算法设计与分析实验报告

实验题目：利用 FFT 算法改进大整数乘法的算法效率

姓名：陈俊卉

学号：2020212256

日期：2022.10.17

一、实验环境

(列出实验的操作环境，如操作系统，编程语言版本等，更多信息可视各自实际情况填写)
① 操作系统：windows 10
② 编程语言：c++
③ 编程工具：vscode 及其组件

二、实验内容

具体要求请参照实验指导书中各实验的“实验内容及要求”部分。
(示例：1.描述你对实验算法的设计思路;2.给出算法关键部分的说明以及代码实现截图；3.对测试数据、测试程序(没有要求则非必须)进行说明，如测试覆盖程度，最好最坏平均三种情况等等，并给出测试结果截图等信息)

1.算法的设计与实现

(1) 分治法实现大整数乘法

```
#include<iostream>
#include<cmath>
using namespace std;

int sign(long long int num){
    if (num > 0){return 1;}
    else {return -1;}
}


long long int integersMultiplication(long long int x, long long int y, long long int
len_x, long long int len_y){
    if (x == 0 || y == 0){
        return 0;
    }

    else if (len_x == 1 || len_y == 1){
        return x * y;
    }
    else{
        // 推导：
```

```
        // x = a * 10^(len_x / 2) + b        y = c * 10^(len_y / 2) + d
        // xy = ac * 10^(len_x / 2 + len_y / 2) + (ad * 10^(len_x / 2) + bc * 10^(len_y / 2)) + bd
        // F1 = ac  F2 = bd  F3 = (a * 10^(len_x / 2) - b) * (d - c * 10^(len_y / 2))
        // 可化简为
        // xy = F1 * 10^(len_x / 2 + len_y / 2) + (F3 + F1 * 10^(len_x / 2 + len_y / 2) + F2) +F2

        int len_b = len_x / 2;
        int len_a = len_x - len_b;
        int len_d = len_y / 2;
        int len_c = len_y -len_d;

        long long int a = (long long int)(x / pow(10, len_b));
        // 带符号，不用再多考虑符号问题
        long long int b = (long long int)(x % (long long int)pow(10, len_b));
        long long int c = (long long int)(y / pow(10, len_d));
        // 带符号，不用再多考虑符号问题
        long long int d = (long long int)(y % (long long int)pow(10, len_d));
        long long int F1 = integersMultiplication(a, c, len_a, len_c);
        long long int F2 = integersMultiplication(b, d, len_b, len_d);
        long long int F3 = integersMultiplication((long long int)(a * pow(10, len_b) - b), (long long int)(d - c * pow(10, len_d)), len_b, len_d);

        return (long long int)(F1 * pow(10, len_b + len_d) + (F3 + F1 * pow(10, len_b + len_d) + F2) + F2);

    }



}

int main(){
    // 输入数据
    long long int x = 98765;
    long long int y = -6800;
    cout << integersMultiplication(x, y, 5, 4);
}
```

② 原理：

这是经过改进的分治法。未经过改进的分治法与竖式法都是 O(n^2).**上述代码为了满足任意情况（任意长度的两个数据相乘），采用了与 PPT 不一样的改善方法**，具体如下所示：

对于大整数 x、y，令

$$x = a\times 10^{(n_x/2)} + b$$
$$y = c \times 10^{(n_y/2)} + d$$

故：

$$xy = ac \times 10^{(n_x/2)+(n_y/2)} + \left(ad \times 10^{(n_x/2)} + bc \times 10^{(n_y/2)}\right) + bd$$

设：

$$F_1 = ac$$
$$F_2 = bd$$
$$F_3 = \left(a \times 10^{(n_x/2)} - b\right) \times \left(d - c \times 10^{(n_y/2)}\right)$$

则：

$$xy = F_1 \times 10^{(n_x/2)+(n_y/2)} + \left(F_3 + F_1 \times 10^{(n_x/2)+(n_y/2)} + F_2\right) + F_2$$

经过改进后，递归式为：

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + \theta(n) = O\left(n^{1.59}\right)$$

(2) fft 实现大整数乘法

```
#include<iostream>
#include<complex>
using namespace std;

// 最大位数
const int MAX = 1 << 20;
// pi
const double pi = acos(-1);

// 定义复数系数数组
complex<double> a[MAX], b[MAX];
// 定义 a,b 多项式长度，这里默认相同，为 n（与分治法对齐）
int n;
int m;
// 注意到 fft 与 ifft 区别仅有一个符号，所以写在一个函数内,使用 i 进行判别：i=1 时为 fft，i=-1 时为 ifft
void fft_or_ifft(int len, complex<double> *a, int i){
    // 如果只有一项，则不需要再拆分，返回
    if (len <= 1){return ;}
    int mid = len >> 1;
    // 定义奇数、偶数子数组
    complex<double>* A1 = new complex<double>[mid + 1];
    complex<double>* A2 = new complex<double>[mid + 1];
```

```
    for (int i = 0; i <= len; i += 2){
        A1[i >> 1] = a[i];
        A2[i >> 1] = a[i + 1];
    }
    fft_or_ifft(mid, A1, i);
    fft_or_ifft(mid, A2, i);
    complex<double> w1(cos(pi / mid), i * sin(pi / mid));
    complex<double> w(1,0);
    complex<double> x;
    for (int i = 0; i < mid; i++){
        x = w * A2[i];
        a[i] = A1[i] + x;
        a[i + mid] = A1[i] - x;
        w = w * w1;
    }
}

int main(){
    // 输入最高位
    cin >> n;
    cin >> m;
    // 输入第一个式子
    for (int i = 0; i <= n; i++){
        double x;
        cin >> x;
        a[i].real(x);
    }
    // 输入第二个式子
    for (int i = 0; i <= m; i++){
        double x;
        cin >> x;
        b[i].real(x);
    }

    // fft 需要 2 的整数幂次; 默认两条式子长度相同
    int len = 1 << int(fmax((int)ceil(log2(n + m)), 1));
    fft_or_ifft(len, a, 1);
    fft_or_ifft(len, b, 1);
    for (int i = 0; i <= len; i++){
        a[i] = a[i] * b[i];
    }
    cout << endl;
    fft_or_ifft(len, a, -1);
```

```
    int* res = new int[n + m + 1];
    res[0] = 0;
    // fft 之后的结果复制到 res
    for (int i = 0; i <=n + m; i++){
        cout << a[i].real() / len + 1e-6 <<" ";
        res[i + 1] = a[i].real() / len + 1e-6;
    }
    cout << endl;

    // 处理
    for (int i = n + m + 1; i > 0; i--){
        if (res[i] >= 10){
            int num = res[i] / 10;
            // 防止最高位还有进位
            res[i] = res[i] % 10;
            res[i - 1] += num;
        }
    }

    cout << endl;
    // for ( int i = 0; i <= n + m + 1;i++){
    //     cout << res[i] << ' ';
    // }

    for (int i = 0 ; i <= n + m + 1; i++){
        if (i == 0 && res[i] == 0){continue;}
        cout << res[i];
    }
}
```

② 原理：

简而言之，就是先将多项式的系数表示经过 fft 变换为点值表示，两表达式的点值表示相乘之后再通过 ifft 的逆变换重新从点值表示转换为系数表示。实际上多项式相乘本身和大整数乘法的过程类似，只是最后的进位没有处理而已。在多项式变换的基础上，增加了进位处理就可以得到大整数相乘的 fft。

时间复杂度的计算：

对于多项式

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$$

我们可以将其分为两个部分:

$$f_1(x) = a_0 + a_2x^1 + a_4x^2 + \cdots + a_{n-2}x^{\frac{n}{2}-1}$$
$$f_2(x) = x(a_1 + a_3x + a_5x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{\frac{n}{2}-1})$$

则有

$$f(x) = f_1(x^2) + xf_2(x^2)$$

带入 $x = \omega_n^k \quad (k < \frac{n}{2})$ 可得

$$\begin{aligned} f(\omega_n^k) &= f_1(\omega_n^{2k}) + \omega_n^k f_2(\omega_n^{2k}) \\ &= f_1(\omega_{\frac{n}{2}}^k) + \omega_n^k f_2(\omega_{\frac{n}{2}}^k) \end{aligned}$$

带入 $\omega_n^{k+\frac{n}{2}} (k < \frac{n}{2})$ 可得

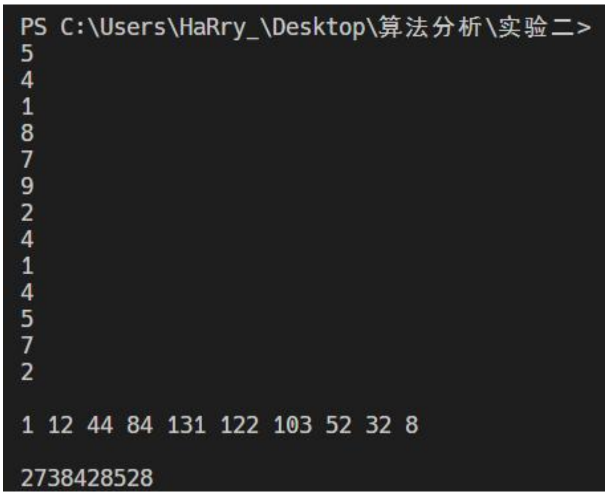
$$\begin{aligned} f(\omega_n^{k+\frac{n}{2}}) &= f_1(\omega_n^{2k+n}) + \omega_n^{k+\frac{n}{2}} f_2(\omega_n^{2k+n}) \\ &= f_1(\omega_n^{2k} \cdot \omega_n^n) - \omega_n^k f_2(\omega_n^{2k} \cdot \omega_n^n) \\ &= f_1(\omega_n^{2k}) - \omega_n^k f_2(\omega_n^{2k}) \\ &= f_1(\omega_{\frac{n}{2}}^k) - \omega_n^k f_2(\omega_{\frac{n}{2}}^k) \end{aligned}$$

则求解 $f(\omega_n^k), f(\omega_n^{k+\frac{n}{2}})$ 的时间为 O(logn)，求解所有 $f(\omega_n^k)$ 的时间为 **O(nlogn)**.
同样地，逆变换也是 **O(nlogn).**

2. 测试正确性

① 分治法

② FFT



输入输出解释：前两个数是两个数字的长度（5 和 4），第一个数是 187924，第二个数是 14572.输出的第一行是 FFT 多项式相乘的结果，第二行是乘法的结果。

3. 最好/最坏情况

分治法的最好情况是两个数长度都为 2 的整数幂次。最坏情况是比 2 的整数幂次大 1 位。FFT 稳定，大概没有所谓的最好最坏情况。

三、出现问题及解决

（列出你在实验中遇到了哪些问题以及是如何解决的）

① **分治法有大小限制（long long int）。**但碍于时间关系，没有将其改写成字符串输入输出的形式。

② 分治法一开始的代码版本部分乘法答案不准。这是由于递归传参时的数字长度采用了除法造成的。一开始我写的是限定为 2 的幂次长度相等的输入，且长度参数只有一个。但这样在传参传 n/2 的时候，会导致长度不对应的问题。

四、总结

（对所实现算法的总结评价，如时间复杂度，空间复杂度，是否有能够进一步提升的空间，不同实现之间的比较，不同情况下的效率，通过实验对此算法的认识与理解等等）

本次实验，我熟悉了大整数乘法的分治法与 FFT 的原理推导与在大整数乘法的具体使用。虽然理解起来有些困难，但克服之后的成就感还是很满的。