]$. Тогда на сегменте $[c,d]$ существует производная $\frac{dI(x)}{dx}$ и ее можно вычислить, производя дифференцирование под знаком интеграла, т.е.

$$\frac{dI(x)}{dx} = \int\limits_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dy. \tag{1.2}$$

Теорема 1.3. Пусть $I(x) = \int\limits_a^b f(x,y)dy$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, причем функция $f(x,y)$ и частная производная $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x_k}$ непрерывны при $y \in [a,b]$, $x \in A$, где A—выпуклое замкнутое ограниченное множество. Тогда на множестве A существует частная производная $\frac{\partial I(x)}{\partial x_k}$ и ее можно вычислить, производя дифференцирование под знаком интеграла, т.е.

$$\frac{\partial I(x)}{\partial x_k} = \int\limits_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial x_k} dy, \qquad k = \overline{1,n}. \tag{1.3}$$

Рассмотрим интегралы более общего вида

$$I(x) = \int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dy \tag{1.4}$$

Теорема 1.4. Пусть функции $\alpha(x), \beta(x), f(x,y)$ непрерывны при $y \in [a,b]$, $x \in A$, где A—замкнутое ограниченное множество (Например, $A = [c,d]$ и $a \leq \alpha(x) \leq b$, $a \leq \beta(x) \leq b$) .Тогда интеграл (1.4) является непрерывной функцией на множестве A.

Теорема 1.5. Пусть функции $f(x,y), \alpha(x), \beta(x)$ имеют непрерывные частные производные на множестве $y \in [a,b], x \in A$, где A—замкнутое ограниченное выпуклое множество (Например, $A = [c,d]$). Тогда на множестве A существует частная производная $\frac{\partial I(x)}{\partial x_k}$ и ее можно вычислить по следующему правилу:

$$\frac{\partial I(x)}{\partial x_k} = \int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x_k} dy + f(x,\beta(x))\frac{\partial \beta(x)}{\partial x_k} - f(x,\alpha(x))\frac{\partial \alpha(x)}{\partial x_k}, \qquad k = \overline{1,n}. \tag{1.5}$$

Теорема 1.6. Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна при $c \leq x \leq d$, $a \leq y \leq b$ и $I(x) = \int\limits_a^b f(x,y)dy$. Тогда при вычислении интеграла $\int\limits_c^d I(x)dx$ можно производить интегрирование по параметру под знаком интеграла, определяющего функцию $I(x)$, т.е.

$$\int\limits_c^d I(x)dx = \int\limits_a^b dy \left[\int\limits_c^d f(x,y)dx\right] \qquad \text{или}$$

$$\int\limits_c^d dx \left[\int\limits_a^b f(x,y)dy\right] = \int\limits_a^b dy \left[\int\limits_c^d f(x,y)dx\right] \tag{1.6}$$

Рассмотрим, наконец, возможность предельного перехода под знаком интеграла.

Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна в прямоугольнике $a \leq y \leq b, c \leq x \leq d$ и кривые $y = \alpha(x)$, $y = \beta(x)$, $y \in [a,b]$ непрерывны при $c \leq x \leq d$ и не выходят за пределы рассматриваемого прямоугольника, то

1.
$$\lim_{x \to x_0} \int\limits_a^b f(x,y)dy = \int\limits_a^b \lim_{x \to x_0} f(x,y)dy \tag{1.7}$$

2.
$$\lim_{x\to x_0}\int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dy = \int\limits_{\alpha(x_0)}^{\beta(x_0)} f(x_0,y)dy \tag{1.8}$$

Если функция $f(x,y)$ при фиксированном x непрерывна по $y \in [a,b]$ и при $x \to x_0 \in (c,d)$ стремится к предельной функции $g(y)$ равномерно относительно y, то
$$\lim_{x\to x_0}\int\limits_{a}^{b} f(x,y)dy = \int\limits_{a}^{b} g(y)dy$$

Если x_0—конечное, то равномерное стремление функции $f(x,y)$ к $g(y)$ при $x \to x_0$ означает, что

1. существует конечная предельная функция $g(y)$:
$$\lim_{x\to x_0} f(x,y) = g(y);$$
2. $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $0 < |x - x_0| < \delta$ будет выполняться $|f(x,y) - g(y)| < \varepsilon$ сразу для всех y, для которых функция $f(x,y)$ определена.

Если же $x_0 = \infty$, например, $+\infty$, в данном определении неравенство $|x - x_0| < \delta$ следует заменить неравенством $x > \delta(\varepsilon) > 0$.

Решим наиболее типичные задачи для собственных интегралов, зависящих от параметров.

Изложение начнем с решения задач о предельном переходе под знаком интеграла по параметру.

Задача 1.1. Найти:

а). $\lim_{\alpha\to 0}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{x^2+\alpha^2}dx;$

б). $\lim_{\alpha\to 0}\int\limits_{\alpha}^{1+\alpha}\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2};$

в). $\lim_{n\to\infty}\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{1+(1+\frac{x}{n})^n};$

г). $\lim_{\alpha\to\infty}\int\limits_{1}^{2}\frac{\ln(x+|\alpha|)}{\ln(x^2+\alpha^2)}dx;$

Решение:

Поскольку функции $\sqrt{x^2+\alpha^2}, 1+\alpha$ и $\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}$ непрерывны (при всех x и α), то предельный переход по α под знаком интеграла возможен, если $\alpha \to \alpha_0$ и α_0—конечное.

Имеем

$$\text{а).} \lim_{\alpha\to 0}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{x^2+\alpha^2}dx = \int\limits_{-1}^{1}|x|dx = 1.$$

$$\text{б).} \lim_{\alpha\to 0}\int\limits_{\alpha}^{1+\alpha}\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2} = \int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} \quad (\alpha_0 = 0)$$

Поскольку функции $\frac{1}{1+(1+\frac{x}{n})^n}$ и $\frac{\ln(x)+|\alpha|}{\ln(x^2+\alpha^2)}$ при фиксированных n ($n \geq 1$) и α ($|\alpha| > 1$) непрерывны по x ($0 \leq x \leq 1$ и $1 \leq x \leq 2$ соответственно); при $n \to \infty$ $\frac{1}{1+(1+\frac{x}{n})^n}$ равномерно стремится к $\frac{1}{1+e^x}$, а при $\alpha \to \infty$ $\frac{\ln(x)+|\alpha|}{\ln(x^2+\alpha^2)}$ равномерно стремится к $\frac{1}{2}$, то имеем:

$$\text{в).} \lim_{n\to\infty}\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{1+(1+\frac{x}{n})^n} = \int\limits_{0}^{1}\lim_{\alpha\to\infty}\frac{dx}{1+(1+\frac{x}{n})^n} = \int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{1+e^x} = \ln\frac{2e}{e+1};$$

$$\text{г).} \lim_{\alpha\to\infty}\int\limits_{1}^{2}\frac{\ln(x+|\alpha|)}{\ln(x^2+\alpha^2)}dx = \int\limits_{1}^{2}\lim_{\alpha\to\infty}\frac{\ln(x+|\alpha|)}{\ln(x^2+\alpha^2)}dx = \frac{1}{2}.$$

Задача 1.2. Вычислить

$$I = \lim_{R\to\infty}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\theta}d\theta.$$

Решение:

При $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ верно неравенство $\sin\theta \geq \frac{2}{\pi}\theta$, то

$$e^{-R\sin\theta} \leq e^{-\frac{2}{\pi}R\theta}$$

. Отсюда

$$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\theta}d\theta < \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2}{\pi}R\theta}d\theta = -\frac{\pi}{2R}e^{-\frac{2}{\pi}R\theta}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{2R}(e^{-R}-1) = \frac{\pi}{2R}(1-e^{-R}).$$

Отсюда следует, что

$$0 \le I \le \lim_{R\to+\infty} \frac{\pi}{2R}(1-e^{-R}) = 0,$$

то есть

$$I = 0$$

Задача 1.3. Возможен ли предельный переход под знаком интеграла

$$\lim_{y\to 0} \int_0^1 \frac{x}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y^2}} dx$$

Решение:

Переходя к пределу под знаком интеграла, получаем 0. Теперь вычислим интеграл, а затем перейдем к пределу. Получим:

$$\lim_{y\to 0} \int_0^1 \frac{x}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y^2}} dx = \frac{1}{2} \lim_{y\to 0} \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{y^2}} d(\frac{x^2}{y^2}) = \frac{1}{2} \lim_{y\to 0}(1-e^{-\frac{1}{y^2}}) = \frac{1}{2}.$$

Отметим при этом, что в точке $(0,0)$ функция $\frac{x}{y^2}e^{-\frac{x^2}{y^2}}$ терпит разрыв.

Отсюда следует, что предельный переход невозможен.

Задача 1.4. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[A,B]$. Доказать, что

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_a^x (f(t+h)-f(t))dt = f(x)-f(a) \quad (A<a<x<B)$$

Решение:

Обозначим через $F(x)$ первообразную функцию для $f(x)$. По формуле Ньютона-Лейбница, получаем:

$$\int_a^x (F'(t+h)-F'(t))dt = (F(t+h)-F(t))|_a^x = F(x+h)-F(x)-(F(a+h)-F(a)).$$

Отсюда вытекает:

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_a^x (f(t+h)-f(t))dt = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} -$$

$$-\lim_{h\to 0} \frac{F(a+h)-F(a)}{h} = F'(x)-F'(a) = f(x)-f(a).$$

Задача 1.5. Если $f(x)$ непрерывна и положительна на сегменте $[0,1]$, то функция

$$F(y)=\int\limits_0^1 \frac{yf(x)}{x^2+y^2}dx$$

не является непрерывной. Доказать.

Решение:

Ясно, что функции $f(x)$ и $\frac{y}{x^2+y^2}$ интегрируемы на $[0,1]$ и при фиксированном y не меняют знака на этом сегменте. Применим к функции $F(y)$ теорему о среднем:

$$F(y)=f(a(y))\operatorname{arctg}\frac{1}{y}\quad (0\le a(y)\le 1)$$

Пусть $\varepsilon>0$. Тогда

$$|F(\varepsilon)-F(-\varepsilon)|=\left|(f(a(\varepsilon))+f(a(-\varepsilon)))\operatorname{arctg}\frac{1}{\varepsilon}\right|\ge$$
$$\ge 2\min_{x\in[0,1]}f(x)\left|\operatorname{arctg}\frac{1}{\varepsilon}\right|\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}\pi\min_{x\in[0,1]}f(x)>0$$

Из последнего соотношения вытекает разрыв функции $F(y)$ в 0.

Дифференцирование по параметру

Задача 1.6. Вычислить интеграл

$$I=\int\limits_0^1 x^m(\ln x)^n dx,$$

где m и n—положительные целые числа.

Решение:

Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_0^1 x^m dx=\frac{1}{m+1}$$

Найдем производную этого интеграла по параметру m:

$$\frac{d}{dm}\int\limits_0^1 x^m dx=\int\limits_0^1 x^m\ln x dx=-\frac{1}{(m+1)^2}$$

дифференцируем по m еще раз, получим:

$$\int_0^1 x^m (\ln x)^2 dx = \frac{2!}{(m+1)^3}$$

после n—кратного дифференцирования по m, находим:

$$\int_0^1 x^m (\ln x)^n dx = (-1)^n \frac{n!}{(m+1)^{n+1}}.$$

Задача 1.7. Найти $F'(\alpha)$:

а). $F(\alpha) = \int\limits_0^\alpha f(x+\alpha, x-\alpha) dx,$

б). $F(\alpha) = \int\limits_0^2 dx \int\limits_{x-\alpha}^{x+\alpha} \sin(x^2+y^2-\alpha^2) dy$

Решение:

По формуле (1.5), полагая $u = x+\alpha$, $v = x-\alpha$, имеем

$$F'(\alpha) = f(2\alpha, 0) + \int_0^\alpha (f'_u(u,v) - f'_v(u,v)) dx.$$

Отметим, что

$$\frac{df}{dx} = f'_u + f'_v.$$

Отсюда:

$$\int_0^\alpha (f'_u - f'_v) dx = \int_0^\alpha (2f'_u - (f'_u + f'_v)) dx =$$

$$= 2\int_0^\alpha f'_u dx - \int_0^\alpha \frac{df}{dx} dx = 2\int_0^\alpha f'_u dx - f(2\alpha, 0) + f(\alpha, -\alpha)$$

Следовательно,

$$F'(\alpha) = f(\alpha, -\alpha) + 2\int_0^\alpha f'_u dx.$$

б). Положим:

$$f(x,\alpha)=\int\limits_{x-\alpha}^{x+\alpha}\sin^2(x^2+y^2-\alpha^2)dy.$$

Тогда

$$F'(\alpha)=2f(\alpha^2,\alpha)\alpha+\int\limits_0^{\alpha^2}f'_\alpha(x,\alpha)dx.$$

$$f'_\alpha(x,\alpha)=\sin(x^2+(x+\alpha)^2-\alpha^2)+\sin(x^2+(x-\alpha)^2-\alpha^2)-2\alpha\int\limits_{x-\alpha}^{x+\alpha}\cos(x^2+y^2-\alpha^2)dy.$$

Отсюда получаем:

$$\begin{aligned}F'(\alpha)=&2\alpha\int\limits_{\alpha^2-\alpha}^{\alpha^2+\alpha}\sin(y^2+\alpha^4-\alpha^2)dy+2\int\limits_0^{\alpha^2}\sin 2x^2\cos 2\alpha x dx-\\&-2\alpha\int\limits_0^{\alpha^2}dx\int\limits_{x-\alpha}^{x+\alpha}\cos(x^2+y^2-\alpha^2)dy.\end{aligned}$$

Задача 1.8. Найти $F''(x)$, если

$$F(x)=\frac{1}{h^2}\int\limits_0^h d\xi\int\limits_0^h f(x+\xi+\eta)d\eta,$$

где $h>0$, а $f(x)$—непрерывная функция

Решение:

Сделаем во внутреннем интеграле замену переменных:

$t=x+\xi+\eta\Rightarrow$ поскольку $0\le\eta\le h$, то $t\in[x+\xi,x+\xi+\eta]$ и интеграл становится равным:

$$\int\limits_o^h f(x+\xi+\eta)d\eta=\int\limits_{x+\xi}^{x+\xi+h}f(t)dt.$$

Из этого равенства после дифференцирования по параметру, получаем:

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{h^2}\int\limits_0^h d\xi \int\limits_{x+\xi}^{x+\xi+h} f(\eta)d\eta\right) = \frac{1}{h^2}\int\limits_0^h \left(f(h+x+\xi) - f(x+\xi)\right)d\xi =$$

$$= \frac{1}{h^2}\left(\int\limits_{x+h}^{2h+x} f(\xi)d\xi - \int\limits_x^{x+h} f(\xi)d\xi\right);$$

$$F''(x) = \frac{1}{h^2}\left(f(2h+x) - 2f(x+h) + f(x)\right).$$

Задача 1.9. Найти производные от полных эллиптических интегралов

$$E(k) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi, \quad F(k) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} \quad (0 < k < 1)$$

и выразить их через функции $E(k)$ и $F(k)$.

Показать, что функция $E(k)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$E''(k) + \frac{1}{k}E'(k) + \frac{E(k)}{1-k^2} = 0.$$

Решение:

Будем считать, что $k \in [k_0, k_1] \subset (0,1)$. Тогда в это промежутке при $[0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}; k_0 \le k \le k_1]$ подынтегральные функции непрерывны, поэтому формулой (1.5) можно пользоваться:

$$E'(k) = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k\sin^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}d\varphi.$$

Умножим обе части последнего выражения на k и воспользуемся выражением для $F(k)$ и $E(k)$. Получим:

$$\frac{dE}{dk} = \frac{E-F}{k}$$

Интегрируем в $E'(k)$ по частям, получим:

$$E'(k) = k\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\varphi d(\cos\varphi)}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k\cos^2\varphi d\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$-k\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} + k\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi d\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}.$$

Вычислим

$$F'(k) = k\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi d\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}; \quad (kF') = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}.$$

В силу этого:

$$E'(k) = F'(k) - k(kF')$$

Подставив это выражение в $\frac{dE}{dk} = \frac{E-F}{k}$, получим:

$$F'(k) = \frac{E(k)}{k(1-k^2)} - \frac{F(k)}{k}$$

Поскольку $F = E - kE'$, $F' = -kE''$, то подставляя эти выражения в последнюю формулу для $F(k)$, приходим к нужному дифференциальному уравнению. В силу произвольности $[k_0, k_1]$. Получаем справедливость решения для $\forall k \in (0,1)$.

Задача 1.10. Доказать, что функция Бесселя целого индекса n

$$I_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} cos(n\varphi - x\sin\varphi)d\varphi$$

является решением уравнения Бесселя

$$x^2 I_n''(x) + xI_n'(x) + (x^2-n^2)I_n(x) = 0$$

Решение:

Вычислим $I_n'(x)$ и проинтегрируем по частям:

$$I_n'(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \sin(n\varphi - x\sin\varphi)d\cos\varphi = \frac{n}{\pi}\int\limits_0^\pi \cos\varphi\cos(n\varphi - x\sin\varphi)d\varphi -$$

$$-\frac{x}{\pi}\int\limits_0^\pi (1-\sin^2\varphi)\cos(n\varphi - x\sin\varphi)d\varphi = \frac{n}{\pi}\int\limits_0^\pi \cos\varphi\cos(n\varphi - x\sin\varphi)d\varphi$$

$$-xI_n(x) - xI_n''(x).$$

В силу того, что

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \cos(n\varphi - x\sin\varphi)(n - x\cos\varphi)d\varphi = 0,$$

Имеем:

$$\frac{x}{\pi}\int\limits_0^\pi \cos(n\varphi - x\sin\varphi)\cos\varphi d\varphi = nI_n(x).$$

С учетом этого равенства, умножив предыдущее на x, получим уравнение Бесселя.

Задача 1.11. Пусть $f(x)$—дважды дифференцируемая функция, а $F(x)$—дифференцируемая. Доказать, что функция

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(f(x-at) + f(x+at)) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} F(z)dz$$

является решением уравнения колебания струны:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (a \neq 0)$$

с начальными условиями:

$$u(x,0) = f(x), \qquad u_t'(x,0) = F(x)$$

Решение:

Вычисляем:

$$u'_x = \frac{1}{2}(f'(x-at) + f'(x+at)) + \frac{1}{2a}(F(x+at) - F(x-at)),$$
$$u'_t = \frac{a}{2}(f'(x+at) - f'(x-at)) + \frac{1}{2}(F(x+at) + F(x-at)),$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{2}(f''(x-at) + f''(x+at)) + \frac{1}{2a}(F'(x+at) - F'(x-at)),$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{a^2}{2}(f''(x+at) + f''(x-at)) + \frac{a}{2}(F'(x+at) - F'(x-at)).$$

Нетрудно теперь проверить, что функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению колебания струны и начальным условиям.

Дифференцируя по параметру, вычислить следующие интегралы:

Задача 1.12.

$$I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x)dx$$

Решение:

Пусть $|a| > 0$ и $|b| > 0$. Тогда возможно применение формулы (1.5), поэтому:

$$I'(a) = \int_0^{\pi} \frac{2|a|\mathrm{sgn} a \sin^2 x}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} dx$$

Полагая $t = \mathrm{ctg}\, x$, получаем:

$$I'(a) = 2|a|\mathrm{sgn} a \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(a^2 + b^2 t^2)(1+t^2)} = \frac{\pi \mathrm{sgn} a}{|a| + |b|}$$

Интегрируя по a, находим:

$$I(a) = \pi \ln(|a| + |b|) + c.$$

Очевидно, что

$$I(b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(b^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x)dx = \pi \ln |b|$$

Полагая в $I(a)$ $a = b$, получаем, $c = -\pi \ln 2$. Следовательно,

$$I(a) = \pi \ln \frac{|a| + |b|}{2}.$$

Задача 1.13.

$$I(a) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(a \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} dx.$$

Решение:

Пусть $a \geq \varepsilon > 0$. При этом функции

$$f(x,a) = \begin{cases} \frac{\operatorname{arctg}(a \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}, & x \neq 0, \quad x \neq \frac{\pi}{2}; \\ a, & x = 0; \\ 0, & x = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$f'_a(x,a) = \begin{cases} \frac{1}{1+a^2 \operatorname{tg}^2 x}, & x \neq \frac{\pi}{2}; \\ 0, & x = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

непрерывны в прямоугольнике $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, a \geq \varepsilon > 0$, поэтому

$$f'(a) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + a^2 \operatorname{tg}^2} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+a^2t^2)} = \frac{\pi}{2(1+a)}.$$

Отсюда интегрируя, получаем

$$I(a) = \frac{\pi}{2} \ln(1+a) + c, \quad \text{где } c --- \text{константа}.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$, полученный результат верен $\forall a > 0$.

$$c = \lim_{a \to +0} (I(a) - \frac{\pi}{2} \ln(1+a)) = I(0) = 0.$$

Тогда

$$I(a) = \frac{\pi}{2} \ln(1+a), \qquad \text{при} \quad a \geq 0.$$

Задача 1.14.

$$I(a) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{1 + a\cos x}{(1 - a\cos x)} \frac{dx}{\cos x} \qquad (|a| < 1)$$

Решение:

Без труда убеждаемся, что применение формулы (1.5) для вычисления этого интеграла возможно.

$$I'(a) = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 - a^2\cos^2 x} = 2\int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{1 - a^2 + t^2} = \frac{\pi}{\sqrt{1 - a^2}}$$

Откуда $I(a) = \pi \arcsin at + c$. Поскольку при $a = 0$ $I(0) = 0$, то $c = 0$. Поэтому

$$I(a) = \pi \arcsin a.$$

Интегрирование по параметру.

Задача 1.15. Вычислить интеграл

$$I = \int\limits_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \qquad (a > 0, b > 0).$$

Решение:

Представим

$$\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int\limits_a^b x^y dy.$$

Тогда искомый интеграл принимает вид:

$$I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_a^b x^y dy.$$

В прямоугольнике $[0 \leq x \leq 1, a \leq y \leq b]$ возможно применение формулы (1.6), поэтому

$$I = \int\limits_a^b dy \int\limits_0^1 x^y dx = \int\limits_a^b \frac{dy}{y + 1} = \ln \frac{b + 1}{a + 1}.$$

Задача 1.16. Вычислить интегралы:

$$\text{а).} \int\limits_0^1 \sin(\ln\frac{1}{x})\frac{x^b - x^a}{\ln x}dx; \qquad \text{б).} \int\limits_0^1 \cos(\ln\frac{1}{x})\frac{x^b - x^a}{\ln x}dx,$$

где $a > 0, b > 0$.

Решение:

Воспользуемся равенством

$$\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int\limits_a^b x^y dy$$

и переформулируем пункты а) и б).

$$\text{а).} I_1 = \int\limits_0^1 dx \int\limits_a^b x^y \sin(\ln\frac{1}{x})dy; \quad \text{б).} I_2 = \int\limits_0^1 dy \int\limits_a^b x^y \cos(\ln\frac{1}{x})dy.$$

Условия теоремы о перестановке предела интегрирования в кратных интегралах выполнены, поэтому:

$$I_1 = \int\limits_a^b dy \int\limits_0^1 x^y \sin(\ln\frac{1}{x})dx; \quad I_2 = \int\limits_a^b dy \int\limits_0^1 x^y \cos(\ln\frac{1}{x})dx.$$

Сделаем замену $x = e^{-t}$. В результате получим:

$$I_1 = \int\limits_a^b dy \int\limits_0^{+\infty} e^{-t(y+1)} \sin t dt; \quad I_2 = \int\limits_a^b dy \int\limits_0^{+\infty} e^{-t(y+1)} \cos t dt.$$

Вычисляя внутренний интеграл, получаем

$$I_1 = \int\limits_a^b \frac{dy}{(y+1)^2 + 1}; \qquad I_2 = \int\limits_a^b \frac{(y+1)dy}{(y+1)^2 + 1}.$$

Окончательно получаем:

$$I_1 = \operatorname{arctg} \frac{b-a}{1 + (a+1)(b+1)}; \qquad I_2 = \frac{1}{2} \ln \frac{b^2 + 2b + 2}{a^2 + 2a + 2}.$$

Задача 1.17. Пусть $F(k)$ и $E(k)$—полные эллиптические интегралы. Доказать формулы:

$$\text{a).}\int\limits_0^k F(k)kdk = E(k) - k_1^2F(k);$$

$$\text{б).}\int\limits_0^k E(k)kdk = \frac{1}{3}((1+k^2)E(k) - k_1^2F(k)), \quad \text{где } k_1^2 = 1-k^2.$$

Решение:

Из выражений для производных от полных эллиптических интегралов можно найти, что $kF = (1-k^2)F' - E'$, $kE = (1-k^2)(F' - E')$. Интегрируя почленно по k от 0 до k первое из этих соотношений методом интегрирования по частям, получаем формулу а).Произведя аналогичные выкладки во втором соотношении и воспользовавшись формулой а), получаем формулу б).

Задача 1.18. Доказать формулу

$$\int\limits_0^x tI_0(t)dt = xI_1(x),$$

где $I_0(x)$ и $I_1(x)$—функции Бесселя индексов 0 и 1.

Решение:

Положим в уравнении Бесселя $n = 0$. Получим

$$(xI_0')' + xI_0 = 0 \qquad (*)$$

Из соотношения $\int\limits_0^\pi \cos(x\sin\varphi)\cos\varphi d\varphi = 0$, вытекает

$$I_0'(x) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \sin(x\sin\varphi)\sin\varphi d\varphi = -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \cos(\varphi - x\sin\varphi)d\varphi = -I_1(x).$$

Подставляя $I_0'(x)$ в (*) и интегрируя обе части соотношения (*) по $t \in [0, x]$, находим:

$$tI_1(t)|_0^x = \int\limits_0^x tI_0(t)dt.$$

Поскольку $I_1(0) = 0$, то отсюда и следует нужная формула.

2 Несобственные интегралы, зависящие от параметров. Равномерная сходимость интегралов.

Определение 2.1. Пусть несобственный интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)dy, \tag{2.1}$$

где функция $f(x,y)$ определена в области $R[x_1 < x < x_2, a \le y < +\infty]$, сходится на интервале $x_1 < x < x_2$. Говорят, что интеграл (2.1) равномерно сходится на интервале $x_1 < x < x_2$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists B(\varepsilon)$ такое, что $\forall b \ge B$ выполняется неравенство

$$\left| \int_b^{+\infty} f(x,y)dy \right| < \varepsilon \qquad \forall x \in (x_1, x_2) \quad \text{сразу}$$

Теорема 2.1 (Критерий Коши)**.** Для того чтобы несобственный интеграл (2.1) сходился равномерно на интервале (x_1, x_2) необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0\ \exists A(\varepsilon)$ такое, чтобы сразу для всех $x \in (x_1, x_2)$ выполнялось неравенство

$$\left| \int_\alpha^{\beta} f(x,y)dy \right| < \varepsilon \quad \text{как только} \quad \beta > \alpha > A(\varepsilon).$$

Теорема 2.2 (Признак Вейерштрасса)**.** Несобственный интеграл (2.1) сходится абсолютно и равномерно на интервале (x_1, x_2), если существует функция $F(y)$ такая, что $|f(x,y)| \le F(y)$ при $a \le y < +\infty$ и несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} F(y)dy$ сходится. Функция $F(y)$ называется мажорирующей для функции $f(x,y)$.

Теорема 2.3 (Предельный переход под знаком интеграла)**.** Если

1. функция $f(x,y)$, определенная в области R, непрерывна по y и при

   $x \to x_0 \in (x_1, x_2)$ равномерно относительно y стремится к предельной функции $g(y)$ в каждом конечном промежутке $[a, A]$;

2. интеграл (2.1) сходится равномерно на интервале (x_1, x_2), то

$$\lim_{x\to x_0}\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dy = \int\limits_a^{+\infty}\lim_{x\to x_0} f(x,y)dy = \int\limits_a^{+\infty} g(y)dy$$

Если функция $f(x,y)$ непрерывна при $a \le y < +\infty$, $x_1 \le x \le x_2$ и интеграл (2.1) сходится равномерно при $x \in [x_1, x_2]$, то

$$\lim_{x\to x_0\in[x_1,x_2]}\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dy = \int\limits_a^{+\infty} f(x_0,y)dy.$$

Теорема 2.4 (Непрерывность несобственного интеграла)**.** Если функция $f(x,y)$ непрерывна в области $a \le y < +\infty$, $x_1 \le x \le x_2$ и интеграл (2.1) сходится равномерно на отрезке $[x_1, x_2]$, то он представляет собой равномерно непрерывную функцию на этом отрезке. Если

1. функция $f(x,y)$ непрерывна и ограничена в указанной области;
2. функция $\varphi(y)$ интегрируема на каждом конечном промежутке $a \le y \le A$;
3. интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |\varphi(y)|dy$ сходится,

то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\varphi(y)dy$ сходится равномерно и является равномерно непрерывной функцией параметра x на отрезке $[x_1, x_2]$.

Теорема 2.5 (Дифференцирование по параметру)**.** Пусть

1. $f'_x(x,y)$ непрерывна в области $a \le y < +\infty$, $x_1 \le x \le x_2$;
2. интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dy$ сходится;
3. интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f'_x(x,y)dy$ сходится равномерно на отрезке $[x_1, x_2]$.

Тогда

$$\frac{d}{dx}\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dy = \int\limits_a^{+\infty} f'_x(x,y)dy$$

на отрезке $[x_1, x_2]$.

Если функции $f(x,y)$ и $f'_x(x,y)$ непрерывны и ограничены в указанной области, а интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |\varphi(y)| d\varphi$ сходится , то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\varphi(y)dy$ представляет собой дифференцируемую функцию на отрезке $[x_1, x_2]$ и

$$\frac{d}{dx}\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\varphi(y)dy = \int\limits_a^{+\infty} f'_x(x,y)\varphi(y)dy.$$

Теорема 2.6 (Интегрирование по параметру)**.** Если функция $f(x,y)$ непрерывна при $y \geq a$ и $x \in [x_1, x_2]$, а интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dy$ равномерно сходится при $x \in [x_1, x_2]$, то справедлива формула

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} dx \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dy = \int\limits_a^{+\infty} dy \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x,y)dx.$$

Замечание:

1. Эта формула справедлива и в том случае, когда $x_1 = -\infty$, $x_2 = +\infty$, если $f(x,y) \geq 0$, интегралы $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$ и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$ непрерывны и один из повторных интегралов

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy \quad \text{или} \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$

сходится.

2. Если функция $f(x,y)$ непрерывна при $a \leq y < +\infty$, $c \leq x < +\infty$, а интегралы $\int\limits_c^{+\infty} f(x,y)dx$, $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dy$ сходятся равномерно : первый на каждом отрезке $[a, A]$, второй—на $[c, C]$ и если хотя бы один из повторных интегралов

$$\int\limits_a^{+\infty} dy \int\limits_c^{+\infty} |f(x,y)|dx, \qquad \int\limits_c^{+\infty} dx \int\limits_a^{+\infty} |f(x,y)|dy.$$

сходится, то сходятся и равны между собой повторные интегралы

$$\int\limits_a^{+\infty} dy \int\limits_c^{+\infty} f(x,y)dx \quad \text{и} \quad \int\limits_c^{+\infty} dx \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dy.$$

3. Если $f(x,y)$ непрерывна и ограничена при $a \le y < +\infty$, $x \in [x_1, x_2]$, а интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |\varphi(y)|dy$ сходится, то

$$\int\limits_c^{d} dx \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\varphi(y)dy = \int\limits_a^{+\infty} \varphi(y)dy \int\limits_c^{d} f(x,y)dx.$$

4. Интегралы Эйлера

   (a) Гамма-функция.

   Интеграл вида

$$\Gamma(p) = \int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx,$$

   сходящийся при $0 < p < +\infty$, называется гамма-функцией от p. Он имеет непрерывные производные любого порядка при $p > 0$, и для них справедлива формула

$$\Gamma^{(k)}(p) = \int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}(\ln x)^k e^{-x}dx \qquad (k = 1, 2, \dots)$$

   Основные формулы.

   Если $p > 0$, то $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ (формула понижения). Если n— натуральное, то $\Gamma(n) = (n-1)!$, а также $\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$. Если $0 < p < 1$, то $\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin \pi p}$ (формула дополнения)

   (b) Бета-функция. Так называется интеграл

$$B(p,q) = \int\limits_0^{1} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx,$$

   сходящийся при $p > 0$ и $q > 0$ или интеграл

$$B(p,q) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{z^{p-1}}{(1+z)^{p+q}}dz$$

сходящийся при тех же условиях. Бета-функция непрерывна в указанной области и обладает непрерывными производными всех порядков, которые можно найти путем дифференцирования по переменным p и q под знаком интеграла. Связь между B и Γ—функциями дается формулой

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Решим наиболее типичные задачи.

Определить области сходимости следующих интегралов:

Задача 2.1.

$$\int\limits_0^2 \frac{dx}{|\ln x|^p}$$

Решение:

Обозначим $x = e^{-t}$. Получим

$$\int\limits_0^2 \frac{dx}{|\ln x|^p} = \int\limits_{-\ln 2}^{+\infty} \frac{e^{-t}dt}{|t|^p} = \int\limits_{-\ln 2}^{0} \frac{e^{-t}dt}{|t|^p} + \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-t}dt}{t^p}.$$

Поскольку при $t \to 0$

$$\frac{e^{-t}}{|t|^p} = \underline{O}\left(\frac{1}{|t|^p}\right),$$

то первое слагаемое в силу признака сравнения, сходится только для $p < 1$. Второй интеграл сходится для любого p, поскольку $e^t > t^{2-p}$ при больших t. Чтобы доказать последнее неравенство вычислим предел

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{t^{2-p}}{e^t} = 0.$$

Окончательно получаем, что интеграл сходится при $p < 1$.

Задача 2.2.

$$\int\limits_0^1 \frac{\cos\frac{1}{1-x}}{\sqrt[n]{1-x^2}}dx.$$

Решение:

Обозначим $t = \frac{1}{1-x}$ при $x \neq 1$. Тогда получим:

$$\int\limits_0^1 \frac{\cos\frac{1}{1-x}}{\sqrt[n]{1-x^2}}dx = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos t dt}{t^{2-\frac{1}{n}}(2-\frac{1}{t})^{\frac{1}{n}}}.$$

Функция $f(t) = \frac{1}{(2-\frac{1}{t})^{\frac{1}{n}}}$ для $t > 1$ монотонна и ограничена, а интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos t dt}{t^{2-\frac{1}{n}}}$ сходится по признаку Дирихле при $n < 0$ или $n > \frac{1}{2}$, то рассматриваемый интеграл сходится по признаку Абеля при тех же условиях. Можно доказать, что это условие будет и необходимым.

Задача 2.3.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p + \sin x}dx \qquad (p > 0).$$

Решение:

Представим исходный интеграл как сумму двух слагаемых:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p + \sin x}dx = \int\limits_0^{1} \frac{\sin x}{x^p + \sin x}dx + \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p + \sin x}dx.$$

Так как при $x \to +0$ функция $f(x) = \frac{\sin x}{x^p + \sin x}$ эквивалентна $f_1(x) = \frac{1}{x^{p-1}+1}$, то первое слагаемое сходится при любом p (точка $x = 0$ является точкой устранимого разрыва $f(x)$). При $x \to +\infty$

$$\frac{\sin x}{x^p + \sin x} = \frac{\frac{\sin x}{x^p}}{1-(-\frac{\sin x}{x^p})} = \frac{\sin x}{x^p} - \frac{\sin^2 x}{x^{2p}} + \bar{o}\left(\frac{1}{x^{2p}}\right) = \frac{\sin x}{x^p} - \frac{1}{2x^{2p}} + \frac{\cos 2x}{2x^{2p}} + \bar{o}\left(\frac{1}{x^{2p}}\right),$$

интегралы

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}dx, \qquad \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^{2p}}$$

сходятся для $p > 0$ по признаку Дирихле, а интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{2p}}$ сходится лишь при $p > \frac{1}{2}$, то и весь интеграл сходится только при $p > \frac{1}{2}$. Следовательно и исходный интеграл сходится при $p > \frac{1}{2}$.

Исследовать на равномерную сходимость в указанных промежутках следующие интегралы:

Задача 2.4.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx \qquad (-\infty < \alpha < +\infty)$$

Решение:

Поскольку $\frac{|\cos \alpha x|}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}$ при $\alpha \in (-\infty, \infty)$ и интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ сходится, то по признаку Вейерштрасса, данный интеграл сходится равномерно.

Задача 2.5.

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(x-\alpha)^2+1}, \qquad (0 \leq \alpha < +\infty).$$

Решение:

Рассмотрим интеграл

$$I(B, \alpha) = \int\limits_{B}^{+\infty} \frac{dx}{(x-\alpha)^2+1}$$

Проведем в нем замену $t = x - \alpha$. Тогда

$$I(B, \alpha) = \int\limits_{B-\alpha}^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1}$$

Если положить $\alpha = B > 0$, то при любом B справедлива оценка $I(B, \alpha) > \varepsilon$, где $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$. Это означает, что рассматриваемый интеграл сходится неравномерно, хотя при фиксированном $0 \leq \alpha < +\infty$ сходимость рассматриваемого интеграла вытекает из признака сравнения.

Задача 2.6.

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{e}^{-\alpha x} dx, \qquad (0 \leqslant \alpha < +\infty).$$

Решение:

Обозначим $f(x, \alpha) = \frac{\sin x}{x}$, $\varphi(x, \alpha) = \mathrm{e}^{-\alpha x}$. Интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ сходится по признаку Дирихле, а функция $\varphi(x, \alpha)$ монотонна по x, поскольку $(\mathrm{e}^{-\alpha x})' = -\alpha \mathrm{e}^{-\alpha x} \leqslant 0$ и меньше единицы. Теперь применим теорему: если

1) интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} f(x, y) dy$ сходится равномерно в (x_1, x_2);

2)функция $\varphi(x, y)$ ограниченна и монотонна по y, то интеграл

$$\int\limits_{0}^{+\infty} f(x, y) \varphi(x, y) dy$$

сходится равномерно в (x_1, x_2), в силу которой рассматриваемый интеграл сходится равномерно.

Задача 2.7.

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x} \frac{\cos x}{x^p} dx, \text{ где } (0 \leqslant \alpha < +\infty), p > 0\text{—фиксировано.}$$

Решение:

При $p > 0$ интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx$ сходится по признаку Дирихле, а функция $\mathrm{e}^{-\alpha x}$ монотонна по x и ограничена единицей, то по теореме из задачи (2.6) рассматриваемый интеграл сходится равномерно.

Задача 2.8.

$$\int\limits_0^{+\infty} \sqrt{\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha x^2} dx, \qquad (0 \leqslant \alpha < +\infty).$$

Решение:

Обозначим $\sqrt{\alpha x} = t$ и сделаем в интеграле замену переменных

$$\int\limits_B^{+\infty} \sqrt{\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha x^2} dx = \int\limits_{B\sqrt{\alpha}}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} dt$$

. Если возьмем $\alpha = \frac{1}{B^2} \quad (B > 0)$, то получим неравенство $\int\limits_B^{+\infty} \sqrt{\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha x^2} dx > \varepsilon$, поскольку $0 < \varepsilon < \int\limits_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} dt$, справедливое при любом B. Следовательно, интеграл сходится неравномерно.

Задача 2.9. Законен ли переход к пределу под знаком интеграла в выражении $\lim\limits_{\alpha \to +0} \int\limits_0^{+\infty} \alpha \mathrm{e}^{-\alpha x} dx$?

Решение:

Не законен, поскольку дает в результате нуль, в действительности же этот предел равен единице. Этот факт объясняется неравномерной сходимостью интеграла при $\alpha = 0$.

Задача 2.10. Функция $f(x)$ интегрируема в промежутке $(0, +\infty)$. Доказать формулу

$$\lim_{\alpha \to +0} \int\limits_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x} f(x) dx = \int\limits_0^{+\infty} f(x) dx$$

.

Решение:

Оценим разность

$$\int\limits_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x} f(x) dx - \int\limits_0^{+\infty} f(x) dx = \int\limits_0^{+\infty} (\mathrm{e}^{-\alpha x} - 1) f(x) dx =$$

$$= \int\limits_0^B (\mathrm{e}^{-\alpha x} - 1) f(x) dx + \int\limits_B^{+\infty} (\mathrm{e}^{-\alpha x} - 1) f(x) dx.$$

Положим $\varepsilon > 0$—задано. Воспользовавшись теоремой из задачи (2.6), можем утверждать, что $\int\limits_0^{+\infty} (\mathrm{e}^{-\alpha x} - 1) f(x) dx$ при $\alpha \geqslant 0$ сходится равномерно. При достаточно большом фиксированном $B(\varepsilon)$ получаем:

$$\left| \int\limits_{B(\varepsilon)}^{+\infty} (\mathrm{e}^{-\alpha x} - 1) f(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

независимо от α. По данным ε и $B(\varepsilon)$ найдем α такое, чтобы выполнялось неравенство

$$\left| \int\limits_0^B (\mathrm{e}^{-\alpha x} - 1) f(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Имеем $\left| \int\limits_0^B (\mathrm{e}^{-\alpha x} - 1) f(x) dx \right| \leqslant (1 - \mathrm{e}^{-\alpha b}) MB < \frac{\varepsilon}{2}$, где $M = \sup\limits_{0 \leqslant x \leqslant B} |f(x)| \neq 0$ (при $M = 0$ теорема тривиальна).

Отсюда $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{B} \ln \frac{2MB}{2MB - \varepsilon} \quad (0 < \varepsilon < 2MB)$. Тогда

$$\left| \int\limits_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x} f(x) dx - \int\limits_0^{+\infty} f(x) dx \right| < \varepsilon$$

при достаточно большом B, а число α удовлетворяет полученной оценке.

Задача 2.11. Доказать, что $\lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_0^{+\infty} f(x) \sin nx dx = 0$, если $f(x)$ абсолютно интегрируема в промежутке $(0, +\infty)$.

Решение:

Данный интеграл сходится равномерно по n по признаку Вейерштрасса. Отсюда для заданного $\varepsilon > 0 \quad \exists A_0(\varepsilon) > 0 : \forall A > A_0(\varepsilon)$

$$\left| \int\limits_A^{+\infty} f(x) \sin nx dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Разобьем промежуток $[0, A]$ на $k+1$ частей точками $0 = x_0 < x_1 < ...$
$... < x_{k+1} = A$ и представим интеграл

$$\int\limits_0^A f(x)\sin nx dx = \sum_{i=0}^{k} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} (f(x) - m_i)\sin nx dx + \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{k} m_i \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \sin nx dx,$$

где $m_i = \inf\limits_{x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}} f(x)$.

Поскольку $f(x) - m_i \leqslant \omega_i$, где ω_i—колебание функции $f(x)$ на $[x_i, x_{i+1}]$, тогда

$$\left|\sum_{i=0}^{k} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\sin nx dx\right| \leqslant \sum_{i=0}^{k} \omega_i \Delta x_i + \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{k} |m_i|$$

В силу интегрируемости $f(x)$ для ранее заданного $\varepsilon > 0$ существует такое разбиение отрезка $[0, A]$, для которого

$$\sum_{i=0}^{k} \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{3}$$

При выбранном разбиении числа m_i—фиксированы, поэтому, если возьмем $n > \frac{6}{\varepsilon}\sum\limits_{i=0}^{k} |m_i|$, получим

$$\left|\int\limits_0^{+\infty} f(x)\sin nx dx\right| < \varepsilon.$$

Задача 2.12. Доказать, что если

1) $f(x, y) \rightrightarrows f(x_0, y)$ в каждом интервале (a, b);

2) $|f(x, y)| \leqslant F(y)$, где $\int\limits_a^{+\infty} F(y)dy < +\infty$, то

$$\lim_{x\to x_0} \int\limits_a^{+\infty} f(x, y)dy = \int\limits_a^{+\infty} \lim_{x\to x_0} f(x, y)dy.$$

Решение:

Оценим разность

$$\int\limits_0^{+\infty} f(x, y)dy - \int\limits_a^{+\infty} f(x_0, y)dy = \int\limits_a^{b} (f(x, y) - f(x_0, y))\, dy +$$

$$+\int\limits_b^{+\infty} f(x,y)dy - \int\limits_b^{+\infty} f(x_0,y)dy. \quad (b>a)$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$. В силу 2) условия при достаточно большом b справедлива оценка

$$\left|\int\limits_b^{+\infty} f(x,y)dy\right| \leqslant \int\limits_b^{+\infty} F(y)dy < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \left|\int\limits_b^{+\infty} f(x_0,y)dy\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Из 1) условия вытекает, что

$$|f(x,y) - f(x_0,y)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

для всех $y \in (a,b)$ одновременно, как только разность $|x - x_0|$ достаточно мала.

Таким образом получаем

$$\left|\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dy - \int\limits_a^{+\infty} f(x_0,y)dy\right| < \varepsilon$$

при достаточной близости x к x_0.

Задача 2.13. Доказать, что интеграл

$$F(a) = \int\limits_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x-a)^2} dx$$

является непрерывной функцией параметра a.

Решение:

Обозначим $t = x - a$. Тогда

$$F(a) = \int\limits_{-a}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} dt = \int\limits_0^a \mathrm{e}^{-t^2} dt + \int\limits_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} dt.$$

Так как функция e^{-t^2} непрерывна, то функция $\int\limits_0^a \mathrm{e}^{-t^2} dt$ также непрерывна. Тогда функция $F(a)$ непрерывна.

Задача 2.14. Показать, что

$$F(\alpha) = \int\limits_0^1 \frac{\sin\frac{\alpha}{x}}{x^\alpha} dx$$

есть непрерывная функция в интервале $-\infty < \alpha < 2$.

Решение:

Введем замену $x = \frac{1}{t} \quad (t > 0)$, получаем:

$$F(\alpha) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin\alpha t}{t^{2-\alpha}} dt.$$

Пусть $-\infty < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$. Тогда в силу оценки $\frac{|\sin\alpha t|}{t^{2-\alpha}} \leqslant \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$ и признака Вейерштрасса, рассматриваемый интеграл сходится равномерно. Если учесть, что $\frac{\sin\alpha t}{t^{2-\alpha}}$ при $-\infty < \alpha \leqslant \frac{1}{2}, \quad t \geqslant 1$ непрерывна, то можно утверждать, что $F(\alpha)$ непрерывна в указанном промежутке. Пусть $\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 2-\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. Тогда $\left|\int\limits_1^x \sin\alpha t dt\right| < \frac{2}{\alpha} \leqslant 4$; функция $\frac{1}{t^{2-\alpha}}$ при фиксированном α монотонно стремится к нулю при $t \to +\infty$. Из оценки $\frac{1}{t^{2-\alpha}} \leqslant \frac{1}{t}\varepsilon$ следует, что стремление равномерно по α. Поэтому интеграл сходится равномерно. Принимая во внимание непрерывность подынтегральной функции при $\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 2-\varepsilon$ получаем, что $F(\alpha)$ непрерывна на рассматриваемом сегменте.

Таким образом $F(\alpha)$ непрерывна при $-\infty < \alpha \leqslant 2-\varepsilon$. Поскольку число $\varepsilon > 0$ произвольно, то утверждение доказано.

Задача 2.15.

$$F(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{2+x^\alpha}$$

при $\alpha > 2$. Исследовать на непрерывность в указанном промежутке.

Решение:

Из признака сравнения можно доказать, что в указанном промежутке интеграл сходится неравномерно. Поэтому сразу сказать о непрерывности функции $F(\alpha)$ невозможно.

Рассмотрим $\alpha \geqslant 2+\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. Тогда при $x \geqslant 1$ справедлива оценка

$$\frac{x}{2+x^\alpha} \leqslant \frac{x}{2+x^{2+\varepsilon}} = \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}}\right)$$

при $x \to +\infty$.

На основании признака Вейерштрасса интеграл

$$\Phi(\alpha) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{x\,dx}{2+x^\alpha}$$

сходится равномерно. Учитывая непрерывность подынтегральной функции, утверждаем непрерывность функции $\Phi(\alpha)$ при $\alpha \geqslant 2+\varepsilon$ т.е. при $\alpha > 2$.

Рассмотрим интеграл

$$\Psi(\alpha) = \int\limits_0^{1} \frac{x\,dx}{2+x^\alpha}.$$

При $\alpha > 2$ он непрерывен, в силу чего функция $F(\alpha) = \Phi(\alpha) + \Psi(\alpha)$ также непрерывна при $\alpha > 2$.

Задача 2.16. Исследовать на непрерывность в указанном промежутке функцию

$$F(\alpha) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx$$

при $\alpha > 0$.

Решение:

При $\alpha \geqslant \varepsilon > 0$ данный интеграл сходится равномерно по следующей теореме:

1)функция $\varphi(\alpha, x) \rightrightarrows 0$ при $x \to +\infty$ и $\alpha \in (0, +\infty)$ и монотонна по $x \quad (1 < x < +\infty)$

2)первообразная $\int\limits_1^x f(t,\alpha)dt \quad (1 < \alpha < +\infty)$ ограничена абсолютной постоянной M, тогда интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \varphi(\alpha, x) f(\alpha, x) dx$$

равномерно сходится в области $\alpha > 0$.

Отсюда следует, что функция $F(\alpha)$ непрерывна при $\alpha \geqslant \varepsilon > 0$, т.е. при $\alpha > 0$.

Задача 2.17. Исследовать на непрерывность при $\alpha \in (0,2)$ функцию

$$F(\alpha) = \int\limits_0^\pi \frac{\sin x}{x^\alpha(\pi - x)^\alpha} dx$$

Решение:

Пусть $0 < \varepsilon \leqslant \alpha \leqslant 2 - \varepsilon < 2$. Тогда, разбивая интеграл на три интеграла и оценивая подынтегральную функцию, получим:

$$\int\limits_0^\pi \frac{\sin x}{x^\alpha(\pi - x)^\alpha} dx < \int\limits_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha-1}(\pi - x)^\alpha} + \int\limits_1^{\pi-1} \frac{dx}{x^\alpha(\pi - x)^\alpha} + \int\limits_{\pi-1}^{\pi} \frac{dx}{x^\alpha(\pi - x)^{\alpha-1}} \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^1 \frac{dx}{x^{1-\varepsilon}} + \pi - 2 + \int\limits_{\pi-1}^{\pi} \frac{dx}{(\pi - x)^{1-\varepsilon}}.$$

Поскольку подынтегральная функция в $F(\alpha)$ непрерывна при $0 < x < \pi, \quad \varepsilon \leqslant \alpha \leqslant 2 - \varepsilon$, а по признаку сравнения последние интегралы являются сходящимися при $\varepsilon \leqslant \alpha \leqslant 2 - \varepsilon$, то интеграл $F(\alpha)$ по признаку Вейерштрасса сходится в указанном промежутке равномерно.

Отсюда вытекает, что функция $F(\alpha)$ непрерывна на каждом отрезке $\varepsilon \leqslant \alpha \leqslant 2 - \varepsilon$, поэтому она непрерывна в интервале $\alpha \in (0,2)$.

Задача 2.18. Пользуясь формулой

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + a} = \frac{\pi}{2\sqrt{a}} \qquad (a > 0),$$

вычислить интеграл

$$I_{n+1} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a)^{n+1}}, \qquad \text{где } n \in N$$

Решение:

Дифференцируя n раз по a левую и правую части исходной формулы, имеем:

$$(-1)^n n! \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a)^{n+1}} = \frac{\pi}{2}(a^{-\frac{1}{2}})^{(n)} = \frac{(-1)^n n!(2n-1)!!}{(2n)!! a^n 2\sqrt{a}} \pi,$$

откуда получаем нужное значение.

Законность n—кратного дифференцирования: Функции $\frac{1}{x^2+a}$ и $\frac{1}{(x^2+a)^{n+1}}$ непрерывные в области $0 < \varepsilon \leqslant a < +\infty, \quad 0 \leqslant x < +\infty$. Интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+a}$ сходится при $a > 0$. Интеграл I_{n+1} сходится равномерно по признаку Вейерштрасса $\left(\frac{1}{(x^2+a)^{n+1}} \leqslant \frac{1}{(x^2+\varepsilon)^{n+1}} \quad \text{при } x \geqslant 0 \right)$ на полуинтервале $\varepsilon \leqslant a < +\infty$. Поэтому на этом полуинтервале, а значит и на $0 < a < +\infty$ дифференцирование законно.

Задача 2.19. Доказать, что интеграл Дирихле

$$I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$$

имеет при $\alpha \neq 0$ производную, которую нельзя найти по правилу Лейбница.

Решение:

Обозначим $\alpha x = t$. Тогда $I(\alpha) = \text{const}$. Следовательно, при $\alpha \neq 0$ имеем $I'(\alpha) = 0$. Если же формально продифференцировать под знаком дифференциала по α, то получим расходящийся интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \cos \alpha x dx$$

Задача 2.20. Пусть $f(x)$—непрерывная функция, а интеграл

$$\int\limits_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$$

имеет смысл для любого $A > 0$. Тогда справедлива формула Фруллани:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \ln \frac{b}{a} \qquad (a > 0, b > 0)$$

Решение:

Обозначим через $F(x) = \int \frac{f(x)}{x}dx$. тогда обозначив $ax = t$, получим:

$$\int\limits_A^{+\infty} \frac{f(ax)}{x}dx = \int\limits_{Aa}^{+\infty} \frac{f(t)}{t}dt = F(+\infty) - F(Aa)$$

Аналогично,

$$\int\limits_A^{+\infty} \frac{f(bx)}{x}dx = F(+\infty) - F(Ab)$$

Отсюда имеем:

$$\int\limits_A^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}dx = F(Ab) - F(Aa) = \int\limits_{aA}^{bA} \frac{f(x)}{x}dx$$

По теореме о среднем, примененной к правой части выражения, с учетом непрерывности $f(x)$ и устремляя A к нулю, получаем:

$$\lim_{A\to+0} \int\limits_A^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}dx = \lim_{A\to+0}(f(\xi)\ln\frac{b}{a}) = f(0)\ln\frac{b}{a},$$

где $aA \leqslant \xi \leqslant bA \quad (a < b)$.

Задача 2.21. Вычислить интеграл

$$I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\alpha x^2} - \mathrm{e}^{-\beta x^2}}{x}dx \qquad (\alpha > 0, \beta > 0)$$

Решение:

Пусть $0 < \varepsilon \leqslant \alpha,\ \ 0 < \varepsilon \leqslant \beta$. Тогда

$$f(x,\alpha) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{-\alpha x^2} - \mathrm{e}^{-\beta x^2}}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases};$$

$$f'_\alpha(x,\alpha) = -x\mathrm{e}^{-\alpha x^2}.$$

Эти функции непрерывны в области $0 < \varepsilon \leqslant \alpha,\ \ x \geqslant 0$; интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\alpha x^2} - \mathrm{e}^{-\beta x^2}}{x} dx$$

в силу признака сравнения сходится, а интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\alpha x^2} dx$$

сходится при $\alpha \geqslant \varepsilon$ равномерно по признаку Вейерштрасса.

Это означает законность дифференцирования по α под знаком интеграла:

$$I'(\alpha) = -\int\limits_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\alpha x^2} dx = -\frac{1}{2\alpha} \qquad (\alpha \geqslant \varepsilon > 0)$$

Интегрируя по α, находим:

$$I(\alpha) = -\frac{1}{2}\ln\alpha + \varphi$$

Очевидно, что $I(\beta) = 0$. Тогда

$$\varphi = \frac{1}{2}\ln\beta \qquad (0 < \varepsilon \leqslant \beta)$$

Окончательно

$$I = \frac{1}{2}\ln\frac{\beta}{\alpha} \qquad (\alpha \geqslant \varepsilon > 0,\ \beta \geqslant \varepsilon > 0).$$

Устремляя $\varepsilon \to 0$ получаем справедливость результата при $\alpha > 0,\ \beta > 0$.

Задача 2.22. Вычислить интеграл

$$I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{\mathrm{e}^{-\alpha x} - \mathrm{e}^{-\beta x}}{x}\right)^2 dx \qquad (\alpha > 0, \beta > 0)$$

Решение:

Дифференцируемость интеграла проверяется как и в предыдущем примере, поэтому:

$$I'(\alpha) = 2\int\limits_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)x} - \mathrm{e}^{-2\alpha x}}{x} dx.$$

В силу задачи (2.20): $I'(\alpha) = 2\ln\frac{2\alpha}{\alpha+\beta}$. Интегрируя по частям по α, имеем:

$$I(\alpha) = -2(\alpha+\beta)(\ln(\alpha+\beta)-1) + 2\alpha(\ln 2\alpha - 1) + \varphi.$$

Поскольку $I(\beta) = 0$, то $\varphi = 2\beta(\ln 2\beta - 1)$.

Окончательно

$$I = \ln\frac{(2\alpha)^{2\alpha}(2\beta)^{2\beta}}{(\alpha+\beta)^{2\alpha+2\beta}} \qquad (\alpha \geqslant \varepsilon > 0,\ \beta \geqslant \varepsilon > 0)$$

Устремляя $\varepsilon \to 0$, получаем, что результат справедлив и для $\alpha > 0,\ \beta > 0$.

Задача 2.23. Вычислить интеграл

$$I(\alpha) = \int\limits_0^1 \frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}dx \qquad (|\alpha| \leqslant 1)$$

Решение:

Проверив справедливость дифференцирования по α под знаком интеграла, находим

$$I'(\alpha) = -2\alpha\int\limits_0^1 \frac{x^2dx}{(1-\alpha^2x^2)\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{\alpha}\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right) & ,0 < |\alpha| < 1; \\ 0 & ,\alpha = 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $I(\alpha) = -\pi\ln(1+\sqrt{1-\alpha^2}) + C, \quad (|\alpha| < 1)$.

Поскольку $I(0) = 0$, то $C = \pi\ln 2$.

Следовательно $I(\alpha) = -\pi\ln(\frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{2})$.

Исходный интеграл был непрерывной функцией при $|\alpha| \leqslant 1$. Тогда полученное выражение справедливо при $|\alpha| \leqslant 1$.

Задача 2.24. Вычислить интеграл

$$I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(\alpha^2+x^2)}{\beta^2+x^2}dx$$

Решение:

Если $\beta = 0$, то наш интеграл сходится лишь при $|\alpha| = 1$ и, интегрируя по частям получаем

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}dx = \pi;$$

Поэтому в дальнейшем $\beta \neq 0$. Функции

$$f(x, \alpha) = \frac{\ln(\alpha^2 + x^2)}{\beta^2 + x^2},$$

$$f'_\alpha(x, \alpha) = \frac{2\alpha}{(\alpha^2 + x^2)(\beta^2 + x^2)}$$

непрерывны при $0 < x < +\infty$, $-\infty < \alpha < +\infty$; Интеграл $I(\alpha)$ в силу признака Вейерштрасса сходится равномерно на любом сегменте $|\alpha| \leqslant A$.

Интеграл

$$I'(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{2\alpha dx}{(\alpha^2 + x^2)(\beta^2 + x^2)}$$

также сходится равномерно на сегменте $0 < \varepsilon \leqslant |\alpha| \leqslant A$.

Таким образом, $I(\alpha)$ непрерывна при любом $\alpha \in (-\infty, +\infty)$, а $I'(\alpha)$ непрерывна при $|\alpha| > 0$. Выполняя почленное интегрирование выражения для $I'(\alpha)$, получим:

$$I(\alpha) = \frac{\pi}{|\beta|} \ln(|\alpha| + |\beta|) + C, \qquad \alpha \neq 0, \quad \beta \neq 0.$$

Поскольку

$$I(0) = 2\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln x}{\beta^2 + x^2} dx = \frac{2}{|\beta|}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln|\beta|}{1 + t^2} dt + \frac{2}{|\beta|}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1 + t^2} dt =$$

$$= \frac{2\ln|\beta|}{|\beta|}\int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^2} = \pi\frac{\ln|\beta|}{|\beta|},$$

то $C = 0$. Таким образом,

$$I(\alpha) = \frac{\pi}{|\beta|} \ln(|\alpha| + |\beta|), \qquad (\beta \neq 0).$$

Задача 2.25. Вычислить интеграл

$$I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (a_1 x^2 + 2b_1 x + c_1) \mathrm{e}^{-(ax^2 + 2bx + c)} dx, \qquad (a > 0)$$

Решение:

Приведем трёхчлен $ax^2+2bx+c$ к каноническому виду $\left(\sqrt{a}x+\frac{b}{\sqrt{a}}\right)^2+c-\frac{b^2}{a}$ и обозначая $\sqrt{a}x+\frac{b}{\sqrt{a}}=t$, получаем:

$$I=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(At^2+2Bt+C)\mathrm{e}^{-t^2}dt \text{ ,где}$$

$$A=\frac{a_1}{a\sqrt{a}}\mathrm{e}^{\frac{b^2-ac}{a}},\quad B=\frac{b_1a-a_1b}{a^2}\mathrm{e}^{\frac{b^2-ac}{a}},\quad C=\frac{a^2c_1-2abb_1+a_1b^2}{a^2\sqrt{a}}\mathrm{e}^{\frac{b^2-ac}{a}}$$

Поскольку

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}dt=\sqrt{\pi},\qquad 2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}t\mathrm{e}^{-t^2}dt=0$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}t^2\mathrm{e}^{-t^2}dt=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}t\mathrm{e}^{-t^2}d(t^2)=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

В итоге

$$I=\sqrt{\pi}\left(\frac{A}{2}+c\right)=\frac{1}{2a^2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\left((a+2b^2)a_1-4abb_1+2a^2c_1\right)\mathrm{e}^{\frac{b^2-ac}{a}}.$$

Задача 2.26. Вычислить интеграл

$$I(b)=\int\limits_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax^2}\cos bxdx,\qquad (a>0)$$

Решение:

Функции $f(b,x)=\mathrm{e}^{-ax^2}\cos bx$ и $f_b'(b,x)$ непрерывны в области $x\in[0,+\infty)$ и $b\in(-\infty,+\infty)$;

Интегралы

$$\int\limits_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax^2}\cos bxdx \text{ и } \int\limits_{0}^{+\infty}x\mathrm{e}^{-ax^2}\sin bxdx$$

равномерно по b сходятся в силу признака Вейерштрасса.

Это значит, что функции $I(b)$ и $I'(b)$ непрерывны при всех b.

$$I'(b)=-\frac{b}{2a}I(b)$$

Отсюда $I'(b) + \frac{b}{2a}I(b) = 0$. Решая это уравнение получаем, что его решением будет

$$I(b) = C\mathrm{e}^{-\frac{b^2}{4a}}.$$

Поскольку

$$I(0) = \int\limits_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

то окончательно:

$$I(b) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\mathrm{e}^{-\frac{b^2}{4a}} \qquad (a > 0)$$

Задача 2.27. Вычислить интеграл

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x \sin\beta x}{x}dx$$

Решение:

Пользуясь формулой Фруллани, находим:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x \sin\beta x}{x}dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos|\alpha-\beta|x - \cos|\alpha+\beta|x}{x}dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right|,$$

если $\alpha \neq \pm\beta$.

Задача 2.28. Вычислить интеграл

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^3\alpha x}{x}dx$$

Решение:

Поскольку

$$\sin^3\alpha x = \frac{3}{4}\sin\alpha x - \frac{1}{4}\sin 3\alpha x,$$

используя интеграл Дирихле, находим:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^3\alpha x}{x}dx = \frac{3}{4}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{x}dx - \frac{1}{4}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin 3\alpha x}{x}dx = \frac{3\pi}{8}\mathrm{sign}\alpha - \frac{\pi}{8}\mathrm{sign}3\alpha = \frac{\pi}{4}\mathrm{sign}\alpha.$$

Задача 2.29. Пользуясь формулой

$$\frac{1}{1+x^2} = \int\limits_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-y(1+x^2)} dy,$$

вычислить интеграл Лапласа

$$L = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx$$

Решение:

Поскольку

$$L = \int\limits_0^{+\infty} dx \int\limits_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-y(1+x^2)} \cos \alpha x dy,$$

рассмотрим вспомогательный интеграл $(k > 0)$

$$L_1(k) = \int\limits_0^{+\infty} dx \int\limits_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-y-(k+y)x^2} \cos \alpha x dy.$$

Функция под знаком интеграла непрерывна в $0 \leqslant x < +\infty$, $0 \leqslant y < +\infty$, интегралы

$$\int\limits_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-y-(k+y)x^2} \cos \alpha x dy \text{ и } \int\limits_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-y-(k+y)x^2} \cos \alpha x dx$$

сходятся равномерно в силу признака мажорации ($|\mathrm{e}^{-y-(k+y)x^2} \cos \alpha x| \leqslant \mathrm{e}^{-y}$, $|\mathrm{e}^{-y-(k+y)x^2} \cos \alpha x| \leqslant \mathrm{e}^{-kx^2}$); интеграл $L_1(k)$ сходится следовательно, по теореме о замене порядка интегрирования в кратном интеграле, имеем

$$L_1(k) = \int\limits_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-y} dy \int\limits_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(k+y)x^2} \cos \alpha x dx.$$

Пользуясь результатами задачи 2.26, получаем:

$$L_1(k) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{y+k}} \mathrm{e}^{-\left(\frac{\alpha^2}{4(y+k)}+y\right)} dy = \mathrm{e}^k \sqrt{\pi} \int\limits_{\sqrt{k}}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\left(\frac{\alpha^2}{4t^2}+t^2\right)} dt.$$

При $(k \geqslant 0)$ интеграл

$$L_1(k) = \int\limits_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-kx^2} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx$$

равномерно сходится, а подынтегральная функция непрерывна, то $L_1(k)$ непрерывна при $(k \geqslant 0)$.

Поэтому

$$L = \lim_{k \to +0} L_1(k) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx = \sqrt{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\left(\frac{\alpha^2}{4t^2}+t^2\right)} dt.$$

Последний интеграл известен, поэтому окончательно получаем

$$L = \frac{\pi}{2} \mathrm{e}^{-|\alpha|}.$$

Задача 2.30. Доказать следующую формулу (интеграл Липшица)

$$\int\limits_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t} I_0(bt) dt = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad (a > 0)$$

где

$$I_0(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \cos(x \sin \varphi) d\varphi -$$

функция Бесселя 0—го индекса

Решение:

Функция $\cos(bt \sin \varphi)$ непрерывна и ограничена для $0 \leqslant t < +\infty$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$.

Интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t} dt$ сходится, поэтому справедливо равенство

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t} dt \int\limits_0^{\pi} \cos(bt \sin \varphi) d\varphi = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t} \cos(bt \sin \varphi) dt$$

откуда

$$\int\limits_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t} I_0(bt) dt = \frac{2a}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \frac{d\varphi}{a^2 + b^2 \sin^2 \varphi} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Эйлеровы интегралы

С помощью Эйлеровых интегралов вычислить следующие интегралы:

Задача 2.31.

$$\int\limits_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx, \qquad (a>0)$$

Решение:

Положим $x = a\sqrt{t}$ $(t>0)$, получим

$$\int\limits_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{a^4}{2}\int\limits_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}dt = \frac{a^4}{2}B\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right) = \frac{a^4\Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right)}{2\Gamma(3)} = \frac{\pi a^4}{16}.$$

Задача 2.32.

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}dx$$

Решение:

По формуле

$$B(p,q) = \int\limits_0^{+\infty}\frac{z^{p-1}}{(1+z)^{p+q}}dz$$

имеем:

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}dx = B\left(\frac{3}{4},\frac{5}{4}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}{\Gamma(2)}.$$

По формулам понижения и дополнения

$$\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}{\Gamma(2)} = \frac{\Gamma\left(1-\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{4}\right)}{1} = \Gamma\left(1-\frac{1}{4}\right)\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Задача 2.33.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$$

Решение:

Обозначим $x^3 = t$. Тогда

$$I = \frac{1}{3}\int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{-\frac{2}{3}}}{1+t}dt = \frac{1}{3}B\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\Gamma\left(1-\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Задача 2.34.

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}, \qquad (n>1)$$

Решение:

Введем замену $x = t^{\frac{1}{n}}$, где $t > 0$. По формуле дополнения получим:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}} = \frac{1}{n}\int\limits_0^1 t^{\frac{1}{n}-1}(1-t)^{-\frac{1}{n}}dt = \frac{1}{n}\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}}.$$

Задача 2.35.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n}dx, \qquad (n>0)$$

Решение:

Введем замену $x = t^{\frac{1}{n}}$, $t > 0$. Тогда имеем:

$$\frac{1}{n}\int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{m}{n}-1}}{1+t}dt = \frac{1}{n}B\left(\frac{m}{n}, 1-\frac{m}{n}\right) = \frac{1}{n}\Gamma\left(1-\frac{m}{n}\right)\Gamma\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{\pi}{n\sin\frac{\pi m}{n}}.$$

Задача 2.36.

$$I_{mn} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x dx$$

Решение:

Положим $\sin x = \sqrt{t}$, $t > 0$. Тогда

$$I_{mn} = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 t^{\frac{m-1}{2}}(1-t)^{\frac{n-1}{2}}dt = \frac{1}{2}B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right)$$

Очевидно, что интеграл сходится при $m > -1,\ n > -1$.

Задача 2.37.

$$I = \int\limits_0^{+\infty} x^m \mathrm{e}^{-x^n} dx$$

Решение:

Пусть $n > 0$. Производя замену переменной x по формуле $x = t^{\frac{1}{n}}$ $(t > 0)$, получаем:

$$I = \frac{1}{n}\int\limits_0^{+\infty} t^{\frac{m+1}{n}-1}\mathrm{e}^{-t}dt = \frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right),$$

где $\frac{m+1}{n} > 0$.

При $n < 0$ положим $n = -n_1$ $(n_1 > 0)$ и осуществим подстановку $x = t^{-\frac{1}{n_1}}$ $t > 0$. Тогда

$$I = \frac{1}{n_1}\int\limits_0^{+\infty} t^{-1-\frac{m+1}{n_1}}\mathrm{e}^{-t}dt = -\frac{1}{n}\int\limits_0^{+\infty} t^{-1+\frac{m+1}{n}}\mathrm{e}^{-t}dt = -\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right).$$

Объединив оба результата, получим

$$I = \frac{1}{|n|}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right) \text{ для } \frac{m+1}{n} > 0.$$

Задача 2.38.

$$I = \int\limits_0^{+\infty} x^p \mathrm{e}^{-\alpha x} \ln x dx, \qquad (\alpha > 0)$$

Решение:

Введем замену $x = \frac{t}{\alpha}$. Получаем:

$$I = \frac{1}{\alpha^{p+1}} \int\limits_0^{+\infty} t^p \mathrm{e}^{-t} \ln t dt - \frac{\ln \alpha}{\alpha^{p+1}} \int\limits_0^{+\infty} t^p \mathrm{e}^{-t} dt.$$

Нетрудно понять, что первый интеграл—производная от гамма-функции аргумента $(p+1)$ $(p+1>0)$, а второй—$\Gamma\left(p+1\right)$.

Поэтому окончательно:

$$I = \frac{\Gamma'\left(p+1\right)}{\alpha^{p+1}} - \frac{\ln \alpha}{\alpha^{p+1}} \Gamma\left(p+1\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\Gamma\left(p+1\right)}{\alpha^{p+1}}\right).$$

Литература:

1 Уваров В.Б. Математический анализ: Учебное пособие для вузов по спец."Прикладная математика".- М.: Высш. шк., 1984. - 288 с.

2 Ляшко И.И. и др. Основы классического и современного математического анализа.- К.: Выща шк. Головное изд-во, 1988. - 591 с.

3 Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учебное пособие/Б.П. Демидович- М.: ООО "Издательство Астрель": ООО "Издательство АСТ 2002. - 558 с.

4 Данко П.Е. и Попов А.Г. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.2.Изд. 2-е. Учебное пособие для втузов.- М.: Высш. шк., 1974. - 416 с.

5 Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Головач Г.П. Справочное пособие по математическому анализу. Ч.2. Ряды, функции нескольких переменных, кратные и криволинейные интегралы.- К.: Выща шк. Головное изд-во, 1979. - 736 с.